# 4. BÖLÜM
# ALTGRUPLAR

Bu bölümde ve sonraki bölümlerde işlem olarak ★ gibi semboller kullanılmayacak, onun yerine herhangi bir işaret gösterilmeyecektir. Bazen ihtiyaca binaen $\oplus$ veya $\odot$ sembolleri kullanılacaktır. $(G,\star)$ gösterimi yerine sadece G yazılacaktır.

## ALTGRUP KAVRAMI

**4.1. Tanım:** G bir grup ve H'de G'nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. Eğer H kümesi G'de tanımlanan grup işlemi ile bir grup oluyorsa H'ye G'nin bir altgrubu denir ve $H \leq G$ ile gösterilir.

**Örnek:** $(\mathbb{Q}\backslash\{0\},.)$ grubu $(\mathbb{R}\backslash\{0\},.)$ grubunun altgrubudur.

**Örnek:** $(G,.)$ grubu $A=\{1,-1,i,-i\}$ kümesinde ve $B=\{1,-1\}$ kümesi üzerinde olsun. B kümesi kapalıdır, birleşme özelliği vardır, $e=1\in B$ dir ve $1^{-1}=1, (-1)^{-1}=-1$ olup her elemanın tersi yine B'dedir. O halde $B\leq A$ olur.

**Örnek:** $a\in\mathbb{Z}$ sabit bir tamsayı olmak üzere $(a\mathbb{Z},+)$ grubu $(\mathbb{Z},+)$ grubunun altgrubudur.

**Örnek:** $(\mathbb{Z},+)$ grubunda tek tamsayılar kümesi bir altgrup değildir, çünkü $3+5=8$ çifttir.

**4.2. Tanım:** Bir G grubunda birim eleman $\{e\}$ ve G kümeleri her zaman bir altgruptur. G ve $\{e\}$ kümeleri G'nin altgruplarına aşikâr (trivial) altgruplar denir.

**4.1. Not:** Değişmeli (Abelyen) bir grubun bütün altgrupları değişmelidir. Değişmeli olmayan bir grubun değişmeli olan bir altgrubu olabilir.

**4.3. Tanım:** Bir grubun kendisi ve birimi dışındaki altgruplarına o grubun öz altgrupları denir.

**Örnek:**
a) $(\{0\}, +)$ ile $(\mathbb{Z}, +)$ grupları $(\mathbb{Z}, +)$ grubunun öz altgrubudur.
b) $(\{1\}, \cdot)$ ile $(\mathbb{Q}, \cdot)$ grupları $(\mathbb{Q}, \cdot)$ grubunun öz altgrubudur.

**4.1. Teorem:** G bir grup $\varnothing \neq H \subseteq G$ olsun.

i) H'nin altgrup olması için gerek ve yeter şart her $a, b \in H$ için $ab^{-1} \in H$ olmasıdır.

ii) H sonlu ise, H'nin altgrup olması için gerek ve yeter şart her $a, b \in H$ için $ab \in H$ olmasıdır.

İspat: i) H bir altgrup olsun. $a, b \in H$ olsun. $b^{-1} \in H$ dur, çünkü H bir gruptur. H kapalı olduğundan $ab^{-1} \in H$ dur. Şimdi H'nin boş olmayan bir alt küme olduğunu ve her $a, b \in H$ için $ab^{-1} \in H$ olduğunu kabul edelim. $b = a$ seçersek $aa^{-1} = e \in H$ elde edilir. Burada de $a = e$ seçersek her $b \in H$ için $b^{-1} \in H$ elde edilir. $ab \in H$ olsun. $b^{-1} \in H$ olup $a(b^{-1})^{-1} = ab \in H$ elde edilir, yani H kapalıdır. Birleşme özelliği G'de olduğundan H'da da vardır. O halde H bir altgruptur.

ii) H bir altgrup olsun. H kapalı olduğundan her $a, b \in H$ için $ab \in H$ olduğu kolayca görülür. Şimdi H'nin boş olmayan sonlu ve kapalı bir altküme olduğunu kabul edelim. G'de birleşme özelliği olduğundan H da birleşmelidir. $H = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$, n elemanlı bir altküme olsun. $a_k \in H$ olsun. Şimdi

$$a_1a_k, a_2a_k, \cdots, a_na_k$$

elemanlarını düşünelim. H kapalı olduğundan bu elemanların hepsi H'ın elemanlarıdır. Bu elemanların hepsi birbirinden farklıdır. Çünkü eğer bir $i \neq j$ için $a_ia_k = a_ja_k$ olsaydı sağdan kısaltma kuralı gereğince $a_i = a_j$ olurdu. $i \neq j$ olup bu mümkün değildir. O halde $H = \{a_1a_k, a_2a_k, \cdots, a_na_k\}$ dir. $a_k \in H$ olup en az bir $1 \leq i \leq n$ için $a_k = a_ia_k$ olmalıdır. Yani $a_i = e$ olur ve $e \in H$ dur. Şimdi de, en az bir $1 \leq j \leq n$ için $a_i = a_ja_k$ olmalıdır. O zaman $(a_k)^{-1} = a_j$ bulunur. k'nın seçimi keyfî olduğundan H'daki her elemanın tersi vardır. Yani H bir altgruptur.

**Örnek:** G değişmeli bir grup ve $H \leq G$ olsun. $K = \{x \in G : \ x^2 \in H\}$ kümesi G'nin bir altgrubu mudur?

Çözüm: Her $a, b, \in K$ için $a^2 b^{-2} \in H$ olacağından K bir altgruptur.

**4.2. Not:** Bir G grubunda sonsuz elemanlı bir H alt kümesinin kapalı olması altgrup olması için yeterli değildir. Bunu bir örnek ile gösterelim; $G = (\mathbb{R} \backslash \{0\}, .)$ grubunda $H = \{1, 2, 3, \cdots\}$ kümesi kapalıdır ama bir altgrup değildir.

**Örnek:** G, $2 \times 2$ boyutunda tersi olan reel matrislerin grubu olsun.

$$H = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} : ab \neq 0 \right\}$$

olsun. $H \leq G$ dir.

Çözüm: $X = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \in H, Y = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \in H$ alalım. $ab \neq 0, \ cd \neq 0$ dır.

$$Y^{-1} = \begin{bmatrix} 1/c & 0 \\ 0 & 1/d \end{bmatrix}$$

olacağından

$$XY^{-1} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a/c & 0 \\ 0 & b/d \end{bmatrix}, (ab \neq 0, cd \neq 0)$$

dir. $H \leq G$ olur.

**Örnek:** G bir grup $H \subseteq G$ olsun. $M(H) = \{a \in G : \ aHa^{-1} = H\} \leq G$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $M(H) \leq G$ olduğunu göstermek için öncelikle $M(H) \neq \emptyset$ dir. G bir grup ise $e \in G$ vardır. $H \subseteq G$ olduğundan her $h \in H$ için her $h \in G$ olur.

$$eh = he = h \Rightarrow eH = He \Rightarrow eHe^{-1} = H \Rightarrow e \in M(H)$$

$M(H) \subseteq G$ için $M(H)$ in tanımdan açıktır. Her $a, b \in M(H)$ için $ab^{-1} \in M(H)$ olduğunu göstermeliyiz.

$$(ab^{-1})H(ab^{-1})^{-1} = ab^{-1}Hba^{-1} = aHa^{-1} = H$$

olup $M(H) \leq G$ dir.

**4.2. Teorem:** Bir G grubunun sonlu sayıdaki altgruplarının kesişimi de G'nin bir altgrubudur.

İspat: $H_1, H_2, \cdots, H_n$ , G'nin altgrupları

$$H = H_1 \cap H_2 \cap \cdots \cap H_n = \bigcap_{i=1}^{n} H_i$$

biçiminde olsun. $a, b \in H$ ve $H_i \leq G$ için

Her $1 \leq i \leq n$ için $a, b \in H_i$
Her $1 \leq i \leq n$ için $ab^{-1} \in H_i$
$ab^{-1} \in H_1 \cap H_2 \cap \cdots \cap H_n$

olup H bir altgruptur.

**4.3. Not:** Benzer şekilde; sonsuz çokluktaki altgrupların kesişiminin de bir altgrup olduğunu gösterir. Ama altgrupların birleşimi altgrup olmayabilir. Buna bir örnek ile göstereli, $(\mathbb{Z}, +)$ grubunda $2\mathbb{Z}$ ve $3\mathbb{Z}$ altgruplarının birleşimi altgrup değildir. Gerçekten $2{,}3 \in 2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z}$ olup $2 + 3 = 5 \notin 2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z}$ olduğundan kapalılık özelliği yoktur.

**4.4. Tanım:** G bir grup, H ve K'da G'nin boş olmayan iki alt kümesi olsun.

i) $HK = \{hk : h \in H,\ k \in K\}$ kümesine H ile K'nın çarpımı denir. Eğer toplamsal durum söz konusuysa $H + K = \{h + k : h \in H,\ k \in K\}$ biçiminde olur. Eğer $H = \{a\}$ bir elemanlı küme ise $\{a\}K$ yerine kısaca $aK$, benzer şekilde $K\{a\}$ yerine kısaca $Ka$ yazılır.

ii) $H^{-1} = \{h : h \in H\}$ kümesine H'nin ters kümesi denir.

**4.3. Teorem:** G, bir grup $A, B, C, D \subset G$ olsun. Bu kümeler üzerinde tanımlanan çarpma işlemi aşağıdaki özelliklere sahiptir:
i) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
ii) $\{e\} \subseteq AA^{-1}$ dir. Eğer A bir elemanlı ise $AA^{-1} = \{e\}$ dir.
iii) $A \subseteq B$ ve $C \subseteq D$ ise $AC \subseteq BD$ dir.
v) $A \subseteq B$ ise $A^{-1} \subseteq B^{-1}$

İspat okuyucuya bırakılmıştır.

**4.4. Teorem:** Bir G grubunun boş olmayan bir H alt kümesinin bir altgrup olması için gerek ve yeter şart $HH^{-1} \subseteq H$ olmasıdır. (Eğer H sonlu ise bu şart $HH \subseteq H$ şeklini alır.)

İspat: $HH \subseteq H \Leftrightarrow \forall\, a, b \in H, ab^{-1} \in H$ olduğu açıktır. Bu da 4.1. Teoremin şartıdır.

**DEVİRLİ ALTGRUPLAR**

**4.5. Teorem:** Bir devirli grubun her altgrubu devirlidir.

İspat: $G = \langle a \rangle$ mertebesi n olan bir devirli grup ise G'nin altgruplarının sayısı n'nin pozitif bölenleri kadardır. n'yi bölen her m pozitif tam sayısı için mertebesi m olan sadece bir altgrup vardır ve bu altgrup $\langle a^{n/m} \rangle$ dir.

**Örnek:** $G = \langle a \rangle$ mertebesi 24 olan bir devirli grup olsun. Yani $G = \{e, a, a^2, a^3, \cdots, a^{23}\}$ dir. 24 sayısının bölenleri {1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24} olup G'nin 8 tane altgrubu vardır. Buna göre G'nin n-elemanlı altgrubunu $C_n$ ile gösterirsek bu altgruplar şunlardır:

$C_1 = \langle a^{24/1} \rangle = \langle e \rangle = \{e\}$
$C_2 = \langle a^{24/2} \rangle = \langle a^{12} \rangle = \{e, a^{12}\}$
$C_3 = \langle a^{24/3} \rangle = \langle a^{8} \rangle = \{e, a^8, a^{16}\}$
$C_4 = \langle a^{24/4} \rangle = \langle a^{6} \rangle = \{e, a^6, a^{12}, a^{18}\}$
$C_6 = \langle a^{24/6} \rangle = \langle a^{4} \rangle = \{e, a^4, a^8, a^{12}, a^{16}, a^{20}\}$
$C_8 = \langle a^{24/8} \rangle = \langle a^{3} \rangle = \{e, a^3, a^6, a^9, a^{12}, a^{15}, a^{18}, a^{21}\}$
$C_{12} = \langle a^{24/12} \rangle = \langle a^{2} \rangle = \{e, a^2, a^4, a^6, a^8, a^{10}, a^{12}, a^{14}, a^{16}, a^{18}, a^{20}, a^{22}\}$
$C_{24} = \langle a^{24/24} \rangle = \langle a \rangle = \{e, a, a^2, a^3, \cdots, a^{23}\} = G$

**4.6. Teorem:** $\langle a \rangle$ bir sonsuz devirli grup ise her altgrubu da devirlidir.

İspat: $H \le \langle a \rangle$ olsun. 4.5. teoremden $a^s \in H$ olan en küçük pozitif tamsayı s ise $H \le \langle a^s \rangle$ dir. $\langle a \rangle$ sonsu< devirli olduğundan a'nın bütün pozitif kuvvetleri, dolayısıyla $a^s$ nin bütün kuvvetleri birbirinden farklıdır. O halde $H = \langle a^s \rangle$ sonsuz devirli gruptur.

**4.7. Teorem:** $\langle a \rangle$, t-inci mertebeden devirli grup ise her altgrubun mertebesi t'yi böler ve t'nin her pozitif q böleni için mertebesi q olan bir ve yalnız bir altgrubu vardır.

