6. BÖLÜM
BİNOM AÇILIMI

PASKAL ÜÇGENİ HATIRLATMASI

Blaise Pascal
(19 Haziran 1623, Clermont-Ferrand, Fransa - 19 Ağustos 1662, Paris, Fransa)

Binom kavramına geçmeden önce çarpanlara ayırma işlemlerinde Paskal üçgeninden yararlanarak;

$$(x+y)^n = 1.x^n y^0 + n.x^{n-1}y^1 + \frac{n.(n-1)}{2}x^{n-2}y^2 + ... + 1.x^0 y^n$$

olduğu yazılmıştı. Bu hatırlatmayı verdikten sonra şu teoremi vermek gerek.

6.1. Teorem: $n, r \in \mathbb{N}$ ve $r \leq n$ olmak üzere,

$$(x+y)^n = 1.x^n y^0 + n.x^{n-1}y^1 + \frac{n.(n-1)}{2}x^{n-2}y^2 + \cdots + 1.x^0 y^n$$

olan eşitlik,

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n y^0 + \binom{n}{1}x^{n-1}y^1 + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^0 y^n$$

şekline dönüşür. Benzer şekilde,

$$(x-y)^n = \binom{n}{0}x^n y^0 - \binom{n}{1}x^{n-1}y^1 + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 - \cdots \pm \binom{n}{n}x^0 y^n$$

dir.

İspat: Paskal üçgeninde,

$$(x+y)^n = 1.x^n y^0 + n.x^{n-1}y^1 + \frac{n.(n-1)}{2}x^{n-2}y^2 + ... + 1.x^0 y^n$$

olduğunu gördük.

$$\binom{n}{0}=1,\ \binom{n}{1}=n,\ \binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2},\ \ldots,\ \binom{n}{n}=1$$

olduğundan,

$$(x+y)^n=\binom{n}{0}x^ny^0+\binom{n}{1}x^{n-1}y^1+\binom{n}{2}x^{n-2}y^2+\ldots+\binom{n}{n}x^0y^n$$

yazılabilir. //

Benzer şekilde ikinci kısımda gösterilir.

Örnek:

$$(x+y)^5=\binom{5}{0}x^5y^0+\binom{5}{1}x^4y^1+\binom{5}{2}x^3y^2+\binom{5}{3}x^2y^3+\binom{5}{4}x^1y^4+\binom{5}{5}x^0y^5$$
$$=x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+y^5$$

Örnek:

$$(x-y)^4=\binom{4}{0}x^4y^0-\binom{4}{1}x^3y^1+\binom{4}{2}x^2y^2-\binom{4}{3}x^1y^3+\binom{4}{4}x^0y^4$$
$$=x^4+4x^3y+6x^2y^2-4xy^3+y^4$$

Örnek:

$$(a+2)^6=\binom{6}{0}a^6.2^0+\binom{6}{1}a^5.2^1+\binom{6}{2}a^4.2^2+\binom{6}{3}a^3.2^3+\binom{6}{4}a^2.2^4+\binom{6}{5}a^1.2^5+\binom{6}{6}a^0 2^6$$
$$=1.a^6.1+6.a^5.2+15.a^4.4+20.a^3.8+15.a^2.16+6.a.32+1.1.64$$
$$=a^6+12.a^5+60.a^4+160.a^3+240.a^2+192.a+64$$

BİNOM AÇILIMI KAVRAMI

6.1. Tanım: Kombinasyonun Paskal üçgenine çevrilmesinde,

$$(x+y)^n=\binom{n}{0}x^ny^0+\binom{n}{1}x^{n-1}y^1+\binom{n}{2}x^{n-2}y^2+\cdots+\binom{n}{n}x^0y^n$$
$$(x-y)^n=\binom{n}{0}x^ny^0-\binom{n}{1}x^{n-1}y^1+\binom{n}{2}x^{n-2}y^2-\cdots\pm\binom{n}{n}x^0y^n$$

olduğu gösterildi. Bu gösterime binom açılımı denir. $\binom{n}{r}a^{n-r}b^r$ terimine genel terim adı verilir. Burada dikkat edilirse,

1. Baştan r. terimin kombinasyonu $\binom{n}{r-1}$ dir.

2. Sondan r. terimin kombinasyonu $\binom{n}{n-r+1}$ dir.

Örnek: $(x+y)^7$ açılımın baştan 4. terimi bulunuz.

Çözüm: $r=4-1=3$

$$\binom{7}{3}x^{7-3}y^3=35x^4y^3$$

Örnek: $(a+b)^{10}$ açılımın sondan 5. terimi bulunuz.

Çözüm: $n-r+1=10-5+1=6$

$$\binom{10}{6}x^{10-6}y^6=210x^4y^6$$

Örnek: $\left(x^2-\frac{3}{x}\right)^7$ nin açılımında x^8 li terimin kat sayısı kaçtır?

Çözüm: Kabul edelim ki baştan (r+1). terim bu işlemi gerçeklesin. O halde,

$$\binom{7}{r}(x^2)^{7-r}(-3x^{-1})^r=kx^8$$

$$x^{14-2r-r}=x^8$$

$$14-3r=8$$

$$r=2$$

bulunur. Buna göre,

$$\binom{7}{2}(x^2)^5(-3x^{-1})^2=\binom{7}{2}(-3)^2x^8=189x^8$$

şeklindedir.

