1. BÖLÜM
İŞLEM

Toplam, çıkarma, çarpma, bölme, üstlü ifadeler ve köklü ifadeler birer işlemlerdir. Bu işlemlerin dışında başka özel işlemlerde tanımlanabilir. Burada bu tanımlamalara temel teşkil edecek işlem kavramı ve özellikleri vereceğiz.

İŞLEM KAVRAMI

1.1. Tanım: A, B ve C boş olmayan kümeler olmak üzere $A \times B$ nin bir alt kümesinden C'ye tanımlı her fonksiyona işlem denir.

$A \neq \emptyset$ olmak üzere $A \times A$ nin bir β alt kümesinden A'ya tanımlanan fonksiyona A'da bir işlem denir. İşlemi +, – , ., :, ★, Δ, o … gibi sembollerle gösteririz.

Örnek: $A = \{-1, 1\}$ olmak üzere;

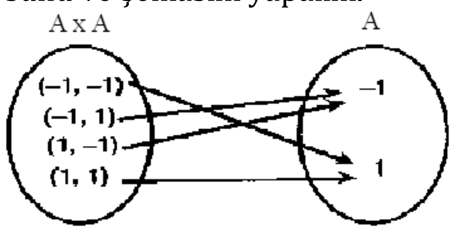
$$f : A \times A \to A$$
$$(x,\ y) \to f(x,y) = x \cdot y$$

biçiminde tanımlanan f fonksiyonu A'da bir işlemdir. Bu işlemi Δ ile gösterirsek,

$$\Delta : A \times A \to A$$
$$(x,\ y) \to \Delta(x,y) = x\,\Delta\,y = x \cdot y$$

biçiminde yazarız. Bu işlemin tablosunu ve şemasını yapalım.

Δ	−1	1
−1	1	−1
1	−1	1



1.1. Not: Burada A kümesi her sayı kümesi olabileceği gibi ileride tanımlanacak Karmaşık (Kompleks) sayılarda dâhil edilebilir.

Örnek: $\Delta : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$(x,\ y) \rightarrow x \,\Delta\, y = 2x + 3y$$

olmak üzere $5 \,\Delta\, 4$ ve $-1 \,\Delta\, 6$ yı bulunuz.

Çözüm: $5 \,\Delta\, 4 = 2 \cdot 5 + 3 \cdot 4 = 22$

$-1 \,\Delta\, 6 = 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 6 = 16$

Örnek: Reel sayılar kümesi üzerinde, $x \bigstar y = x + y + 2$ şeklinde tanımlansın. Buna göre, $(3 \bigstar 5) \bigstar 4$ işleminin sonucu nedir?

Çözüm: $3 \bigstar 5 = 3 + 5 + 2 = 10$

$10 \bigstar 4 = 10 + 4 + 2 = 16$

Örnek: Reel sayılar kümesi üzerinde,

$$a \blacksquare b = \begin{cases} a + b, & a \cdot b > 0 \\ 2ab, & a \cdot b < 0 \end{cases}$$

$$a \,\Delta\, b = 2a + 4b$$

işlemleri tanımlanıyor. $(3 \blacksquare 2)\Delta((-1) \blacksquare 4)$ işlemlerinin sonucu nedir?

Çözüm: $3 \blacksquare 2 = 3 + 2 = 5$

$(-1) \blacksquare 4 = 2 \cdot (-1) \cdot 4 = -8$

$(3 \blacksquare 2)\Delta((-1) \blacksquare 4) = 5\,\Delta(-8) = 2 \cdot 5 + 4 \cdot (-8) = 10 + (-32) = -22$

Örnek: Reel sayılar kümesi üzerinde, $x \bullet y = xy + 1$ şeklinde tanımlansın. Buna göre, $6 \bullet m = 25$ olduğuna göre m'nin değeri nedir?

Çözüm: $6 \bullet m = 25$

$6\,m + 1 = 25$

$m = 4$

Örnek: $*$ işlemi

$$a * b = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)^{-1}$$

olarak tanımlandığına göre $5 * 4$ ün değeri nedir?

Çözüm: $a * b = \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{4}\right)^{-1} = \frac{20}{9}$

Örnek: Pozitif tamsayılar kümesi üzerinde $\bigstar$ ve Δ işlemleri,

$$x★y = xy \text{ ve } x \Delta y = x + y$$
şeklinde tanımlanıyor. $a★(a \Delta 1) = 72$ olduğuna göre, a kaçtır?

Çözüm: $a \Delta 1 = a + 1$
$a★(a \Delta 1) = a(a+1)$
$72 = a(a+1)$
olduğundan $a = 8$ olarak bulunur.

Örnek: Tabloda tanımlanan ★ işlemine göre $(3★4)★(1★2)$ işlemini bulalım.

★	1	2	3	4
1	3	4	1	2
2	4	1	2	3
3	1	2	3	4
4	2	3	4	1

Çözüm: Tabloda $3★4$ ü bulmak için sütundan 3'ün olduğu satır ile 4'ün bulunduğu sütunun kesiştiği yerde 4 vardır. Yine Tabloda $1★2$ yi bulmak için sütundan 1'i satırdan 2'yi bulunur. İki sayının kesiştiği nokta yine 4 olduğu gözükür.

$$(3★4)★(1★2)$$
$$4 ★ 4$$
olarak bulunur. Buna göre $4★4$ ü bulmak için sütundan 4, satırdan 4 bulunur. İki sayının kesiştiği nokta 1 olduğu gözükür. Buna göre cevap 1'dir.