İspat: $\langle a\rangle = \{a, a^2, \dots, a^t = e\}$ ve $H \leq \langle a\rangle$ olsun. $a^s \in H$ şartını sağlayan en küçük pozitif tamsayı s ise $H = \langle a^s\rangle$ dir. Şimdi $s \mid t$ olduğunu gösterelim.
$t = sq + r, 0 \leq r < s, \exists\, r, q \in \mathbb{Z}$ yazalım.

$$e = a^t = (a^s)^q a^r \Leftrightarrow a^r = (a^s)^{-q} \in H$$

dır. Bu ise ancak $r = 0$ olması ile mümkündür, yani $s \mid t$ dir.

Eğer $t = sq$ ise $H = \langle a^s\rangle$ için mertebesi $q = t/s$ olur. Çünkü $t = sq$ sayısı $a^t = e$ yapan en küçük pozitif tamsayıdır. Dolayısıyla $a^t = (a^s)^q = e$ yapan en küçük pozitif tamsayı q'dur. O hadle $o(H) = q$ bulunur. $q \mid t$ ise $t = sq$ için s teklikle belirlidir.

**4.5. Tanım:** G bir grup, $\emptyset = K \subseteq G$ olsun. G'nin K'yı içeren bütün altgruplarının ara kesitine K tarafından üretilen altgrup denir ve $\langle K\rangle$ ile gösterilir. Yani

$$\langle K\rangle = \bigcap\{H : H \leq G, K \subset H\}$$

dir. Tanımdan anlaşıldığı gibi, $\langle K\rangle$ altgrubu K'yi içeren en küçük altgruptur. Eğer $\langle K\rangle = G$ ise bu durumda K'ya G'nin üretici kümesi denir.

**Örnek:** $\mathbb{Z}_{12} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \cdots, \overline{11}\}$ grubunda bazı kümeler tarafından üretilen altgruplar sorulmaktadır. Bunun için $\mathbb{Z}_{12}$'nin bütün altgrupları hesaplanmalıdır. $\mathbb{Z}_{12}$ devirli olduğundan, bir önceki teoreme göre, bu altgruplar 6 tanedir:

$H_1 = \{\overline{0}\}$, $H_2 = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10}\}$, $H_3 = \{\overline{0}, \overline{3}, \overline{6}, \overline{9}\}$,
$H_4 = \{\overline{0}, \overline{4}, \overline{8}\}$, $H_5 = \{\overline{0}, \overline{6}\}$, $H_2 = \mathbb{Z}_{12}$

Buna göre K kümeleri ve $\langle K\rangle$ altgrupları şöyle hesaplanır.
$K = \{\overline{6}, \overline{8}\} \Rightarrow \langle K\rangle = H_2$
$K = \{\overline{4}, \overline{8}\} \Rightarrow \langle K\rangle = H_2 \cap H_4 = H_4$
$K = \{\overline{6}\} \Rightarrow \langle K\rangle = H_2 \cap H_3 \cap H_5 = H_5$
$K = \{\overline{3}, \overline{5}\} \Rightarrow \langle K\rangle = H_2 \cap H_4 = \mathbb{Z}_{12}$

**4.8. Teorem:** G bir grup, $\emptyset = K \subseteq G$ olsun. $\langle K\rangle$ altgrubu K'daki elemanların tamsayı kuvvetlerinin bütün muhtemel çarpımlarından oluşan kümedir.

$$\langle K\rangle = \{k_1^{\alpha_1} k_2^{\alpha_2} \cdots k_n^{\alpha_n} : k_i \in K, a_i \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$$

İspat: $U = \{k_1^{\alpha_1} k_2^{\alpha_2} \cdots k_n^{\alpha_n} : k_i \in K, a_i \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ diyelim ve $U = \langle K\rangle$ olduğunu gösterelim. $u \in U$ alalım. O halde u, K'daki elemanların çarpımı şeklindedir. K'yı içeren her H altgrubu K'daki elemanların çarpımlarını da içereceğinden $u \in H$ olmalıdır. $\langle K \rangle$ ise K'yı içeren altgrupların kesişimi olduğundan $u \in \langle K \rangle$ olur. Yani $U \subset \langle K \rangle$ dır. Burada $x, y \in U$ alalım. O halde

$$x = k_1^{a_1} k_2^{a_2} \cdots k_n^{a_n},\ y = t_1^{b_1} t_2^{b_2} \cdots t_m^{b_m}$$

şeklindedir. Burada

$$xy^{-1} = k_1^{a_1} k_2^{a_2} \cdots k_n^{a_n} t_1^{-b_1} t_2^{-b_2} \cdots t_m^{-b_m}$$

olup $xy^{-1} \in U$ olduğu açıktır. O halde 4.1. teoremi gereğince $U \leq G$ dir. Ayrıca her $k \in K$ için $k = k^{-1} \in U$ olup; U, K'yı içeren bir altgruptur. Yani $K \subseteq U \subseteq G$ dir. Bu durumda $\langle K \rangle$ 'nın tanımından $\langle K \rangle \subseteq U$ olur.

**4.1. Sonuç:** Eğer $K = \{a\}$ bir elemanlı ise $\langle K \rangle = \langle \{a\} \rangle = \langle a \rangle = \{a^n : n \in \mathbb{Z}\}$ olup bu tanım “bir eleman tarafından üretilen altgrup” tanımı ile aynı olur. Gerçekten 4.8. teoremde gereği,

$$\begin{aligned} \langle a \rangle &= \{a^{\alpha_1} a^{\alpha_2} \ldots a^{\alpha_n} : a_i \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\} \\ &= \{a^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n} : a_i \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\} \\ &= \{a^n : n \in \mathbb{N}\} \end{aligned}$$

bulunur. Bu sonuç toplamsal grup üzerine inşa edilirse,

$$\langle a \rangle = \{na : n \in \mathbb{Z}\}$$

biçiminde olur.

**Örnek:** $S_3$ grubunda $K = \{f_3, f_4\}$ tarafından üretilen altgrubu bulalım. $(f_3)^2 = f_1 (f_4)^2 = f_5$ dir. Ayrıca $f_3 f_4 = f_6$ ve $f_4 f_3 = f_2$ olup $f_3$ ve $f_4$ kullanılarak $S_3$ deki bütün elemanlar elde edilebilir. Yani $\langle f_3, f_4 \rangle = S_3$ olup $\{f_3, f_4\}$ kümesi $S_3$ için bir üreteci kümesidir.

**4.9. Teorem:** $G = \langle a \rangle$, n. mertebeden devirli grup olsun. $a^s$ nin üreteç olması için gerek ve yeter şart $OBEB(s, n) = 1$ olmasıdır.

İspat: $\Rightarrow$: $G = \langle a \rangle = \langle a^s \rangle$ olsun. $a \in \langle a^s \rangle \Leftrightarrow a = (a^s)^t, \exists t \in \mathbb{N}$ olur. $a^{st-1} = e$ ve $n \mid st - 1$ bulunur. $st - 1 = ny$ ve $st - ny = 1$ olup $OBEB(s,n) = 1$ bulunur.

$\Leftarrow$: $OBEB(s,n) = 1$ olsun. $sx + ny = 1, \exists x,y \in \mathbb{Z}$ vardır.

$$a = a^{sx+ny} = a^{sx} = (a^s)^x \Leftrightarrow a \in \langle a^s \rangle$$

olup $G = \langle a \rangle \subseteq \langle a^s \rangle$ bulunur. Dolayısıyla $\langle a \rangle = \langle a^s \rangle$ dir.

**4.10. Teorem:** $G = \langle a \rangle$, sonsuz devirli bir grup ise üreteçleri $a$ ve $a^{-1}$ dir.

İspat: $a^s$, $G = \langle a \rangle$ nın bir üretici ise $(a^s)^x = a$ olacak şekilde $\exists\ x \in \mathbb{Z}$ bulunabilirdi. $\langle a \rangle$ sonsuz devirli grup olduğundan $sx = 1$ yan, $s = \mp 1$ dir.

## SAĞ ve SOL KOSETLER (EŞKÜMELER)

**4.6. Tanım:** G bir grup, $H \leq G$ olsun. Bir $a \in G$ için

$$Ha = \{ha : h \in H\} \text{ ve } aH = \{ah : h \in H\}$$

kümelerine sırasıyla H'nin G'deki sağ ve sol kosetleri denir. Koset kelimesi yerine yansınıf veya eşküme terimleri de kullanılmaktadır.

**Örnek:** $S_3$ grubunda $H = \langle f_2 \rangle = \{f_4, f_6\}$ alalım. H'nin sağ kosetlerini bulalım.

$$Hf_1 = \{f_1 f_1, f_2 f_1\} = \{f_1, f_2\}$$
$$Hf_2 = \{f_1 f_2, f_2 f_2\} = \{f_2, f_1\}$$
$$Hf_3 = \{f_1 f_3, f_2 f_3\} = \{f_3, f_4\}$$
$$Hf_4 = \{f_1 f_4, f_2 f_4\} = \{f_4, f_3\}$$
$$Hf_5 = \{f_1 f_5, f_2 f_5\} = \{f_5, f_6\}$$
$$Hf_6 = \{f_1 f_6, f_2 f_6\} = \{f_6, f_5\}$$

Burada 3 tane farklı sağ koset vardır. Sağ kosetlerin her birinde aynı sayıda eleman olup bu sağ kosetler ayrıktırlar. Bunun bir tesadüf olmadığını göstereceğiz. Aslında sağ kosetlerin bir denklik bağıntısının belirlediği denklik sınıfları olduğunu (dolayısıyla ayrık olduğunu) ve iki sağ kosette aynı sayıda eleman olması gerektiğini göstereceğiz.

**4.7. Tanım:** G bir grup, $H \leq G$ olsun. Eğer $a, b \in G$ için $ab^{-1} \in H$ ise a elemanı b'ye modülü H eşdeğerdir denir ve $a \equiv b (\text{mod } H)$ yazılır.

**4.11. Teorem:** G bir grup, $H \leq G$ olsun. Eşdeğerlilik olan $a \equiv b (\text{mod } H)$ bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

İspat: i) Her $a \in G$ için $aa^{-1} = e \in H$ olup $a \equiv a\ (\text{mod } H)$ dir. Yani bağıntı yansıyandır.

ii) $a \equiv b\ (\text{mod } H)$ yani $ab^{-1} \in H$ olsun. H bir altgrup olduğundan $(ab^{-1})^{-1} = ba^{-1}$ dir. O halde $b \equiv a\ (\text{mod } H)$ olup bağıntı simetriktir.

iii) $a \equiv b \pmod H$ ve $b \equiv a \pmod H$ olsun. Yani $ab^{-1} \in H$ ve $bc^{-1} \in H$ dir. O zaman $(ab^{-1})(bc^{-1}) = ac^{-1} \in H$ olur. Buradan $a \equiv c \pmod H$ olup bağıntı geçişkendir.

**4.12. Teorem:** G bir grup $H \leq G$ olsun. Her $a \in G$ için

$$Ha = \{x \in G : a \equiv x \pmod H\}$$

dir.

İspat: $A = \{x \in G : a \equiv x \pmod H\}$ diyelim. $Ha = A$ olduğunu göstermeliyiz. Önce $Ha \subseteq A$ olduğunu gösterelim. $h \in H$ olmak üzere $x = ha \in Ha$ alalım. Şimdi $H \leq G$ olduğundan

$$ax^{-1} = a(ha)^{-1} = aa^{-1}h^{-1} = eh^{-1} = h^{-1} \in H$$

olup $a \equiv x \pmod H$ olur. A'nın tanımından $x \in A$ olur. Yani $Ha \subseteq A$ dır.

Şimdi de $A \subseteq Ha$ olduğunu gösterelim.

$x \in A \Rightarrow a \equiv x \pmod H$

$\Rightarrow ax^{-1} \in H$

$\Rightarrow$ H bir altgrup olduğundan $(ax^{-1})^{-1} = xa^{-1} \in H$

$\Rightarrow \exists\, h \in H, xa^{-1} = h$

olup $A \subseteq Ha$ olduğu görülür. Sonuç olarak $A = Ha$ elde edilir.

**4.13. Teorem:**

i) $Ha = H \Leftrightarrow a \in H$

ii) $Ha = Hb \Leftrightarrow ab^{-1} \in H$

İspat: i) $\exists\, h_1, h_2 \in H$ için $h_1 a = h_2$ olup H altgrup olduğundan $a = h_1^{-1}h_2 \in H$ dır.

Şimdi $a \in H$ kabul edelim ve $Ha = H$ olduğunu gösterelim. $x \in Ha$ alalım. O halde $\exists\, h \in H$ için $x = ha$ şeklindedir. $h, a \in H$ olup H kapalı olduğundan $x = ha \in H$ olduğu açıktır. Yani $Ha \subset H$ dir.

Şimdi de $x \in H$ alalım. $x = (xa^{-1})a \in Ha$ dır, çünkü H altgrup olduğundan $xa^{-1} \in H$ dir. Yani $H \subset Ha$ dır.

O halde $Ha = H$ elde edilir.

ii) (i) özelliğinden

$$Ha = Hb \Leftrightarrow Hab^{-1} = H \Leftrightarrow ab^{-1} \in H$$

bulunur.

**4.4. Not:** Ha sağ kosetindeki elemanların a'ya modülü H eşdeğer olan elemanlar olduğunu gösterdik. Eğer $a \equiv b \pmod{H}$ olmanın tanımı $ab^{-1} \in H$ şeklinde verilseydi a'ya modülü H eşdeğer olan elemanların kümesi aH sol koseti olurdu.

