7. BÖLÜM
OLASILIĞA GİRİŞ

OLASILIK (İHTİMAL) KAVRAMI

Sağlık, Ekonomi, Yönetim, Siyaset, Biyoloji, Fizik, Kimya, Spor, Meteoroloji, Hayvancılık, Gıda, Bitki Üretimi, Orman Üretimi, Milli Savunma gibi pek çok bilimlerin kullandığı olasılık konusunda bir inceleme yapacağız.

"Olasılık, deney ve deney çıktısı" tanımsız terimlerdir. Ama olasılığı şu şekilde tanımlama yapacağız.

7.1. Tanım: Bir takım olayların olabilirliğini incelemeye olasılık (ihtimal) denilir. Olası durumları incelemeye deney, deneyin verilerine deney çıktısı denir. Mesela, iki takımın futbol maçı yapmasına deney, maçın skoruna deneyin çıktısı denilir. Maçta hangi takımın yenmesi veya maçta berabere kalma olası durumlarını inceleme olasılıktır.

7.2. Tanım: Bir deneyde elde edilen çıktıların her birine örnek nokta; örnek noktaların oluşturduğu kümeye de örnek uzay denir. Örnek uzay E ile gösterilir.

Örnek: Bir madeni paranın havaya atılması deneyinde, örnek noktaları ve örnek uzayı bulunuz.

Çözüm: Para bir kez havaya atıldığında üste gelen yüzey tura ise "T", yazı ise "Y" ile gösterelim.

Örnek noktalar {T} ve {Y} dir.

Örnek uzay E = {T,Y}

dir.

Örnek: Bir zarın düz zeminde atılması deneyinde, örnek noktaları ve örnek uzayı bulunuz.

Çözüm: Bir zar atıldığında,

Örnek noktalar {1}, {2}, {3}, {4}, {5} ve {6}

Örnek uzay E = {1,2,3,4,5,6}

şeklindedir.

OLAY, İMKÂNSIZ OLAY, KESİN OLAY

7.3. Tanım: Bir deneyde oluşan örnek uzayın her alt kümesine olay, örnek uzaya kesin olay, boş kümeye imkânsız olay denir.

Örnek: İki zarın düzgün zeminde atılması deneyinde,

1. Zarların üst yüzene gelen sayıların toplamının 8 olması bir olaydır. Bu olayın kümesi A olsun.

A = {(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)} ve s(A) = 5

dir.

2. Zarların üst yüzüne gelen sayıların toplamının 13 olması imkânsızdır.

3. Zarların üst yüzüne gelen sayıların birinin 7 den küçük diğerinin 0 dan büyük olması kesindir.

AYRIK OLAY

7.4. Tanım: Bir örnek uzaya ait iki olayın kesişimi boş küme ise bu iki olaya ayrık olaylar denir.

Örnek: 2 zar düzgün bir zeminde atılıyor. Zarların üst yüzüne gelen sayıların toplamının 7 olması olayının kümesi A, zarların üst yüzüne gelen sayıların birbirinin aynısı olması olayının kümesi B olsun.

A = {(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)} ve

B = {(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)}

olur. Şu halde $A \cap B = \varnothing$ olduğundan A ve B ayrık olaylardır.

Örnek: İki madeni para havaya atılıyor. Paraların aynı gelmesi olayının kümesi A, paralarının en çok birinin yazı gelmesi olayının kümesi B olsun.

A = {(Y,Y),(T,T)} ve

B = {(T,T),(T,Y),(Y,T))}

olur. Şu halde $A \cap B = \varnothing$ olduğundan A ve B ayrık olaylardır.

OLASILIK FONKSİYONU

7.5. Tanım: Bir E örnek uzayının, tüm alt kümelerinin kümesi E_A olsun.

$$P : E_A \to [0,1]$$
$$A \to P(A)$$

fonksiyonunda,

1. $A \subset E_A$ için, $0 \le P(A) \le 1$

2. $P(E)=1$

3. $A\subset E_A$, $B\subset E_A$, $A\cap B=\varnothing$ ise, $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

şartları sağlanıyorsa P fonksiyona olasılık fonksiyonu denir. P(A) değerine de A olayının olasılığı denir.

Örnek: E = {a, b, {a, b}} örnek uzayının tüm alt kümelerinin kümesi E_A olsun.

$$P:E_A\to[0,1]$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon,

a) $P(a)=\frac{1}{2}, P(b)=\frac{1}{3}, P(\{a,b\})=\frac{1}{6}$

b) $P(a)=\frac{1}{4}, P(b)=\frac{1}{5}, P(\{a,b\})=\frac{7}{8}$

değerlerine sahip olsun. Bu verilere göre P'nin olasılık fonksiyonu olup olmadıklarını bulunuz.

Çözüm: Hem a hem b şıkkında $0\le P(A)\le 1$ şartı sağlanmaktadır. Şimdi olasılık fonksiyonun 2. ve 3. Özelliğinin sağlandığını gösterelim.

a) $P(E)=P(a)+P(b)+P(\{a,b\})=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$

b) $P(E)=P(a)+P(b)+P(\{a,b\})=\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{7}{8}=\frac{53}{40}\neq 1$

olacağından a şıkkı olasılık fonksiyonu olup b şıkkı olasılık fonksiyonu değildir.

7.1. Sonuç: A kümesinin tümleyeni A^t olmak üzere, A olayının gerçekleşme olasılığı P(A), A olayının gerçekleşmeme olasılığı $P(A^t)$ olarak gösterirsek,

$$P(A)+P(A^t)=P(E)=1$$

dir.

Örnek: $P(A)=\frac{1}{4}$ ise, $P(A^t)=\frac{3}{4}$ dir.

7.2. Sonuç: $A\cap B\neq\varnothing$ ise,

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

dir.

7.3. Sonuç: A, B, C ikişer ikişer ayrık olaylar ise,

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)$$

dir.

7.4. Sonuç: $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ikişer ikişer ayrık olaylar ise,

$$P(A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)$$

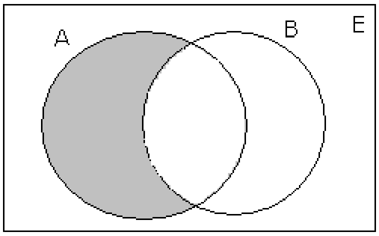
dir.

Örnek: A ve B, E örnek uzayında iki olay,

$$P(B)=\frac{5}{8},\ P(A\cup B)=\frac{7}{8}$$

olduğuna göre, $P(A\cap B^t)$ ifadesini hesaplayınız.

Çözüm: Şekildeki gibi taralı bölge,



$$P(A\cap B^t)=P(A-B)=P(A\cup B)-P(B)$$

$$P(A\cap B^t)=\frac{7}{8}-\frac{5}{8}=\frac{1}{4}$$

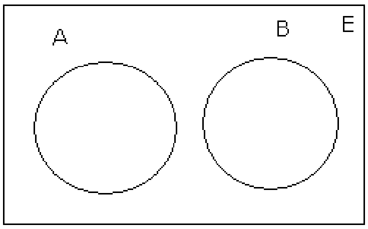
elde edilir.

Örnek: A ve B, E örnek uzayında ayrık olaylar olsun.

$$P(A)=\frac{1}{2},\ P(A^t\cap B^t)=\frac{1}{4}$$

olduğuna göre, $P(B^t)$ ifadesini hesaplayınız.

Çözüm: A ve B ayrık olaylar olduğundan,



$$P(B^t)=P(A)+P[(A\cup B)^t]$$

$$P(B^t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

elde edilir.

Örnek: Bir deney için a, b ve c gibi üç ayrı sonuç vardır. Sonucun b olma olasılığı a olma olasılığının 2 katı, c olması olasılığı ise a olması olasılığının 3 katıdır. Buna göre sonucunun a olma olasılığını bulunuz.

Çözüm: Sonucun b olması olasılığı P(a) = x alınırsa b olasılığı P(b) = 2x ve c olması olasılığı P(c) = 3x olur. Buna göre,

$$P(E) = P(a) + P(b) + P(c)$$
$$1 = x + 2x + 3x$$
$$P(a) = x = \frac{1}{6}$$
elde edilir.