İŞLEMİN ÖZELLİKLERİ

1. Kapalılık Özelliği

Kapalılık özelliği, tanımlanan küme üzerindeki işlemde alınan iki elemanı yine aynı kümenin elemanına denir. Her ne kadar bu tanım yapılsa da bu fonksiyon tanımı olduğu yerde kapalılığa ihtiyaç kalmaz. Çünkü bir fonksiyon varsa kapalı olmak zorundadır.

1.2. Tanım: "Δ" A kümesinde tanımlı bir işlem olsun. Her $x,y \in A$ için
$$x \Delta y \in A$$
ise A kümesi "Δ" işlemine göre kapalılık özelliği denir.

Örnek: $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesinde çıkarma işlemi tanımlı mıdır, yani kapalı mıdır?

Çözüm: Her $a, b \in \mathbb{Z}$ için, $a - b \in \mathbb{Z}$
olduğundan $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesi üzerinde tanımlanan çıkarma işlemi vardır, yani kapalıdır.

Örnek: $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinde çıkarma işlemi tanımlı mıdır, yani kapalı mıdır?

Çözüm: 2 ve 3 sayısını ele alalım.
$$a - b \notin \mathbb{N}$$
olduğundan $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi üzerinde tanımlanan çıkarma işlemi tanımlı değildir, yani kapalı değildir.

Örnek: $A = \{-1, 0, 1\}$ kümesinde "Δ" fonksiyonu $x \Delta y = x \cdot y$ biçiminde tanımlanıyor. "Δ" fonksiyona göre A kümesi kapalı mıdır?

Çözüm: Her $x, y \in A$ için $x \Delta y = x \cdot y \in A$ olacaktır. Gerçekten,
$$(-1) \Delta (-1) = (-1) \cdot (-1) = 1 \in A$$
$$(-1) \Delta 0 = (-1) \cdot 0 = 0 \in A$$
$$(-1) \Delta 1 = (-1) \cdot 1 = -1 \in A$$
$$0 \Delta (-1) = 0 \cdot (-1) = 0 \in A$$
$$0 \Delta 0 = 0 \cdot 0 = 0 \in A$$
$$0 \Delta 1 = 0 \cdot 1 = 0 \in A$$
$$1 \Delta (-1) = 1 \cdot (-1) = -1 \in A$$
$$1 \Delta 0 = 1 \cdot 0 = 0 \in A$$
$$1 \Delta 1 = 1 \cdot 1 = 1 \in A$$
dir. Şu halde "Δ" fonksiyona göre A kümesi kapalıdır. Bu işlemi şu tablo ile de gösterilebilir.

Δ	-1	0	1
-1	1	0	-1
0	0	0	0
1	-1	0	1

1.2. Not: Doğal sayılar, tamsayılar, rasyonel sayılar ve reel sayılar üzerinde tanımlanan toplama ve çarpma işlemi kapalıdır. Ama,

Doğal sayılarda çıkarma işlemi kapalı değildir.

Doğal ve tamsayılarda bölme işlemi kapalı değildir.

Rasyonel ve reel sayılarda bölme 0 olunca tanımsız olacağından bölme işlemi kapalı değildir.

2. Değişme Özelliği

1.3. Tanım: "Δ" A kümesinde tanımlı bir işlem olsun. Her $x,y \in A$ için

$$x \,\Delta\, y = y \,\Delta\, x$$

ise A kümesi "Δ" işlemine göre değişme özelliği denir.

Örnek: Reel sayılar kümesinde tanımlı "★" işlemi

$$x \bigstar y = x + y - 4xy$$

biçiminde tanımlanıyor. "★" işleminin değişme özelliğini inceleyiniz.

Çözüm: Reel sayılarda toplama ve çarpma işlemlerinde değişme özelliği olduğundan her $x, y \in A$ için

$$x \bigstar y = x + y - 4xy$$
$$y \bigstar xy = y + x - 4yx$$

olup $x \bigstar y = y \bigstar x$ sağlanır.

Örnek: Reel sayılar kümesinde tanımlı "♥" işlemi

$$x \heartsuit y = 2x + 3y$$

biçiminde tanımlanıyor. "♥" işleminin değişme özelliğini inceleyiniz.

Çözüm: Özel olarak 4 ve 5 i alalım.

$$4 \heartsuit 5 = 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 = 23$$
$$5 \heartsuit 4 = 2 \cdot 5 + 3 \cdot 4 = 22$$

bulunur. $22 \neq 23$ yazılacağından değişme özelliği yoktur.

1.3. Not: İşlem tablosunda, değişme özelliği olması için elemanlar köşegene göre simetrik olmalıdır.

Örnek:

$\star$	a	b	c	d
a	c	d	a	b
b	d	a	b	c
c	a	b	c	d
d	b	c	d	a

tablosunun esas köşegeninin üzerindeki elemanlar simetrik olduğundan değişme özelliği vardır. Ayrıca $x\star y = y\star x$ olduğu açıktır.

3. Birleşme Özelliği

1.4. Tanım: "Δ" A kümesinde tanımlı bir işlem olsun. Her $x,y,z \in A$ için

$$x\,\Delta\,(y\,\Delta\,z) = (x\,\Delta\,y)\,\Delta\,z$$

ise A kümesi "Δ" işlemine göre birleşme özelliği vardır denir.