**4.14. Teorem:** G bir grup, $H \leq G$ olsun. H'nin iki sağ (sol) koseti arasında birebir bir ilişki vardır.

İspat: İspatı sağ koset için yapacağız. $a, b \in G$ ve Ha ve Hb'de H'nin iki sağ koseti olsun. $f : Ha \to Hb$ dönüşümü $f(ha) = hb$ şeklinde tanımlansın.

$$f(h_1a) = f(h_1a) \Rightarrow h_1b = h_2b \Rightarrow h_1 = h_2 \Rightarrow h_1a = h_2a$$

olup f birebirdir.

Öte taraftan $hb \in Hb$ verilsin. $x = ha$ seçilirse $f(x) = f(ha) = hb$ olup f örtendir.

**4.2. Sonuç:** İki sağ (sol) koset aynı sayıda elemana sahiptir. $H = He$ olup H ile sağ (sol) kosetlerin eleman sayıları aynıdır. Aynı zamanda iki sağ koset ya aynıdır ya da ayrıktır, yani $Ha = Hb$ veya $Ha \cap Hb = \emptyset$ dır. Sağ kosetlerin birleşimi de G'yi verir:

$$G = H \cup Ha_1 \cup Ha_2 \cup \ldots \cup Ha_n$$

olur.

**4.15. Teorem:** G bir grup, $H \leq G$ olsun. H'nin G içindeki tüm sol kalan sınıfları ile tüm sağ kalan sınıfları kümesi arasında birebir eşleme vardır.

İspat: $L = \{aH \mid a \in G\}$, $R = \{Ha \mid a \in G\}$ olsun. Her $aH \in L$ için $f(aH) = Ha^{-1}$ ile $f : L \to R$ dönüşümünü tanımlayalım. $a_1H = a_2H$ olsun.

$$a_2^{-1}(a_1^{-1})^{-1} = a_2^{-1}a_1 \in H$$
$$Ha_2^{-1} = Ha_1^{-1}$$

olup f iyi tanımlıdır. Her $aH, bH \in L$ için $f(aH) = f(bH)$ olsun.

$$\begin{aligned} f(aH) = Ha^{-1} = Hb^{-1} = f(bH) &\Rightarrow a^{-1}(b^{-1})^{-1} \in H \\ &\Rightarrow a^{-1}b \in H \\ &\Rightarrow b^{-1}a = (a^{-1}b)^{-1} \in H \\ &\Rightarrow aH = bH \end{aligned}$$

olup f, 1-1 dir. Her $Ha \in R$ için $Ha = H(a^{-1})^{-1} = f(a^{-1}H)$, $a^{-1}H \in L$ olup f örtendir.

**4.8. Tanım:** G bir grup, $H \leq G$ olsun. H'nin G'deki farklı sağ kosetlerinin sayısına H'nin G'deki indeksi denir ve $o(G : H)$ şeklinde gösterilir. Örneğin, $o(S_3 : \langle f_2 \rangle) = 3$ dür.

Joseph Louis Lagrange
25 Ocak 1736, Torino, İtalya - 10 Nisan 1813, Paris, Fransa

**4.16. Teorem (Lagrange Teoremi):** G sonlu bir grup ve $H \leq G$ olsun. O zaman H'nin mertebesi G'nin mertebesini böler. Yani $o(G) = o(G : H)o(H)$ dir.

İspat: H'nin G'deki indeksi $o(G : H) = n$ olsun. Buna göre

$$H, Ha_1, Ha_2, \dots, Ha_{n-1}$$

kümeleri H'nin n tane farklı sağ koseti olsun. Bu kosetler G'nin parçalanışını verirler. Ayrıca her bir kosetteki eleman sayısı o(H)'ye eşittir. O halde

$$G = H \cup Ha_1 \cup Ha_2 \cup \dots \cup Ha_{n-1}$$

$$o(G) = o(H) + o(Ha_1) + o(Ha_2) + \cdots + o(Ha_{n-1})$$

$$o(G) = n\, o(H)$$

olup $o(G) = o(G : H)o(H)$ elde edilir. Buradan $o(H) \mid o(G)$ yazılabilir.

**4.3. Sonuç:** Eğer G asal mertebeli bir grup ise G'nin $\{e\}$ ve G'den başka altgrubu yoktur.

**4.5. Not:** Eğer $H = \{e\}$ ise her $a \in G$ için $Ha = \{a\}$ olup

$$o(G) = o(G : H)o(H) = o(G : H)$$

dir.

**Örnek:** $\mathbb{Z}_7$ grubunun altgrupları sadece $\{\bar{0}\}$ ve $\mathbb{Z}$ dir. Gerçekten $\mathbb{Z}$ asal mertebeli bir gruptur.

**Örnek:** $(\mathbb{Z},+)$ grubunda $U=\{3k : k\in\mathbb{Z}\}$ altgrubunu ele alalım. Bu altgrup için Lagrange teoremi uygulanamaz, çünkü $\mathbb{Z}$'nin mertebesi sonlu değildir.

**4.17. Teorem:** G sonlu bir grup ve $a\in G$ olsun. O zaman $o(a)\,|\,o(G)$ dir. Ayrıca $a^{o(G)}=e$ dir.

İspat: $H=\langle a\rangle$ alalım. a tarafından üretilen altgrubun mertebesi a'nın derecesine eşittir; yani $o(\langle a\rangle)=o(a)$ dir. Lagrange teoremini uygularsak $o(a)\,|\,o(G)$ elde edilir. $o(G)=k\,o(a)$ diyelim. O zaman

$$a^{o(G)}=a^{k\,o(a)}=(a^{o(a)})^k=e^k=e$$

olur ve ispat tamamlanır.

**Örnek:** G en az 2 elemanlı bir grup olsun. G'nin aşikâr olmayan altgrubu yoksa G'nin asal mertebeli olduğunu gösteriniz.

Çözüm: G'nin aşikâr olmayan altgrupları olmasın. $o(G)$ nin asal olduğunu göstereceğiz. Bir $e\neq a\in G$ için $U=\langle a\rangle$ altgrubunu düşünelim. $U=\{e\}$ olamaz. O halde $U=G$ olmalıdır. Yani G devirlidir.

4.5. teorem gereği, devirli grupların, grubun mertebesini bölen her sayıya karşılık bir altgrubu vardır. G'nin aşikâr olmayan altgrubu olmadığından $o(G)$ asaldır.

**Örnek:** G bir grup, $a\in G$ olsun. $0\neq m$ için $a^m=e$ ise $o(a)\,|\,m$ olduğunu gösterin.

Çözüm: $o(a)=n$ olsun. $n\leq o(m)$ olduğu açıktır. Bölme algoritmasından dolayı m, n sayı çifti için $m=nq+r, 0\leq r<n$ olacak şekilde $q,r\in\mathbb{Z}$ vardır. Şimdi

$$a^m=e\Rightarrow a^{nq+r}=e\Rightarrow (a^n)^q a^r=e\Rightarrow e^q a^r=e\Rightarrow a^r=e$$

olup $r<n=o(a)$ olduğundan $r=0$ olmalıdır. (Aksi halde bu durum $o(a)=n$ olmasıyla çelişirdi.) Yani $m=nq$ olup $n\mid m$ dir.

**4.18. Teorem:** Mertebesi asal sayı olan her grup, devirlidir.

İspat: $G$ mertebesi asal olan bir grup olsun. $o(G) = p$ diyelim. Bir $e \neq a \in G$ için $U = \langle a \rangle$ devirli altgrubunu düşünelim. Lagrange teoreminden dolayı $o(U) \mid p$ olmalıdır. $p$ asal olduğundan $o(U) = 1$ veya $o(U) = p$ olabilir. $e \neq a$ seçildiğinden $o(U) > 1$ dir. O halde $o(U) = p$ olmalıdır. Yani $G = U$ olup $G$ devirlidir.

**4.19. Teorem:** $n \in \mathbb{Z}^+$ olsun. $\mathbb{Z}_n$ de $n$ ile aralarında asal olan sayıların kalan sınıfları modülü $n$ çarpımı ile bir Abelyen grup oluştururlar ve bu grup $\mathbb{Z}_n^*$ ile gösterilir.

İspat: $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_n^*$ alalım. O halde $\text{OBEB}(a,n) = 1$ ve $\text{OBEB}(b,n) = 1$ dir. $\bar{a} \odot \bar{b} \in \mathbb{Z}_n^*$ olduğunu yani $\text{OBEB}(ab,n) = 1$ olduğunu göstermeliyiz.
$\text{OBEB}(a,n) = 1 \Rightarrow aq_1 + nr_1 = 1$ olacak şekilde $q_1, r_1 \in \mathbb{Z}$ vardır,
$\text{OBEB}(b,n) = 1 \Rightarrow aq_2 + nr_2 = 1$ olacak şekilde $q_2, r_2 \in \mathbb{Z}$ vardır,

$$\Rightarrow ab(\underbrace{q_1 q_2}_{q}) + nr = 1, (q, r \in \mathbb{Z})$$

$$\Rightarrow abq + nr = 1$$

$$\Rightarrow \text{OBEB}(ab,n) = 1$$

olup $ab$ ile $n$ aralarında asaldır.

Modülü $n$ çarpmasının birleşme ve değişme özelliği vardır ve $\bar{1}$ bu grubun birim elemanıdır, dolayısıyla her $n \in \mathbb{Z}^+$ için $\text{OBEB}(1,n) = 1$ dir. Şimdi ters elemanın varlığını gösterelim. $\bar{a} \in \mathbb{Z}_n^*$ alalım. O zaman $\text{OBEB}(a,n) = 1$ olur. Bu durumda $aq + nr = 1$ olacak şekilde $q, r \in \mathbb{Z}$ vardır. Bu durumda $aq \equiv 1 (\text{mod } n)$ olup $(\bar{a})^{-1} = \bar{q}$ olur. $\text{OBEB}(q,n) = 1$ olduğundan $\bar{q} \in \mathbb{Z}_n^*$ dır.

**Örnek:** $\mathbb{Z}_9^* = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{7}, \bar{8}\}$ grubunun çarpım tablosunu yazalım.

| $\odot$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ | $\bar{4}$ | $\bar{5}$ | $\bar{7}$ | $\bar{8}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\bar{1}$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ | $\bar{4}$ | $\bar{5}$ | $\bar{7}$ | $\bar{8}$ |
| $\bar{2}$ | $\bar{2}$ | $\bar{4}$ | $\bar{8}$ | $\bar{1}$ | $\bar{5}$ | $\bar{7}$ |
| $\bar{4}$ | $\bar{4}$ | $\bar{8}$ | $\bar{7}$ | $\bar{2}$ | $\bar{1}$ | $\bar{5}$ |
| $\bar{5}$ | $\bar{5}$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ | $\bar{7}$ | $\bar{8}$ | $\bar{4}$ |
| $\bar{7}$ | $\bar{7}$ | $\bar{5}$ | $\bar{1}$ | $\bar{8}$ | $\bar{4}$ | $\bar{2}$ |
| $\bar{8}$ | $\bar{8}$ | $\bar{7}$ | $\bar{5}$ | $\bar{4}$ | $\bar{2}$ | $\bar{1}$ |

Dikkat edilecek olursa, bu grubun mertebesi 6 olduğundan her elemanın 6. kuvveti birim elemana eşit olur. Gerçekten de

$$1^6 = 1, 2^6 = 64, 4^6 = 4096, 5^6 = 15625, 7^6 = 117649, 8^6 = 262144$$

olup bu sayıların hepsi 9'a bölününce 1 kalanı verirler.

**4.20. Teorem:** G bir grup H ve K, G'nin iki altgrubu olsun. HK'nın altgrup olması için gerek ve yeter şart $HK = KH$ olmasıdır.

İspat: $\Leftarrow$: $HK = KH$ olsun. HK'nın altgrup olduğunu göstereceğiz.

$$x = h_1k_1 \in HK \text{ ve } y = h_2k_2 \in HK, \ (h_i \in H, k_i \in K)$$

alalım.

$$\begin{aligned} xy^{-1} &= h_1k_1(h_2k_2)^{-1} \\ &= h_1k_1k_2^{-1}h_2^{-1}, \quad (k_3 = k_1k_2^{-1}) \\ &= h_1(\underbrace{k_3h_2^{-1}}_{\in KH = HK}) \\ &= (h_1h_2^{-1})k_3, \quad (h_3 = h_1h_2^{-1}) \\ &= h_3k_3 \in HK \end{aligned}$$

olup 4.1. teoremden HK altgruptur.

$\Rightarrow$: Şimdi de HK'nın altgrup olduğunu kabul edip $HK = KH$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} x = hk \in HK &\Rightarrow x^{-1} = h^{-1}k^{-1} \in HK \\ &\Rightarrow \text{HK altgrup olduğundan } (x^{-1})^{-1} \in HK \\ &\Rightarrow KH \subseteq HK \qquad (1) \end{aligned}$$

Ayrıca,

$$\begin{aligned} x = hk \in HK &\Rightarrow \text{HK altgrup olduğundan } (x^{-1})^{-1} \in HK \\ &\Rightarrow \exists\, h \in H, k \in K \text{ için } x^{-1} = hk \\ &\Rightarrow x = k^{-1}h^{-1} \in KH \\ &\Rightarrow HK \subseteq KH \qquad (2) \end{aligned}$$

O halde (1) ve (2) den $HK = KH$ elde edilir.

