2. BÖLÜM
MERKEZİ EĞİLİM ÖLÇÜLERİ
(ORTALAMA ÖLÇÜLERİ)

İstatistik araştırmaları sonucunda toplanan verileri analiz etmek için çeşitli merkezi eğilim ölçüleri olan ortalama ve dağılma ölçülerine ihtiyaç vardır. Bunlar şu şekilde sınıflandırılır.

- Merkezi Ortalama Ölçüleri
  - Aritmetik Ortalama
  - Kareli Ortalama
  - Geometrik Ortalama
  - Harmonik Ortalama
  - Ağırlıklı Ortalama
  - Medyan
  - Mod
  - Kartil
- Merkezi Dağılma Ölçüleri
  - Ortalama Sapma
  - Standart Sapma
  - Varyans
  - Çeyrek Sapma

Şimdi bu merkezi eğilim ölçülerini inceleyelim.

ARİTMATİK ORTALAMA

2.1. Tanım: Ana kitledeki birim sayısı N ve ana kitledeki veriler $x_1, x_2, ..., x_N$ olmak üzere,

$$\mu = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

eşitliğine aritmetik ortalama denir. Ana kitlede bir örneklem yardımıyla seçilen n çaplı bir örnekten veri toplandıysa, bu durumda aritmetik ortalama;

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

biçiminde olur.

Örnek: Bir sınıftaki 10 öğrencinin boyları {158, 161, 164, 175, 157, 173, 168, 164, 160, 162} cm olduğu tespit edilmiştir. Bu öğrencilerin aritmetik ortalamaları;

$$\mu = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i = \frac{158+161+164+175+157+173+168+164+160+162}{10} = 164{,}2$$

şeklindedir. İlk 5 öğrenci örneklem olarak alınırsa;

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{158+161+164+175+157}{5} = 163$$

biçimindedir.

30.

Yaş	Kişi Sayısı
20	4
21	8
22	16

Yandaki tablo bir işyerinde çalışanların sayısı ile yaşlarını göstermektedir. Bu işyerinde seçilen 16 kişinin yaş ortalaması 21 olduğuna göre, geriye kalanlardan kaçı 22 yaşındadır?

A) 12 B) 11 C) 10 D) 9 E) 8

Çözüm: Seçilen 16 kişinin yaş ortalaması 21 ise 16 kişinin yaşları toplamı $16.21 = 336$ dir. Bu eşitliğe göre 4 kişi 20 yaşında, 8 kişi 21 yaşında ve 4 kişi 22 yaşında seçilirse,

$$20.4 + 21.8 + 22.x = 336$$
$$x = 4$$

bulunur. Geriye $16 - 4 = 12$ kişi kalır.

(1988 ÖSS) Cevap: A

2.1. Aksiyom: Bir ana kitlede serisi (x_i) ve frekanslar (f_i) olmak üzere frekans dağılımı yapılarak elde edilen verilerde;

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{N} f_i x_i}{\sum_{i=0}^{N} f_i}$$

eşitliği **sınıflandırılmış (sıralı) aritmetik ortalamayı** verir. Örneklemde sınıflandırılmış aritmetik ortalama,

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{\sum_{i=0}^{n} f_i}$$

dir.

Örnek: Bir okuldaki öğrencilerin kiloları (x_i) ve frekans (f_i) dağılımı aşağıdaki şekildedir.

Öğrenci Sayısı (f_i)	Kilosu (x_i)
5	32
6	33
7	34
5	35
2	36

Bu sınıfın boylarının aritmetik ortalaması;

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{\sum_{i=0}^{n} f_i} = \frac{5.32+6.33+7.34+5.35+2.36}{5+6+7+5+2} = 33{,}75$$

dir.

2.2. Aksiyom: Bir ana kitlede gruplandırılmış frekans dağılımı varsa, her sınıfın aritmetik ortalaması (m_i) ve frekanslar (f_i) olmak üzere

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{N} f_i m_i}{\sum_{i=0}^{N} f_i}$$

eşitliği **gruplandırılmış aritmetik ortalamayı** verir. Örneklemde sınıflandırılmış aritmetik ortalama,

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i m_i}{\sum_{i=0}^{n} f_i}$$

dir.