Örnek: Reel sayılar kümesinde tanımlı "Δ" işlemi

$$x\,\Delta\,y = x + y + 1$$

biçiminde tanımlanıyor. "Δ" işleminin birleşme özelliğini inceleyiniz.

Çözüm: Her $x,y,z \in \mathbb{R}$ için

$$x\,\Delta\,(y\,\Delta\,z) = (x\,\Delta\,y)\,\Delta\,z$$
$$x\,\Delta\,(y+z+1) =?\,(x+y+1)\,\Delta\,z$$
$$x+(y+z+1)+1 =?\,(x+y+1)+z+1$$
$$x+y+z+2 \neq x+y+z+2$$

olduğundan birleşme özelliği vardır.

Örnek: Reel sayılar kümesinde tanımlı "$\blacklozenge$" işlemi

$$x \blacklozenge y = 2x + 4y$$

biçiminde tanımlanıyor. "$\blacklozenge$" işleminin birleşme özelliğini inceleyiniz.

Çözüm: Her $x,y,z \in \mathbb{R}$ için

$$x\blacklozenge(y\blacklozenge z) = (x\blacklozenge y)\blacklozenge z$$
$$x\blacklozenge(2y+4z) =?\,(2x+4y)\blacklozenge z$$
$$2x+4(2y+4z) =?\,2(2x+4y)+4z$$
$$2x+8y+16z \neq 4x+8y+4z$$

olduğundan birleşme özelliği yoktur.

4. Birim (Etkisiz) Eleman

1.5. Tanım: “Δ” A kümesinde tanımlı bir işlem olsun. Her $x \in A$ için

$$x \Delta e = x$$

olacak biçimde $e \in A$ varsa e sayısına “Δ” işleminin sağdan birim (etkisiz) elemanı,

$$e \Delta x = x$$

olacak biçimde $e \in A$ varsa e sayısına “Δ” işleminin soldan birim (etkisiz) elemanı, sağdan ve soldan birim elemanlar eşit ise “Δ” işleminin birim (etkisiz) elemanı e’dir denir.

Örnek: Reel sayılar kümesinde tanımlı “★” işlemi

$$x \Delta y = x + y - 3$$

biçiminde tanımlanıyor. “★” işleminin birim (etkisiz) elemanını bulalım.

Çözüm: $x★e = e★x = e$

$x + e - 3 = x$ ise $e = 3$

$e + x - 3 = x$ ise $e = 3$

“★” işleminin birim (etkisiz) elemanı 3’dür.

Örnek: Reel sayılar kümesinde tanımlı “□” işlemi

$$x \blacksquare y = 2x + y$$

biçiminde tanımlanıyor. “■” işleminin birim (etkisiz) elemanını bulalım.

Çözüm: $x \blacksquare e = x$

$2x + e = x$

$e = -x$

ve

$e \blacksquare x = x$

$2e + x = x$

$e = 0$

Her zaman her x için sağlanamayacağını gösterir. Şu halde sağdan ve soldan birim elemanlar farklıdır. Ama bu işlemin birim (etkisiz) elemanı yoktur.

1.4. Not: Bir işlemin tablosunda, baş satır ile baş sütununun aynısı olan satır ve sütunun kesiştiği yerdeki eleman etkisiz elemandır.

Örnek: Tabloda tanımlanan ★ işleminin birim elemanını bulalım.

★	1	2	3	4
1	3	4	1	2
2	4	1	2	3
3	1	2	3	4
4	2	3	4	1

Çözüm: Tabloya göre,

$1 ★ 3 = 1$
$2 ★ 3 = 2$
$3 ★ 3 = 3$
$4 ★ 3 = 4$

olduğuna göre 3 sayısı ★ işleminin birim elemanıdır. 3 sayısı baş satır ile baş sütununun aynısı olan satır ve sütunun kesiştiği yerdeki elemandır.

Örnek: $A = \{1, 2, 3, 4\}$ olmak üzere,

★	1	2	3	4
1	2	3	4	1
2	3	4	1	2
3	4	1	2	3
4	1	2	3	4

işlemi tanımlansın. Bu (A, ★) sisteminin değişmeli gruptur. A kümesi üzerinde ikinci bir Δ işlemi,

$x \Delta y = x ★ y ★ 1$

biçiminde tanımlanıyor. "Δ" işleminin birim elemanı nedir?

Çözüm: ★ işleminin birim elemanı 4 dür. "Δ" işleminin birim elemanı e olsun. Her $x \in A$ için

$x \Delta e = x$

olacak biçimde $e \in A$ varsa e sayısı olmalıdır. Buna göre,

$x ★ e ★ 1 = x$
$x^{-1} ★ x ★ e ★ 1 = x^{-1} ★ x$
$e ★ e ★ 1 = 4$
$e ★ 1 = 4$
$e = 4$

dir.

1.1. Teorem: Bir işlemde birim (etkisiz) eleman varsa tekdir.

İspat: Kabul edelim ki, "Δ" A kümesinde tanımlı bir işlemde e_1 ve e_2 iki tane birim eleman olsun. Bu takdirde,

$$x \,\Delta\, e_1 = e_1 \,\Delta\, x = x$$
$$x \,\Delta\, e_2 = e_2 \,\Delta\, x = x$$

yazılabilir. Buna göre $e_1 = e_2$ olması ile mümkündür. Bu ise birim elemanın bir tane olduğunu gösterir.

