5. BÖLÜM
ÖZEL GRUPLAR

1- PERMÜTASYON GRUPLARI

$M \neq \emptyset$ bir küme olsun. $P(M)$ ile M'nin tüm permütasyonlarının ($M \to M$ ye 1-1 ve örten fonksiyonların) kümesini gösterelim. $P(M)$ bileşke işlemi ile bir grup olduğu gruba giriş konusunda gösterildi.

Eğer $o(M) = n$ sonlu ise $P(M) = S_n$ ile gösterilir ve S_n grubuna n-inci dereceden simetrik grup denir.

S_n permütasyonun bir altgrubuna da bir permütasyon (simetrik) grubu olur. $o(S_n) = n!$ olduğu açıktır.

$M = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ diyelim. $f \in S_n$ elemanını 2 satırlı ve n sütunlu bir matris halinde aşağıdaki gibi göstereceğiz:

$$f = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ f(a_1) & f(a_2) & \cdots & f(a_n) \end{pmatrix}$$

dir. O zaman, mesela,

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

pemütasyonu I_M birim permütasyonudur.

Örnek: $G = \{1, -1, i, -i\}$ çarpma işlemi ile bir gruptur. Buna göre

$$h_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & i & -i \\ 1 & -1 & i & -i \end{pmatrix}, \quad h_{(-1)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & i & -i \\ -1 & 1 & -i & i \end{pmatrix}$$

$$h_i = \begin{pmatrix} 1 & -1 & i & -i \\ i & -i & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad h_{(-i)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & i & -i \\ -i & i & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

permütasyonlarını yazalım. Bunlar $P(G)$ nin $4! = 24$ permütasyonundan 4 tanesidir. Bu permütasyonlar $P(G)$ nin bir altgrubunu oluştururlar. Çünkü çarpım (bileşke) tablosu kapalıdır:

$\cdot$	h_1	$h_{(-1)}$	h_i	$h_{(-i)}$
h_1	h_1	$h_{(-1)}$	h_i	$h_{(-i)}$
$h_{(-1)}$	$h_{(-1)}$	h_1	$h_{(-i)}$	h_i
h_i	h_i	$h_{(-i)}$	$h_{(-1)}$	h_1
$h_{(-i)}$	$h_{(-i)}$	h_i	h_1	$h_{(-1)}$

Bu grup tablosunda h sembollerini sildiğimizde aslında G'nin grup tablosunu elde ederiz.

5.1. Not: S_n, de çalışırken $f, g \in S_n$ için $f \circ g$ yerine kısaca $f \cdot g$ kullanımı yapılacaktır.

Permütasyonların Devirsel Gösterimi

Bu kısımda permütasyonları daha kısa bir şekilde göstermenin bir şeklini göreceğiz. Bilindiği gibi S_n, n elemanlı bir M kümesinin bütün permütasyonlarının grubudur. Burada, aslında M'nin elemanlarının ne olduğu değil de eleman sayısı önemli olduğundan M kümesi yerine genelde $M = \{1, 2, \ldots, n\}$ alınır. $a \in S_n$ olsun. Eğer α permütasyonu

$$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_n & a_1 \end{pmatrix}$$

şeklinde ise α'ya uzunluğu n olan bir devir (veya kısaca n-li devir) denir ve $\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ şeklinde gösterilir. Dikkat edilecek olursa α permütasyonu yazılırken a_1 den başlanmak zorunda değildir. Mesela

$$\alpha = \begin{pmatrix} a_2 & a_3 & \cdots & a_n & a_1 \\ a_3 & a_4 & \cdots & a_1 & a_2 \end{pmatrix}$$

olup $\alpha = (a_2, a_3, \ldots, a_n, a_1)$ şeklinde de yazılabilir. O halde, n-li bir devirin n farklı yazılışı vardır. Mesela aşağıdaki $\sigma \in S_5$ permütasyonu 5 değişik şekilde yazılabilir:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Genelde bir $f \in S_n$ permütasyonu bir n-li devir değildir. Bu durumda f birden fazla "devir" den oluşmaktadır. O halde "devir" tanımının verilmesi gerekmektedir.