Örnek: Bir mahalledeki ikamet edenlerin yaşları (m_i) ve frekans (f_i) dağılımı aşağıdaki şekildedir.

Yaş Aralıkları	Yaş ortalamaları (m_i)	Kişi Sayısı (f_i)
$0 \le x < 16$	8	98
$16 \le x < 32$	24	52
$32 \le x < 48$	40	42
$48 \le x < 64$	56	30
$64 \le x \le 80$	72	18

Bu mahallede yaşayan kişilerin yaşlarının aritmetik ortalaması;

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{\sum_{i=0}^{n} f_i} = \frac{8.98 + 24.52 + 40.42 + 56.30 + 72.18}{98 + 52 + 42 + 30 + 18} = 27{,}87$$

dir.

2.1. Sonuç: $k \in \mathbb{R}$, $\overline{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}$ ise

i) $\overline{x} + k = \dfrac{\sum_{i=1}^{N} x_i + k}{N}$

ii) $\overline{x} - k = \dfrac{\sum_{i=1}^{N} x_i - k}{N}$

iii) $\overline{x}.k = \dfrac{\sum_{i=1}^{N} x_i.k}{N}$

iv) $\dfrac{\overline{x}}{k} = \dfrac{\sum_{i=1}^{N} \frac{x_i}{k}}{N}$

olur.

2.2. Sonuç: $\overline{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}$ ve $\overline{y} = \dfrac{\sum_{i=1}^{N} y_i}{N}$ ise

i) $\bar{x}+\bar{y}=\dfrac{\sum_{i=1}^{N}x_i}{N}+\dfrac{\sum_{i=1}^{N}y_i}{N}=\dfrac{\sum_{i=1}^{N}x_i+\sum_{i=1}^{N}y_i}{N}=\dfrac{\sum_{i=1}^{N}(x_i+y_i)}{N}$

ii) $\bar{x}-\bar{y}=\dfrac{\sum_{i=1}^{N}x_i}{N}-\dfrac{\sum_{i=1}^{N}y_i}{N}=\dfrac{\sum_{i=1}^{N}x_i-\sum_{i=1}^{N}y_i}{N}=\dfrac{\sum_{i=1}^{N}(x_i-y_i)}{N}$

GEOMETRİK ORTALAMA

2.2. Tanım: Ana kitledeki birim sayısı n ve ana kitledeki serisi $x_1, x_2, ..., x_N$ olmak üzere,

$$GO=\sqrt[N]{\prod_{i=1}^{N}x_i}$$

ifadesine geometrik ortalama denir. Örneklemde geometrik ortalama,

$$GO=\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}x_i}$$

dir. Geometrik ortalama;

i = 2 için $GO=\sqrt{x_1.x_2}$

i = 3 için $GO=\sqrt[3]{x_1.x_2.x_3}$

biçimindedir.

Geometrik ortalama;

1. Aynı oranda artma veya azalma eğilimi gösteren olaylarla ilgili serilerinde uygulanır. Örneğin, yüzde oranları, nüfus düşüş miktarları, bakterilerin üremesi gibi birim zamandaki artışı bulmak için kullanılır.

2. Simetrik olmayan ancak logaritmaları alındığında simetrik hale dönüşen serilerinde uygulanır.

Not: Ancak serilerindeki terimler arasında bazı değerler sıfır veya negatifse geometrik ortalama hesaplanmaz. Çünkü birkaç değer sıfır ise sonuç sıfırdır. Birkaç değer negatifse sonuç negatif olacağından logaritma alınamayacaktır.

Örnek: Bir fabrika 1. ay % 2, 2. ay 2,2, üçüncü ay 2,5 büyümüştür. Bu fabrikanın üç aylık ortalama büyüme oranı nedir?

Çözüm: 1. ay % 2 yani 1,02
2. ay % 2,2 yani 1,022
3. ay % 2,5 yani 1,025

$GO=\sqrt[3]{1,02.1,022.1,025}=1,0223$ yani % 2,23 dür.