1.2. Teorem: Değişme özelliği olan bir işlemde sağdan ve soldan birim eleman aynıdır.

İspat: "Δ" A kümesinde tanımlı bir işlemde değişme özelliği olduğundan her $x \in A$ için

$$x \,\Delta\, e = e \,\Delta x = x$$

olacak biçimde $e \in A$ varsa e sayısı olacağından e sayısı birim elemandır. Bu durum sağdan ve soldan birim eleman aynı olduğunu gösterir.

5. Ters Eleman

1.6. Tanım: "Δ" A kümesinde tanımlı bir işlem olsun. Her $x \in A$ için

$$x \,\Delta\, x^{-1} = e$$

olacak biçimde $x^{-1} \in A$ varsa x sayısının "Δ" işlemine göre sağdan ters elemanı x^{-1} dir,

$$x^{-1} \,\Delta\, x = e$$

olacak biçimde $x^{-1} \in A$ varsa x sayısının "Δ" işlemine göre soldan ters elemanı x^{-1} dir, sağdan ve soldan ters elemanlar eşit ise "Δ" işleminin ters elemanı x^{-1} dir denir.

Örnek: Reel sayılar kümesinde tanımlı "✧" işlemi

$$x ✧ y = x + y + 5$$

biçiminde tanımlanıyor. "✧" işleminden 3^{-1} i bulunuz.

Çözüm: Önce birim elemanı bulalım.

$$x ✧ e = x \text{ ve } e ✧ x = x$$
$$x + e + 5 = x \text{ ve } e + x + 5 = x$$
$$e = -5$$

olup birim eleman –5 dir. Buna göre,

$$x \diamond x^{-1} = e \text{ ve } x^{-1} \diamond x = e \; x \diamond$$
$$x + x^{-1} + 5 = -5 \text{ ve } x^{-1} + x + 5 = -5$$
$$x^{-1} = -10 - x$$

dir. Şu halde,

$$3^{-1} = -10 - 3 = -13$$

olarak bulunur.

Örnek: Tabloda tanımlanan ★ işlemine göre 1 ve 2 sayısının tersini bulalım.

★	1	2	3	4
1	3	4	1	2
2	4	1	2	3
3	1	2	3	4
4	2	3	4	1

Çözüm: Tabloya göre, $1★3 = 1, 2★3 = 2, 3★3 = 3, 4★3 = 4$ olduğuna göre 3 sayısı ★ işleminin birim elemanıdır. Buna göre,

$1★1^{-1} = 3$ olması için $1^{-1} = 1$

$2★2^{-1} = 3$ olması için $2^{-1} = 4$

şeklindedir.

1.3. Teorem: Bir işlemde ters eleman varsa tekdir. (Eğer birden fazla ters eleman çıkıyorsa o zaman ters eleman yoktur.)

İspat: "Δ" A kümesinde tanımlı bir işlem olsun. Her $x \in A$ için x_1^{-1} ve x_2^{-1} olacak şekilde iki tane ters elemanı olsun. Bu takdirde,

$$x_1^{-1} \Delta\, e = x_1^{-1}$$

yazılabilir. Ayrıca $x \,\Delta\, x_2^{-1} = e$ olduğundan,

$$x_1^{-1} \Delta\, e = x_1^{-1}$$
$$x_1^{-1} \Delta\, (x \,\Delta\, x_2^{-1}) = x_1^{-1}$$
$$(x_1^{-1} \Delta\, x) \,\Delta\, x_2^{-1} = x_1^{-1}$$
$$e \,\Delta\, x_2^{-1} = x_1^{-1}$$
$$x_2^{-1} = x_1^{-1}$$

bulunur ki bu bize ters elemanın bir tane olduğunu gösterir.

1.4. Teorem: Bir işlemin birim (etkisiz) elemanı yoksa işleminin tanımlı olduğu kümenin elemanlarının tersi yoktur.

İspat: Kabul edelim ki "Δ" A kümesinde tanımlı işlemin ters elemanı x_1^{-1} olsun. Bu takdirde,

$$x \, \Delta \, x_1^{-1} = e$$

olacak şekilde e birim elemanı olacaktır. Bu ise çelişkidir.

1.5. Teorem: Bir elemanın aynı işlemdeki tersinin tersi, kendisine eşittir.

İspat: "Δ" A kümesinde tanımlı bir işlem olsun. Her $x \in A$ için x_1^{-1} var olsun. Bu takdirde,

$$x_1^{-1} \Delta \, (x_1^{-1})^{-1} = e$$
$$x \, \Delta \, [x_1^{-1} \Delta \, (x_1^{-1})^{-1}] = x \, \Delta \, e$$
$$[x \, \Delta \, x_1^{-1}] \Delta \, (x_1^{-1})^{-1} = x$$
$$e \, \Delta \, (x_1^{-1})^{-1} = x$$
$$(x_1^{-1})^{-1} = x$$

olduğunu gösterir.

1.6. Teorem: Birim (etkisiz) elemanın tersi kendisine eşittir. Fakat tersi kendisine eşit olan her eleman birim eleman olmak zorunda değildir.