5.1. Tanım: $f \in S_n$ olsun ve $M = \{1, 2, \dots, n\}$ alalım. Herhangi bir $a \in M$ alalım. M sonlu olduğundan $f^m(a) = a$ şartını sağlayan bir en küçük $m \in \mathbb{Z}^+$ vardır. Bu durumda

$$\{a, f(a), f^2(a), \dots, f^{m-1}(a)\}$$

sıralı kümesine f'nin bir devri denir. Bu kümeye de yörünge adı verilir. Bu devir yazılırken a'dan başlanması gerekmez. f permütasyonu bu şekilde bir veya daha fazla ayrık devirlerden oluşmaktadır. Bu ayrık devirler yan yana yazılarak elde edilen gösterime f 'nin devirsel gösterimi denir.

Örnek: Aşağıdaki S_9 un elemanı olan ı permütasyonunu ele alalım.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 5 & 4 & 9 & 2 & 1 & 7 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

Şimdi σ permütasyonunda 4 farklı devir vardır:

$a = 1$ alınırsa $m = 3$ bulunur ve $(1,8,6)$ devri elde edilir
$a = 2$ alınırsa $m = 2$ bulunur ve $(2,5)$ devri elde edilir
$a = 3$ alınırsa $m = 3$ bulunur ve $(3,4,9)$ devri elde edilir
$a = 7$ alınırsa $m = 1$ bulunur ve (7) devri elde edilir

Eğer $a = 4$ alınsaydı $(4; 9; 3)$ devri bulunurdu; ki bu da $(3,4,9)$ devrine eşittir. O halde σ'nın devirsel gösterimi:

$$\sigma = (1,8,6)(2,5)(3,4,9)(7)$$

biçimindedir. Bu gösterim tek türlü değildir. Devirler yazılırken sıraları değişebilir. Ayrıca, mesela, (1, 8, 6) devri (8, 6, 1) veya (6, 1, 8) şeklinde 3 türlü yazılabilir. Bu durumda σ toplamda, $(3 \cdot 2 \cdot 3) \cdot 4! = 432$ farklı şekilde yazılabilir.

5.2. Not: Bir permütasyonu ayrık devirlerin çarpımı şeklinde yazarken, uzunluğu 1 olan devirler yazılmayabilir. Ancak bu durumda bu permütasyonun hangi simetrik grubun elemanı olduğunun belirtilmemesi (veya bilinmemesi) karışıklığa yol açabilir. Mesela (1, 2, 3) permütasyonu aşağıdaki 3 farklı permütasyona eşit olabilir.

$$(1,2,3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \vee (1,2,3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \vee (1,2,3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$S_n$deki birim eleman sadece 1-li devirlerden oluştuğu için bu 1-li devirlerin hiçbirinin yazılmaması olmaz. Bu yüzden birim elemanı göstermek için

$(1) \in S_n$ sembolünü kullanacağız. Aslında her $k \in \{1, 2, \dots n\}$ için (k) birim elemanı ifade eder. Ayrıca devirsel gösterimde, eğer bir karışıklığa yol açmayacaksa, semboller arasında virgül kullanılmayabilir.

Örnek: $f = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_2 & a_1 & a_3 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$ permütasyonu sadece a_1 ve a_2 elemanlarını değiştirip diğerlerini sabit bırakır. Bu durumda $f = (a_1, a_2)$ yazılır.

Örnek:
$$\alpha = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ b & a & c & d & f & e \end{pmatrix} = (ab)(ef)$$
$$\beta = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ b & a & c & e & f & d \end{pmatrix} = (ab)(def)$$
$$\gamma = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ f & d & b & c & e & a \end{pmatrix} = (af)(bdc)$$
dir.

5.3. Not: Permütasyonların çarpımı soldan sağa doğru yapılmaktadır. Örneğin, (1 2) ile (1 3) permütasyonun çarpımı (1 2 3) dür:
$$(1\,2)\cdot(1\,3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1\,2\,3)$$
dür. Bazı yazarlar fonksiyonlardaki bileşke alma işlemindeki sırayı takip edip bu çarpımı sağdan sola doğru yapmaktadır. Yani $(1\ 2) \circ (1\ 3) = (1\ 3\ 2)$ şeklinde. Buna göre f ve g iki permütasyon ise bir x elemanının f ile g'nin çarpımındakı (bileşkesindeki) değeri $(fg)(i) = g(f(i))$ şeklinde hesaplanır. Bir x elemanının bir f fonksiyonundaki değerini $f(x)$ yerine xf şeklinde gösterenler için permütasyonları soldan sağa doğru çarpmak daha kolaydır: $x(fg) = (xf)g$ dir.

Örnek: S_3 ün devirli permütasyonlarını yazınız.

