5. BÖLÜM
KOMBİNASYON

KOMBİNASYON (GRUPLAMA) KAVRAMI

5.1. Tanım: Sonlu n elemanlı bir A kümesinin herhangi r elemanlı alt kümelerinden her birine A kümesinin r -li kombinasyonu denir ve $C(n,r)$ veya $\binom{n}{r}$ şeklinde gösterilir.

Örnek: A = {a, b, c} kümesinin 2 elemanlı alt kümelerini bulalım. Bunlar,
{a, b}, {b, c}, {c, a}
dir. 3 elemanlı bir kümenin 2 elemanlı alt küme sayısı (kombinasyon sayısı) 3 tanedir. //

Şimdi bu 3 elemanlı kümenin 2 elemanlı alt küme sayısı (kombinasyon sayısı) ile sıralanış (permütasyonlarını) karşılaştıralım.

Kombinasyonlar	Permütasyonlar
{a, b}	(a, b) , (b, a)
{b, c}	(b, c) , (c, b)
{c, a}	(c, a) , (a, c)

Görüldüğü gibi A kümesinin 2'li kombinasyonunun sayısı 3 olmasına rağmen 2'li permütasyonlarının sayısı 6 dır.

5.1. Sonuç: Permütasyonun sıralanışında önem vardır. Fakat kombinasyonunda sıralanışın önemi yoktur. Çünkü kombinasyon, alt küme olduğundan küme içerisinde sıranın değişmesinin kümeyi değiştirmeyeceğini biliyoruz.

5.1. Teorem: Sonlu n elemanlı bir A kümesinin herhangi r elemanlı ($r \le n$) alt kümeleri sayısı,

$$C(n,r)=\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

kadardır.

İspat: Bir A kümesinin r elemanlı alt kümeleri (r–li kombinasyonları) C(n, r) tane olsun. Bu alt kümenin her elemanının her birinden r! tane, A kümesinin r–li sıralanışı (permütasyonu) vardır. Şu halde,

$$C(n,r).r! = P(n,r)$$

yazılır. Buradan,

$$C(n,r) = \frac{P(n,r)}{r!} = \frac{\frac{n!}{(n-r)!}}{r!} = \frac{n!}{r!.(n-r)!}$$

bulunur.

Örnek: $A = \{a,b,c,d,e,f\}$ kümesinin 3 elemanlı alt küme sayısı kaç tanedir?

Çözüm: $C(6,3) = \frac{6!}{3!(6-3)!} = 20$ tanedir.

Örnek: $A = \{a,b,c,d,e\}$ kümesinin en çok 3 elemanlı kaç tane alt kümesi vardır?

Çözüm: $s(A) = 5$ olduğundan en çok 3 elemanlı alt kümeleri demek, 0, 1, 2 ve 3 elemanlı alt kümelerinin sayısıdır. Buna göre,

$$\binom{5}{0} + \binom{5}{1} + \binom{5}{2} + \binom{5}{3} = 1 + 5 + 10 + 10 = 26$$

tanedir.

Örnek: 25 kişilik bir sınıftan 3 kişilik bir heyet kaç farklı şekilde seçilebilir.

Çözüm: Her bir şahıs kümenin bir elemanı olarak düşülürse, 25 elemanlı bir kümenin 3 elemanlı alt küme sayısı,

$$C(25,3) = \frac{25!}{3!.22!} = 2300$$

kadardır. Şu halde 25 kişilik bir sınıftan 3 kişilik bir heyet 2300 türlü seçilebilir.

Örnek: 7 erkek ve 5 bayan arasında 3 erkek ve 2 bayandan oluşacak bir grup kaç farklı şekilde seçilebilir.

Çözüm: 7 erkek arasından 3 erkek $C(7,3)$
5 bayan arasından 2 bayan $C(5,2)$

$$C(7,3).C(5,2) = \frac{7!}{3!.4!}.\frac{5!}{2!.3!} = 350$$

farklı şekilde seçilebilir.

Örnek: $6C(n,3) = C(2n,1)$ ise n'nin değeri nedir?

Çözüm: $6.\frac{n!}{3!(n-3)!} = \frac{(2n)!}{1!(2n-1)!}$

$$6.\frac{n.(n-1)(n-2)(n-3)!}{3.2.1.(n-3)!}=\frac{(2n)(2n-1)!}{(2n-1)!}$$

$$n.(n-1)(n-2)=2n$$

$$n^2-3n=0$$

olup $n=0$ veya $n=3$ olacağından $n=3$ olması ile mümkündür.