1.5. teoremde özel olarak $x = e$ alınırsa istenen elde edilir.

Örnek: $\mathbb{R}$ reel sayılar üzerinde tanımlı,

$$x \, \Delta \, y = 2x + 2y + 2xy + 1$$

işlemine göre tersi olmayan elemanı ve 1'in tersini bulalım.

Çözüm: Önce Δ işleminin birim elemanını bulalım. Δ işleminin değişme özelliği olduğundan sadece sağdan birim elemana bakmak yeterlidir.

$$x \, \Delta \, e = x$$
$$2x + 2e + 2xe + 1 = x$$
$$x + 2e + 2xe + 1 = 0$$
$$x(1 + 2e) + (2e + 1) = 0$$
$$(1 + x)(2e + 1) = 0$$
$$e = -\frac{1}{2}$$

dir. Burada $1 + x = 0$ ise $x = -1$ in tersi yoktur. Çünkü

$$x \, \Delta \, x_1^{-1} = e$$

$$(-1)\Delta\,(-1)^{-1} =? -\frac{1}{2}$$

olmalıdır. Buna göre,

$$2(-1) + 2\,(-1)^{-1} + 2(-1)\,(-1)^{-1} + 1 =? -\frac{1}{2}$$

$$-1 \neq -\frac{1}{2}$$

dir. Şimdi de 1'in tersini bulalım. Δ işleminin değişme özelliği olduğundan sadece sağdan, 1'in tersini bulmak yeterlidir.

$$x\,\Delta\,e = x$$

$$1\,\Delta\,1^{-1} =? -\frac{1}{2}$$

olmalıdır. Buna göre,

$$2\cdot 1 + 2\cdot 1^{-1} + 2\cdot 1\cdot 1^{-1} + 1 =? -\frac{1}{2}$$

$$1^{-1} = -\frac{7}{8}$$

olarak bulunur.

6. Yutan Eleman

1.7. Tanım: "Δ" A kümesinde tanımlı bir işlem olsun. Her $x \in A$ için

$$x\,\Delta\,y = y$$

olacak biçimde $y \in A$ varsa x sayısının "Δ" işleminin sağdan yutan elemanı,

$$y\,\Delta\,x = y$$

olacak biçimde $y \in A$ varsa x sayısının "Δ" işleminin soldan yutan elemanı, sağdan ve soldan yutan elemanları eşit ise "Δ" işleminin yutan elemanı denir.

Örnek: Reel sayılar kümesinde tanımlı "$\bigcirc$" işlemi

$$x \bigcirc y = x + y + 4xy$$

biçiminde tanımlanıyor. "$\bigcirc$" işleminin yutan elemanını bulunuz.

Çözüm: Her $x \in \mathbb{R}$ için

$$x \bigcirc y = y \text{ ve } y \bigcirc x = y$$

$$x + y + 4xy = y \text{ ve } y + x + 4yx = y$$

$$y = -\frac{1}{4} \text{ ve } y = -\frac{1}{4}$$

olduğundan yutan eleman $y = -\frac{1}{4}$ dür.

Örnek: Reel sayılar kümesinde tanımlı "$*$" işlemi

$$x * y = xy + 1$$

biçiminde tanımlanıyor. "$*$" işleminin yutan elemanını bulunuz.

Çözüm: "$*$" işleminin değişme özelliği olduğundan sadece sağdan yutan elemana bakmak yeterlidir.

$$x * y = xy + 1$$
$$xy + 1 = y$$
$$y = \frac{1}{1-x}$$

ifadesi sabit olmadığından $*$ işleminin yutan elemanını yoktur.

1.7. Teorem: Bir işlemde birim (etkisiz) eleman varsa tekdir.

Bu teorem 1.3. teoremin ispatına benzerine yöntemle yapılır.

1.8. Teorem: Bir kümede tanımlı bir işlemin yutan elemanı varsa, yutan elemanın tersi yoktur. Fakat tersi olmayan her eleman yutan eleman olmayabilir.

İspat: Kabul edelim ki "Δ" A kümesinde tanımlı işlemin yutan elemanı y olsun. Bu takdirde,

$$x \, \Delta \, y = y$$
$$x^{-1} \, \Delta \, (x \, \Delta \, y) = x^{-1} \, \Delta \, y$$
$$(x^{-1} \, \Delta \, x) \, \Delta \, y = y$$
$$e \, \Delta \, y = y$$
$$y = y$$

dır. Burada x^{-1} keyfi olduğundan böyle x^{-1} çok sayıda bulunabilir. Öyleyse tanımlanan işlemin yutan elemanı varsa, yutan elemanın tersi yoktur.

Şimdi de teoremin ikinci kısmını bir örnekle gösterelim. $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinin çıkarmada 5 sayısının tersi yoktur, ama bu sayı doğal sayılar kümesinin yutan elemanı değildir.

Örnek: Reel sayılar kümesinde tanımlı "Δ" işlemi

$$x \, \Delta \, y = 2xy$$

biçiminde tanımlanıyor. "Δ" işlemine göre hangi sayının tersi yoktur?

Çözüm: Her $x \in \mathbb{R}$ için

$$x \, \Delta \, y = y \text{ ve } y \, \Delta \, x = y$$
$$2xy = y \text{ ve } 2yx = y$$
$$x = \frac{1}{2} \text{ ve } x = \frac{1}{2}$$

yutan elemandır. Buna göre $\frac{1}{2}$ sayısının tersi yoktur.