Örnek: x takımı ile y takımının yapacağı bir maçta, x takımının kazanma veya berabere kalma olasılığı $\frac{8}{25}$, y takımının kazanma veya berabere kalma olasılığı $\frac{3}{5}$ tür. Buna göre maçın x ile y takımının yapacağı maçta beraber bitmesi olasılığı nedir?

Çözüm: x takımın kazanma olayı A, y takımının kazanma durumu C, berabere olma kazanma durumu B ile gösterirsek,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{8}{25}$$
$$P(B \cup C) = P(B) + P(C) = \frac{3}{5}$$
dir. Ayrıca $A \cup B \cup C = E$ olacağından,
$$P(A \cup B \cup C) = P(E)$$
$$P(A) + P(B) + P(C) = 1$$
olur. Bu denklemler çözülürse, $P(B) = \frac{2}{25}$ olarak bulunur.

EŞ OLUMLU ÖRNEK UZAY ve OLASILIK HESABI

7.6. Tanım: Örnek uzayı, $E = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$ olan bir P fonksiyonu için,
$$P(a_1) = P(a_2) = P(a_3) = \ldots = P(a_n)$$
ye eş olumlu örnek uzay denir.

Örnek: E = {x, y, z, t} eş olumlu bir örnek uzay ve $P(x) = \frac{1}{4}$ ise, $2P(y) + 3P(z) + 5P(t)$ yi bulunuz.

Çözüm: E, eş olumlu örnek uzay ise,
$$P(x) = P(y) = P(z) = P(z) = \frac{1}{4}$$
$$2P(y) + 3P(z) + 5P(z) = \frac{2}{4} + \frac{3}{4} + \frac{5}{4} = \frac{5}{2}$$
olarak bulunur.

7.1. Aksiyom: $E=\{a_1,a_2,a_3,...,a_n\}$ eş olası örnek uzay ise, E de bir A olayının olasılığı;

$$P(A)=\frac{s(A)}{s(E)}$$

dir. Burada $s(A)$, A'nın eleman sayısı yani, istenilen durum sayısı, $s(E)$, E'nin eleman sayısı (tüm durumların sayısı), yani örnek uzaydır.

Örnek: Bir zar düzgün bir zeminde atılıyor. Üst yüze tek sayı gelme olasılığı nedir?

Çözüm: Deneyin örnek uzayı E = {1, 2, 3,4, 5, 6} ve zarın her bir yüzünün üste gelme olasılığı birbirine eşit olduğundan E eş olumlu örnek uzayıdır. Yani,

$$P(1)=P(2)=P(3)=P(4)=P(5)=P(6)$$

dir. İstenilen olay A = {1, 3, 5} olduğundan,

$$P(A)=\frac{s(A)}{s(E)}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

olarak bulunur.

Örnek: Üzerinde {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8} yazılı kartların
a) Üzerinde 9 yazan kartın gelme olasılığı
b) Herhangi bir sayının gelme olasılığı

Çözüm: **a)** Üzerinde 9 yazılı kart olmadığından A = ∅ dir. Öyleyse,

$$P(A)=\frac{s(A)}{s(E)}=\frac{0}{8}=0$$

dir. Buna imkânsız olayın olasılığıdır.

b) Herhangi bir sayı gelmesi için A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8} olacağından,

$$P(A)=\frac{s(A)}{s(E)}=\frac{8}{8}=1$$

dir. Buna kesin olayın olasılığıdır.

Örnek: 7 evli çiftten meydana gelen bir topluluktan rastgele 4 kişi seçiliyor. Bu 4 kişinin 2 evli çift olması olasılığı nedir?

Çözüm: 7 evli çiftten meydana gelmesi 14 kişinin olmasını gösterir. Rastgele 4 kişinin seçiliyorsa örnek uzay,

$$s(E)=\binom{14}{4}=1001$$

dir. Seçilen 4 kişinin 2 evli çift olması olayı A olsun. 7 evli çiftten 2 si,

$$s(A)=\binom{7}{2}=21$$

değişik şekilde seçilebilir. O halde seçilen 4 kişinin 2 evli çift olma olasılığı,

$$P(A)=\frac{s(A)}{s(E)}=\frac{21}{1001}=\frac{3}{143}$$

bulunur.

Örnek: $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13\}$ kümesinde rast gele iki sayı seçiliyor. Bu sayıların toplamının bir tek sayı olma olasılığı nedir?

Çözüm: A kümesinin on üç sayıdan ikisi $s(E)=\binom{13}{2}=78$ seçilebilir. Ayrıca iki sayının toplamı bir tek sayı olması için biri tek diğeri çift sayı olmalıdır. A kümesindeki 7 tek sayıdan biri $\binom{7}{1}=7$ ve 6 çift sayıdan biri $\binom{6}{1}=6$ değişik şekilde seçilebileceğinden ikisi birlikte,

$$s(A)=\binom{7}{1}\binom{6}{1}=42$$

değişik şekilde seçilebilir. O halde seçilen 2 sayının toplamının bir tek sayı olma olasılığı,

$$P(A)=\frac{s(A)}{s(E)}=\frac{42}{78}=\frac{7}{13}$$

dır.

Örnek: Bir torbada 4 mavi 5 kırmızı top vardır. Bu torbadan çekilen iki topun aynı renkte olma olasılığı nedir?

Çözüm: Toplam 9 top olduğundan örnek uzayı,

$$\binom{9}{2}=36$$

dir. Çekilen topların aynı renkte olması için A,

$$\binom{4}{2}+\binom{5}{2}=16$$

$$P(A)=\frac{16}{36}=\frac{4}{9}$$

bulunur.

Örnek: Bir kutuda 5 mavi, 6 siyah ve 4 kırmızı kalem vardır. Bu kalemlerden rastgele seçilen 3 kalem seçiliyor.

a) Her üçünün de kırmızı olma olasılığı,
b) Birinin mavi ikisinin kırmızı olma olasılığı,
c) Her üçünün de farklı renkte olma olasılığı,

d) Her üçünün de aynı renkte olma olasılığını bulunuz.

Çözüm: Bütün kalem sayısı $5+6+4=15$ tanedir. Bu 15 kalem arasından 3 kalem seçilme durumu olduğundan örnek uzay,

$$\binom{15}{3}=455$$

olarak bulunur.

a) Seçilen kalemlerin her üçünün de kırmızı olma olasılığı,

$$P(A)=\frac{\binom{4}{3}\binom{6}{0}\binom{5}{0}}{\binom{15}{3}}=\frac{4}{455}$$

şeklindedir.

b) Seçilen kalemlerin birinin mavi ikisinin kırmızı olma olasılığı,

$$P(A)=\frac{\binom{5}{1}\binom{6}{0}\binom{4}{2}}{\binom{15}{3}}=\frac{6}{91}$$

şeklindedir.

c) Seçilen kalemlerin her üçünün de farklı renkte olma olasılığı,

$$P(A)=\frac{\binom{5}{1}\binom{6}{1}\binom{4}{1}}{\binom{15}{3}}=\frac{24}{91}$$

şeklindedir.

d) Seçilen kalemlerin her üçünün de aynı renkte olma olasılığı, yani üçünün de mavi veya üçünün de kırmızı veya üçünün de siyah renkte olmasıyla mümkündür. Veya kavramında kümelerde bileşim uygulandığına göre (Mavi = M, Siyah = S, Kırmızı = K),

$$P(M)=\frac{\binom{5}{3}\binom{6}{0}\binom{4}{0}}{\binom{15}{3}}=\frac{10}{455},\ P(S)=\frac{\binom{5}{0}\binom{6}{3}\binom{4}{0}}{\binom{15}{3}}=\frac{6}{455},\ P(K)=\frac{\binom{5}{0}\binom{6}{0}\binom{4}{3}}{\binom{15}{3}}=\frac{4}{455}$$

olduğuna göre,

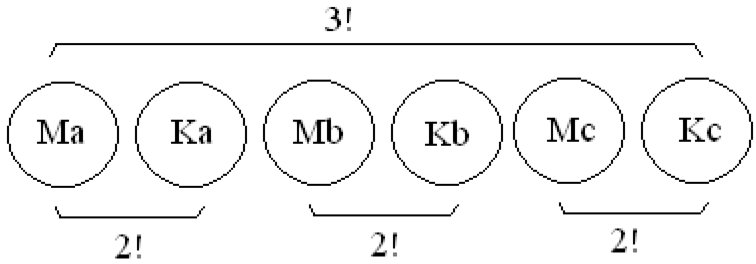
$$P(M\cup S\cup K)=P(M)+P(S)+P(K)=\frac{10}{455}+\frac{6}{455}+\frac{4}{455}=\frac{4}{91}$$

bulunur.