Örnek: Aralarında Feyza adlı doktorun bulunduğu 7 doktor arasında Yağmur adlı 6 hemşirenin bulunduğu 3 doktor olmak şartıyla 5 kişilik bir ekip seçilecektir. Doktor Feyza ve Hemşire Yağmur her halükarda olmak şartıyla kaç farklı şekilde ekip oluşturulabilir.

Çözüm: Bu soruda iki durum vardır. Ya Doktor Feyza ve Hemşire Yağmur ekipte bulunacak, ya da Doktor Feyza ve Hemşire Yağmur ekipte bulunmayacaktır.

Bu iki şahıs ekipte var iseler, geriye kalan 6 doktordan 2 si, 5 hemşireden 1 i seçilecektir. Buna göre,

$$\binom{6}{2}\binom{5}{1}$$

şeklindedir. Bu iki şahıs ekipte olmaması durumunda ise, geriye kalan 6 doktordan 3 ü, 5 hemşireden 2 i seçilecektir. Buna göre,

$$\binom{6}{3}\binom{5}{2}$$

şeklindedir. O halde Doktor Feyza ile Hemşire Yağmur'un birbirinden ayrılmaması şartıyla,

$$\binom{6}{2}\binom{5}{1}+\binom{6}{3}\binom{5}{2}=75+200=275$$

değişik seçim yapılabilir.

Örnek: Bir öğrenci 15 tane sorudan 10 tanesini cevaplayacaktır. İlk 8 sorudan en az 6 tanesini cevaplamak şartıyla bu 10 soruyu kaç değişik şekilde seçebilecektir.

Çözüm: İlk 8 sorudan en az 6 sını cevaplaması gerektiğinden 7 veya 8 sini de cevaplaması mümkündür.

İlk 8 sorudan en az 6 sını cevaplar ise geriye kalan 7 sorudan 4 ünü cevaplamalıdır. Yani,

$$\binom{8}{6}\binom{7}{4}$$

olur. İlk 8 sorudan en az 7 sini cevaplar ise geriye kalan 7 sorudan 3 ünü cevaplamalıdır.

$$\binom{8}{7}\binom{7}{3}$$

olur. İlk 8 sorudan en az 8 ini cevaplar ise geriye kalan 7 sorudan 2 ünü cevaplamalıdır.

$$\binom{8}{8}\binom{7}{2}$$

olur. Şu halde,

$$\binom{8}{6}\binom{7}{4}+\binom{8}{7}\binom{7}{3}+\binom{8}{8}\binom{7}{2}=980+280+21=1281$$

bulunur.

Örnek: a, b, c, d birer rakam, $a>b>c>d$ şartını sağlayan dört basamaklı kaç sayı yazılabilir.

Çözüm: {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} kümesinden seçilen herhangi 4 rakam büyükten küçüğe doğru sıralanırsa istenilen şekilde sayı yazılmış olur. Yani burada seçilen 4 rakamın farklı sıralanışı söz konusu değil, sadece 4 tane rakamın seçilmesi söz konusudur. Buna göre 10 rakamdan 4 tanesi $\binom{10}{4}=210$ şekilde seçilebilmesinden bu şekilde yazılabilecek doğal sayılar 210 tanedir.

5.2. Teorem: Her $n,r\in\mathbb{N}$ ve $r\leq n$ için

$$\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}$$

dir. Yani, $\binom{n}{x}=\binom{n}{y}$ ise n = x + y dir.

İspat: $\binom{n}{r}=\dfrac{n!}{(n-r)!r!}$

$$=\frac{n!}{(n-r)!(n-n+r)!}$$

$$=\binom{n}{n-r}$$

(Bu durum $(x+y)^n$ açılımın baştan ve sondan uzaklıkta bulunan terimlerin katsayıları birbirine eşit olduğunu gösterir.)

Örnek: 5 elemanlı alt kümelerinin sayısı, 7 elemanlı alt kümelerinin sayısı alt kümelerinin sayısına eşit olan bir kümenin en çok iki elemanlı kaç tane alt kümesi vardır?

Çözüm: $s(A)=n$ olsun. $\binom{n}{5}=\binom{n}{7}$ olduğundan $n=5+7=12$ eleman olduğu bulunur. 12 elemanlı bir kümenin en çok 2 elemanlı alt kümelerinin sayısı,

$$\binom{12}{0}+\binom{12}{1}+\binom{12}{2}=1+12+55=79$$

dir.