1.5. Not: Reel sayılar kümesinde çarpma işleminin yutan elemanı 0'dır ve 0'ın çarpmaya göre tersi yoktur. Yani,

$$x \cdot x^{-1} = e$$
$$0 \cdot 0^{-1} = 1$$
$$0^{-1} = \frac{1}{0} \notin \mathbb{R}$$

dir.

1.6. Not: Tabloda bir satır ile bir sütun, baş satır ve baş sütundan itibaren aynı elemandan meydana geliyorsa, bu eleman yutan elemandır.

Örnek:

Δ	a	b	c
a	a	c	b
b	c	a	b
c	b	b	b

★	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	b	b	b
c	c	b	a	d
d	d	b	c	a

1. şekilde $A = \{a, b, c\}$ kümesinin "Δ" işlemine göre yutan elemanı yoktur. Ama 2. şekilde $A = \{a, b, c, d\}$ kümesinin "★" işlemine göre yutan elemanı b'dir.

7. Dağılma Özelliği

1.8. Tanım: "Δ" ve "★" A kümesinde tanımlı iki işlem olsun. Her $x, y, z \in A$ için

$$x \, \Delta \, (y \star z) = (x \, \Delta \, y) \star (x \, \Delta \, z)$$
$$(y \star z) \, \Delta \, x = (y \, \Delta \, x) \star (z \, \Delta \, x)$$

ise A kümesi "Δ" işleminin "★" işlemi üzerinde dağılma özelliği vardır denir.

Örnek: Reel sayılar kümesinde "Δ" ve "★" işlemleri

$$x \, \Delta \, y = 3xy$$
$$x \star y = 2x + 2y$$

biçiminde tanımlanıyor. "★" işleminin "Δ" işlemi üzerinde dağılma özelliği olup olmadığını gösterelim.

Çözüm:

$$x \,\Delta\, (y \bigstar z) = (x \,\Delta\, y) \bigstar (x \,\Delta\, z)$$
$$x \,\Delta\, (2y + 2z) = (3xy) \bigstar (3xz)$$
$$3x(2y + 2z) = 2(3xy) + 2(3xz)$$
$$6xy + 6xz = 6xy + 6xz$$

bulunur. Aynı biçimde $x \,\Delta\, (y \bigstar z) = (x \,\Delta\, y) \bigstar (x \,\Delta\, z)$ olduğundan "★" işleminin "Δ" işlemi üzerinde dağılma özelliği vardır.

1.7. Not: Doğal, tam, rasyonel ve reel sayılarda toplam işlemi çarpma işlemi üzerinde dağılma özelliği vardır.

MATEMATİKSEL YAPILAR

Matematikteki işlemlerde, sınıflandırılma yapılmaya çalışılmıştır. Bu alanda ilk çalışmayı Norveçli matematikçi Niels Henrik Abel tarafından yapıldığını görmekteyiz. Bu sınıflandırma çalışmaların sayısı çok fazladır. Soyut Cebir derslerinde genellikle şu üç yapı üzerinde durmaya çalışır.

1 – Grup
2 – Halka
3 – Cisim

ÇÖZÜMLÜ ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki kümelerin hangisi kare alma işlemine göre kapalı değildir?

A) $\{x :\ x \text{ çift sayı}\}$ B) $\{x : x \text{ tek sayı}\}$ C) $\{x : x \in \mathbb{N}\}$
D) $\{-1, 0, 1\}$ E) $\{-1,\ 2, -3, 4, -5, \dots\}$

Çözüm: Bir işlemde kapalılık olması için bütün tanımlanan işlemin her elemanı o kümenin elemanı olmalıdır.

$$(-1)^2 = 1 \notin E$$

olduğundan E kapalı değildir.

Cevap: E

2. A={x, y, z} kümesi veriliyor. $\forall$ x,y $\in$ A için x♥y aşağıdaki tablodaki gibi tanımlanıyor.

♥	x	y	z
x	x	y	z
y	y	z	x
z	z	x	y

Aşağıdakilerden hangisi, bu işlem için yanlıştır.

A) İşlemin değişme özelliği vardır.
B) Küme bu işleme göre kapalıdır.
C) İşleme göre bir etkisiz eleman vardır.
D) İşlemin dağılma özelliği vardır.
E) Her elemanın işleme göre tersi vardır.

Çözüm: Dağılma özelliği iki işlem üzerinde yapılır. Hâlbuki burada sadece ♥ işlemi tanımlanmıştır.

Cevap: D

3. $\forall$ x,y $\in \mathbb{R}$, $x \star y = x + yxy$ işlemi için aşağıdaki önermelerden hangisi yanlıştır?

A) $\mathbb{R}$ kümesi işleme göre kapalıdır.
B) Birim eleman vardır.
C) Her elemanın tersi vardır.
B) Değişmelidir.
E) Birleşme özelliği vardır.

Çözüm:
A) Her x,y $\in \mathbb{R}$ için $x \star y = x + y + xy \in \mathbb{R}$ olduğundan kapalıdır.

B) $x \star e = x + e + xe = x$
$e(1 + x) = 0$
$e = 0$
olup 0 birim elemandır.