Örnek: Üzerinde a, b, c yazılı 3 mavi 3 kırmızı topun aynı isimli topların yan yana gelme olasılığını bulunuz.

Çözüm: Toplam 6 tane top vardır. 6 farklı topun yan yana $6!=720$ değişik şekilde dizilebileceğinden örnek uzay $s(E)=720$ dir.

Aynı isimli topların yan yana olma olayı A olsun.



Aynı isimli toplar yan yana olacağına göre aynı isimli iki top 1 eleman olarak düşünülürse, 3 eleman 3! değişik şekilde sıralanabilir. Aynı isimli iki top kendi aralarında 2! Şekilde yer değiştirebilir. Buna göre, aynı isimli topların yan yana olduğu dizilişlerinin sayısı,

$$s(A)=3!.2!.2!=48$$

dir. O halde aynı numaralı topların yan yana gelme olasılığı,

$$P(A)=\frac{s(A)}{s(E)}=\frac{48}{720}=\frac{1}{15}$$

dir.

Örnek: Hileli bir zarda üst yüze herhangi bir sayının gelmesi olasılığı bu sayı ile orantılıdır. Bu zar havaya atıldığında üst yüze bir 3 sayının gelme olasılığı nedir?

Çözüm: Üst yüze herhangi bir sayının gelmesi olasılığı bu sayı ile orantılı ise,

Üst yüze 1 in gelmesi olasılığı $P(1)=k$
Üst yüze 2 in gelmesi olasılığı $P(2)=2k$
Üst yüze 3 in gelmesi olasılığı $P(3)=3k$
Üst yüze 4 in gelmesi olasılığı $P(4)=4k$
Üst yüze 5 in gelmesi olasılığı $P(5)=5k$
Üst yüze 6 in gelmesi olasılığı $P(6)=6k$

dir. Buna göre,

$$P(1)+P(2)+P(3)+P(4)+P(5)+P(6)=1$$
$$k+2k+3k+4k+5k+6k=1$$

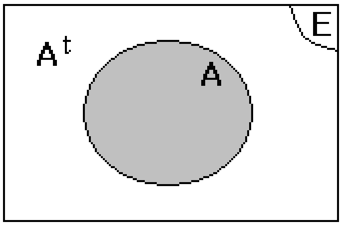
$$k = \frac{1}{21}$$

$$P(3) = 3.\frac{1}{21} = \frac{1}{7}$$

dir.

7.1. Teorem: A^t olayı A'nın tümleyeni ise $P(A) = 1 - P(A^t)$ dır.

İspat:



$A \cup A^t = E$, $A \cap A^t = \varnothing$

$P(A \cup A^t) = P(A) + P(A^t) = 1$

$P(A) = 1 - P(A^t)$

Örnek: İki zar düzgün bir zeminde atılıyor. Üst yüze gelen sayıların en az birinin çift sayı olma olasılığını bulunuz.

Çözüm: Zarların üst yüzüne gelen sayıların en az birinin çift olma olasılığını bulmak için her ikisinin de tek sayı olma olasılığını bakalım.

$A^t = \{(1,1),(1,3),(1,5),(3,1),(3,3),(3,5),(5,1),(5,3),(5,5)\}$ ve $s(A^t) = 9$

olacağından

$$P(A) = 1 - \frac{9}{36} = \frac{3}{4}$$

bulunur.

Örnek: 2 zar düzgün bir zeminde atılıyor.

a) Zarın üst yüzüne gelen sayıların toplamının 9 dan büyük olma olasılığı,

b) Zarın üst yüzüne gelen sayıların toplamının 9 ve 9 dan küçük olma olasılığı bulunuz.

Çözüm: 2 zar düzgün bir zeminde atıldığında örnek uzayın eleman sayısı $s(E) = 36$ dır.

a) Zarın üst yüzeye gelen sayıların toplamının 10, 11, 12 olmalıdır.

$A = \{(4,6),(5,5),(6,5),(6,6),(5,6),(6,4)\}$ ve $s(A) = 6$

$$P(A)=\frac{s(A)}{s(E)}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$$

olarak bulunur.

b) 9 dan büyük olma olasılığı bilindiğine göre 9 ve 9 dan küçük olma olasılığı,

$$P(A^t)=1-P(A)=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$$

şeklindedir.

Örnek: İçerisinde 9 beyaz ve 7 kırmızı topun bulunduğu bir torbadan rastgele üç top seçiliyor. En az birinin kırmızı olma olasılığı nedir?

Çözüm: Toplam 16 toptan 3 tane seçileceğinden örnek uzay,

$$\binom{16}{3}=560$$

olarak bulunur.

1. Yol: En az birinin kırmızı olma olasılığı durumunda, eğer,
1 tane kırmızı ise 2 tane beyaz
2 tane kırmızı ise 1 tane beyaz
3 tane kırmızı ise 0 tane beyaz
olur. Buna göre

$$P(A)=\frac{\binom{7}{1}\binom{9}{2}+\binom{7}{2}\binom{9}{1}+\binom{7}{3}\binom{9}{0}}{\binom{16}{3}}=\frac{139}{160}$$

şeklindedir.

2. Yol: Seçilen üç topunda kırmızı olma olasılığının gerçekleşmemesi üçünün de beyaz olması ile mümkündür. Üçünün de beyaz olması A^t ile gösterirsek,

$$P(A^t)=\frac{\binom{7}{0}\binom{9}{3}}{\binom{16}{3}}=\frac{21}{160}$$

$$P(A)=1-P(A^t)=1-\frac{21}{160}=\frac{139}{160}$$

şeklindedir.

7.2. Teorem: E örnek uzay olsun. $P(\varnothing)=0$ dır.

İspat: $E^t=\varnothing$ olup 7.1. teoremdeki sonuca göre $P(\varnothing)=1-P(E)=1-1=0$ elde edilir.

7.3. Teorem: E de iki olay A ve B olsun.

$$A\subset B \text{ ise } P(A)\leq P(B)$$

dir.

İspat: $A\subset B$ ise $A\cup C=B$ olacak şekilde C kümesi olsun. Buna göre,

$$P(A\cup C)=P(B)$$
$$P(A)+P(C)=P(B)$$

şeklindedir. Burada $P(C)\geq 0$ olduğundan

$$P(A)\leq P(B)$$

yazılır.

7.4. Teorem: E örneklem uzayının iki olayı A ve B olmak üzere $A\cap B\neq\varnothing$ ise,

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

dir.

İspat: A ve B iki küme olmak üzere

$$(A\text{-}B)\cup B=A\cup B \text{ ve } (A\text{-}B)\cup(A B)=A$$
$$(A\setminus B)\cup B=A\cup B \text{ ve } (A\setminus B)\cup(A\cap B)=A$$

olacağına göre,

$$P(A\setminus B)+P(B)=P(A\cup B) \text{ ve } P(A\setminus B)+P(A\cap B)=P(A)$$

yazılır. Bu iki denklemden,

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

elde edilir.

Örnek: 2 zar düzgün bir zeminde atılıyor. Zarların üst yüzene gelen sayıların toplamının 4 ve 4 den küçük veya 3 ile bölünebilen bir sayı olması olasılığını bulunuz.

Çözüm: Atılan zarların üst yüzeye gelenlerin toplamının 4 ve 4 den küçük olması,

$$A=\{(1,1),(1,2),(2,1),(1,3),(3,1),(2,2)\} \text{ ve } s(A)=6$$

olduğundan toplamının 4 ve 4 den küçük olma olasılığı,

$$P(A)=\frac{s(A)}{s(E)}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$$

dir. Zarların üst yüzeye gelen sayıların toplamının 3 ile bölünebilen bir sayı olması,

$B=\{(1,2), (2,1), (1,5), (5,1), (2,4), (4,2), (3,3), (3,6), (6,3), (4,5), (5,4), (6,6)\}$ ve $s(A) = 12$ olduğundan toplamların 4 ile bölünebilme olasılığı,

$$P(B)=\frac{s(B)}{s(E)}=\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$$

dir. Zarların üst yüzene gelen sayıların toplamı 3 olan ve 4 den küçük bir sayıların kümesi,

$$A\cap B=\{(1,2),(2,1)\} \text{ ve } s(A\cap B)=2$$

olduğundan,

$$P(A\cap B)=\frac{s(A\cap B)}{s(E)}=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$$

dir. Buna göre,

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$
$$=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}-\frac{1}{18}=\frac{4}{9}$$

elde edilir.