Örnek: Bir diyet uygulamasında deney hayvanının 4 aylık ağırlık artışı aşağıdaki gibidir. Buna göre ortalama aylık artışı nedir?

{7, 9, 12, 18}

Çözüm: Her aylık kilo artış oranları

$\frac{9}{7}=1,286$, $\frac{12}{9}=1,333$, $\frac{18}{12}=1,367$

$$GO=\sqrt[3]{\frac{9}{7}.\frac{12}{9}.\frac{18}{12}}=\sqrt[3]{1,286.1,333.1,367}=1,37$$

yani % 37 aylı artış olmuştur.

2.1. Teorem: $GO=\sqrt[N]{\prod_{i=1}^{N} x_i}$ olduğundan $\log GO=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\log x_i$ denklemi oluşur.

Çözüm: $GO=\sqrt[N]{\prod_{i=1}^{N} x_i}$

$$\begin{aligned}
\log GO &= \log\sqrt[N]{\prod_{i=1}^{N} x_i} \\
&= \log\left(\prod_{i=1}^{N} x_i\right)^{\frac{1}{N}} \\
&= \frac{1}{N}\log\left(\prod_{i=1}^{N} x_i\right) \\
&= \frac{1}{N}\log(x_1.x_2...x_N) \\
&= \frac{1}{N}(\log x_1+\log x_2+...+\log x_N) \\
&= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\log x_i
\end{aligned}$$

//

Geometrik ortalama da sınıflandırılmış geometrik ortalama, gruplandırılmış geometrik ortalama mevcuttur. Şimdi onları tanımlayalım.

2.3. Aksiyom: Semboller aritmetik ortalamadaki değerler olmak üzere;

i) Sınıflandırılmış geometrik ortalama; $\log GO = \dfrac{\sum_{i=1}^{N} f_i \log x_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$

ii) Gruplandırılmış geometrik ortalama; $\log GO = \dfrac{\sum_{i=1}^{N} f_i \log m_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$

şeklindedir. Örneklemde geometrik ortalamalar aşikardır.

Örnek: Aşağıda sınıflandırılmış serisinin geometrik ortalamasını bulunuz?

x_i	f_i	log x_i	f_i log x_i
2	3	0,301030	0,903090
3	2	0,477121	0,954242
4	1	0,602060	0,602060
5	4	0,698970	2,795880
	Σ = 10		Σ = 5,255272

Çözüm: $\log GO = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} f_i \log x_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \dfrac{5,255272}{10} = 0,5255272$

$GO = 10^{0,5255272} = 3,35$

Örnek: Aşağıda gruplandırılmış serisinin geometrik ortalamasını bulunuz?

Sınıflar	x_i	f_i	log x_i	f_i log x_i
1-3 den az	2	3	0,301030	0,903090
3-5 den az	4	3	0,602060	1,806180
5-7 den az	6	4	0,778151	3,112604
		Σ = 10		Σ = 5,821874

Çözüm: $\log GO = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} f_i \log x_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \dfrac{5,821874}{10} = 0,5821874$

$GO = 10^{0,5821874} = 3,82$

HARMONİ ORTALAMA

Harmonik ortalama ilk defa denklem kurma konusunda ortalama hız kısmında anlatılmıştır. Yol uzunlukları aynı olan cisimlerin ortalamaları hesaplanırken harmonik ortalama kullanılır. Harmonik ortalamanın varlığı ispatlanmıştır. Şimdi bu kısımda bir veri değeri (veya frekansı) aynı olan diğer veri değeri (veya frekansı) farklı olan hesaplamalarda harmonik ortalama kullanılır.

2.3. Tanım: Ana kitledeki birim sayısı n ve ana kitledeki serisi (veya frekansı) $\{x_1, x_2, ..., x_N\}$ olmak üzere,

$$HO = \frac{N}{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{x_i}}$$

ifadesine harmonik ortalama denir. Örneklemde harmonik ortalama

$$HO = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}}$$

dir. Harmonik ortalama;

i = 2 için $HO = \dfrac{2}{\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2}} = \dfrac{2x_1x_2}{x_1 + x_2}$

i = 3 için $HO = \dfrac{3}{\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \dfrac{1}{x_3}}$

biçimindedir.