C) $x \star x^{-1} = x + x^{-1} + x\,x^{-1} = e = 0$

$$x^{-2} = \frac{-x}{1+x}$$

dir. Ama $x = -1$ için ters eleman yoktur.
D) $x \star y = x + y + xy = y + x + yx = y \star x$ olduğundan değişmelidir.
E) $x \star (y \star z) = x \star (y + z + yz)$

$$
\begin{aligned}
&= x + y + z + yz + x(y + z + yz)\\
&= x + y + z + yz + xy + xz + xyz\\
&= (x + y + xy) + z + (x + y + xy)z\\
&= (x + y + xy) \star z\\
&= (x \star y) \star z
\end{aligned}
$$

olup birleşme özelliği vardır.

Cevap: C

4. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ kümesinde

$p * q = \min(p;\ q)$

ile tanımlı "$*$" işleminin birim elemanı nedir?

A) 5 B) 4 C) 3 D) 1 E) 1

Çözüm:
$$
\begin{aligned}
1 * 5 &= \min(1;5) = 1\\
2 * 5 &= \min(2;5) = 2\\
3 * 5 &= \min(3;5) = 3\\
4 * 5 &= \min(4;5) = 4\\
5 * 5 &= \min(5;5) = 5
\end{aligned}
$$

olduğundan birim eleman 5 dir.

Cevap: A

5. $\diamond$ işlemi Harmonik ortalama olan $a \diamond b = \frac{2ab}{a+b}$ olarak tanımlanırsa $7 \diamond 3$ ün değeri nedir?

A) 4,1 B) 4,2 C) 4,3 D) 4,4 E) 4,5

Çözüm: $a \diamond b = \frac{2ab}{a+b} = \frac{2\cdot7\cdot3}{7+3} = 4{,}2$

Cevap: B

6. Reel sayılar kümesi üzerinde her a, b için $a \Delta b = ab + 2$ işlemi tanımlanmıştır. Buna göre, $4 \Delta 5 = 2 \Delta m$ eşitliğinde m sayısı kaçtır?

A) 3 B) 6 C) 8 D) 10 E) 12

Çözüm: $4 \Delta 5 = 2 \Delta m$

$4 \cdot 5 + 2 = 2m + 2$

$m = 10$

$9m+3=10m$
$m=3$

Cevap: D

7. Her a, b için
$a \bullet b = a^b - b^a$
işlemi tanımlanmıştır. Buna göre, $(2 \bullet 3) \bullet 1$ işleminin sonucu kaçtır?

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

Çözüm: $2 \bullet 3 = 2^3 - 3^2 = -1$
$-1 \bullet 1 = (-1)^1 - 1^{(-1)} = -2$

Cevap: A

8. Reel sayılar kümesi üzerinde her x ve y için
$x * y = \frac{1}{2}xy$
işleminin birim elemanı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: $x * e = x$
$\frac{1}{2}xe = x$
$e = 2$

Cevap: B

9. Reel sayılar kümesi üzerinde her a ve b için
$a \heartsuit b = a + b - 5(a \heartsuit b)$
işlemi tanımlanmıştır. Buna göre, $8 \heartsuit 4$ değeri kaçtır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Çözüm: $8 \heartsuit 4 = 8 + 4 - 5(8 \heartsuit 4)$
$6(a \heartsuit b) = 12$
$a \heartsuit b = 2$

Cevap: C

10. Reel sayılar kümesi üzerinde her x, y için

$$x \bullet y = xy + x + y$$

işlemi tanımlanmıştır. Buna göre, 1'in $\bullet$ işlemine göre tersi kaçtır?

A) 2 B) 1 C) 0 D) $-\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{2}$

Çözüm:

Birim eleman $x \bullet e = x$

$xe + x + e = x$

$e = 0$

Ters eleman $1 \bullet 1^{-1} = 0$

$1 \cdot 1^{-1} + 1 + 1^{-1} = 0$

$1^{-1} = -\frac{1}{2}$

Cevap: E

11. Her x reel sayısı için $\wr\, x = x + 3$ biçiminde $\wr$ işlemmi tanımlanıyor.

$$\wr\,(a-1) = 2 \wr a + 3$$

denklemini sağlayan a değeri kaçtır?

A) -9 B) -8 C) -7 D) -6 E) -5

Çözüm: $\wr\,(a-1) = 2 \wr a + 3$

$(a-1) + 3 = 2(a+3) + 3$

Cevap: C

12. Pozitif tamsayılar kümesi üzerinde $*$ ve Δ işlemleri,

$$x * y = 2x + 2y,\ x \,\Delta\, y = 2xy$$

şeklinde tanımlanıyor. $a \,\Delta\, (a * 1) = 8$ olduğuna göre, a'nın değri kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: $a \,\Delta\, (2a + 2 \cdot 1) = 8$

$2a\,(2a + 2) = 8$

$a(a+1) = 2$

$a^2 + a - 2 = 0$

$a = -2$ ve $a = 1$

Cevap: A

13. {e, a, b, c, d} kümesi üzerinde $\bullet$ işlemi aşağıdaki tablo ile verilmiştir.

$\bullet$	e	a	b	c	d
e	e	a	b	c	d
a	a	b	c	d	e
b	b	c	d	e	a
c	c	d	e	a	b
d	d	e	a	b	c

Bu işlemin birleşme özeliği bulunduğu bilindiğine göre, $c^5 = c \bullet c \bullet c \bullet c \bullet c$ ne olur?