**4.4. Sonuç:** G değişmeli bir grup ve $H, K \leq G$ olsun. Bu durumda $HK \leq G$ dır.

**4.21. Teorem:** G bir grup $H, K \leq G$ olsun. HK'nın altgrup olması için gerek ve yeter şart $HK = \langle H \cup K \rangle$ olmasıdır.

İspat: $\Rightarrow$: $H, K \leq G$ olsun. $H, K \subseteq HK$ ise $H \cup K \subseteq HK$ dır. $\langle H \cup K \rangle$ nın tanımından $\langle H \cup K \rangle \subseteq HK$ bulunur. Ayrıca $hk \in HK$ olsun. $H, K \subseteq \langle H \cup K \rangle$ olduğundan $hk \in \langle H \cup K \rangle$ olup $HK \subseteq \langle H \cup K \rangle$ bulunur.

$\Leftarrow$: $HK = \langle H \cup K \rangle$ ise HK'nın altgrup olduğu açıktır.

**4.22. Teorem:** H ve K bir G grubunun sonlu iki altgrubu iseler $HK = \frac{o(H)o(K)}{o(H \cap K)}$ olmasıdır.

İspat: $A = H \cap K$ ve $n = \frac{o(H)}{o(A)}$ diyelim. H'nin A alt grubuna göre sol kalan sınıfları $\{x_1A, x_2A, \dots, x_nA\}$ olsun. $H = \bigcup_{i=1}^{n} x_i A$ dir. $A \leq K$ olduğundan $AK = K$ olduğu göz önüne alınarak

$$HK = \left(\bigcup_{i=1}^{n} x_i A\right) K = \bigcup_{i=1}^{n} x_i K$$

bulunur. Her $i \neq j$ için $x_iK$ ve $x_jK$ da farklıdır. $\exists\, i \neq j$ için $x_iK = x_jK$ olsa $x_j^{-1}x_i \in K$ dolayısıyla $x_j^{-1}x_i \in A = H \cap K$ çelişkisi bulunurdu. $o(K) = o(x_iK)$ olup

$$\begin{aligned} o(HK) &= o(x_1K) + o(x_2K) + \dots + o(x_nK) = n\, o(K) \\ &= \frac{o(H)}{o(A)} \\ &= \frac{o(H)o(K)}{o(H \cap K)} \end{aligned}$$

bulunur.

## NORMAL ALTGRUPLAR

**4.9. Tanım:** G bir grup ve $N \leq G$ olsun. Her $g \in G$ ve her $n \in N$ için $gng^{-1} \in N$ ise N'ye G'nin normal altgrubu denir ve $N \lhd G$ yazılır.

$gNg^{-1} = \{gng^{-1} : n \in N\}$

olduğundan, "N'nin normal altgrup olması için gerek ve yeter şart her $g \in G$ için $gNg^{-1} \subseteq N$ olmasıdır" diyebiliriz.

**4.6. Not:** $\{e\}$ ve G, G'nin normal altgruplarıdır. G Abelyen ise $gng^{-1} = n \in N$ olup Abelyen bir grubun her altgrubunun normal olduğu görülür.

**4.23. Teorem:** G bir grup, $N \leq G$ olsun. Aşağıdakiler birbirine denktir.

i) $N \lhd G$

ii) Her $g \in G$ için $gNg^{-1} = N$
iii) Her $g \in G$ için $gN = Ng$

İspat:
(i⇒ii) $N \lhd G$ olsun. Tanımdan dolayı $gNg^{-1} \subseteq N$ dir. Şimdi
$$N = g\underbrace{g^{-1}Ng}_{\subseteq N}g^{-1} \subseteq gNg^{-1}$$
olup sonuçta $gNg^{-1} = N$ olduğu görülür.

(ii⇒iii) $gNg^{-1} = N \Rightarrow gNg^{-1}g = Ng \Rightarrow gN = Ng$
(iii⇒i) $gN = Ng \Rightarrow gNg^{-1} = N \Rightarrow gNg^{-1} = N \Rightarrow N \lhd G$ //

Daha önce $S_3$ grubunda $H = \{f_1, f_2\}$ altgrubunun sağ kosetlerini bulmuştuk. Aynı grubun sağ-sol kosetlerini hesaplayalım.

| Sol Kosetler | Sağ Kosetler |
|---|---|
| $f_1H = \{f_1, f_2\}$ | $Hf_1 = \{f_1, f_2\}$ |
| $f_2H = \{f_2, f_1\}$ | $Hf_2 = \{f_2, f_1\}$ |
| $f_3H = \{f_3, f_5\}$ | $Hf_3 = \{f_3, f_4\}$ |
| $f_4H = \{f_4, f_6\}$ | $Hf_4 = \{f_4, f_3\}$ |
| $f_5H = \{f_5, f_3\}$ | $Hf_5 = \{f_5, f_6\}$ |
| $f_6H = \{f_6, f_4\}$ | $Hf_6 = \{f_6, f_5\}$ |

Tablodan görüldüğü gibi sol kosetlere parçalanış ile sağ kosetlere parçalanış birbirinden farklıdır. Eğer $S_3$ Abelyen olsaydı sol kosetler ile sağ kosetler eşit olurdu.

**Örnek:** $S_3$'de $H = \{f_1, f_2\}$ olsun. $Hf_3 \neq f_3H$ olup H'nin normal olmadığı görülür. Şimdi $\langle f_4 \rangle = \{f_1, f_4, f_5\}$ olsun.
$Nf_1 = f_1N = Nf_4 = f_4N = Nf_5 = f_5N = \{f_1, f_4, f_5\}$
$Nf_2 = f_2N = Nf_3 = f_3N = Nf_6 = f_6N = \{f_2, f_3, f_6\}$
olup $N \lhd G$ dir. //

Şimdi normal altgrup kullanarak faktör grubu elde edilmesini inceleyelim.

Bu kısımda bir G grubunun bir H altgrubunun sağ kosetleri arasında $(Ha)*(Hb) = H(ab)$ şeklinde bir $*$ işlemi tanımlamak istiyoruz. Ancak eğer H normal değilse bu $*$ işlemi iyi tanımlanmamıştır. Yani $Ha = Hx$ ve $Hb = Hy$ iken $(Hab) \neq H(xy)$ olabilir. Mesela $G = S_3$ ve $H = \{f_1, f_2\}$ ise $Hf_3 = Hf_4$ ve $Hf_5 = Hf_6$ olup $H(f_3f_5) = Hf_2 = \{f_1, f_2\}$ dir. Fakat $H(f_4f_6) = Hf_3 = \{f_3, f_4\}$ dir.

Ayrıca (Ha)∗(Hb) ile $(Ha)\cdot(Hb)$ çarpımının aynı sonucu vermesini istiyoruz. Yani Ha kümesi ile Hb kümesinin çarpımının H(ab)'ye eşit olmasını istiyoruz. Fakat H normal değilse iki sağ kosetin çarpımı başka bir sağ kosete eşit olmayabilir. Mesela $S_3$ grubunda $H = \{f_1, f_2\}$ alınırsa:

$$H(f_3)(Hf_5) = \{f_3, f_4\}\cdot\{f_5, f_6\} = \{f_2, f_4, f_1, f_3\}$$

olup bu küme bir sağ koset değildir.

**4.24. Teorem:** G bir grup $H \leq G$ olsun. $Ha = Hx$ ve $Hb = Hy$ eşitliklerinden her zaman $H(ab) = H(xy)$ elde edilmesi için gerek ve yeter şart $H \lhd G$ olmasıdır.

İspat: ⇒: Her $a, b, x, y \in G$ için $Ha = Hx$ ve $Hb = Hy$ ise $H(ab) = H(xy)$ olduğunu kabul edelim. Şimdi her $g \in G$ için $Hg = Hg$ ve her $h \in H$ için $He = Hh$ olduğunu biliyoruz. O halde

$$Hg = Hg\ , He = Hh \Rightarrow Hg = H(gh) \Rightarrow H = H(ghg^{-1}) \Rightarrow ghg^{-1} \in H$$

olup H'nin normal altgrup olduğu görülür.

⇐: Şimdi de H'nin normal olduğunu kabul edelim.

$$\begin{aligned} Ha = Hx, Hb = Hy &\Rightarrow by^{-1} \in H \\ &\Rightarrow aby^{-1} \in aH = Ha = Hx \\ &\Rightarrow aby^{-1}x^{-1} \in H \\ &\Rightarrow (ab)(xy)^{-1} \in H \\ &\Rightarrow H(ab) = H(xy) \end{aligned}$$

dir.

**4.25. Teorem:** G bir grup, $H \leq G$ olsun. H nin iki sağ kosetinin çarpımının yine bir sağ koset olması için gerek ve yeter şart $H \lhd G$ olmasıdır.

İspat: ⇐: $H \lhd G$ olsun. Ha, Hb iki sağ koset olsun.

$$(Ha)(Hb) = H(aH)b = H(Ha)b = (HH)ab = H(ab)$$

olup iki sağ kosetin çarpımı başka bir sağ kosettir.

⇒: Şimdi her Ha, Hb sağ koseti için $(Ha)(Hb) = Hc$ olacak şekilde bir $c \in G$ olsun. $b = a^{-1}$ seçilirse:

$$\begin{aligned} HaHa^{-1} = Hc &\Rightarrow eaea^{-1} = e = h_1c \text{ olacak şekilde bir } h_1 \in H \text{ vardır} \\ &\Rightarrow c = h_1^{-1} \in H \text{ olup } Hc = H \\ &\Rightarrow HaHa^{-1} = H \end{aligned}$$

$\Rightarrow \forall\, h \in H$ için $haha^{-1} = h_2$ olacak şekilde $h_2 \in H$ vardır

$\Rightarrow aha^{-1} = h^{-1}h_2 \in H$

$\Rightarrow aHa^{-1} \subseteq H$

$\Rightarrow H \lhd G$

olur. Böylece, H normal ise H'nin sağ kosetleri üzerindeki çarpma işleminin iyi tanımlandığını ve $*$ ile $\cdot$ işlemlerinin aynı olduğunu gösterdik.

**Örnek:** $G = (\mathbb{Z}, +)$ grubunda $U = 4\mathbb{Z}$ altgrubunu ele alalım. G Abelyen olduğundan her altgrubu normaldir. U'nun G'deki farklı sağ kosetleri

$$G = U = \{U + 0, U + 1, U + 2, U + 3\}$$

şeklinde yazılabilir. Bu grubun tablosu şöyledir.

| $+$ | $U+0$ | $U+1$ | $U+2$ | $U+3$ |
|---|---|---|---|---|
| $U+0$ | $U+0$ | $U+1$ | $U+2$ | $U+3$ |
| $U+1$ | $U+1$ | $U+2$ | $U+3$ | $U+0$ |
| $U+2$ | $U+2$ | $U+3$ | $U+0$ | $U+1$ |
| $U+3$ | $U+3$ | $U+0$ | $U+1$ | $U+2$ |

Burada, mesela $(U + 2) + (U + 3) = U + 5 = U + 1$ şeklinde hesaplanır.

**4.10. Tanım:** G bir grup olsun. $Z(G) = \{g \in G : \forall\, x \in G, gx = xg\}$ kümesine G'nin merkezi denir. Bir grubun merkezi, gruptaki g elemanı ile değişmeli olan elemanların kümesidir.

**4.26. Teorem:**

i) $Z(G)$, G'nin değişmeli bir altgrubudur.

ii) $e \in Z(G)$ olup $Z(G) \neq \emptyset$ dir. $Z(G) \lhd G$ olduğunu gösteriniz.

İspat: i) $Z(G) \leq G$ olduğunu göstermeliyiz. $g, h \in Z(G)$ alalım. O halde her $g \in G$ için

$$gx = xg, hx = xh$$

dir. Şimdi

$$hx = xh \Rightarrow x = h^{-1}xh \Rightarrow xh^{-1} = h^{-1}x$$

olur ve

$$(gh^{-1})x = g(h^{-1}x) = g(xh^{-1}) = (gx)h^{-1} = (xg)h^{-1} = x(gh^{-1})$$

olup $gh^{-1} \in Z(G)$ elde edilir. 4.1. teoremden $Z(G) \leq G$ olur.

ii) $z \in Z(G)$ ve $g \in G$ alalım. $gzg^{-1} \in Z(G)$ olduğunu göstermeliyiz. z elemanı gruptaki bütün elemanlarla değişmeli olduğundan $gzg^{-1} = z \in Z(G)$ olup $Z(G) \lhd G$ dir.

**Örnek:** G bir grup ve H'de indeksi 2 olan bir altgrup olsun. $H \lhd G$ olduğunu gösterin.

Çözüm: H'nin G'de iki farklı sağ koseti vardır. Bunlar H ve Ha dir. Burada $a \in G \backslash H$ olduğu açıktır. ($Ha = H \Leftrightarrow a \in H$ olduğunu hatırlayalım.) Benzer şekilde iki farklı sol koseti H ve aH dir. Bunlar G'nin parçalanışıdır. Şimdi $g \in G$ verilsin. $g \in H$ ise $Hg = gH = H$ dir. $g \in G \backslash H$ ise $Hg = gH = G \backslash H$ olup sağ koset sol kosete eşittir. O halde $H \lhd G$ dir.