ŞARTLI OLASILIK

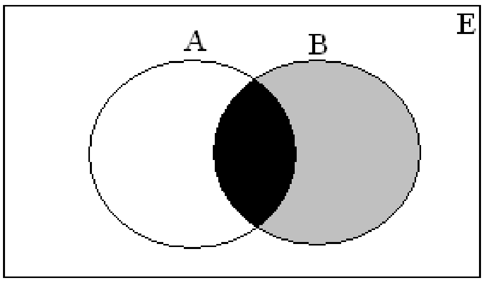
7.7. Tanım: A ve B, E örnek uzayında iki olay olsun. B olayının gerçekleşmesi halinde, A olayının gerçekleşmesi olasılığına A olayının B ye bağlı şartlı olasılığı denir, $P(A|B)$ ile gösterilir. Şartlı olasılıkta A olayı E örnek uzayından B örnek uzayına indirgenmesi olarak yorumlamak gerekir. Burada $P(A)>0$ dır.

7.5. Teorem: A ve B, E örnek uzayında iki olay olsun. Eğer A olayının B ye bağlı şartlı olasılığı var ise,

$$P(A|B)=\frac{s(A\cap B)}{s(B)}$$

şeklindedir.

İspat: E örnek uzayı eş olumlu ve örnek uzay E kümesinden B kümesine indirgenirse,



Venn şamasına göre

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\ ,\ (P(B)\neq 0)$$

yazılabilir. Buna göre,

$$P(A|B)=\frac{\frac{s(A\cap B)}{s(E)}}{\frac{s(B)}{s(E)}}=\frac{s(A\cap B)}{s(B)}$$

dir.

Örnek: Bir zar atılıyor. Üst yüze bir çift sayı geldiğine göre, bu sayının asal olması olasılığını bulunuz.

Çözüm: Bir zarın örnek uzayı $E=\{1,2,3,4,5,6\}$ dır. Buna göre,

Asal sayılar kümesi $A=\{2,3,5\}$

Çift sayılar kümesi $B=\{2,4,6\}$

olduğuna göre $A\cap B=\{2\}$ dir. O halde,

$$P(A|B)=\frac{s(A\cap B)}{s(B)}=\frac{1}{3}$$

dir.

Örnek: 2 zar bir zeminde atılıyor. Üst yüze gelen sayıların toplamının 8 den büyük olduğu bilindiğine göre, bu sayıların toplamının 10 olması olasılığını bulunuz.

Çözüm: Üst yüze sayıların toplamının 8 den büyük olması olayı B, 10 olması ise A olsun.

$A=\{(4,6),(5,5),(6,4)\}$

$B=\{(3,6),(6,3),(4,5),(5,4),(4,6),(6,4),(5,5),(5,6),(6,5),(6,6)\}$

olduğundan

$A\cap B=\{(4,6),(5,5),(6,4)\}$

olur. Buna göre,

$$P(A|B)=\frac{s(A\cap B)}{s(B)}=\frac{3}{10}$$

olarak bulunur.

Örnek: İçerisinde 4 beyaz, 5 yeşil ve 3 mavi bilyenin bulunduğu bir torbadan rast gele üç bilye seçiliyor. Bu üç bilgenin aynı renkte olduğu bilindiğine göre, bu bilyenin her üçünün de yeşil olma olasılığını bulunuz.

Çözüm: Seçilen bilyelerin üçünün de aynı renkte olması yani üçünün de beyaz veya üçünün de yeşil veya üçünün de mavi olma olayı B, yeşil olma olayı A olsun.

5 yeşil bilyeden 3 ü $\binom{5}{3}=10$ seçilebileceğinden $s(A)=10$ olur.

4 beyaz bilyeden 3 ü $\binom{4}{3}=4$ ve 3 mavi bilyeden 3 ü $\binom{3}{3}=1$ seçilebileceğinden

$$s(B)=10+4+1=15$$

dir. Ayrıca,

$$A\cap B=A$$
$$s(A\cap B)=s(A)$$

olduğunu bildiğimize göre,

$$P(A|B)=\frac{s(A\cap B)}{s(B)}=\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$$

elde edilir.

Örnek: İki zar birlikte atıldığında zarlardan birinin üst yüzüne 3 geldiği bilindiğine göre, zarların üst yüzüne gelen sayıların toplamının 7 olma olasılığını bulunuz.

Çözüm: Zarlardan sadece birinin üst yüzüne 3 gelmesi olayı B, üst yüze gelen sayıların toplamının 7 olması olayı ise A olsun.

$$A=\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$$
$$B=\{(1,3),(3,1),(2,3),(3,2),(3,3),(4,3),(3,4),(5,3),(3,5),(6,3),(3,6)\}$$

olduğundan

$$A\cap B=\{(3,4),(4,3)\}$$

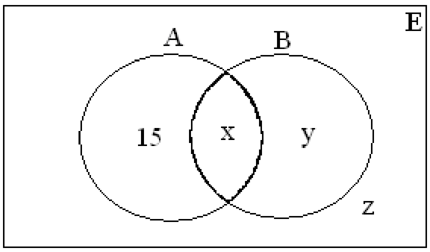
olur. Buna göre,

$$P(A|B)=\frac{s(A\cap B)}{s(B)}=\frac{2}{11}$$

olarak bulunur.

Örnek: 40 kişilik bir sınıfta, İngilizce veya Arapça bilenlerle her iki dili bilmeyenler vardır. Sadece Arapça bilenlerin sayısı 15 ve en fazla bir dil bilenlerin sayısı ise 30 dur. Bu sınıftan seçilen bir öğrenci Arapça bildiğine göre, İngilizce bilme olasılığını bulunuz.

Çözüm: Arapça bilenlerin kümesi A, İngilizce bilenlerin kümesi İ olsun.



En fazla bir dil bilenlerin kümesi,

$$15+y+z=30$$

olduğundan $y+z=15$ olur.

$$15+x+y+z=40$$

$$x=10$$

olur. Buna göre,

$$P(i|A)=\frac{s(i\cap A)}{s(A)}=\frac{x}{15+x}=\frac{10}{15+10}=\frac{2}{5}$$

olarak bulunur.

Örnek: 225567 sayının rakamlarının yerleri değiştirirsek yazılabilecek altı basamaklı tüm sayılardan rast gele bir sayı seçiliyor. Bu sayının bir tek sayı olduğu bilindiğine göre, 5 ile tam bölünebilme olasılığı nedir?

Çözüm: Seçilen bir sayının tek sayı olması olayı B, 5 ile bölünebilen tek sayı olayı A olsun. Önce 5 ile bilen tek sayının kaç tane olduğunu bulalım. 5 in önüne geriye kalan 2, 2, 5, 6, 7 sıralanacaktır. Bu 5 rakamın sıralanış sayısı,

$$\frac{5!}{2!.1!.1!.1!}=60$$

tır. Buna göre $s(A)=s(A\cap B)=60$ tane 5 ile bölünebilen tek sayı yazılabilir.

Şimdi de 7 ile biten tek sayıların kaç tane olduğunu bulalım. 7 nin önüne geriye kalan 2, 2, 5, 5, 6 sıralanacaktır. Bu beş sayının sıralanış sayısı,

$$\frac{5!}{2!.2!.1!}=30$$

dur. Buna göre, 7 ile biten 30 tane tek sayı yazılabilir. O halde,

$$s(B)=60+30=90$$

$$P(A|B)=\frac{s(A\cap B)}{s(B)}=\frac{60}{90}=\frac{2}{3}$$

elde edilir.

BAĞIMSIZ ve BAĞIMLI OLAYLARIN OLASILIĞI

7.8. Tanım: İki olaydan birinin gerçekleşmesi veya gerçekleşmemesinin değerinin gerçekleşme olasılığını değiştirmiyorsa, bu iki olaya bağımsız olaylar denir. Bağımsız olmayan iki olaya da bağımlı olaylar denir. A ve B bağımsız iki olay ise $P(A)=P(A|B)$ şeklinde gösterilir. Burada $P(A)>0$, $P(B)>0$ dır.