Örnek: {3, 4, 5, 6, 8} serisinin harmonik ortalaması;

$$HO = \frac{5}{\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8}} = 4{,}65$$

dir.

Örnek: Bir hastanenin antibiyotik alımı için 4 yıl boyunca her yıl 12 000 □ bütçe ayrılıyor. Her yıl alınan antibiyotik kutularının fiyatları aşağıdaki serisinde gösterilmiştir. Bu hastaneye bir kutu antibiyotik için ödenen yıllık ortalama fiyat nedir?

{8, 12, 15, 20}

Çözüm: Her hastanenin her yıl için harcadığı 12 000 □ sabit olduğundan frekans değişmektedir. Bu yüzden harmonik ortalama kullanılmalıdır. Yani, Fiyat = Para / Ürün Sayısı

olduğundan harmonik ortalama alınıyor.

$$HO = \frac{4}{\frac{1}{8}+\frac{1}{12}+\frac{1}{15}+\frac{1}{20}} = 12{,}31$$

yani bir kutu antibiyotik için ortalama 12,31 □ dir.

Örnek: 6 öğrenci 100 □ ile farklı eczanelerden aspirin alıyorlar. Aldıkları aspirinlerin adetleri aşağıdaki serisinde gösterilmiştir. 100 □ ile alınabilecek ortalama aspirin sayısı ne olmalıdır?

{9, 6, 7, 5, 8, 6}

Çözüm: Her öğrenci harcadığı 100 □ sabit olduğundan frekanslar değişmektedir. Bu yüzden harmonik ortalama kullanılmalıdır. Yani,

Fiyat = Para / Ürün Sayısı

olduğundan harmonik ortalama alınıyor.

$$HO = \frac{6}{\frac{1}{9}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{5}+\frac{1}{8}+\frac{1}{6}} = 8{,}2135$$

yani 100 □ ile ortalama 8,2135 aspirin alınabilir.

2.4. Aksiyom: Semboller aritmetik ortalamadaki değerler olmak üzere;

i) Sınıflandırılmış harmonik ortalama; $HO = \dfrac{\sum_{i=1}^{N} f_i}{\sum_{i=1}^{N} \frac{f_i}{x_i}}$

ii) Gruplandırılmış harmonik ortalama; $HO = \dfrac{\sum_{i=1}^{N} f_i}{\sum_{i=1}^{N} \frac{f_i}{m_i}}$

şeklindedir. Örneklemde harmonik ortalama aşikardır.

Örnek: Aşağıda sınıflandırılmış serisinin harmonik ortalamasını bulunuz?

x_i	f_i	f_i / x_i

2	3	1,5
3	2	0,667
4	1	0,25
5	4	0,8
	Σ = 10	Σ = 3,22

Çözüm: $HO=\dfrac{\sum_{i=1}^{n} f_i}{\sum_{i=1}^{n} \dfrac{f_i}{x_i}}=\dfrac{10}{1{,}5+0{,}667+0{,}25+0{,}8}=3{,}11$

Örnek: Aşağıda sınıflandırılmış serisinin harmonik ortalamasını bulunuz?

Sınıf aralığı	x_i	f_i	f_i / m_i
1-3 den az	2	3	1,5
3-5 den az	4	3	0,75
5-7 den az	6	4	0,667
7-9 den az	8	2	0,25
		Σ = 12	Σ = 3,167

Çözüm: $HO=\dfrac{\sum_{i=1}^{n} f_i}{\sum_{i=1}^{n} \dfrac{f_i}{m_i}}=\dfrac{12}{1{,}5+0{,}75+0{,}667+0{,}25}=3{,}789$

2.1. Uyarı:

1. Serisinden biri sıfır ise harmonik ortalamanın sonucu sıfırdır.

2. Serisi farklı işaretli olursa harmonik ortalamanın sonucu anlamsız olur. Örneğin, {-4, -2, 2, 3, 5} olsun. Bu serisinin harmonik ortalaması;

$$HO=\frac{5}{\frac{1}{-4}+\frac{1}{-2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}}=17{,}647$$

olur ki, bu bize serisinin maksimum sayısı 5 den daha büyük olduğunu gösterir. Bu ise anlamsız ortalama oluşur.