Örnek: $\binom{m}{12}=\binom{15}{n}$ ise m ve n'nin değerleri ne olmalıdır?

Çözüm: Bu teoreme göre m = 15 olmalıdır. 12 + n = 15 olacağından n = 3 dür.

Örnek: $\binom{n}{2n-15}=\binom{n}{n-5}$ ise n'nin değeri nedir?

Çözüm: Bu teoreme göre $2n-15+n-5=n$ olacağından n = 10 bulunur.

5.2. Sonuç: a) $\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1$

b) $\binom{n}{1}=\binom{n}{n-1}=n$

5.3. Teorem: n, r $\in \mathbb{N}$, r $\leq$ n için

a) $\binom{n}{r}+\binom{n}{r+1}=\binom{n+1}{r+1}$

b) $\binom{n}{r}+\binom{n}{r-1}=\binom{n+1}{r}$

İspat: n, r $\in \mathbb{N}$, r $\leq$ n için

a)
$$\binom{n}{r}+\binom{n}{r+1}=\frac{n!}{r!(n-r)!}+\frac{n!}{(r+1)!(n-r-1)!}$$
$$=\frac{n!}{r!(n-r)(n-r-1)!}+\frac{n!}{(r+1)r!(n-r-1)!}$$
$$=\frac{n!}{r!(n-r-1)!}\left[\frac{1}{n-r}+\frac{1}{r+1}\right]$$
$$=\frac{n!}{r!(n-r-1)!}\left[\frac{r+1+n-r}{(n-r)(r+1)}\right]$$

$$=\frac{n!}{r!(n-r-1)!}\frac{n+1}{(n-r)(r+1)}$$
$$=\frac{n!}{r!(n-r-1)!}\frac{n+1}{(n-r)(r+1)}$$
$$=\binom{n+1}{r+1}$$

b) a ya benzer şekilde yapılır.

Örnek: $\binom{8}{4}+\binom{8}{5}+\binom{9}{6}+\binom{10}{7}$ işleminin sonucu nedir?

Çözüm: $\binom{8}{4}+\binom{8}{5}=\binom{9}{5}$, $\binom{9}{5}+\binom{9}{6}=\binom{10}{6}$, $\binom{10}{6}+\binom{10}{7}=\binom{11}{7}$

Örnek: $A=\{1,2,3,4,5,6,7\}$ kümesinin 4 elemanlı alt kümelerinin kaç tanesinde,

a) 5 ün bulunmayacağını,
b) 5 ün mutlaka bulunacağını,
c) 4 ve 5 ün mutlaka bulunacağını,
d) 4 ün veya 5 ün bulunmayacağını bulunuz.

Çözüm: **a)** 5 ün bulunmadığı 4 basamaklı alt kümelerin sayısı, A kümesinin 5 ın dışındaki meydana gelen $\{1,2,3,4,6,7\}$ kümesinin 4 elemanlı alt kümeleri sayısı kadardır. O halde,

$$\binom{6}{4}=\frac{6!}{2!.4!}=15$$

olarak bulunur.

b) 5 mutlaka bulunacağından A kümesinden 5 elemanı çıkarılırsa $\{1,2,3,4,6,7\}$ kümesi bulunur. Bu kümede üzerinde 3 elemanlı alt küme sayısına bakalım.

$$\binom{6}{3}=\frac{6!}{3!.3!}=20$$

tanedir.

c) 4 ve 5 ün mutlaka bulunacağından A kümesinden 4 ve 5 elemanı çıkarılırsa $\{1,2,3,6,7\}$ kümesi bulunur. Bu kümede üzerinde 2 elemanlı alt küme sayısına bakalım.

$$\binom{5}{2}=\frac{5!}{2!.3!}=10$$

tanedir.