Örnek: Bir zar atıldığında, zarın tek sayı gelmesi olayı A, çift sayı gelmesi olayı B ve asal sayı gelme olayı C olsun. A, B ve C olayları kendi aralarında bağımlı veya bağımsız olup olmadıklarını inceleyiniz.

Çözüm: Bu deneyde $E=\{1,2,3,4,5,6\}$, $A=\{1,3,5\}$, $B=\{2,4,6\}$, $C=\{2,3,5\}$ olacağından,

A olayının olma olasılığı $P(A)=\frac{s(A)}{s(E)}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

B olayının olma olasılığı $P(B)=\frac{s(B)}{s(E)}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

C olayının olma olasılığı $P(C)=\frac{s(C)}{s(E)}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

dir. A ve B kümelerine baktığımızda A olayı olsa da B olayını etkilemeyeceğinden A olayı B olayından bağımsızdır.

$$P(A)=P(A|B)=\frac{1}{2} \text{ ve } P(B)=P(B|A)=\frac{1}{2}$$

dir. Ama $A\cap C=\{3,5\}$ ve $B\cap C=\{2\}$ olduğundan,

$$P(A|C)=\frac{s(A\cap C)}{s(C)}=\frac{2}{3} \text{ ve } P(B|C)=\frac{s(B\cap C)}{s(C)}=\frac{1}{3}$$

olup A ile C ve B ile C şartlı olasılık olduklarından bağımlıdırlar.

7.6. Teorem: A ve B, E örnek uzayında iki olay olsun. A olayı, B olayından bağımsız ise, $A\cap B$ olayının olasılığı,

$$P(A\cap B)=P(A).P(B)$$

dir.

İspat: A olayı, B olayından bağımsız ise, $P(A)=P(A|B)$ dır. 7.5. teoremin ispatında,

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

olduğu gösterilmişti. Buna göre,

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=P(A)$$

$$P(A\cap B)=P(A).P(B)$$

dir.

Örnek: 2 zar atılıyor. Zarların üst yüzüne gelen sayıların her ikisinin de çift olması olasılığı nedir?

Çözüm: Zarların üst yüzüne bir çift sayının gelmesi olayı $Ç_1$, diğerinin üst yüzüne bir çift sayının gelmesi olayı $Ç_2$ olsun.

$Ç_2$ olayı gerçekleşsin veya gerçekleşmesin $P(Ç_1)=\frac{1}{2}$ dir. Buna göre $Ç_1$ olayı $Ç_2$ den bağımsızdır. Öyleyse $P(Ç_1|Ç_2)=P(Ç_1)=\frac{1}{2}$ dir.

Yine $Ç_1$ olayı gerçekleşsin veya gerçekleşmesin $P(Ç_2)=\frac{1}{2}$ dir. Buna göre $Ç_2$ olayı $Ç_1$ den bağımsızdır. Öyleyse $P(Ç_2|Ç_1)=P(Ç_2)=\frac{1}{2}$ dir.

Buna göre zarların üst yüzüne gelen sayıların her ikisinin de çift olması olasılığı,

$$P(Ç_1 \cap Ç_2)=P(Ç_1).P(Ç_2)=\frac{1}{2}.\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

olarak bulunur.

Örnek: 2 zar ve 2 madeni para birlikte atılıyor. Zarların üst yüzüne gelen sayıların aynı ve paraların farklı olması olasılığını bulunuz.

Çözüm: Zarların üst yüzüne gelen sayıların aynı olması olayı A, paraların farklı gelmesi olayı da B olsun.

$$A=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$$
$$B=\{(Y,T),(T,Y)\}$$

olduğundan

$$P(A)=\frac{s(A)}{s(E)}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$$
$$P(B)=\frac{s(B)}{s(E)}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

dir. A ve B olayları bağımsız olaylar olduğundan,

$$P(A \cap B)=P(A).P(B)=\frac{1}{6}.\frac{1}{2}=\frac{1}{12}$$

olarak bulunur.

7.5. Sonuç: A_1, A_2, ... ,A_n, E örnek uzayında birbirlerinden bağımsız olaylar olsunlar. $A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n$ olayının olasılığı,

$$P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n)=P(A_1)P(A_2)...P(A_n)$$

dir.

TEKRARLI OLAYLARIN OLASILIĞI

7.9. Tanım: Bir deneyde n sayıda tekrar edilen olayların olma olasılığına tekrarlı olayların olasılığı denir.

7.7. Teorem: Bir deney n sayıda tekrar edilmiş olsun ve bu deneyin her bir olayı

$$A_1, A_2, A_3, ..., A_n$$

olsunlar. Bu olayların hepsinin birden olma olasılığı,

$$P(A_1, A_2, A_3 ..., A_n) = P(A_1).P(A_2).P(A_3)...P(A_n)$$

dır.

İspat: Bir deney n sayıda tekrar edilmiş olsun.

Birinci deneyde A_1 olayının gerçekleşme olasılığı $P(A_1)$

İkinci deneyde A_2 olayının gerçekleşme olasılığı $P(A_2)$

Üçüncü deneyde A_3 olayının gerçekleşme olasılığı $P(A_3)$

...

n. deneyde A_n olayının gerçekleşme olasılığı $P(A_n)$

olduğundan bütün bu olayların 7.6. teorem gereği hepsinin birden olma olasılığı,

$$P(A_1, A_2, A_3 ..., A_n) = P(A_1).P(A_2).P(A_3)...P(A_n)$$

dır.

Örnek: 3 mavi, 2 kırmızı top bulunan bir torbadan art arda geri atılmak üzere iki top çekiliyor. Her iki topun da mavi olma olasılığı nedir?

Çözüm: Çekilen 1. topun mavi olması olayı B olsun. $P(B) = \frac{3}{5}$ tir.

2. çekilişte topun mavi olma olasılığı A olsun. 1. çekilişte topun mavi olması şartı, 2. çekilişinde mavi olması istendiğinden, birer tane mavi çıktığı kabul edileceğinden $P(A|B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ dir.

Bize hem 1. topun hem de 2. topun mavi olması istendiğinden gerçekleşmesi istenen olay $A \cap B$ dir. O halde her iki çekilişte de mavi top çekilmesi olasılığı;

$$P(A \cap B) = P(A).P(B) = \frac{3}{5} . \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$$

olur.

Örnek: Bir zar 3 defa arka arkaya atılıyor.

a) Üst yüze birinci atışta 1, ikinci atışta 4, üçüncü atışta 5 gelme olasılığını,

b) Üst yüze ilk iki atışta 2 gelmesi, üçüncü atışta 2 gelmemesi olasılığını,

c) Üst yüze üç atışta da aynı sayının gelmesi olasılığını,

d) Üst yüze üç atışta da farklı bir sayının gelmesi olasılığını bulalım.

Çözüm: **a)** Üst yüze birinci 1 gelmesi olasılığı $P(1)$, ikinci atışta 4 gelmesi olasılığı $P(4)$ ve üçüncü atışta 5 gelmesi olasılığı $P(5)$ olsun.

$$\begin{aligned} P(1,4,5) &= P(1).P(4).P(5) \\ &= \frac{1}{6}.\frac{1}{6}.\frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{216} \end{aligned}$$

olarak bulunur.

b) Üst yüze ilk iki atışta 2 gelmesi A ise 2 gelmemesi olayı A^t olur.

$$P(A)=\frac{1}{6},\ P(A^t)=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$$

$$\begin{aligned} P(A,A,A^t) &= P(A).P(A).P(A^t) \\ &= \frac{1}{6}.\frac{1}{6}.\frac{5}{6} \\ &= \frac{5}{216} \end{aligned}$$

c) Üst yüze 3 atışta da aynı sayının gelmesi için birinci satışta gelen sayı, ikinci ve üçüncü atışta da gelmemelidir.