KARELİ ORTALAMA

2.4. Tanım: Ana kitledeki birim sayısı n ve ana kitle deki serisi $\{x_1, x_2, ..., x_N\}$ terimleri olmak üzere,

$$KO=\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i^2}$$

eşitliğine kareli ortalama denir. Örneklemde kareli ortalama

$$KO=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2}$$

dir.

Örnek: Bir sınıftaki 10 öğrencinin boyları {158, 161, 164, 175, 157} cm olduğu tespit edilmiştir. Bu öğrencilerin kareli ortalaması;

$$K=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2}=\sqrt{\frac{158^2+161^2+164^2+175^2+157^2}{5}}=163{,}13$$

şeklindedir. //

Aritmetik ortalama da olduğu gibi kareli ortalamada da sınıflandırılmış kareli ortalama, gruplandırılmış kareli ortalama mevcuttur. Şimdi onları tanımlayalım.

2.5. Aksiyom: Semboller aritmetik ortalamadaki değerler olmak üzere;

i) Sınıflandırılmış kareli ortalama; $KO=\sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{N}f_ix_i^2}{\sum_{i=1}^{N}f_i}}$

ii) Gruplandırılmış kareli ortalama; $KO=\sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{N}f_im_i^2}{\sum_{i=1}^{N}f_i}}$

şeklindedir. Örneklemde kareli ortalama aşikardır.

Örnek: Bir okuldaki öğrencilerin kiloları (x_i) ve frekans (f_i) dağılımı aşağıdaki şekildedir.

Öğrenci Sayısı (f_i)	Öğrencinin Kilosu (x_i)	x_i^2	$f_ix_i^2$
5	32	1 024	5 120
6	33	1 089	6 534
7	34	1 156	8 092
5	35	1 225	6 125
2	36	1 296	2 592
Σ = 25			Σ =28 463

Bu sınıfın boylarının kareli ortalaması;

$$KO=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i^2}{\sum_{i=1}^{n} f_i}}=\sqrt{\frac{5.32^2+6.33^2+7.34^2+5.35^2+2.36^2}{5+6+7+5+2}}=33{,}74$$

dir.

Örnek: Bir mahalledeki ikamet edenlerin yaşları (x_i) ve frekans (f_i) dağılımı aşağıdaki şekildedir.

Yaş Aralıkları	Yaş ortalamaları (x_i)	Kişi Sayısı (f_i)	x_i^2	$f_i x_i^2$
$0 \le x < 16$	8	98	64	512
$16 \le x < 32$	24	52	576	13 824
$32 \le x < 48$	40	42	1 600	67 200
$48 \le x < 64$	56	30	3 136	94 080
$64 \le x \le 80$	72	18	5 184	93 312
	$\Sigma = 200$			$\Sigma = 286\ 928$

Bu mahallede yaşayan kişilerin yaşlarının aritmetik ortalaması;

$$KO=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i^2}{\sum_{i=1}^{n} f_i}}=\sqrt{\frac{8^2.98+24^2.52+40^2.42+56^2.30+72^2.18}{98+52+42+30+18}}=37{,}87$$

dir.

2.2. Teorem: AO aritmetik ortalama, GO Geometrik Ortalama, HO Harmonik ortalama ve KO Kareli ortalama olmak üzere;

$$HO \le GO \le AO \le KO$$

$$\frac{N}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}} \le \sqrt[N]{\prod_{i=1}^{N} x_i} \le \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \le \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2}$$

eşitsizliği mevcuttur.

İspat: i) $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \le \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2}$ olduğunu gösterelim.