d) 1. Yol: 4 ün bulunmadığı 4 basamaklı alt kümelerin sayısı, A kümesinin 4 ün dışındaki meydana gelen $B=\{1,2,3,5,6,7\}$ kümesinin 4 elemanlı alt kümeleri sayısı kadardır. O halde,

$$s(B)=\binom{6}{4}=\frac{6!}{4!.2!}=15$$

olarak bulunur. 5 ün bulunmadığı 4 basamaklı alt kümelerin sayısı, A kümesinin 5 ün dışındaki meydana gelen $C=\{1,2,3,4,6,7\}$ kümesinin 4 elemanlı alt kümeleri sayısı kadardır. O halde,

$$s(C)=\binom{6}{4}=\frac{6!}{4!.2!}=15$$

olarak bulunur. Hem 5 in hem 4 ün bulunmadığı 4 basamaklı alt kümelerin sayısı, A kümesinin 4 ve 5 in dışındaki meydana gelen $B\cap C=\{1,2,3,6,7\}$ kümesinin 4 elemanlı alt kümeleri sayısı kadardır. O halde,

$$s(B\cap C)=\binom{5}{4}=\frac{5!}{4!.1!}=5$$

olarak bulunur. O halde 4 ve 5 in bulunmadığı dört elemanlı alt kümelerin sayısı,

$$\begin{aligned} s(B\cup C)&=s(B)+s(C)-s(B\cap C)\\ &= 15+15-5\\ &= 25 \end{aligned}$$

tanedir.

2. Yol: A kümesinin 4 elemanlı alt kümelerin sayısı,

$$\binom{7}{4}=\frac{7!}{4!.3!}=35$$

kadardır. A kümesinin 4 ve 5 mutlaka bulunacağından bu eleman haricindeki $\{1,2,3,6,7\}$ kümesinin 2 elemanlı alt kümelere bakalım.

$$\binom{5}{2}=\frac{5!}{2!.3!}=10$$

olarak bulunur. O halde 4 ün veya 5 ün bulunmayacağı,

35–10 = 25

tane olarak bulunur.

Örnek: 7 farklı matematik kitabından 3 tanesi seçilip bir rafa dizilecektir. Kaç farklı şekilde dizilebileceğini bulunuz.

Çözüm: 7 farklı kitap C(7, 3) şekilde seçilecektir. Seçilen bu kitaplar P(3, 3) şekilde rafa dizilecektir. Şu halde,

$$C(7,3).P(3,3)=\frac{7!}{3!.4!}3!=210$$

şekilde dizilebilir.

Örnek: $\binom{n}{1}.3+\binom{n}{2}.3^2+\binom{n}{3}.3^3+...+\binom{n}{n}.3^n=2^{20}-1$

olduğuna göre n'yi bulalım.

Çözüm: $\binom{n}{1}.3+\binom{n}{2}.3^2+\binom{n}{3}.3^3+...+\binom{n}{n}.3^n=2^{20}-1$

$$(1+3)^n=2^{20}$$
$$4^n=2^{20}$$
$$n=10$$

5.3. Sonuç:

a) n çift bir sayı ise, $2^{n-1}=\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+...+\binom{n}{n}$

b) n tek bir sayı ise, $2^{n-1}=\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+...+\binom{n}{n-1}$

5.4. Teorem: $n, r \in \mathbb{N}, r \leq n$ için

a) $\sum_{k=0}^{n-r}\binom{k+r}{r}=\binom{n+1}{r+1}$

b) $\sum_{k=0}^{n}\binom{k+r-1}{r-1}=\binom{n+r}{r}$

KOMBİNASYONLARIN DOĞRULARA VE ÜÇGENLERE UYGULAMASI

5.6. Teorem: Herhangi üçü doğrusal olmayan, aynı düzlemde bulunan n tane noktayla çizilebilecek doğru sayısı;

$$\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$$

tanedir.

İspat: Herhangi üçü doğrusal olmayan, aynı düzlemde bulunan $A = \{a_1,a_2,...a_n\}$ noktaların kümesini ele alalım. Bu kümenin her iki noktasından bir doğru geçecektir. Dolayısıyla doğruları tespit etmek için ikişerli alt küme sayısına bakmak gerekir ki bu bize,

$$\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)(n-2)!}{2(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}$$

tane olduğunu gösterir.

Örnek: Bir düzlemde herhangi üçü doğrusal olmayan 8 tane noktadan kaç tane doğru geçer.

Çözüm: $\binom{8}{2} = \frac{8.7}{2} = 56$

5.4. Sonuç: Aynı düzlemde birbirine paralel olmayan n tane doğru en çok

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

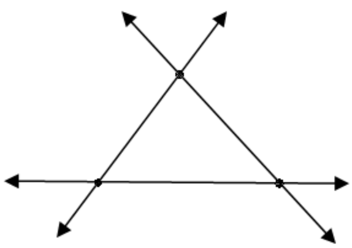
farklı noktada kesişirler.