Üst yüze birinci atışta x rakamı geliyorsa ikinci ve üçüncü atışta x sayısının gelmemesi olayı A olsun.

$$\begin{aligned} P(E,A,A) &= P(E).P(A).P(A) \\ &= 1.\frac{1}{6}.\frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{36} \end{aligned}$$

d) Üst yüze x, y,z gibi üç gelsin. Üst yüze birinci atışta herhangi bir x sayısı geldiğinde ikinci atışta bu sayının dışında bir sayının gelmesi olayı A, üçüncü atışta ise birinci ve ikinci atışta gelen sayının dışında bir sayı gelmesi olayı B olsun.

$$\begin{aligned} P(E,A,B) &= P(E).P(A).P(B) \\ &= 1.\frac{5}{6}.\frac{4}{6} \\ &= \frac{5}{9} \end{aligned}$$

Örnek: Bir madeni para beş defa arka arkaya atılıyor.

a) İlk üç atışta yazı, sonraki iki atışta tura gelmesi olasılığını,
b) Herhangi üç atışta yazı, iki atışta tura gelmesi olasılığını bulunuz.

Çözüm: Yazı = Y, Tura = T ile gösterirsek,

a) $P(Y,Y,Y,T,T)=P(Y).P(Y).P(Y).P(T).P(T)$

$$=\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{32}$$

b) Üç atışta yazı, iki atışta tura geldiği sıralanışlardan birisi (Y,Y,Y,T,T) dir. Bütün sıralanışların sayısı ise 3 Y ve 2 T olduğundan,

$$\frac{5!}{3!.2!}=10$$

dur. O halde herhangi üç atışta yazı, iki atışta tura gelmesi olasılığı,

$$P(Y,Y,Y,T,T).10=P(Y).P(Y).P(Y).P(T).P(T).10$$

$$=\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.10$$

$$=\frac{5}{16}$$

2. yol: Bir madeni paranın 5 defa arka arkaya atılması deneyi ile 5 madeni paranın birlikte atılmasının deneyinin örnek uzayı birbirinin aynısı olduğuna göre, 5 madeni paradan 3 ün yazı, 2 sinin tura gelmesi olayı A olsun.

5 madeni paradan yazı olacak 3 ü $\binom{5}{3}$, geriye kalan 2 madeni paradan tura olacak 2 si $\binom{2}{2}$ değişik şekilde seçilebilir. İkisi birlikte,

$$s(A)=\binom{5}{3}\binom{2}{2}=10$$

değişik şekilde seçilebilir. O halde,

$$P(A)=\frac{s(A)}{s(E)}=\frac{10}{32}=\frac{5}{16}$$

olarak bulunur.

7.1. Uyarı: n elemanlı bir kümenin r tane elemanının rasgele seçme deneyinin örnek uzayı ile bu kümenin çekilenler yerine atılmamak şartıyla arka arkaya r elemanının seçilmesi deneyinin örnek uzayı birbirinin aynısıdır.

Örnek: Bir torbada 4 mavi, 8 kırmızı bilye vardır. Bu torbadan arka arkaya rasgele 3 bilye çekiliyor.

a) Çekilen yerine konulmadığına göre 2 sinin mavi, 1 inin kırmızı olması olasılığını,
b) Çekilenler yerine konulduğuna göre 2 sinin mavi, 1 inin kırmızı olması olasılığını bulunuz.

Çözüm: a) Önce birinci çekilişte mavi, ikinci çekilişte mavi, üçüncü çekilişte kırmızı gelmesi olasılığını bulalım.

İlk çekilişte mavi gelmesi olasılığı $P(M)=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$ dür. Geriye kalan 11 bilyeden 3 ünün mavi olacağından ikinci mavi gelmesi olasılığı $P(M)=\frac{3}{11}$ dır. Geriye kalan 10 bilyeden 8 kırmızı olduğundan üçüncü kırmızı gelmesi olasılığı $P(K)=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$ dir. Üç çekilişten 2 sinin mavi, 1 inin kırmızı geldiği sıralamalardan birisi (M,M,K) dir. Bütün sıralanışların sayısı 2 M ve 1 K olduğundan $\frac{3!}{2!.1!}=3$ tür. O halde 2 sinin mavi, 1 inin kırmızı olması olasılığı,

$$P(M,M,K).3=\frac{4}{55}.3=\frac{12}{55}$$

olarak bulunur.

2. yol: Çekilenler yerine atılmamak şartıyla arka arkaya üç bilye çekme deneyinin örnek uzayı ile 3 bilyenin beraber seçilmesi deneyinin örnek uzayı birbirinin aynısı olduğuna göre $4+8=12$ bilyeden 3 ü $s(E)=\binom{12}{3}=220$ değişik şekilde seçilebilir.

4 mavi bilyeden 2 si $\binom{4}{2}=6$ ve 8 kırmızı bilyeden 1 i $\binom{8}{1}=8$ değişik şekilde seçilebilir. İkisi birlikte ise $s(A)=\binom{4}{2}\binom{8}{1}=48$ değişik şekilde seçilebilir.

O halde, $P(A)=\frac{s(A)}{s(E)}=\frac{48}{220}=\frac{12}{55}$ olarak bulunur.

b) Önce birinci çekilişte mavi, ikinci çekilişte mavi ve üçüncü çekilişte kırmızı gelmesi olasılığını bulalım. Birinci çekilişte mavi gelme olasılığı $P(M)=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$

dir. Çekilen bilye rengine bakıldıktan sonra tekrar torbaya konduğuna göre ikinci çekilişte mavi gelme olasılığı $P(M)=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$ dir. Çekilen bilye rengine bakıldıktan sonra tekrar torbaya konduğuna göre üçüncü çekilişte kırmızı gelmesi olasılığı $P(M)=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$ olur. Buna göre,

$$P(M,M,K)=\frac{1}{3}.\frac{1}{3}.\frac{2}{3}=\frac{2}{27}$$

dir. Üç çekilişten 2 sinin mavi, 1 inin kırmızı geldiği sıralamalardan birisi (M,M,K) dir. Bütün sıralanışların sayısı 2 M ve 1 K olduğundan $\frac{3!}{2!.1!}=3$ tür. O halde 2 sinin mavi, 1 inin kırmızı olması olasılığı,

$$P(M,M,K).3=\frac{2}{27}.3=\frac{2}{9}$$

olarak bulunur.

Örnek: Bir zar üç defa arka arkaya atılıyor. En az iki atışta üst yüze 4 gelmesi olasılığını bulalım.

Çözüm: Bir zar havaya atıldığında üst yüze 1 gelmesi olayı A, 1 gelmemesi olayı A^t olsun.

$$P(A)=\frac{1}{6} \text{ ise } P(A^t)=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$$

dır. O halde,

İki atışta üst yüze 1 gelmesi	veya	Üç atışta üst yüze 1 gelmesi
$P(A.A.A^t).\frac{3!}{2!.1!}$	+	$P(A.A.A)$

$$=P(A).P(A).P(A^t).3 \quad + \quad P(A).P(A).P(A)$$

$$=\frac{1}{6}.\frac{1}{6}.\frac{5}{6}.3+\frac{1}{6}.\frac{1}{6}.\frac{1}{6}$$

$$=\frac{2}{27}$$

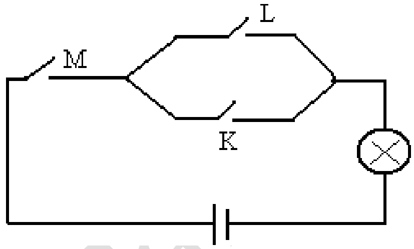
Örnek: Bir kapıyı açmak için altı anahtardan bir kilidi uymaktadır. Denenen anahtarın kapıyı açmadığı görülünce bu anahtar denenmemek üzere bir tarafa bırakılmaktadır. Bu kapının en çok üç denemede açılması olasılığını bulalım.

Çözüm: Kapının en çok üç denemede açılması için birinci denemede açılmalı, yani ilk seçilen anahtar doğru olmalı veya ikinci denemede açılmalı, yani ilk seçilen anahtar yanlış, ikinci seçilen anahtar doğru olmalı veya üçüncü denemede açılmalı, yani birinci seçilen anahtar yanlış, ikinci seçilen anahtar yanlış, üçüncü seçilen anahtar doğru olmalıdır. Seçilen bir anahtarın yanlış olması olasılığı $P(Y)$, doğru olması olasılığı ise $P(D)$ olsun.