Cauchy- Schwarz eşitsizliği

$$\sum_{i=1}^{\infty}|x_iy_i| \le \left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{m=1}^{\infty}|y_m|^2\right)^{1/2}$$

dir. Burada sonsuz değer n için alınırsa,

$$\sum_{i=1}^{N}|x_iy_i| \le \left(\sum_{i=1}^{N}|x_i|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^{N}|y_i|^2\right)^{1/2}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{N}|x_iy_i|\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^{N}|x_i|^2\right)\left(\sum_{i=1}^{N}|y_i|^2\right)$$

bulunur. Her i için $y_i = 1$ ve $x_i > 0$ alınırsa,

$$\left(\sum_{i=1}^{N}x_i\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^{N}x_i^2\right)$$

$$\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i\right)^2 \le \left(\frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}x_i^2\right)$$

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i \le \sqrt{\frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}x_i^2}$$

olur.

ii) $\sqrt[N]{\prod_{i=1}^{N}x_i} \le \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i$ olduğunu gösterelim.

Öncelikle $x_1x_2...x_N = 1$ iken $x_1 + x_2 + ...x_N > N$ olduğunu gösterelim. Bunu tümevarım kullanarak gösterelim. N = 1 iken eşitsizliğimizin doğru olduğu açıkça görülüyor. Eşitsizliğimizi herhangi bir n doğal sayısı için doğru olduğunu kabul edip $x_1x_2...x_{N+1} = 1$ olacak şekildeki $x_1, x_2,…,x_{N+1}$ sayıları için $x_1 + x_2 + ...x_{N+1} > N+1$ olduğunu göstermeliyiz. Şimdi $x_1, x_2,…,x_{N+1}$ ve bu sayıların hepsi birden 1'den küçük ya da büyük olamayacağı için (çünkü çarpımları 1'dir.) $x_1 > 1$ ve $x_{N+1} > 1$ olarak almamızda hiçbir sakınca yoktur. Eşitsizliğimiz n sayı için doğru olduğundan $x_2\, x_3 \ldots (x_1\, x_{N+1}) = 1$ iken $x_2 + x_3 + \ldots + (x_1\, x_{N+1}) > N$ olsun. Burada $x_1\, x_{N+1}$ çarpımının tek bir pozitif sayı olarak alındığına dikkat ediniz. $x_2 + x_3 + \ldots + (x_1\, x_{N+1}) > N$ olduğundan

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \ldots + x_{N+1} &> N + x_{N+1} + x_1 - x_1\, x_{N+1} \\ &= N + x_{N+1}(1 - x_1) + x_1 - 1 + 1 \\ &= N + 1 + (x_{N+1} - 1)(1 - x_1) \\ &> N + 1 \end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi geometrik ortalamanın aritmetik ortalamadan küçük kaldığını gösterelim.

$g = (x_1x_2...x_n)^{1/N}$ olsun. O zaman

$$\left(\frac{x_1}{g}\frac{x_2}{g}\dots\frac{x_N}{g}\right)^{1/N}=1$$

$$\left(\frac{x_1}{g}\frac{x_2}{g}\dots\frac{x_N}{g}\right)=1$$

olur. Burada n tane pozitif sayının çarpımının 1 olduğunu görüyoruz. Yukarıda gösteril diki $x_1x_2\dots x_N=1$ iken $x_1+x_2+\dots x_N>N$ dir. Buna göre

$$N\le\frac{x_1}{g}+\frac{x_2}{g}+\dots+\frac{x_N}{g}$$

$$g\le\frac{x_1+x_2+\dots x_N}{N}$$

$$(x_1x_2\dots x_N)^{1/N}\le\frac{x_1+x_2+\dots x_N}{N}$$

$$\sqrt[N]{\prod_{i=1}^{N}x_i}\le\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i$$

bulunur.

iii) $$\frac{N}{\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{x_i}}\le\sqrt[N]{\prod_{i=1}^{N}x_i}$$

Harmonik ortalama aritmetik ortalamanın terslerinin toplamı olduğundan ii özelliğine benzer yolla ispatı yapılır.

Örnek: $x, y \in \mathbb{R}$, $x^2 + 4xy + y^2 = 36$ olduğuna göre, xy'nin alabileceği en büyük değer nedir?

Çözüm: $x^2 + 4xy + y^2 = 36$

$$x^2 + 2xy + y^2 = 36 - 2xy$$

$$(x + y)^2 = 36 - 2xy$$

$$x + y = \sqrt{36 - 2xy}$$

$$\frac{x+y}{2}=\frac{\sqrt{36-2xy}}{2}$$

$AO\ge GO$ olduğundan

$$\sqrt{xy}\le\frac{\sqrt{36-2xy}}{2}$$

$$xy\le\frac{36-2xy}{4}$$

$$4xy \le 36 - 2xy$$

$$xy \le 36$$

olur.