Örnek: $\left(x+\frac{1}{x^2}\right)^9$ nin açılımında sabit terim kaçtır?

Çözüm: Kabul edelim ki baştan (r + 1). terim sabit terim olsun. O halde,

$$\binom{9}{r}x^{9-r}(x^{-2})^r=kx^0$$

$$x^{9-r-2r}=x^0$$

$$9-3r=0$$

$$r=3$$

bulunur. Buna göre,

$$\binom{9}{3}x^6(x^{-2})^3 = 84$$

şeklindedir.

Örnek: $(x+y^2)^n = x^n + ... + ax^8y^4 + ...$
eşitliğinde a ve n nin değeri nedir?

Çözüm: $(x+y^2)^n$ nin açılımında baştan (r + 1). terimi yazarak bu terim olması için r yi bulalım.

$ax^8y^4 = ax^8(y^2)^2$ olması için r = 2

dir. Şu halde,

n = 8 + 2 = 10

olarak bulunur. Şimdi a'nın değerini bulalım. n = 10, r = 2 olup

$$\binom{10}{2} = 45$$

dir.

Örnek: $\left(4a - \frac{b^2}{2}\right)^{10}$ ifadesinin katsayıları toplamı nedir?

Çözüm: $P(a,b) = \left(4a - \frac{b^2}{2}\right)^{10}$ polinomu olarak tanımlanırsa polinomun katsayılar toplamı gereği a = b = 1 alınır,

$$\left(4.1 - \frac{1^2}{2}\right)^{10} = \left(\frac{7}{2}\right)^{10}$$

olarak bulunur.

Not: $(x+y)^{2n}$ olan bir binomda ortadaki terim daima $\binom{2n}{n}x^ny^n$ dir.

Örnek: $(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})^{12}$ nin açılımında ortadaki terimi bulalım.

Çözüm: $(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})^{12} = (x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}})^{12}$

$$\binom{12}{6}(x^{\frac{1}{2}})^6(x^{\frac{1}{3}})^6 = 924.x^5$$

6.1. Sonuç: a) $x = y = 1$ alınırsa;

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n}$$

olur.

b) $x = y$ alınırsa;

$$0 = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \dots \pm \binom{n}{n}$$

olur.

6.2. Teorem: $(x_1 + x_2 + \dots + x_k)^n$ nin açılımında $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_k^{n_k}$ li terimin katsayısı $(n = n_1 + n_2 + \dots + n_k)$,

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

dir.

İspat:

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k} = \binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\binom{n-n_1-n_2}{n_3} \dots \binom{n-n_1-n_2-\dots-n_{k-1}}{n_k}$$

$$= \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!} \cdot \frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!} \cdot \frac{(n-n_1-n_2)!}{n_3!(n-n_1-n_2-n_3)!} \dots \frac{(n-n_1-n_2-\dots-n_{k-1})!}{n_k!(n-n_1-n_2-n_3-\dots-n_k)!}$$

$$= \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

6.2. Sonuç: $(ax + by + cz)^n$ nin açılımında $x^m . y^r . z^p$ li terimin katsayısı,

$$a^m . b^r . c^p . \frac{n!}{m!\, r!\, p!}$$

dir.

Örnek: $(x + 2y)^8$ un açılımında $x^3 . y^5$ lü terimin katsayısını bulalım.

Çözüm: Sonuca göre, x yerine x, y yerine 2y, m yerine 3, r yerine 5 yazılırsa,

$$1^2 . 2^5 . \frac{8!}{3!.5!} = 1792$$

olarak bulunur.

Örnek: $(2x - y + 3z)^9$ un açılımında $x^2 . y^3 . z^4$ lü terimin katsayısını bulalım.

Çözüm: Sonuca göre, x yerine 2x, y yerine −y, z yerine 3z, m yerine 2, r yerine 3, p yerine 4 yazılırsa,

$$2^2.(-1)^3.3^4.\frac{9!}{2!.3!.4!}=-\frac{9}{8}.9!$$

olarak bulunur.

Örnek: $(1+0{,}02)^{120}$ ifadesinin açılımında değeri en büyük olan terimi bulunuz.

Çözüm: $(1+0{,}02)^{120}$ ifadesinin açılımında, $r+1$'inci terimden önce gelen r'inci terim, $r+1$'inci terimden küçük olsun. Öyleyse,

$$1\le\frac{\binom{120}{r}(0{,}02)^r}{\binom{120}{r-1}(0{,}02)^{r-1}}$$

$$1\le\frac{\frac{120!}{r!(120-r)!}(0{,}02)^r}{\frac{120!}{(r-1)!(121-r)!}(0{,}02)^{r-1}}$$

$$1\le\frac{(121-r).0{,}02}{r}$$

$$r\le 2{,}42-0{,}02.r$$

$$r\le\frac{121}{51}$$

bulunur. Buna göre, $r=0,1,2$ için bir önceki terim sonra gelen terimden küçük olacaktır. $\frac{121}{51}\le r$ için, başka bir deyişle, $r=3,4,5,...$ için bir sonraki terim kendinden önce gelenden küçük olacaktır. Buna göre, $(1+0{,}02)^{120}$ ifadesinin açılımında en büyük terim, $r=2$ için

$$\binom{120}{2}(0{,}02)^2=\frac{357}{125}$$

dir.