Birinci Denemede açılması	veya	İkinci Denemede açılması	veya	Üçüncü Denemede açılması
$P = P(D)$	+	$P(Y,D)$	+	$P(Y,Y,D)$
$P = P(D)$	+	$P(Y).P(D)$	+	$P(Y).P(Y).P(D)$
$P = \frac{1}{6}$	+	$\frac{5}{6}.\frac{1}{5}$	+	$\frac{5}{6}.\frac{4}{5}.\frac{1}{4}$

$$P = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

Örnek:



Şekildeki devrede M, K ve L anahtarlarının kapalı olma olasılığı sırasıyla $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{5}$ ve $\frac{3}{4}$ dir. Buna göre devreler lambanın ışık verme olasılığını bulunuz.

Çözüm: M anahtarının kapalı olma olasılığı $P(M) = \frac{2}{3}$ ise açık olma olasılığı $P(M^t) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ tür.

K anahtarının kapalı olma olasılığı $P(K) = \frac{2}{5}$ ise açık olma olasılığı $P(K^t) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$ tür.

L anahtarının kapalı olma olasılığı $P(L) = \frac{3}{4}$ ise açık olma olasılığı $P(L^t) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$ tür.

Lambanın ışık vermesi için devrenin tamamlanması gerekir. Bunun için M anahtarı kapalı K anahtarı kapalı ve L anahtarı açık veya M anahtarı kapalı K anahtarı açık ve L anahtarı kapalı veya her üç anahtarda kapalı olmalıdır. O halde o lambanın ışık vermesi olasılığı,

$$
\begin{aligned}
P &= P(M\cap K\cap L^t)+P(M\cap K^t\cap L)+P(M\cap K\cap L)\\
&= P(M).P(K).P(L^t)+P(M).P(K^t).P(L)+P(M).P(K).P(L)\\
&= P(M).P(K).P(L^t)+P(M).P(K^t).P(L)+P(M).P(K).P(L)\\
&= \frac{2}{3}.\frac{2}{5}.\frac{1}{4}+\frac{2}{3}.\frac{3}{5}.\frac{3}{4}+\frac{2}{3}.\frac{2}{5}.\frac{3}{4}\\
&= \frac{17}{30}
\end{aligned}
$$

Örnek: 2 zar 6 defa bir zeminde atılıyor. En az bir defa her iki zarın da üst yüzüne 3 gelmesi olasılığını bulunuz.

Çözüm: 2 zar havaya atıldığında her iki zarın üst yüzüne 3 ün gelmesi olasılığı $P(A)=\frac{1}{36}$, gelmemesi olasılığı $P(A^t)=1-\frac{1}{36}=\frac{35}{36}$ dir.

İki zar 6 defa havaya atıldığında hiçbirinde her iki zarın üst yüzüne 3 ün gelmemesi olasılığı,

$$\underbrace{P(A^t,A^t,...,A^t)}_{6\,\text{tane}}=\underbrace{P(A^t).P(A^t)...P(A^t)}_{6\,\text{tane}}$$

O halde 2 zar 6 defa havaya atıldığında en az bir defa her iki zarın da üst yüzüne 3 gelmesi olasılığını,

$$1-\left(\frac{35}{36}\right)^6$$

olarak bulunur.

Örnek: Bir matematik problemini Ayşe, Elif ve Rana adlı öğrencilerin çözebilme olasılıkları sırasıyla $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{4}$ ve $\frac{1}{3}$ tür. Bu problemi çözebilmek için Ayşe, Elif ve Rana ayrı ayrı uğraştıklarına göre, problemin çözme olasılığını bulunuz.

Çözüm: Problemi Ayşe'nin çözebilme olasılığı $P(A)=\frac{1}{5}$ ise çözemem olasılığı $P(A^t)=1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$ dir.

Problemi Elif'in çözebilme olasılığı $P(E)=\frac{1}{4}$ ise çözemem olasılığı $P(E^t)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ dir.

Problemi Rana'nın çözebilme olasılığı $P(R)=\frac{1}{3}$ ise çözemem olasılığı $P(R^t)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$ dir.

Bu problemi Ayşe, Elif ve Rana çözebilirse problem çözülmüş olur. A^t, E^t, R^t olayları birbirinden bağımsız olduğundan,

$$\begin{aligned} P(A\cup E\cup R) &= 1-P(A\cup E\cup R)^t \\ &= 1-P(A^t\cap E^t\cap R^t) \\ &= 1-P(A^t).P(E^t).P(R^t) \\ &= 1-\frac{4}{5}.\frac{3}{4}.\frac{2}{3} \\ &= \frac{2}{5} \end{aligned}$$

bulunur.

Örnek: İki atıcıdan birincisinin hedefi vurma olasılığı $\frac{1}{2}$ ve ikincisinin her bir atışta aynı hedefi vurma olasılığı $\frac{1}{3}$ tür. Bu iki atıcı sırası ile birisi hedefi vurana kadar atış yapıyorlar. Birincisinin hedefi vurma olasılığı nedir?

($|r|<1$ olmak üzere, $a(1+r+r^2+r^3+...)=\frac{a}{1-r}$ dir.)

Çözüm: Birincinin hedefi vurma olasılığı $P(A)=\frac{1}{2}$ dir. Hedefi vurmama olasılığı $P(A^t)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ dir.

İkincinin hedefi vurma olasılığı $P(A)=\frac{1}{3}$ dir. Hedefi vurmama olasılığı $P(A^t)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$ dir.

İlk atışta birincisi vurursa $P(A)=\frac{1}{2}$. Veya ilk atışta her ikisi de vurmayıp ikinci atışta birinci vurursa $P(A^t,B^t,A)=\frac{1}{2}.\frac{2}{3}.\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.\frac{1}{3}$

Veya ilk ve ikinci atışta her ikisi de vurmayıp üçüncü atışta birinci vurursa

$$P(A^t,B^t,A^t,B^t,A)=\frac{1}{2}.\frac{2}{3}.\frac{1}{2}.\frac{2}{3}.\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.\left(\frac{1}{3}\right)^2$$

...

şeklinde sonsuz atış gerçekleştirilebilir.

O halde birincisinin hedefi vurup atışı bitirme olasılığı,

$$\begin{aligned} P&=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}.\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2+\ldots \\ &=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\ldots\right) \\ &=\frac{1}{2}.\frac{1}{1-\frac{1}{3}} \\ &=\frac{3}{4} \end{aligned}$$

tür.

Örnek: Bir A torbasında 7 kırmızı ve 8 yeşil, B torbasında ise 8 kırmızı ve 7 yeşil top vardır. Bir zar havaya atılıyor. Üst yüze 4 den büyük bir sayı gelirse A torbasından, 5 ten küçük bir sayı gelirse B torbasından bir top çekiliyor. Bu topun kırmızı renkli olması olasılığını bulunuz.

Çözüm: Zarın üst yüzüne 4 ten büyük bir sayının yani 5 veya 6 nın gelmesi olması $P(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$, 5 ten küçük sayının yani 1, 2, 3 veya 4 ün gelmesi olasılığı $P(B)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$ tür. A olayı gerçekleşiyorsa A torbasından bir top çekilecektir. Bu topun kırmızı olma olasılığı $P(K_A)=\frac{7}{15}$, B olayı gerçekleşiyorsa B torbasından bir top çekilecektir. Bu topun kırmızı olma olasılığı $P(K_B)=\frac{8}{15}$ tir. O halde,

A (7 Kırmızı, 8 Yeşil)	B (8 Kırmızı, 7 Yeşil)
(5 ve 6 gelmesi ve A dan kırmızı)	(1,2,3, ve 4 gelmesi ve B dan kırmızı)

$$P = P(A).P(K_A) + P(B).P(K_B)$$
$$= \frac{1}{3}.\frac{7}{15} + \frac{2}{3}.\frac{8}{15}$$
$$= \frac{23}{45}$$

bulunur.

Örnek: Her birinde 4 mavi 5 siyah topu bulunan 2 torbanın birincisinden bir top alınıp ikincisine ve daha sonra da ikincisinden bir top alınıp birincisine konulduğunda renk bakımından ilk durumu elde etme olasılığını bulunuz.

Çözüm: Renk bakımından ilk durumu elde edebilmek için birinci torbadan alıp ikinci torbaya konan top mavi ise ikinci torbadan mavi bir renkli top alınmış olmalı veya birinci torbadan alınıp ikinci torbaya konan top siyah ise ikinci torbadan siyah renkli bir top alınmış olmalıdır. O halde,

I. Torba (4 Mavi, 5 Siyah) II. Torba (4 Mavi, 5 Siyah)

(I. den mavi ve II. den mavi) (I. den siyah ve II. den siyah)

$$P = P(M_1).P(M_1) + P(S_1).P(S_2)$$
$$= \frac{4}{5}.\frac{5}{10} + \frac{5}{9}.\frac{5}{10}$$
$$= \frac{5}{9}$$

bulunur.