A) a B) b C) c D) d E) e

Çözüm: Tabloda baş satır ve baş sütunun aynısı olan e satır ve sütun olduğundan e sayısı birim elemandır.

$c^5 = c \bullet c = a$
$c \bullet a = d$
$c \bullet d = b$
$c \bullet b = e$

Cevap: E

14. Reel sayılar kümesi üzerinde tanımlı $*, \Delta, \bullet$ işlemleri

I. $a * b = a - b$
II. $a \,\Delta\, b = a + b + 4ab$
III. $a \bullet b = 3a + 2b$

biçiminde tanımlanıyor. Buna göre, bu işlemlerden hangileri değişmelidir?

A) Yalnız I B) Yalnız II C) Yalnız III D) I ve II E) II ve III

Çözüm: Her a, b reel sayıları için;

I. $a * b = (?)\ b * a$
$a - b \neq b - a$
değişmeli değildir.

II. $a \,\Delta\, b = (?)\ b \,\Delta\, a$
$a + b + 4ab = b + a + 4ba$
değişmelidir.

II. $a \bullet b = (?)\ b \bullet a$

$3a + 2b = (?)\ 3b + 2a$
$a \neq b$
değişmeli değildir.

Cevap: B

15. Reel sayılar kümesi üzerinde $*$ işlemi

$$a * b = \begin{cases} 3a - 2b\ , & a \geq b \\ a + 4b\ , & ab \end{cases}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Buna göre, $(2 * 1) * 5$ işleminin sonucu kaçtır?

A) 20 B) 22 C) 23 D) 24 E) 25

Çözüm: $2 > 1$ ise $3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 = 4$
$4 < 5$ ise $4 + 4 \cdot 5 = 24$

Cevap: D

16. Reel sayılar kümesi üzerinde her x, y için

$$x \,\Delta\, y = x^2 y + x - y$$

işlemi veriliyor. Her $a \neq b$ için değişme özelliği olduğuna göre $a \cdot b$ çarpımı kaçtır?

A) 2 B) 1 C) 0 D) −1 E) −2

Çözüm: $a \,\Delta\, b = b \,\Delta\, a$
$a^2 b + a - b = b^2 a + b - a$
$a^2 b - b^2 a + 2a - 2b = 0$
$ab(a - b) + 2(a - b) = 0$
$(a - b)(ab + 2) = 0$
$a = b$ ve $ab = -2$
dir.

Cevap: A

17. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ kümesi üzerinde tanımlı Δ bir işleminin tablosu aşağıda verilmiştir.

Δ	1	2	3	4	5
1	5	1	2	3	4
2	4	5	1	2	3
3	3	4	5	1	2
4	2	3	4	5	1
5	1	2	3	4	5

$(3 \Delta 4) \Delta (2 \Delta 5) \Delta 1$ işleminin sonucu nedir? (Bu işlemde birinci eleman baş sutundan, ikinci eleman baş satırdan alıncaktır)

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: $(3 \Delta 4) \Delta [(2 \Delta 5) \Delta 1]$
$1 \Delta [3 \Delta 1]$
$1 \Delta 3$
2

Cevap: B

18. Reel kümesi üzerinde bir $\star$ işlemi, her a ve b için
$$a \star b = a + b - 3$$
biçiminde tanımlanıyor. Bu işlemin birim elemanı kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: $a \star e = a$
$a + e - 3 = a$
$e = 3$
ve $e \star a = a$ da da $e = 3$ bulunur.

Cevap: C

KAYNAKÇA

1. Doç. Dr. Mustafa BAYRAKTAR, Soyut Cebir ve Sayılar Teorisi, Atatürk Üniversitesi Basımevi, Erzurum, 1988.
2. Doç. Dr. Neşe YELKENKAYA, Sayılar Teorisi Ders Notları, İstanbul Kültür Üniversitesi, İnternet Ders Notları, 2020.
3. Prof. Dr. Bülent KARAKAŞ, Yrd. Doç. Dr. Hacı AKTAŞ, Sayılar Teorisi, Gaziosmanpaşa Üniversitesi Yayınları, Tokat, 1998.
4. Sait AKKAŞ, H. Hilmi HACISALİHOĞLU, Zühtü ÖZEL, Arif SABUNCUOĞLU, Soyut Matematik, 4. Baskı, 2010, Ankara.

5. Prof. Dr. Şenol EREN, Soyut Cebir Ders Notları, Ondokuz Mayıs Üniversitesi, İnternet Ders Notları, 2021.
6. Doç. Dr. Sebahattin BALCI, Modern Cebire Giriş, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi, Döner Sermaye İşletmeleri Yayınları No:15, 1993, Ankara.
7. Soyut Cebir ve Sayılar Teorisi-Çözümlü Problemlerle, Prof. Dr. Mehmet ERDOĞAN Yrd. Doç. Dr. Gülşen YILMAZ, Beykent Üniversitesi Yayınevi, 2008, İstanbul.
8. Yrd. Doç. Hüseyin BİLGİÇ, Soyut Cebir ders notları, Kahramanmaraş Sütçü ⍰mam Üniversitesi, 2012, Kahramanmaraş.
9. H. İbrahim KARATAŞ, Soyut Cebir ders notları, Başkent Üniversitesi, 2010, Ankara.