AĞIRLIKLI ORTALAMA

Aritmetik ortalama, geometrik ortalama, harmonik ortalama ve kareli ortalamaların veri değerlerinde ağırlık (tartı) özelliği olabilir. Ağırlık söz konusu olduğunda yapılması gereken durum şu şekilde olur.

2.5. Tanım: Bir ana kitlede serisi (x_i) ve verilerin her bir ağırlığı (t_i) ise;

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i t_i}{\sum_{i=1}^{N} t_i}$$

eşitliğine **ağırlıklı aritmetik ortalama** denir. Örneklemde ağırlıklı aritmetik ortalama

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i t_i}{\sum_{i=1}^{n} t_i}$$

biçimindedir. Buradaki ağırlık kavramı fiyat, yüzdelik oran, kilogram gibi değişken ifadeler olabilir.

Örnek: % 8 şeker içeren 300 gram meyve suyu ile % 6 şeker içeren 400 gram meyve suyu karıştırılıyor. Karışımın yeni şeker oranı nedir?

Çözüm:

Kütle (t_i)	Yüzdeliği (x_i)
300	% 8 = 0,08
400	% 6 = 0,06

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{2} x_i t_i}{\sum_{i=1}^{2} t_i} = \frac{300.0,08 + 400.0,06}{300 + 400} = 0,0685$$

Yeni durumda şeker oranı % 6,85 olur.

2.6. Aksiyom: Ağırlıklı aritmetik ortalamanın değerleri şu şekilde bulunur.

1. Basit (frekansız) serisinde ağırlıklı ...

i) Aritmetik ortalama; $\bar{x}=\dfrac{\sum_{i=1}^{N} t_i x_i}{\sum_{i=0}^{N} t_i}$

ii) Geometrik ortalama; $\log GO=\dfrac{\sum_{i=1}^{N} t_i \log x_i}{\sum_{i=1}^{N} t_i}$

iii) Harmonik ortalama; $HO=\dfrac{\sum_{i=1}^{N} t_i}{\sum_{i=1}^{N} \dfrac{t_i}{x_i}}$

iv) Kareli ortalama; $KO=\sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{N} t_i x_i^2}{\sum_{i=1}^{N} t_i}}$

biçimindedir.

2. Sınıflandırılmış serisinde ağırlıklı ...

i) Aritmetik ortalama; $\bar{x}=\dfrac{N\sum_{i=1}^{n} t_i f_i x_i}{\sum_{i=0}^{N} t_i f_i}$

ii) Geometrik ortalama; $\log GO=\dfrac{\sum_{i=1}^{N} t_i f_i \log x_i}{\sum_{i=1}^{N} t_i f_i}$

iii) Harmonik ortalama; $HO=\dfrac{\sum_{i=1}^{N} t_i f_i}{\sum_{i=1}^{N} \dfrac{t_i f_i}{x_i}}$

iv) Kareli ortalama; $KO=\sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{N} t_i f_i x_i^2}{\sum_{i=1}^{N} t_i f_i}}$

biçimindedir.

1. Gruplandırılmış serisinde ağırlıklı ...

i) Aritmetik ortalama; $\bar{x}=\dfrac{\sum_{i=1}^{N} t_i f_i m_i}{\sum_{i=0}^{N} t_i f_i}$

ii) Geometrik ortalama; $\log GO=\dfrac{\sum_{i=1}^{N} t_i f_i \log x_i}{\sum_{i=1}^{N} t_i f_i}$

iii) Harmonik ortalama; $HO=\dfrac{\sum_{i=1}^{N} t_i f_i}{\sum_{i=1}^{N} \dfrac{t_i f_i}{x_i}}$

iv) Kareli ortalama; $KO=\sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{N} t_i f_i x_i^2}{\sum_{i=1}^{N} t_i f_i}}$

biçimindedir. Örneklemler de ağırlıklı ortalamalar aşikardır.