Örnek: Bir zarın iki yüzü sarı ve dört yüzü mavi renkte boyanmıştır. Bir F torbasında 5 kırmızı ve 6 yeşil, bir G torbasında ise 6 kırmızı ve 5 yeşil bilye vardır. Bu zardan havaya atılıyor. Üste sarı renkli yüz gelirse F torbasından mavi renkli yüz gelirse G torbasından bir bilye çekiliyor. Bu bilyenin kırmızı renkte olduğunu bilindiğine göre m torbasından çekilmiş olması olasılığını bulunuz.

Çözüm: Önce çekilen bir bilyenin kırmızı renkte olması olasılığını bulalım.

F. Torbası (5 Kırımız, 6 Yeşil) (Zarın sarı yüzü ve bilyenin kırmızı renkli)

G. Torbası (6 Kırmızı, 5 Yeşil) (Zarın mavi yüzü ve bilyenin kırmızı renkli)

$$P(K) = P(F).P(F_K) + P(G).P(G_K)$$
$$= \frac{2}{6}.\frac{6}{11} + \frac{4}{6}.\frac{6}{11}$$
$$= \frac{17}{33}$$

O halde, çekilen bir bilyenin kırmızı olduğu bilindiğine göre, G torbasından çekilmiş olma olasılığı,

$$P(G|K)=\frac{P(G\cap K)}{P(K)}$$
$$=\frac{P(G).P(G_K)}{P(F).P(F_K)+P(G).P(G_K)}$$
$$=\frac{\frac{4}{5}.\frac{6}{11}}{\frac{17}{33}}$$
$$=\frac{12}{17}$$

SONSUZ ÖRNEK UZAY

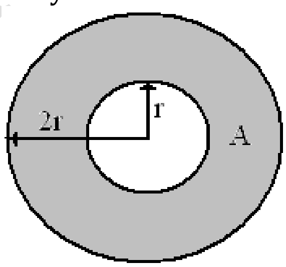
7.10. Tanım: E örnek uzayının elemanı reel sayılar kümelerden oluşuyorsa sonsuz örnek uzay denir. Mesela uzunluk, alan ve hacim gibi bazı sonlu geometrik ölçülerden oluşan örnek uzaylardır.

7.2. Aksiyom: E örnek uzayına ait bir A olayının gerçekleşme olasılığı,

$$P(A)=\frac{m(A)}{m(E)}=\frac{\text{A nin ölçüsü}}{\text{E nin ölçüsü}}$$

dır. Bu ölçü uzunluk, alan ve hacim olabilir.

Örnek: Bir dairenin içindeki bir nokta rast gele seçiliyor. Bu noktanın dairenin merkezinden çok çevresine yakın olması olasılığını bulunuz.

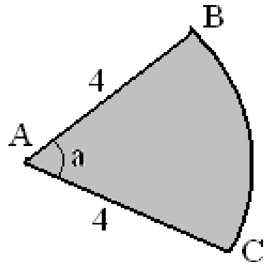


Çözüm: Şekilde görüldüğü gibi seçilen bir noktanın dairenin çevresine daha yakın olması için bu nokta daire halkasının içinde olmalıdır. O halde,

$$P(A)=\frac{m(A)}{m(E)}=\frac{\pi(2r)^2-\pi r^2}{\pi(2r)^2}=\frac{3}{4}$$

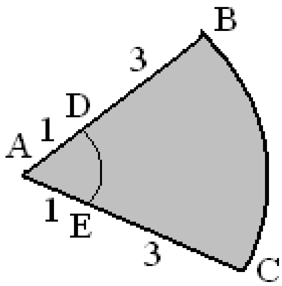
olarak bulunur.

Örnek:



Verilen şekilde verilen A merkezli daire diliminde, $|AB| = 4\,\text{cm}$, $m(BAC) = a$ dır. Daire diliminin iç bölgesinden rast gele seçilen bir noktanın A köşesine olan uzaklığının 1 cm den fazla olması olasılığını bulunuz.

Çözüm:



Şekilde görüldüğü gibi daire diliminin iç bölgesinden seçilen bir noktanın A köşesine olan uzaklığının 1 cm den fazla olması için bu noktanın BDEC bölgesinde olması gerekir. Daire dilimi formülünü hatırlarsak,

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(E)} = \frac{m(BDEC)}{m(ABC)} = \frac{\frac{a}{360}\pi 4^2 - \pi 1^2}{\frac{a}{360}\pi 4^2} = \frac{15}{16}$$

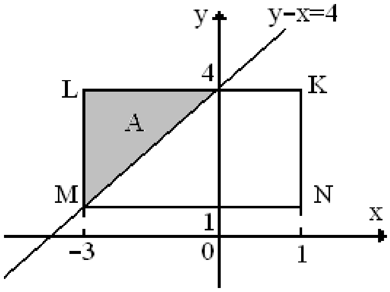
bulunur.

Örnek: Reel sayılar doğrusu üzerinde $A(x,0)$ ve $B(y,0)$ noktaları $-3 \le x \le 1$ ve $1 \le y \le 4$ olacak şekilde rast gele seçiliyor. A ve B noktaları arasındaki uzaklığın 4 e eşit veya büyük olması olasılığını bulunuz.

Çözüm: $|AB| = y - x \ge 4$ eşitsizliği elde edilir.

$-3 \le x \le 1$ ve $1 \le y \le 4$

olacak şekilde elde edilen eşitsizliği analitik düzlemde gösterelim.



Şekildeki KLMN dikdörtgenin içerisindeki noktalarda

$$-3 \le x \le 1 \text{ ve } 1 \le y \le 4$$

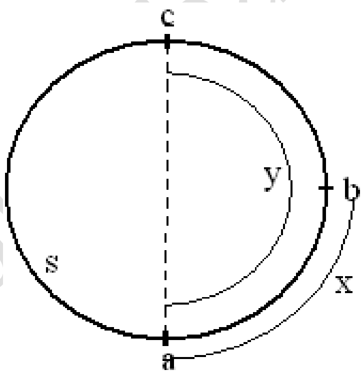
olduğundan $m(E) = A(KLMN)$ ve taraflı alan içerisindeki noktalarda ise $y - x \ge 4$ olduğundan $m(A) = A(LMP)$ dir.

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(E)} = \frac{A(LMP)}{A(KLMN)} = \frac{\frac{9}{2}}{12} = \frac{3}{4}$$

olur.

Örnek: Bir çember üzerinde a, b ve c gibi üç nokta rast gele seçiliyor. Bu noktaların üçünün birden çemberin aynı yarısında bulunma olasılığını bulunuz.

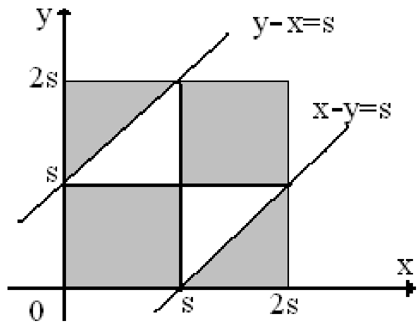
Çözüm:



Çemberin çevre uzunluğu 2s olsun. $0 < x < 2s$ ve $0 < y < 2s$ olur. a, b ve c noktalarının çemberin aynı yarısında bulunması için,

$$x < s \text{ ve } y < s$$
$$x > s \text{ ve } y > s$$
$$x < s \text{ ve } y - x > s \text{ veya } y < s \text{ ve } x - y > s$$

olmalıdır. Elde edilen eşitsizlikleri analitik düzlemde gösterelim.



Şekilde büyük karenin içerindeki noktalarda $0<x<2s$ ve $0<y<2s$ olduğundan $m(E)=4s^2$ ve taralı alan içerindeki noktalarda ise a, b ve c noktalarının çemberin çevre uzunluğunun yarısında bulunması şartları (eşitsizlikleri) sağladığından

$$P(A)=\frac{m(A)}{m(E)}=\frac{3s^2}{4s^2}=\frac{3}{4}$$

olarak bulunur.