**Örnek:** İki normal altgrubun kesişiminin de normal olduğunu gösteriniz.

Çözüm: G bir grup $H \lhd G$ ve $K \lhd G$ olsun. $H \cap K \leq G$ olduğunu biliyoruz. Şimdi her $g \in G$ ve her $x \in H \cap K$ için

$$\begin{aligned} x \in H \cap K &\Rightarrow x \in H \text{ ve } x \in K \\ &\Rightarrow H \lhd G, K \lhd G \text{ olduğundan } gxg^{-1} \in H, gxg^{-1} \in K \\ &\Rightarrow H \cap K \lhd G \end{aligned}$$

dir.

**Örnek:** $H \leq G$ ve $N \lhd G$ ise $HN \leq G$ olduğunu gösterin.

Çözüm: $x = h_1 n_1 \in HN$ ve $y = h_2 n_2 \in HN$ alalım. $N \leq G$ olduğundan

$$xy^{-1} = h_1 \underbrace{n_1 n_2^{-1}}_{\in N} h_2^{-1} = h_1 n_3 h_2^{-1} = (\underbrace{h_1 h_2^{-1}}_{\in H})(\underbrace{h_1 n_3 h_2^{-1}}_{\in N}) = h_3 n_4 \in HN$$

olup 4.1. teorem gereğince $HN \leq G$ dir.

**4.27. Teorem:** $H \lhd G$ ve $N \lhd G$ ise $HN \lhd G$ dir.

İspat: $HN \leq G$ olduğu bir önceki örnekte gösterilmiştir. Şimdi $HN \lhd G$ olduğunu gösterelim.

$H \lhd G$, $N \lhd G$ olduğundan her $g \in G$ için $Hg = gH$ ve $Ng = gN$ dır. O halde:

$$g(HN) = (gH)N = (Hg)N = H(gN) = H(Ng) = (HN)g$$

olup $HN \lhd G$ olduğu görülür.

**Örnek:** G bir grup ve $H = \langle a \rangle$ sonlu devirli altgrubu G'de normal olsun. Eğer $K \leq H$ ise $K \lhd G$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $\langle a \rangle = H \lhd G$ ve $K \leq H$ olduğu veriliyor. $K \lhd G$ olduğunu göstereceğiz. $K \leq H$ ve $H \leq G$ olduğundan $K \leq G$ olduğu açıktır. Şimdi $k \in K, g \in G$ verilsin.

$$k \in K \Rightarrow k \in H \Rightarrow H \lhd G$$

olduğundan $gxg^{-1} \in H$ dır.

Şimdi K sonlu olduğundan $o(k) = m$ sonludur. Ayrıca $o(gkg^{-1}) = m$ dir.

$$o(gkg^{-1}) = m \Rightarrow o(\langle gkg^{-1} \rangle) = m \text{ ve } o(k) = m \Rightarrow o(\langle k \rangle) = m$$

olur. Ayrıca $\langle k \rangle \leq K \leq H$ ve $\langle gkg^{-1} \rangle \leq H$ olup $\langle k \rangle$ ve$\langle gkg^{-1} \rangle$ altgrupları, H'nin mertebeleri eşit olan iki altgrubu olur. Devirli bir grubun mertebesi eşit olan iki altgrubu eşit olacağından $\langle k \rangle = \langle gkg^{-1} \rangle$ olmalıdır. O halde $\langle gkg^{-1} \rangle \leq K$ olup $gkg^{-1} \in K$ dır. Yani $K \lhd G$ olur.

**4.28. Teorem:** G bir grup ve $N \leq G$ olsun. $o\left(\frac{G}{N}\right) = 2$ ise N, G'nin normal altgrubudur.

İspat: $N \leq G$ ve $o\left(\frac{G}{N}\right) = 2$ olsun. $a \notin N$ ise sol denklik sınıfları $N, aN$; sağ denklik sınıfları da $N, Na$ olur. $G = N \cup aN = N \cup Na$ olmasından $aN = Na = G - N$ olup $N \lhd G$ bulunur.

**BÖLÜM (FAKTÖR) GRUBU**

**4.11. Tanım:** G bir grup ve $N \lhd G$ olsun. N'nin G'deki farklı sağ kosetlerinin (denklik sınıfların) kümesini $G/N = \{Ng : g \in G\}$ ile gösterelim. Bu küme üzerinde, $Na, Nb \in G/N$ için

$$(Na)*(Nb) = N(ab)$$

şeklinde bir işlem tanımlayalım. Bu işlemin iyi tanımlandığını 4.21. teoremde gösterdik. $(G/N, *)$ cebirsel yapısının bir grup olduğunu gösterelim. Bu gruba G'nin N ile olan bölüm grubu (faktör grubu) denir. Ayrıca, 4.22. teoremin ispatının ilk bölümünde görüldüğü gibi, $*$ yerine $\cdot$ kullanılmasında bir sakınca yoktur. Bu yüzden G grubunun işlem sembolü ile G/N faktör grubunun işlem sembolü aynı olacaktır.

**4.29. Teorem:** G bir grup, $N \lhd G$ olsun. $G/N$ yukardaki tanımda verilen işlemle bir gruptur.

İspat: $(Na)(Nb) = N(ab)$ olup iki sağ kosetin çarpımı bir sağ kosettir.
$Na(NbNc) = NaN(bc) = N(a(bc)) = N((ab)c) = N(ab)Nc = (NaNb)Nc$ olup birleşme özelliği vardır. Her $Na \in G/N$ için
$NaNe = Na$ ve $NeNa = Na$
olup $Ne = N$ bu grubun birim elemanıdır. Na'nın tersi $(Na)^{-1} = Na^{-1}$ dir. Çünkü
$NaNa^{-1} = Ne = N$ ve $Na^{-1}Na = Ne = N$
dir. O halde $G/N$ bir gruptur.

**4.7. Not:** Lagrange teoremi gereğince, $o(G)$ sonlu ise $o(G/N) = \frac{o(G)}{o(N)}$ dir.

**Örnek:** $M = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a,b,c,d \in \mathbb{Z}\right\}$ kümesi bilinen matris toplamı ile bir gruptur. $\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} : a,b,c \in \mathbb{Z}\right\}$ kümesi M'nin normal altgrubudur, gösterin. $M/H$ yi oluşturunuz.

Çözüm:
$X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} d & e \\ f & -d \end{bmatrix} \in H$
$X + (-Y) = \begin{bmatrix} a-d & b-e \\ c-f & -(a-d) \end{bmatrix} \in H$
dir. 4.1. teorem gereğince $H \leq M$ dir. Matrislerdeki toplama işlemi değişmeli olduğundan M bir Abelyen gruptur. O halde $H \lhd M$ dir. $M/H = \{H + X : X \in M\}$ şeklinde yazılabilir.

**Örnek:** $\mathbb{Z}_{12}$'de $H = \langle \bar{6} \rangle$ altgrubunu bulunuz. $\mathbb{Z}_{12}/H$ yi yazınız. Bu gruptaki elemanların derecelerini bulunuz.

Çözüm: $H = \langle \bar{6} \rangle = \{\bar{0}, \bar{6}\}$ dır. H'nin farklı sağ kosetleri 6 tanedir:
$H \oplus \bar{0} = \{\bar{0}, \bar{6}\} = H \oplus \bar{6}$
$H \oplus \bar{1} = \{\bar{1}, \bar{7}\} = H \oplus \bar{7}$
$H \oplus \bar{2} = \{\bar{2}, \bar{8}\} = H \oplus \bar{8}$
$H \oplus \bar{3} = \{\bar{3}, \bar{9}\} = H \oplus \bar{9}$
$H \oplus \bar{4} = \{\bar{4}, \overline{10}\} = H \oplus \overline{10}$
$H \oplus \bar{5} = \{\bar{5}, \overline{11}\} = H \oplus \overline{11}$

O halde $\mathbb{Z}_{12}/H = \{H\oplus\bar{0}, H\oplus\bar{1}, H\oplus\bar{2}, H\oplus\bar{3}, H\oplus\bar{4}, H\oplus\bar{5}\}$ dir. Bu elemanların dereceleri:
$o(H\oplus\bar{0}) = 1, o(H\oplus\bar{1}) = 6, o(H\oplus\bar{2}) = 3, o(H\oplus\bar{3}) = 2, o(H\oplus\bar{4}) = 3, o(H\oplus\bar{5} = 6$ dir.

**4.30. Teorem:** G bir grup,
i) $N \lhd G$ ve $N \leq K \leq G$ ise $N \lhd K$ ve $K/N \leq G/N$ dir.
ii) $N \leq K \lhd G$ ve $K/N \lhd G/K$ dır.

İspat: i) $N \lhd G$ ve $N \leq K \leq G$ olsun. $N \lhd K$ aşikardır. Her $k \in K$ için $kN \in K/N$ sınıf $G/N$ de bir elemanı olur. $K/N \leq G/N$ dir.

ii) $K \lhd G$ ise her $g \in G$, her $k \in K$ için $gkg^{-1} \in K$ olur. Her $gN \in G/N$ için

$$(gN)(kN)(gN)^{-1} = (gkg^{-1})N \in K/N$$

olup $K/N \lhd G/K$ dır.

**4.31. Teorem:** (4.30. teoremin tersine) $G/N$ nin altgrupları $N \leq K \leq G$ olmak üzere $K/N$ şeklindedir.

İspat: $K_1 \leq G/N$ alalım. $K = \{g \in G \mid gN \in K_1\}$ olsun. Her $k_1, k_2 \in K$ için $k_1N, k_2N \in K_1$ den $K_1 \leq G/N$ olduğundan

$$(k_1N)(k_2N)^{-1} = k_1k_2^{-1}N \in K_1$$

den $k_1k_2^{-1} \in K_1$ olup $K/G$ bulunur. Her $x \in N$ için $xN = N$ ve $N$, $G/N$ nin birimi olduğundan $K_1$ dedir. $N \leq K$ bulunur. $K_1 \lhd G/N$ ise her $g \in G$ ve her $k \in K$ için

$$(gkg^{-1})N = (gN)(kN)(gN)^{-1} \in K_1$$

olup $gkg^{-1} \in K$ olacağından $K \lhd G$ dir.

## GRUPLARIN İÇ DİREKT TOPLAMLARI

**4.12. Tanım:** G değişmeli bir grup ve $H_1, H_2, \dots, H_n$, G'nin altgrupları olsunlar.

$$H_1 + H_2 + \cdots + H_n = \{h_1 + h_2 + \cdots + h_n : \ i = 1,2, \dots, n, h_i \in H_i\}$$

kümesine $H_1, H_2, \dots, H_n$ altgruplarının toplam kümesi adı verilir.

**4.32. Teorem:** G değişmeli bir grup ve $H_1, H_2, \dots, H_n$, G'nin altgrupları olsun. $H = H_1 + H_2 + \cdots + H_n$ toplam kümesi G'nin bir altgrubudur.

İspat: $0 = 0_1 + 0_2 + \cdots + 0_n$ ve $0 \in H$ olup $H \neq \emptyset$ dir. $h \in H$ ise $h = h_1 + h_2 + \cdots + h_n$ olacak şekilde $h_1 \in H_1, h_2 \in H_2, \ldots, h_n \in H_n$ vardır. Dolayısıyla $h \in G$ olup, $H \subseteq G$ dir.

$x, y \in H$ ise $x = h_1 + h_2 + \cdots + h_n$ ve $y = h'_1 + h'_2 + \cdots + h'_n$ olacak şekilde $h_i, h'_i \in H_i$ $(i = 1,2, \ldots, n)$ vardır. Buradan

$$\begin{aligned} x - y &= (h_1 + h_2 + \cdots + h_n) - (h'_1 + h'_2 + \cdots + h'_n) \\ &= (h_1 - h'_1) + (h_2 - h'_2) + \cdots + (h_n - h'_n) \in H \end{aligned}$$

bulunur. O halde $H \leq G$ dir.

**4.33. Teorem:** G değişmeli bir grup ve $H_1, H_2, \ldots, H_n$, G'nin altgrupları olsun. $G = H_1 + H_2 + \cdots + H_n$ olması için gerek ve yeter şart $G = \left\langle \bigcup_{i=1}^{n} H_i \right\rangle$ olmasıdır.

İspat: $\Rightarrow$: Hipotezden $x \in G$ ise $x = h_1 + h_2 + \cdots + h_n$ olacak şekilde $x_i \in H_i$ $(i = 1,2, \ldots, n)$ vardır. $H_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} H_i$ olduğundan $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \bigcup_{i=1}^{n} H_i$ olup $x \in \left\langle \bigcup_{i=1}^{n} H_i \right\rangle$ için $G \subseteq \left\langle \bigcup_{i=1}^{n} H_i \right\rangle$ bulunur.

$y = y_1 + y_2 + \ldots + x_n \in \left\langle \bigcup_{i=1}^{n} H_i \right\rangle$ olsun. $\bigcup_{i=1}^{n} H_i \subseteq G$ olduğundan $(j = 1,2, \ldots, k)$, $y_i \in G$ veya $-y_i \in G$ dir. Buna göre $y = y_1 + y_2 + \cdots + y_k \in G$ olup $\bigcup_{i=1}^{n} H_i \subseteq G$ bulunur. O halde $G = \left\langle \bigcup_{i=1}^{n} H_i \right\rangle$ dir.