Örnek: % 8 şeker içeren 300 gram meyve suyu ile % 6 şeker içeren 400 gram meyve suyu karıştırılıyor. Karışımın kareli ortalamaya göre yeni şeker oranı nedir?

Çözüm: Basit (frekansız) serisinde ağırlıklı kareli ortalamaya uygulanacaktır.

Kütle (t_i)	Yüzdeliği (x_i)	x_i^2	$t_i x_i^2$
300	% 8 = 0,08	0,0064	1,92
400	% 6 = 0,06	0,0036	1,44
Σ = 700			Σ = 3,36

$$KO=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{2} t_i x_i^2}{\sum_{i=1}^{2} t_i}}=\frac{300.0{,}08^2+400.0{,}06^2}{300+400}=0{,}0693$$

Yeni durumda kareli ortalamaya göre şeker oranı % 6,93 olur.

Örnek: Aşağıdaki basit (frekansız) serisinin ağırlıklı ortalamalarını bulunuz.

x_i	2	4	5	6
t_i	3	1	4	2

Çözüm:

t_i	x_i	$t_i x_i$	$\log x_i$	$t_i \log x_i$	t_i / x_i	x_i^2	$t_i x_i^2$
3	2	6	0,301,03	0,90309	1,50	4	12
1	4	4	0,60206	0,60206	0,25	16	16
4	5	20	0,69897	2,79588	0,80	25	100
2	6	12	0,77815	1,55630	0,33	36	72
Σ = 10		42		5,85733	2,88		200

i) $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} t_i m_i}{\sum_{i=0}^{n} t_i} = \dfrac{42}{10} = 4,2$

ii) $\log GO = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} t_i \log x_i}{\sum_{i=1}^{n} t_i} = \dfrac{5,85733}{10} = 0,585733$ ise $GO = 3,852$

iii) $HO = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} t_i}{\sum_{i=1}^{n} \dfrac{t_i}{x_i}} = \dfrac{10}{2,88} = 3,472$

iv) $KO = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n} t_i x_i^2}{\sum_{i=1}^{n} t_i}} = \sqrt{\dfrac{200}{10}} = 4,472$

Örnek: Aşağıda 4 hastanede bir gündeki veriler alınmıştır. Bu hastanelerdeki seruma konan ilaç sayısının sınıflandırılmış aritmetik ortalamasını bulunuz.

Hasta Sayısı (f_i)	40	33	38	24
Yazılan İlaç Sayısı (t_i)	152	112	106	80
Serumdaki İlaç Sayısı (x_i)	15	12	26	11

Çözüm:

t_i	f_i	x_i	$t_i\ x_i$	$t_i\ f_i\ x_i$
152	40	15	6 080	91 200
112	33	12	3 696	44 352
106	38	26	4 028	104 728
80	24	11	1 920	21 120
			Σ = 15 724	Σ = 216 400

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i f_i x_i}{\sum_{i=0}^{n} t_i f_i} = \frac{216\,400}{15\,724} = 16,62$$

BİLEŞİK FAİZ FORMÜLÜNÜN ORTALAMALARA UYGULANIŞI

Bileşik faiz, finans matematiği konusunda incelenmiştir. Buradaki bileşik faiz formülü ortalamalara da uygulanabilmektedir. Şöyle ki;

Başlangıçta A kadar birey varsa, bu bireyler birim zamanda r kadar bir hıza artıyorsa, n birim zaman sonra sayıları B kadar olmuş ise bileşik faiz mantığı gereği bunun sayısı $B = A(1+r)^n$ kadardır. Bu formüle göre ortalama artış;

$$r = -1 + \sqrt[n]{\frac{B}{A}}$$

olur.

Örnek: Bir bakteri kültürü 3 günde 1000 den 3000 e çıkmış ise ortalama günlük artış hızı (r) nedir?

Çözüm: B = 3000, A = 1000, n = 3 olmak üzere;

$$r = -1 + \sqrt[n]{\frac{B}{A}} = -1 + \sqrt[3]{\frac{3000}{1000}} = 04422$$

olur. Bu ortalama artış hızı % 44,22 olduğunu gösterir.