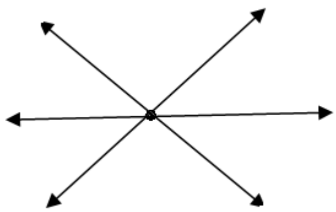
Örnek: Bir düzlemde herhangi ikisi paralel olmayan 15 doğrunun en çok kaç noktada kesişebileceğini bulunuz.

Çözüm: $\binom{15}{2} = \frac{15.14}{2} = 105$

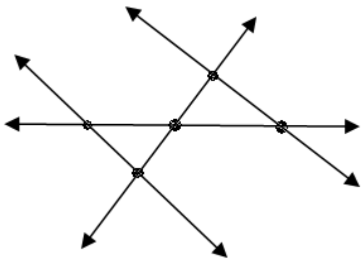
Örnek: Bir düzlem üzerinde bulunan 12 doğrudan 3 ü bir A noktasından 4 ü bir B noktasından geçmektedir. Herhangi ikisi birbirine paralel olmayan doğruların A ve B birlikte en çok kaç kesişme noktaları olduğunu bulunuz.

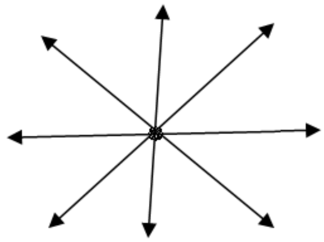
Çözüm: Hiçbir şart olmaksızın 12 doğru $\binom{12}{2}$ farklı noktadan kesişir. Fakat bu doğrulardan 3 ü bir A noktasından geçtiğinden $\binom{3}{2}$ kesişme noktası yerine 1 kesişme noktası (A noktası) meydana gelir.





Bunun dışında doğrulardan da 4 ü bir B noktasından geçtiğinden $\binom{4}{2}$ kesişme noktası yerine 1 kesişme noktası (B noktası) meydana gelir.





O halde bu 12 doğrunun A ve B ile birlikte

$$\binom{12}{2}-\binom{3}{2}-\binom{4}{2}+1+1=59$$

kesişme noktası vardır.

Örnek: 20 kişinin katıldığı bir toplantıda herkes birbirleriyle tokalaşıyor. Bu toplantıda kaç tokalaşma gerçekleşmiştir.

Çözüm: 2 kişinin tokalaşması 1 tokalaşmayı gerçekleştirdiğinden 1 tokalaşma 2 li grupların sayını verecektir. 20 kişinin 2 li grupların sayısını,

$$\binom{20}{2}=\frac{20!}{2!.18!}=190$$

tokalaşmanın gerçekleştiğini gösterir.

Örnek: 8 arkadaşın bulunduğu bir topluluk gittiği kafede 4 kişilik yuvarlak masalara kaç farklı şekilde oturabilirler.

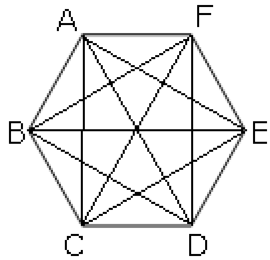
Çözüm: 8 öğrenciden 4 ü seçilerek yuvarlak bir masa etrafına $\binom{8}{4}(4-1)!=420$ farklı şekilde oturabilirler. Geri kalan 4 öğrenci ikinci bir yuvarlak masaya $\binom{4}{4}(4-1)!=6$ farklı şekilde oturabilirler. Buna göre,

420.6 = 2520

farklı şekilde oturabilirler.

5.2. Tanım: Bir çokgenin kenarlar hariç köşelerini birleştiren doğrulara köşegen denir.

Örnek: Şekildeki altıgende,



[AB], [BC], [CD], [DE], [EF], [FA] kenarlardır. Ama [AD], [BE], [CF], [AC], [AE], [BF], [BD], [DF], [EC] köşegenlerdir. Öyleyse altıgenin köşegen sayısı 9 tanedir.

5.7. Teorem: n köşeli bir n–gende köşegen sayısı;

$$\frac{n(n-3)}{2}$$

tanedir.

İspat: Bir çokgenin birbirine komşu olmayan 2 köşesi 1 köşegen meydana getirir. n kenarlı bir çokgenin n köşesi vardır. Buna göre bu köşegen sayısı bu n köşegenin 2 li gruplarının sayısından kenar sayısı olan n çıkarılarak bulunur. O halde n kenarlı bir çokgenin köşegen sayısı,

$$\binom{n}{2} - n = \frac{n(n-3)}{2}$$

tanedir.