$\Leftarrow$: $G = \left\langle \bigcup_{i=1}^{n} H_i \right\rangle$ olsun. $h \in H_1 + H_2 + \cdots + H_n$ alalım. $h = h_1 + h_2 + \cdots + h_n$ olacak şekilde $h_1 \in H_1, h_2 \in H_2, \ldots, h_n \in H_n$ vardır. $H_1 + H_2 + \cdots + H_n \subseteq G$, G grup olduğundan $h = h_1 + h_2 + \cdots + h_n \in G$ olur. O halde $H_1 + H_2 + \cdots + H_n \subseteq G$ dir.

$g \in G$ olsun. Hipotezden $j = 1,2, \ldots, m$ için $g_j \in \bigcup_{i=1}^{n} H_i$ veya $-g_j \in \bigcup_{i=1}^{n} H_i$ olmak üzere $g = g_1 + g_2 + \cdots + g_m$ şeklinde yazılır. $i = 1,2, \ldots, n$ için $H_i \leq G$ ve G değişmeli olduğundan $g = g_1 + g_2 + \cdots + g_m \in H_1 + H_2 + \cdots + H_n$ bulunur. $G \subseteq H_1 + H_2 + \cdots + H_n$ ve sonuç olarak $G = H_1 + H_2 + \cdots + H_n$ bulunur.

**Örnek:** $\mathbb{Z}_{15}$ grubunun $H_1 = \langle \bar{3} \rangle$, $H_2 = \langle \bar{5} \rangle$, $H_3 = \langle \bar{6} \rangle$ altgrupları için $H_1 + H_2, H_2 + H_3, H_1 + H_3$ toplam grupları bulunuz.

Çözüm:

$$\begin{aligned} H_1 + H_2 &= \{h_1 + h_2 : h_1 \in H_1, h_2 \in H_2\} \\ &= \{m\bar{3} + n\bar{5} : m, n \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{\overline{3m + 5n} : m, n \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{k\bar{1} : k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \mathbb{Z}_{15} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_2 + H_3 &= \{h_2 + h_3 : h_2 \in H_2, h_3 \in H_3\} \\ &= \{m\bar{5} + n\bar{6} : m, n \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{\overline{5m + 6n} : m, n \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{k\bar{1} : k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \mathbb{Z}_{15} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_1 + H_3 &= \{h_1 + h_3 : h_1 \in H_1, h_3 \in H_3\} \\ &= \{m\bar{3} + n\bar{6} : m, n \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{\overline{3m + 6n} : m, n \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{\overline{3(m + 2n)} : m, n \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{k\bar{3} : k \in \mathbb{Z}\} \\ &= H_1 \end{aligned}$$

olup $H_1 = \mathbb{Z}_{15}$ dir.

**4.13. Tanım:** G değişmeli bir grup, $H_i \leq G$ $(i = 1,2, \dots, k)$ olsun. Eğer $x \in H_1 + H_2 + \cdots + H_n$ için x'in yazılışı tek türlü ise o zaman $g_m \in H_1 + H_2 + \cdots + H_n$ toplamına $g_m \in H_1, H_2, \dots, H_n$ altgrupların iç direkt toplamı denir. $g_m \in H_1 \oplus H_2 \oplus \dots \oplus H_n$ ile gösterilir.

**4.34. Teorem:** G değişmeli bir grup ve G'nin $H_1, H_2, \dots, H_n$ sonlu altgrupları olsun. Bu durumda

$$|H_1 \oplus H_2 \oplus \dots \oplus H_n| = |H_1||H_2| \dots |H_n|$$

dir.

İspat: $x = h_1 + h_2 + \cdots + h_n \in H_1 \oplus H_2 \oplus \dots \oplus H_n$ olsun. $i = 1,2, \dots, n$ için x'in yazılışı tek türlü olduğundan herhangi bir $h_i$ nin değiştirilmesiyle frklı elemanlar elde edilir. O halde $x \in H_1 \oplus H_2 \oplus \dots \oplus H_n$ için farklı seçim sayısı $|H_1||H_2| \dots |H_n|$ dir.

**4.35. Teorem:** G değişmeli bir grup ve $H_1, H_2, \dots, H_n$, G'nin altgrupları olsun. $H_1 + H_2 + \cdots + H_n$ toplamının direkt toplamı olması için gerek ve yeter şart $h_1 + h_2 + \cdots + h_n = 0$ iken $h_1 = h_2 = \cdots = h_n = 0$ olmasıdır.

İspat: $\Rightarrow$: $H_1 + H_2 + \cdots + H_n$ toplamı direkt toplam olsun. $h_1 + h_2 + \cdots + h_n = 0$ kabul edelim. G'nin birim elemanı $0 = 0 + 0 + \cdots + 0$ şeklinde yazılabilir $h_1 + h_2 + \cdots + h_n = 0 + 0 + \cdots + 0 = 0$ olup direkt toplamda yazılış tek türlü olduğundan $h_1 + h_2 + \cdots + h_n = 0$ bulunur.

$\Leftarrow$: $h_1 + h_2 + \cdots + h_n = 0$ iken $h_1 = h_2 = \cdots = h_n = 0$ olsun. Ayrıca $x \in H_1 + H_2 + \cdots + H_n$ iken $x = h'_1 + h'_2 + \cdots + h'_n$ olsun. Bu durumda $h_1 + h_2 + \cdots + h_n - (h'_1 + h'_2 + \cdots + h'_n) = 0$, G değişmeli olduğundan hipotezden

$$(h_1 - h'_1) + (h_2 - h'_2) + \cdots + (h_n - h'_n) = 0$$
$$h_1 - h'_1 = 0, h_2 - h'_2 = 0, \dots, h_n - h'_n = 0$$
$$h_1 = h'_1, h_2 = h'_2, \dots, h_n h'_n$$

bulunur. Böylece $H_1 + H_2 + \cdots + H_n$ nin her x elemanının yazılışı tek türlü olup verilen direkt toplamdır.

**Örnek:** $G = \mathbb{Z}_{12}$ grubunun $H_1 = \langle \overline{3} \rangle = \{\overline{0}, \overline{3}, \overline{6}, \overline{9}\}$, $H_2 = \langle \overline{2} \rangle = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10}\}$ altgrupları için yazılış tek türlü değildir. Gerçekten $\overline{0} + \overline{6} = \overline{6}$ ve $\overline{6} + \overline{0} = \overline{6}$ dır.

**4.36. Teorem:** G değişmeli bir grup ve $H_1, H_2 \leq G$ olsun. $G = H_1 \oplus H_2$ olması için gerek ve yeter şart

i) $G = H_1 + H_2$
ii) $H_1 \cap H_2 = \{0\}$

olmasıdır.

İspat $\Rightarrow$: $G = H_1 \oplus H_2$ olsun. Buradan $G = H_1 + H_2$ dir. Şimdi $H_1 \cap H_2 = \{0\}$ olduğunu gösterelim. $x \in H_1 \cap H_2$ olsun. $x \in H_1$ ve $x \in H_2$ dir. $x \leq H_2$ olduğundan $-x \leq H_2$ dir. $x = h_1$ ve $-x = h_2$ olacak şekilde $h_1 \in H_1$, $h_2 \in H_2$ vardır. $h_1 + h_2 = x + (-x) = 0$ olup 4.35. teoremden $h_1 = 0, h_2 = 0$ olup $H_1 \cap H_2 = \{0\}$ elde edilir.

$\Leftarrow$: i ve ii sağlansın. Ayrıca $h_1 \in H_1$, $h_2 \in H_2$ için $h_1 + h_2 = 0$ olsun. $h_1 = -h_2$ olup, $h_1, -h_2 \in H_1 \cap H_2$ dır. Hipotezden $H_1 \cap H_2 = \{0\}$ olduğundan $h_1 = -h_2 = 0$ bulunur. Buradan $h_2 = 0$ dır. Bu durumda $h_1 + h_2 = 0$ iken $h_1 = h_2 = 0$ olduğundan 4.35. teoremden dolayı $G = H_1 \oplus H_2$ dir.

**Örnek:** $G = \mathbb{Z}_{12}$ grubunun $H_1 = \langle \bar{3} \rangle = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}\}$ ve $H_2 = \langle \bar{4} \rangle = \{\bar{0}, \bar{4}, \bar{8}\}$ altgrupları için $G = H_1 + H_2$ ve $H_1 \cap H_2 = \{\bar{0}\}$ olduğundan $G = H_1 \oplus H_2$ dir.

**4.5. Sonuç:** G değişmeli bir grup ve $H_1, H_2, \dots, H_n \leq G$ olsun. $G = H_1 \oplus H_2 + \cdots \oplus H_n$ olması için gerek ve yeter şart

i) $G = H_1 + H_2 + \cdots + H_n$

ii) Her $j = 1,2, \dots, n$ için

$$H_j \cap (H_1 + H_2 + \cdots + H_{j-1} + H_{j+1} + \cdots + H_n) = \{0\}$$

olmasıdır.

**ÇÖZÜMLÜ ALIŞTIRMALAR**

**Altgruplar**

**1.** $(\mathbb{Z}_{10}, \oplus)$ grubunda 5 elemanının derecesini bulunuz. 5'in derecesi grubun derecesini böler mi? 5'in $(\mathbb{Z}, +)$ daki mertebesi kaçtır?

Çözüm: $\mathbb{Z}_{10}$ da $\bar{5} \oplus \bar{5} = \bar{0}$ olup $o(\bar{5}) = 2$ dir. $2 \mid 10$ olup $\bar{5}$'in derecesi grubun derecesini böler. 5'in $\mathbb{Z}$'deki derecesi sonsuzdur. Çünkü $n \cdot 5 = 0$ olacak şekilde $n \in \mathbb{Z}^+$ yoktur.

**2.** G bir Abelyen grup olsun. $H = \{x \in G : x^2 = e\}$ kümesinin G'nin bir altgrubu olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $x, y \in H$ olsun. O halde $x^2 + y^2 = e$ dir.

$$\begin{aligned}(xy^{-1})^2 &= xy^{-1}xy^{-1} \\ &= x^2(y^{-1})^2 \text{ (G değişmeli olduğundan)} \\ &= e\,(y^2)^{-1} \\ &= e^{-1} \\ &= e\end{aligned}$$

olup $xy^{-1} \in H$ dir. O halde 4.1. teorem gereğince H bir altgruptur.

**3.** $H_1, H_2$ bir G grubunun iki altgrubu olsun. $H_1 \cup H_2 \leq G \Leftrightarrow H_1 \subseteq H_2$ veya $H_2 \subseteq H_1$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm:
$\Leftarrow$: $H_1 \subseteq H_2$ veya $H_2 \subseteq H_1$ ise $H_1 \cup H_2 = H_1 \leq G$ veya $H_1 \cup H_2 = H_2 \leq G$ olup her iki halde de $H_1 \cup H_2$ bir altgruptur.

$\Rightarrow$: $H_1 \cup H_2 \leq G$ olduğunu kabul edelim. $H_1 \subseteq H_2$ veya $H_2 \subseteq H_1$ olduğunu göstermeliyiz.

Aksini kabul edelim. Yani $H_1 \nsubseteq H_2$ ve $H_2 \nsubseteq H_1$ olsun. (Bu iki küme ayrık olamazlar, çünkü $e \in H_1 \cap H_2$ dir.) Şimdi
$a \in H_1 \backslash H_2 \Rightarrow a \in H_1, a \notin H_2$
$b \in H_1 \backslash H_2 \Rightarrow b \in H_1, b \notin H_2$
dir. Bu durumda $a, b \in H_1 \cup H_2$ olup $ab \in H_1 \cup H_2$ dir. $a, b \in H_1$ olabilir, fakat

$$ab \in H_1 \Rightarrow \underbrace{a^{-1}}_{\in H_1}(ab) = b \in H_1$$

çelişkisi elde edilir. O halde $ab \in H_2$ olmalıdır, fakat

$$ab \in H_{12} \Rightarrow (ab)\underbrace{b^{-1}}_{\in H_2} = a \in H_2$$

çelişkisi elde edilir. Bu da $H_1 \cup H_2$ nin altgrup olmasıyla çelişir. O halde $H_1 \subseteq H_2$ veya $H_2 \subseteq H_1$
olmalıdır.