Çözüm:
$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = I,\ \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (23),\ \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (12)$$
$$\alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (13),\ \alpha_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (123),\ \alpha_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (132)$$
olup

$S_3 = (1),(2\ 3),(1\ 2),(1\ 3),(1\ 2\ 3),(1\ 3\ 2)$
bulunur.

Örnek:
$(1\ 2)\cdot(1\ 4\ 5\ 3) = (1\ 2\ 4\ 5\ 3)$
$(2\ 6\ 3\ 4)\cdot(1\ 2\ 5) = (1\ 2\ 6\ 3\ 4\ 5)$
$(1\ 2)\cdot(2\ 5)\cdot(5\ 1) = (1)(2\ 5)(3)(4) = (2\ 5)$
$(1\ 6)\cdot(2\ 4\ 5\ 3)$ ı $(1\ 2\ 4\ 9) = (1\ 6\ 2\ 9)(3\ 4\ 5)(7)(8) = (1\ 6\ 2\ 9)(3\ 4\ 5)$
$(1\ 2\ 3\ 4\ 5)\cdot(5\ 4\ 3\ 2\ 1) = (1)(2)(3)(4)(5) = (1)$

5.4. Not: $f = (a_1, a_2, \dots, a_r) \Rightarrow f^{-1} = (a_r, a_{r-1}, \dots, a_2, a_1)$ dir.

5.1. Teorem: Ayrık devirli permütasyonların çarpımı (bileşkesi) değişmelidir. Yani $\{a_1, a_2, \dots, a_r\}$ ve $\{b_1, b_2, \dots, b_r\}$ kümeleri ayrık ise

$$(a_1, a_2, \dots, a_r)(b_1, b_2, \dots, b_r) = (b_1, b_2, \dots, b_r)(a_1, a_2, \dots, a_r)$$

dir.

İspat: $f = \{i_1, i_2, \dots, i_r\}$ ve $g = \{j_1, j_2, \dots, j_s\}$ ayrık iki devir olsun. $n \notin \{i_1, i_2, \dots, i_r, j_1, j_2, \dots, j_s\}$ ise $f(n) = g(n) = n$ olup $f(g(n)) = g(f(n)) = n$ bulunur. Eğer $n \in \{i_1, i_2, \dots, i_r\}$ ve $f(n) \in \{i_1, i_2, \dots, i_r\}$ dir. Şu halde $g(n) = n$ olup $f(g(n)) = f(n) = n$ bulunur. Benzer işlemler $n \in \{j_1, j_2, \dots, j_s\}$ içinde yapılabilir. Şu halde $fg = gf$ dir.

5.2. Teorem: r uzunluğundaki bir devirin mertebesi r'dir.

İspat: $f = \{i_1, i_2, \dots, i_r\}$, r uzunluğunda bir devir olsun. $1 \le k, j \le r$ için

$$j + k \le r \text{ ise } f^k(jk) = i_{j+k}$$
$$j + k > r \text{ ise } f^k(jk) = i_{j+k-r}$$

dir. Buradan $f^k = 1$ ve $1 \le t < r$ için $f^t \ne 1$ bulunur.

5.3. Teorem: S_n deki her permütasyon sıra gözetmeksizin ayrık devirlerin çarpımı olarak yazılabilir.

İspat: $f \in S_n$ olsun. 1'in f altındaki artarda görüntülerini alalım. $1, f(1), f^2(1), \dots$ dizisi sonlu olduğundan, belli adımdan sonra tekrar eder. Şu halde $f^k(1) = 1$ olacak şekilde en küçük pozitif k tamsayısı var ve

$(1, f(1), f^2(1), \dots f^{k-1}(1))$ birbirinden farklıdır. Böylece k uzunluğunda $(1, f(1), f^2(1), \dots f^{k-1}(1))$ deviri elde edilir. Bu işlem devirde gözükmeyenler içinde yapılırsa elde edilen devirler ayrık ve çarpımları f 'yi verir.

Örnek:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 5 & 4 & 6 & 2 & 3 & 8 & 9 & 7 \end{pmatrix} \text{ ise } f = (1)(25)(346)(789)$$

5.4. Teorem: $f \in S_n$ permütasyonunun mertebesi, ayrıldığı ayrık devirlerin uzunluklarının OKEK'leridir.

İspat: f'nin ayrık devirlere ayrılışı $f = c_1 c_2 \dots c_s$, c_i devrinin uzunluğu t_i ve $\text{OKEK}(t_1, t_2, \dots, t_s) = m$ olsun. $f^k = c_1^m c_2^m \dots c_s^m = 1$ dir. Buradan $c_1^m = c_2^m = \cdots = c_s^m = 1$ bulunur.