Örnek: 8 kenarlı bir çokgenin köşegen sayısını bulunuz.

Çözüm: n = 8 olduğundan,

$$\frac{n(n-3)}{2} = \frac{8.(8-3)}{2} = 20$$

tanedir.

5.8. Teorem: Herhangi üçü doğrusal olmayan, aynı düzlemde bulunan n tane noktayla köşeleri bu nokta üzerinde olan

$$\binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

tane üçgen çizilebilir.

İspat: Herhangi üçü doğrusal olmayan, aynı düzlemde bulunan A = $\{a_1, a_2, ... a_n\}$ noktaların kümesini ele alalım. Bu kümenin her üç noktasından bir üçgen oluşturacaktır. Dolayısıyla üçgenleri tespit etmek için üçerli alt küme sayısına bakmak gerekir ki bu bize,

$$\binom{n}{3} = \frac{n!}{3!(n-3)!} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)!}{3.2.1.(n-3)!} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

tane olduğunu gösterir.

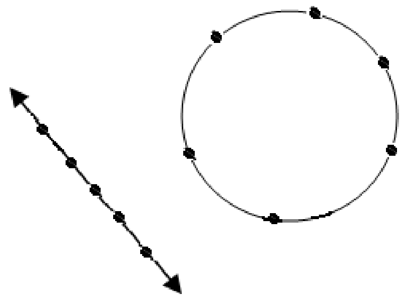
Örnek: Bir düzlemde herhangi üçü paralel olmayan 10 doğrudan köşeleri bu nokta üzerinde olan kaç tane üçgen çizilebilir.

Çözüm: $\binom{10}{3} = \frac{10.9.8}{6} = 120$

Örnek: Bir düzlemde herhangi ikisi birbirine paralel olmayan ve herhangi üçü bir noktadan geçmeyen 16 doğrunun kaç farklı üçgen meydana getirebileceğini bulunuz.

Çözüm: $\binom{16}{3} = \frac{16.15.14}{6} = 560$

Örnek:



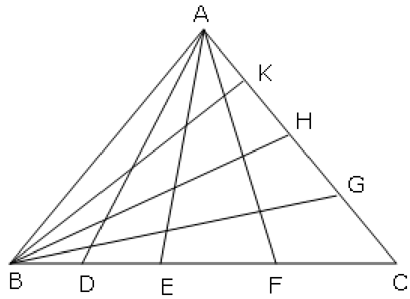
Yukarıdaki şekilde çember üzerinde 6 nokta ile doğru üzerinde 5 nokta verilmiştir. Bu noktalarla en çok kaç tane üçgen çizilebileceğini bulunuz.

Çözüm: Herhangi üçü doğrusal olmayan 11 nokta ile $\binom{11}{3}$ tane üçgen çizilebilir. Fakat bu noktalardan 5 i bir doğru üzerinden olduğundan bu noktalarla üçgen çizilemez. Bundan dolayı $\binom{5}{3}$ tane üçgen meydana gelmez. O halde şekildeki noktalarla en çok

$$\binom{11}{3} - \binom{5}{3} = 165 - 10 = 155$$

tane üçgen çizilebilir.

Örnek:



Yukarıdaki şekilde kaç tane üçgen olduğunu bulunuz.

Çözüm: Aynı düzlemdeki herhangi ikisi birbirine paralel olmayan ve üçü birden bir noktadan geçmeyen 9 tane doğru ile $\binom{9}{3}$ sayıda farklı üçgen meydana getirilebilir. O halde şekildeki 9 doğru ile, A ve B noktalarından ikiden fazla doğru geçmeyecek olsaydı; $\binom{9}{3}$ sayıda farklı üçgen meydana getirecekti. Ancak A ve B noktalarından sırasıyla 5 ve 4 doğru birden geçtiğinden üçgenlerin sayısı $\binom{5}{3}+\binom{4}{3}$ sayısı daha azdır. Buna göre şekildeki üçgenlerin sayısı,

$$\binom{5}{3}+\binom{4}{3}$$

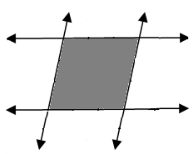
dır.