**4.** $(\mathbb{Q}\backslash\{0\}, \cdot)$ grubunda $A = \left\{3, \frac{1}{2}\right\}$ ise $\langle A \rangle$ nedir?

Çözüm: $(\mathbb{Q}\backslash\{0\}, \cdot)$ grubunda $\langle 3, \frac{1}{2} \rangle = \left\{3^n, \frac{1}{2^m} : m, n \in \mathbb{Z}\right\}$ kümesidir. Bazı elemanlarını yazalım.

$$\langle 3, \tfrac{1}{2} \rangle = \left\{ \frac{1}{24}, \frac{1}{12}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{2}{9}, \ldots, 2, 3, 6, 18, \ldots \right\}$$

**5.** G bir grup ve $a \in G$ olsun. $Z(a) = \{x \in G : ax = xa\}$ kümesine a'nın merkezleyeni denir. ($Z(a)$, a elemanı ile değişmeli olan elemanların kümesidir.)

a) Her $x \in G$ için $Z(a) \leq G$ olduğunu gösteriniz.
b) $o(a) = 5$ ise $Z(a) = Z(a^3)$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: a) $Z(a) = \{x \in G : ax = xa\}$ olduğundan $x, y \in Z(a)$ alalım. O halde $ax = xa$ ve $ay = ya$ dır.
$ay = ya \Leftrightarrow a = yay^{-1} \Leftrightarrow y^{-1}a = ay^{-1} \Leftrightarrow y^{-1} \in Z(a)$

dir. Şimdi $xy^{-1} \in Z(a)$ olduğunu gösterelim.

$$(xy^{-1})a = x(y^{-1}a) = x(ay^{-1}) = (xa)y^{-1} = (ax)y^{-1} = a(xy^{-1})$$

olup $xy^{-1} \in Z(a)$ dır. 4.1. teorem gereğince $Z(a)$ bir altgruptur.

b) $o(a) = 5$ olsun.

$$xy^{-1} \in Z(a) \Rightarrow xa = ax$$
$$\Rightarrow xa^3 = axa^2 = a(xa)a = a(ax)a = a^2(xa) = a^2(ax) = a^3x$$
$$\Rightarrow x \in Z(a^3)$$

ve

$$xy^{-1} \in Z(a^3) \Rightarrow xa^3 = a^3x$$
$$\Rightarrow xa^6 = a^3xa^3 = a^3(xa^3) = a^3(a^3x)$$
$$\Rightarrow x \in Z(a)$$

olup $Z(a) = Z(a^3)$ olduğu görülür.

**6.** $G = \{1, -1, i, -i\}$ grubu verilsin. $H = \{1, -1\}$ olsun. H'nin G'deki bütün farklı sağ kosetlerini ve indeksini bulunuz.

Çözüm: Farklı sağ kosetler

$$H1 = H(-1) = \{1, -1\}$$
$$Hi = H(-i) = \{i, -i\}$$

olur.

**7.** H ve K, G'nin sonlu altgrupları ise

$$o(HK) = \frac{o(H)o(K)}{o(H\cap K)}$$

olduğu bilinmektedir. $G = (\mathbb{C}\backslash\{0\}, \cdot)$ ve $H = \{1, -1, i, -i\}, K = \{1, -1\}$ alarak bu eşitliğin doğru olduğunu görünüz. Ayrıca bu eşitliği kullanarak $o(H) > \sqrt{o(G)}$ ve $o(K) > \sqrt{o(G)}$ ise $H \cap K \neq \{e\}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $HK = \{1, -1, i, -i\}$ ve $H \cap K = \{1, -1\}$ olur. Bu durumda

$$o(HK) = 4 \text{ ve } \frac{o(H)o(K)}{o(H\cap K)} = \frac{4\cdot 2}{2} = 4$$

olup eşitlik sağlanır. Şimdi $o(H) > \sqrt{o(G)}$ ve $o(K) > \sqrt{o(G)}$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$o(G) > \sqrt{o(G)}\sqrt{o(G)} < o(H)o(K) = o(H\cap K)o(HK)$$

dır. Şimdi, $H \cap K = \{e\}$ ise $o(G) < o(HK)$ olur. $HK \subseteq G$ olduğundan bu bir çelişki olur. O halde $o(H\cap K) \neq \{e\}$ dir. Yani $H \cap K$ en az iki elemanlıdır.

**8.** $(\mathbb{Z},+)$ da $4\mathbb{Z}$ altgrubunun tüm farklı sağ kosetlerini ve indeksini bulunuz.

Çözüm: $(\mathbb{Z},+)$ da $4\mathbb{Z}=\{\dots,-8,-4,0,4,8,\dots\}$ altgrubunun farklı sağ kosetleri;

$4\mathbb{Z}+0=\{\dots,-8,-4,0,4,8,\dots\}$
$4\mathbb{Z}+1=\{\dots,-7,-3,1,5,9,\dots\}$
$4\mathbb{Z}+2=\{\dots,-6,-2,2,6,10,\dots\}$
$4\mathbb{Z}+3=\{\dots,-5,-1,3,7,11,\dots\}$

olup $|\mathbb{Z}:\ 4\mathbb{Z}|=4$ dür.

**9.** $K=\{a,b,c,d\}$ grubunun çarpım tablosu aşağıda verilmiştir.

| $\cdot$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |
|---|---|---|---|---|
| $a$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |
| $b$ | $b$ | $a$ | $d$ | $c$ |
| $c$ | $c$ | $d$ | $b$ | $a$ |
| $d$ | $d$ | $c$ | $a$ | $b$ |

a) K değişmeli midir?
b) K devirli midir?
c) K'nın tüm altgruplarını ve bunların sağ kosetlerini bulunuz.

Çözüm: a) K'nın grup tablosu ana çizgilere göre simetrik olduğundan K Abelyen bir gruptur.

b) Birim eleman a'dır. K'nın altgrupları:

$H=\langle a\rangle=\{a\}$, $G=\langle b\rangle=\{a,b\}$, $K=\langle c\rangle=\{a,b,c,d\}$

Ayrıca $\langle d\rangle=\{a,b,c,d\}=K$ olur. Buradan K'nın devirli olduğu söylenebilir.

c) H'nin farklı sağ kosetleri 4 tanedir:

$Ha=\{a\}$, $Hb=\{b\}$, $Hc=\{c\}$, $Hd=\{d\}$

dır. $G=\{a,b\}$ nin farklı sağ kosetleri 2 tanedir:

$Ga=Gb=\{a,b\}$, $Gc=Gd=\{c,d\}$

dır. $K=\{a,b,c,d\}$ nin sağ koseti bir tanedir:

$Ka=Kb=Kc=Kd=\{a,b,c,d\}$

dır.

**10.** G bir grup olsun. $\varnothing\neq H\subseteq G$ olsun.

a) H bir altgrup ise $HH=H$ olduğunu gösterin.

b) Eğer H sonsuz elemanlı ise bu önermenin tersinin doğru olmadığını gösteriniz.

Çözüm: a) $H \leq G$ olmak üzere
$x \in HH \Rightarrow \exists\, h_1, h_2 \in H, x = h_1 h_2 \in H$ olup $HH \subseteq H$
$x \in H \Rightarrow x = \underbrace{x}_{\in H} \cdot \underbrace{e}_{\in H} \in HH$ olup $H \subseteq HH$
olup $HH = H$ olduğu görülür.

b) $G = (\mathbb{Z}, +)$ ve $H = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ olsun. $H + H = H$ dir fakat H bir altgrup değildir. Böylece "$H + H = H \Rightarrow H$ altgruptur" önermesinin doğru olmadığı gösterilmiş olur.

**11.** G bir grup $H \leq G$ olsun. $f(xH) = Hx^{-1}$ şeklinde tanımlanan fonksiyonun 1-1 olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Önce iyi tanımlandığını göstermek gereklidir. f 'nın iyi tanımlı olduğunu göstermek için

$$xH = yH \Rightarrow Hx^{-1} = Hy^{-1}$$

ifadesi gösterilmelidir.

$$\begin{aligned} xH = yH &\Rightarrow y^{-1}xH = H \\ &\Rightarrow y^{-1}x \in H \\ &\Rightarrow Hy^{-1}x = H \\ &\Rightarrow Hy^{-1} = Hx^{-1} \end{aligned}$$

olup θ iyi tanımlanmıştır. Ayrıca

$$\begin{aligned} f(xH) = f(yH) &\Rightarrow Hx^{-1} = Hy^{-1} \\ &\Rightarrow Hx^{-1}y = Hy^{-1}y \\ &\Rightarrow Hx^{-1}y = H \\ &\Rightarrow x^{-1}y \in H \\ &\Rightarrow H = x^{-1}yH \\ &\Rightarrow xH = yH \end{aligned}$$

olup f 'nın 1-1 olduğu görülür.

**12.** G bir grup, $H \leq G, K \leq G$ olsun. $o(H) = 75$ ve $o(K) = 39$ ise $H \cap K$ nın devirli olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $o(H) = 75 = 3 \cdot 5^2$ ve $o(K) = 39 = 3 \cdot 13$ olup $H \cap K \leq H$ ve $H \cap K \leq K$ olacağından Lagrange Teoremi gereğince $o(H \cap K) = 3$ hem 75'i hem de 39'yi bölmelidir. Bunu sağlayan sadece 1 ve 3 sayıları vardır. $o(H \cap K) = 1$ ise $H \cap K$ aşikar grup olup devirlidir. $o(H \cap K) = 3$ ise 3 asal olup $H \cap K$ devirlidir.

**13.** G bir grup $a \in G$ olsun. $H = \{x \in G : \exists\, n \in \mathbb{Z}, x = a^n\}$ kümesi G'nin bir altgrubudur, gösteriniz.

Çözüm:

$$\begin{aligned} x, y \in H &\Rightarrow \exists\, m, n \in \mathbb{Z}, x = a^n, y = a^m \\ &\Rightarrow xy^{-1} = a^n a^{-m} = a^{n-m}, \ (n - m \in \mathbb{Z}) \\ &\Rightarrow xy^{-1} \in H \end{aligned}$$

olup 4.1. teorem gereğince $H \leq G$ dir.

**14.** $\mathbb{Z}_{14}^*$ grubunun çarpım tablosunu yazınız. Bu grup devirli midir? Bu grubun aşikar olmayan bir altgrubunu bulunuz.

Çözüm: $\mathbb{Z}_{14}^* = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}, \bar{9}, \overline{11}, \overline{13}\}$ dür. Bu grubun çarpım tablosu:

| $\odot$ | $\bar{1}$ | $\bar{3}$ | $\bar{5}$ | $\bar{9}$ | $\overline{11}$ | $\overline{13}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\bar{1}$ | $\bar{1}$ | $\bar{3}$ | $\bar{5}$ | $\bar{9}$ | $\overline{11}$ | $\overline{13}$ |
| $\bar{3}$ | $\bar{3}$ | $\bar{9}$ | $\bar{1}$ | $\overline{13}$ | $\bar{5}$ | $\overline{11}$ |
| $\bar{5}$ | $\bar{5}$ | $\bar{1}$ | $\overline{11}$ | $\bar{3}$ | $\overline{13}$ | $\bar{9}$ |
| $\bar{9}$ | $\bar{9}$ | $\overline{13}$ | $\bar{3}$ | $\overline{11}$ | $\bar{1}$ | $\bar{5}$ |
| $\overline{11}$ | $\overline{11}$ | $\bar{5}$ | $\overline{13}$ | $\bar{1}$ | $\bar{9}$ | $\bar{3}$ |
| $\overline{13}$ | $\overline{13}$ | $\overline{11}$ | $\bar{9}$ | $\bar{5}$ | $\bar{3}$ | $\bar{1}$ |

Şimdi $\langle \bar{3} \rangle = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}, \bar{9}, \overline{11}, \overline{13}\} = \mathbb{Z}_{14}^*$ olup grup devirlidir. $\langle \bar{9} \rangle = \{\bar{1}, \bar{9}, \overline{11}\}$ bu grubun aşikâr olmayan bir altgrubudur.

**15.** $(\mathbb{C}\setminus\{0\}, \cdot)$ grubunda $H = \{x + iy : x, y \in \mathbb{R}, xy \geq 0\}$ bir altgrup mudur?

Çözüm: Kompleks (Karmaşık) sayı Kompleks Analiz derslerinde anlatılacaktır. Burada soruyu çözmek için kompleks sayı kavramı için şunu bilmek gerekir. $i^2 = -1$ olmak üzere $z = x + iy : x, y \in \mathbb{R}$ biçimindeki sayılardır.

$z_1 = 1 + 3i, z_2 = 2 + 5i$ olsun. $z_1 z_2 \in H$ olduğu açıktır.

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (1 + 3i)(2 + 5i) \\ &= 1 \cdot 2 + 1 \cdot 5i + 2 \cdot 3i + 3i \cdot 5i \\ &= (2 - 15) + (5 + 6)i \\ &= -13 + 11i \end{aligned}$$

dir. Burada $(-13)\cdot 11<0$ olduğundan $z_1z_2 \notin H$ dır. Buna göre H kümesi kapalı olmadığından bir altgrup değildir.

**16.** Bir G grubunda bir H altgrubunun iki sağ kosetinin aynı ya da ayrık olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Ha ve Hb iki sağ koset olsun. $Ha \cap Hb = \varnothing$ ise çözüm bitmiş olur. $Ha \cap Hb \neq \varnothing$ olsun. O zaman $x \in Ha \cap Hb$ alalım. Bu durumda $\exists\, h_1, h_2 \in H$ için $x = h_1a$ ve $y = h_2b$ şeklindedir. O zaman

$$\begin{aligned} h_1a = h_2b &\Rightarrow a = h_1^{-1}h_2b \\ &\Rightarrow ab^{-1} = h_1^{-1}h_2 \in H \\ &\Rightarrow H\,ab^{-1} = H \\ &\Rightarrow H\,a = Hb \end{aligned}$$

olup Ha ile Hb ya aynıdır ya da ayrıktır.

**Normal Alt Gurup ve Bölüm Grupları**

**17.** $G = \{e, a, a^2, a^3\}$ kümesi 4-üncü mertebeden devirli grup ve $G = \{e, a^2\}$ onun altgrubu olsun. $H \lhd G$ olduğunu gösterip $G/H$ yi yazınız.