5.9. Teorem: Aynı düzlemde bulunan doğrulardan n tanesi birbirine paralel ve bu n tane doğruya paralel olmayan diğer m tane doğru da birbirine paraleldir. Düzlemde kenarları doğrular üzerinde olan

$$\binom{m}{2}\binom{n}{2}$$

tane paralelkenar oluşturur.

İspat:



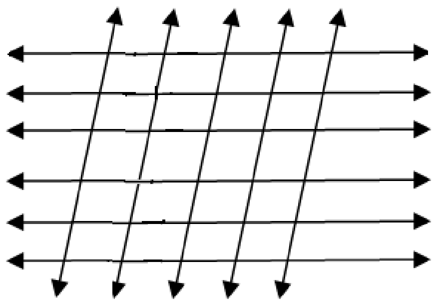
Birbirine paralel 2 doğru ile bunları kesen, birbirine paralel 2 doğru kesiştiğinde bu 4 doğru 1 paralel kenar meydana getirir. Buna göre birbirine paralel m doğrudan 2 si ile bunları kesen, birbirine paralel n doğrudan 2 si seçilerek meydana getirilebilecek 4 lü grupların sayısı kadar paralelkenar elde edilir.

O halde, birbirine paralel m doğrudan 2 si $\binom{m}{2}$ bunları kesen, birbirine paralel n doğrudan 2 si $\binom{n}{2}$ değişik şekilde seçilebileceğinden ikisi birlikte,

$$\binom{m}{2}.\binom{n}{2}$$

değişik şekilde seçilebilir.

Örnek:



Yukarıdaki şekilde bir düzlemde birbirine paralel 6 doğru ile bu doğruları kesen, birbirine paralel 5 doğru verilmiştir. Şekilde kaç tane paralelkenarın olduğunu bulunuz.

Çözüm: Birbirine paralel 2 doğru ile bunları kesen, birbirine paralel 2 doğru kesiştiğinde bu 4 doğru 1 paralel kenar meydana getirir. Buna göre birbirine paralel 6 doğrudan 2 si ile bunları kesen, birbirine paralel 5 doğrudan 2 si seçilerek meydana getirilebilecek 4 lü grupların sayısı kadar paralelkenar elde edilir.

O halde, birbirine paralel 6 doğrudan 2 si $\binom{6}{2}$ bunları kesen, birbirine paralel 5 doğrudan 2 si $\binom{7}{2}$ değişik şekilde seçilebileceğinden ikisi birlikte,

$$\binom{6}{2}.\binom{5}{2} = \frac{6!}{2!.4!}\frac{5!}{2!.3!} = 75$$

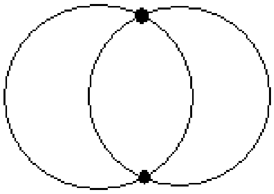
değişik şekilde seçilebilir ve 75 tane paralelkenar meydana gelir.

5.10. Teorem: Aynı düzlemde yarıçapları farklı n tane çemberin en çok

$$2.\binom{n}{2} = n(n-1)$$

tane kesim noktası vardır.

İspat:



Herhangi 2 çember kesiştiğinde 2 tane kesişme noktası meydana geldiğinden n çemberin kesişme noktalarının sayısı en çok, bu n çemberin 2 li gruplarının sayısının 2 katı kadardır. O halde n çember en çok,

$$2.\binom{n}{2} = n(n-1)$$

tane kesim noktası vardır.

Örnek: Bir düzlemde bulunan 12 çemberin en çok kaç noktada kesişebilir.

Çözüm: Herhangi 2 çember kesiştiğinde 2 tane kesişme noktası meydana geldiğinden 12 çemberin kesişme noktalarının sayısı en çok, bu 12 çemberin 2 li gruplarının sayısının 2 katı kadardır. O halde 12 çember en çok,

$$2.\binom{12}{2} = 121$$

noktada kesişir.

TEKRARLI KOMBİNASYON

Buraya kadar bir kümenin alt kümelerini oluşturma işleminde aynı türden elemanlar olmadığından n–nin r–li kombinasyonu olarak çözümlemiştik. Ama alt kümeleri oluşturma işlemlerinde aynı cinsten (özdeş) nesnelerin de bulunduğu durumlarda yapılacak seçme işlemlerinin sayısını şu teorem ile hesaplanır.

5.11. Teorem: r tanesi aynı cinsten (özdeş) nesne, n farklı elemanlı bir kümenin alt kümelerinde yapılacak seçme işlemlerinin sayısı;

$$\binom{n+r-1}{r} = \frac{(n+r-1)!}{(n-1)!.r!}$$

kadardır.

İspat okuyucuya bırakılmıştır.

Örnek: 3 tane madeni 1 YTL, kumbaralara istenilen sayıda atılmak suretiyle değişik bankalardan alınmış 5 farklı kumbaraya kaç değişik şekilde atılabilir?

A) 10 B) 21 C) 24 D) 35 E) 45

(2005 ÖSS)

Çözüm: Madeni paralar aynı olduğundan tekrarlı kombinasyon kullanılmalıdır. Burada tekrar eden (özdeş) madeni paralar olduğundan $r=3$, kumbaralar farklı farklı olduğundan $n=5$ alınmalıdır. Şu halde,

$$\binom{n+r-1}{r}=\binom{5+3-1}{3}=35$$

değişik şekilde atabilir.

Örnek: $a+b+c=7$ denkleminin;

a) Doğal sayılarda kaç değişik çözümün,

b) Pozitif tam sayılarda kaç değişik çözümünün olduğunu bulunuz.

Çözüm: a) 1+1+1+1+1+1+1=7 şeklinde düşünülürse, 1 sayısı tekrar edeceğinden tekrarlı kombinasyon olup $r=7$ alınmalıdır. Ayrıca a, b, c gibi üç değişik sayı olması gerektiğinden $n=3$ olmalıdır. Şu halde,

$$\binom{n+r-1}{r}=\binom{3+7-1}{7}=36$$

doğal sayılarda değişik çözüm bulunur.

b) a, b, c nin değeri en az 1 olacağından; 7 tane 1'likten üçünü birer birer a, b ve c değerlerine dağıtalım. Geriye kalan 4 tane birlik a, b, c ye istenildiği gibi dağıtılabilir. Burada $r=4$, $n=3$ alınacağından,

$$\binom{n+r-1}{r}=\binom{3+4-1}{4}=15$$

pozitif tam sayılarda değişik çözüm bulunur.

Örnek: Bir tatlıcıda bulunan sütlaç, künefe ve baklavadan toplam 6 porsiyon tatlı alınacaktır.

a) Kaç değişik şekilde seçim yapılabilir.

b) Her çeşitten en az 1 porsiyon olmak üzere kaç değişik şekilde seçim yapılabilir.

c) En az 2 porsiyonu sütlaç olma şartıyla kaç farklı şekilde seçim yapılabilir.

Çözüm: a) 3 çeşit tatlı var olduğundan $n=3$ tür. Seçilebilecek toplam 6 porsiyon olacağından $r=6$ olur. Şu halde,

$$\binom{n+r-1}{r}=\binom{3+6-1}{6}=28$$

değişik şekilde seçim yapılabilir.

b) Her çeşitten tatlıdan en az 1 porsiyon olunacaksa, geriye 3 porsiyon seçim yapılacağından $r=3$ olup,

$$\binom{n+r-1}{r}=\binom{3+3-1}{3}=10$$

farklı şekilde seçim yapılabilir.

c) En az 2 porsiyonu sütlaç olma şartı olduğunda geriye kalan 4 porsiyon istenilen şekilde seçilecektir. Şu halde $r=4$ olup,

$$\binom{n+r-1}{r}=\binom{3+4-1}{4}=15$$

farklı şekilde seçim yapılabilir.

Örnek: a, b, c birer rakam, $a\le b\le c$ şartını sağlayan üç basamaklı kaç sayı yazılabilir.

Çözüm: En küçük rakam yüzler basamağı olacağından, bu sayıların rakamlarından herhangi biri 0 olamaz. Yine istenilen şartlarda yazılabilecek sayılarda herhangi bir rakam birden fazla sayıda kullanılabileceğinden, 9 çeşit rakamdan seçilebilecek 3 rakam küçükten büyüğe doğru sıralanacaktır.

Bu şekildeki sıralama bir şekilde gerçekleşebileceğinden farklı sıralanışlar söz konusu değil, sadece 9 çeşit rakamdan 3 tane rakamın seçilmesi söz konusudur. O halde, $n=9$ çeşit rakamdan $r=3$ tane rakam

$$\binom{9+3-1}{3}=165$$

farklı şekilde seçilebilir. Buna göre, istenilen şartlarda 165 doğal sayı yazılabilir.