Çözüm: G Abelyen ve H altgrup olduğundan $H \lhd G$ dir. $G/H = \{H, Ha\}$ olur.

**18.** G bir grup ve H'de onun iki elemanlı normal bir altgrubu ise $H \subset Z(G)$ olduğunu gösterin.

Çözüm: $H = \{e, h\}$ olsun. $e \in Z(G)$ olduğu açıktır. Biz $h \in Z(G)$ olduğunu yani her $x \in G$ için $xh = hx$ yani $xhx^{-1} = h$ olduğunu göstermeliyiz. $H \lhd G$ olduğundan $xhx^{-1} \in H$ dir. O halde ya $xhx^{-1} = e$ ya da $xhx^{-1} = h$ dir. $xhx^{-1} = e \Rightarrow xh = x \Rightarrow h = e$ olamaz. O halde $xhx^{-1} = h$ olur.

**19.** Bir grupta derecesi 2 olan sadece bir tane eleman varsa bu elemanın grubun merkezinde olduğunu gösteriniz.

Çözüm $e \neq a \in G$ derecesi 2 olan tek eleman olsun. Her $x \in G$ için $ax = xa$ yani $x^{-1}ax = a$ olduğunu göstereceğiz.

$$(x^{-1}ax)^2 = (x^{-1}ax)(x^{-1}ax) = x^{-1}a^2x = x^{-1}x = e$$

olup $(x^{-1}ax)$ 'in derecesi 2 dir. ($x^{-1}ax = e$ olsaydı $a = e$ olurdu). O halde $x^{-1}ax = a$ olmalıdır.

**20.** G bir grup ve H de Z(G) nin alt kümesi olan bir altgrup olsun. $H \lhd G$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $g \in G, h \in H$ olsun. $h \in H \subseteq Z(G)$ olduğundan

$$ghg^{-1} = hgx^{-1} = h \in H$$

dir. O halde h elemanı merkezdedir. Yani her elemanla değişmelidir.

**21.** G, Abelyen bir grup ve $N \lhd G$ olsun. $G/N$ nin Abelyen olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $Na, Nb \in G/N$ alalım. G, Abelyen olduğundan $ab = ba$ dır. O halde

$$NaNb = N(ab) = N(ba) = NbNa$$

olup $G/N$ nin Abelyen olduğu görülür.

**22.** G bir grup, $H \leq G$ ve $K \lhd G$ ise $H \cap K \lhd G$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: İki altgrubun kesişimi altgrup olduğundan $H \cap K \leq H$ olur. Şimdi $x \in H \cap K$ ve $h \in H$ alalım. H bir altgrup ve $x \in H$ olduğundan $hxh^{-1} \in H$ dir. Ayrıca $h \in G, x \in K$ ve $K \lhd G$ olduğundan $hxh^{-1} \in K$ dır. Bu durumda $hxh^{-1} \in H \cap K$ olur. Yani $H \cap K \lhd G$ olur.

**23.** G bir grup ve $H \leq G$ olsun. $N_G(H) = \{x \in G : xHx^{-1} = H\}$ kümesine H'nin G'deki normalleyeni denir. $N_G(H) \leq G$ ve $H \lhd N_G(H)$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $N_G(H) = \{x \in G : Hx = xH\}$ şeklinde yazılabilir. Önce

$$y \in N_G(H) \Rightarrow Hy = yH \Rightarrow y^{-1}Hy = H \Rightarrow y^{-1}H = Hy^{-1} \Rightarrow y^{-1} \in N_G(H)$$

sonucunu elde edelim. Şimdi

$$\begin{aligned} & x, y \in N_G(H) \\ & \Rightarrow (xy^{-1})H = x(y^{-1}H) = x(Hy^{-1}) = (xH)y^{-1} = (Hx)y^{-1} = H(xy^{-1}) \\ & \Rightarrow xy^{-1} \in N_G(H) \end{aligned}$$

olup 4.1. teorem gereğince $N_G(H) \leq G$ dir.

Şimdi $h \in H \Rightarrow Hh = hH = H$ olup $H \subseteq N_G(H)$ dir. H bir altgrup olduğundan $H \leq N_G(H)$ yazabiliriz. Şimdi $h \in H$, $x \in N_G(H)$ alalım.

$$(x^{-1}hx)H = x^{-1}h(xH) = x^{-1}h(Hx) = x^{-1}(hH)x = x^{-1}Hx = H$$

olup "$aH = H \Leftrightarrow a \in H$" önermesi hatırlanırsa $x^{-1}hx \in H$ elde edilir. O halde $H \lhd N_G(H)$ dir.

**24.** $Q_8 = \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$ olsun. $i^2 = j^2 = k^2 = -1, ij = k, jk = i, ki = j$ ve $ji = -k, kj = -i, ik = -j$ biçiminde verilsin.

a) $Q_8$ in grup tablosunu yazınız. (Bu gruba quaternionlar grubu denir.)

b) $Q_8$ in merkezini bulunuz.

c) $\{i, j\}$ kümesi tarafından doğurulan altgrubu bulunuz.

d) $Q_8$'in bütün altgruplarının normal olduğunu gösteriniz. ($Q_8$, bütün altgrupları normal olup da Abelyen olmayan bir grup örneğidir.)

Çözüm: a) $Q_8$ in grup tablosu:

| $\cdot$ | $1$ | $-1$ | $i$ | $j$ | $k$ | $-i$ | $-j$ | $-k$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $1$ | $1$ | $-1$ | $i$ | $j$ | $k$ | $-i$ | $-j$ | $-k$ |
| $-1$ | $-1$ | $1$ | $-i$ | $-j$ | $-k$ | $i$ | $j$ | $k$ |
| $i$ | $i$ | $-i$ | $-1$ | $k$ | $-j$ | $1$ | $-k$ | $j$ |
| $j$ | $j$ | $-j$ | $-k$ | $-1$ | $i$ | $k$ | $1$ | $-i$ |
| $k$ | $k$ | $-k$ | $j$ | $-i$ | $-1$ | $-j$ | $i$ | $1$ |
| $-i$ | $-i$ | $i$ | $1$ | $-k$ | $j$ | $-1$ | $k$ | $-j$ |
| $-j$ | $-j$ | $j$ | $k$ | $1$ | $-i$ | $-k$ | $-1$ | $i$ |
| $-k$ | $-k$ | $k$ | $-j$ | $i$ | $1$ | $j$ | $-i$ | $-1$ |

b) Bütün elemanlarla değişmeli olan elemanlar 1 ve –1 dir. Buna göre $Z(Q_8) = \{1, -1\}$ dir.

c) $i \cdot i = -1, i \cdot j = k$ olduğundan gruptaki bütün elemanlar i ve j kullanılarak bulunur. Mesela, $-k = (i \cdot i)(i \cdot j)$ dir. O halde $\langle i, j \rangle = Q_8$ dir. $Q_8$ in altgrupları:

$H_1 = \{1\}$ $\qquad$ $H_2 = \{1, -1\}$
$H_3 = \{1, -1, i, -i\}$ $\qquad$ $H_4 = \{1, -1, j, -j\}$
$H_5 = \{1, -1, k, -k\}$ $\qquad$ $H_6 = Q_8$

olur.

d) $H_1$ ve $H_6$ aşikar altgruplar olduğundan normaldirler. $H_2$ grubun merkezi olduğundan normaldir. $H_3, H_4$ ve $H_5$ de indeksleri 2 olduğundan normaldir.

**25.** $GL_n(\mathbb{R}) = \{A : A, n \times n$ reel matris ve $\det(A) \neq 0\}$

$SL_n(\mathbb{R}) = \{A : A; n \times n$ reel matris ve $\det(A) = 1\}$

olsunlar. Bu takdirde $SL_n(\mathbb{R}) \lhd GL_n(\mathbb{R})$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $A, B \in SL_n(\mathbb{R})$ alalım. O halde $\det(A) = \det(B) = 1$ dir.

$$\det(AB^{-1}) = \det(A)\det(B^{-1}) = \det(A)\frac{1}{\det(B)} = 1$$

olup $AB^{-1} \in SL_n(\mathbb{R})$ dir. 4.1. teoremden $SL_n(\mathbb{R}) \leq GL_n(\mathbb{R})$ dir. Şimdi $A \in SL_n(\mathbb{R})$ ve $X \in GL_n(\mathbb{R})$ alalım. Yani $\det(A) = 1, \det(X) \neq 0$ dır.

$$\det(XAX^{-1}) = \det(X)\det(A)\det(X^{-1}) = \det(X)\det(A)\frac{1}{\det(B)} = 1$$

olup $XAX^{-1} \in SL_n(\mathbb{R})$ dir. Yani $SL_n(\mathbb{R}) \lhd GL_n(\mathbb{R})$ dir.

**26.** H ve K bir G grubunun normal altgrupları ve $H \cap K = \{e\}$ olsun. Her $h \in H$ ve $k \in K$ için $hk = kh$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $hkh^{-1}k^{-1}$ elemanına bakalım. H normal olduğundan $kh^{-1}k^{-1} \in H$ ve K normal olduğundan $kh^{-1}k^{-1} \in K$ dır. O halde:

$$hkh^{-1}k^{-1} = h(\underbrace{kh^{-1}k^{-1}}_{\in H}) = hh_2 \in H$$

$$hkh^{-1}k^{-1} = (\underbrace{hkh^{-1}}_{\in K})k^{-1} = k_2k^{-1} \in K$$

olup $hkhh^{-1}k^{-1} \in H \cap K = \{e\} \Rightarrow hkh^{-1}k^{-1} = e \Rightarrow hk = kh$ dir.

**27.** G, Abelyen olmayan bir grup ve Z'de onun merkezi olsun. O zaman $G/Z$ devirli grup olamaz.

Çözüm: $G/Z$ nin devirli olduğunu kabul edelim. O zaman $G/Z = \langle Zt \rangle$ olacak şekilde $t \in G$ vardır. Yani Z'nin her koseti bir $i \in G$ için $(Zt)^i = Zt^i$ şeklindedir. Şimdi $x, y \in G$ alalım. Bu iki eleman Z'nin iki sağ kosetine ait olmalıdır. $m, n \in \mathbb{Z}$, $x \in Zt^m$ ve $y \in Zt^n$ olsun. O halde $\exists\ z_1, z_1 \in Z$ için $x = z_1t^m, y = z_2t^n$ dir. Şimdi

$$xy = z_1t^mz_2t^n = t^{m+n}z_1z_2$$
$$yx = z_2t^nz_1t^m = t^{m+n}z_1z_2$$

olup $xy = yx$ dir. x, y'nin seçimi keyfî olduğundan G, Abelyendir. Bu da G'nin Abelyen olmadığı kabulü ile çelişir. O halde $G/Z$ devirli değildir.

**28.** G bir grup olsun. $H \leq G$ altgrubu "her $x \in G$ için $x^2 \in H$" özelliğine sahip olsun.

a) $H \lhd G$ olduğunu gösteriniz.

b) $G/H$ nin Abelyen olduğunu gösteriniz.

Çözüm: a) $h \in H$ ve $x \in G$ alalım.

$$xhx^{-1} = \underbrace{(xh)^2}_{\in H} h^{-1} \underbrace{(x^{-1})^2}_{\in H} = h_2 h^{-1} h_3 \in H$$

olup $H \lhd G$ olduğu görülür. $G/H = \{Ha : a \in G\}$ yazalım. Önce her $a \in G$ için $a^2 \in H$ olduğundan

$$(Ha)^2 = Ha^2 = H \Rightarrow Ha = Ha^{-1}$$

olduğunu görelim. O halde her $a, b \in G$ için

$$\begin{aligned}(Ha)^2 = H &\Rightarrow Habab = H\\ &\Rightarrow Haba = Hb^{-1}\\ &\Rightarrow Hab = Hb^{-1}a^{-1}\\ &\Rightarrow (Ha)(Hb) = (Hb^{-1})(Ha^{-1})\end{aligned}$$

olup $HaHb = HbHa$ elde edilir. Buna göre $G/H$ Abelyendir.

**KAYNAKÇA**


1. Prof. Dr. Fethi ÇALLIALP, Soyut Cebir, 2011, İstanbul.
2. Yrd. Doç. Dr. Hüseyin BİLGİÇ, Soyut Cebir Ders Notları, Kahramanmaraş Sütçü İmam Üniversitesi, 2012, Kahramanmaraş.
3. Prof. Dr. Şenol Eren, Soyut Cebir, Ondokuz Mayıs Üniversitesi Dijital Ders Platformu, 2021, Samsun.
4. Prof. Dr. Sait Halıcıoğlu, Doç. Dr. Burcu Üngör, Cebir, Açık ders, Ankara Üniversitesi, 2021, Ankara.
5. Doç. Dr. Sebahattin BALCI, Modern Cebire Giriş, Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi Döner Sermaye İşletmeleri Yayınları: 15, 1993, ANKARA.
6. Doç. Dr. Mustafa Bayraktar, Soyut Cebir ve Sayılar Teorisi, Atatürk Üniversitesi Basımevi, 1988, Erzurum.
7. Prof. Dr. H.İbrahim Karataş, Soyut Cebir, TÜBA, 2010, Ankara.