Diğer yandan f 'nin c_i deki sayılara kısıtlanışı c_i yi verdiğinden $f^n = 1$ olması her $i = 1, 2, \dots, s$ için $c_i^n = 1$ olmasını gerektirir. $t_i \mid n$ dir. Böylece $f^n = 1$ olan en küçük pozitif tamsayının $\text{OKEK}(t_1, t_2, \dots, t_s) = m$ olduğu görülür.

Örnek: $f = (2\ 3)(1\ 4\ 5)$ permütasyonu için $o(f) = \text{OKEK}(2,3) = 6$ olduğu görülür.

5.5. Teorem: $n > 2$ ise her $f \in S_n$ permütasyonu 2-li devirlerin (uzunluğu 2 olan devirlerin) bir çarpımı olarak yazılabilir.

İspat: f 'nin bir deviri $(a, f(a), f^2(a), \dots, f^{m-1}(a))$ şeklindedir. Bu deviri $((a, f(a)), (a, f^2(a)), \dots, (a, f^{m-1}(a)))$ şekline 2-li devirlerin çarpımı olarak yazabiliriz. f 'nin bütün devirlerini bu şekilde yazabileceğimizden iddia açıktır.

Örnek: $\alpha = (1\ 5\ 4\ 3\ 6)(7\ 9\ 8) \in S_9$ elemanına bakalım.

$$\alpha = (15)(14)(13)(16)(79)(78)$$

şeklinde 2-li devirlerin çarpımı olarak yazılabilir. $n > 2$ ise S_n deki birim eleman $(1) = (1\ 2)(1\ 2)$ şeklinde yazılabilir.

Tek ve Çift Permütasyonlar

5.2. Tanım: Bir 2-li devire bir transpozisyon denir. Bir permütasyon ikili devirlerin çarpımı olarak birden fazla şekilde yazılabilir. Mesela;

$$(1\ 2\ 3\ 4\ 5) = (1\ 2)(1\ 3)(1\ 4)(1\ 5) = (4\ 1)(3\ 2)(1\ 4)(5\ 1)(5\ 2)(5\ 4)$$

Ancak bu yazılıştaki transpozisyonların sayısı ya hep çifttir ya da hep tektir. Çift sayıda transpozisyonun çarpımı olarak yazılabilen permütasyona çift permütasyon denir. Aksi halde tek permütasyon denir. Ayrıca aşağıdaki kurallar geçerlidir.

$$\text{TEK} \cdot \text{TEK} = \text{ÇİFT}, \quad \text{TEK} \cdot \text{ÇİFT} = \text{TEK}, \text{ÇİFT} \cdot \text{ÇİFT} = \text{ÇİFT}$$

5.3. Tanım: S_n de çift permütasyonların kümesini A_n ile gösterelim. İki çift permütasyonun çarpımı çift olduğundan A_n bir gruptur. Bu gruba n-inci dereceden alterne grup denir.

Örnek: Alterne grupların ilk 4 tanesi:

$A_1 \cong A_2 = \{(1)\}$

$A_3 = \{(1), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$

$A_4 = \{(1), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2), (1\ 2\ 4), (1\ 4\ 2), (1\ 3\ 4), (1\ 4\ 3), (2\ 3\ 4),$
$(2\ 4\ 3), (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\}$

5.2. Lemma: $\sigma \in S_n$ ayrık devirlerin çarpımı şeklinde yazılsın. $\beta^{-1}\sigma\beta$ permütasyonu σ ile aynı şekle sahiptir ve σ'daki sembollerin yerine onların β'daki görüntülerinin yazılması ile elde edilir.

İspat: (İspat boyunca fonksiyonların sağa, elemanların sola yazıldığı gösterim tarzını kullanacağız. Yani $\sigma(i)$ yerine $i\sigma$ yazacağız.) σ'nın i sembolünü j ye taşıdığını, yani $i\sigma = j$ olduğunu farz edelim. $\beta^{-1}\sigma\beta$ permütasyonunun $i\beta$ sembolünü $j\beta$ ya taşıdığını göstermemiz yeterlidir.

$$i\beta(\beta^{-1}\sigma\beta) = i(\sigma\beta) = (i\sigma)\beta = j\beta$$

olur.

Örnek: $\sigma = (1,5,6)(2,3)$ ve $\beta = (1,4,3)$ ise $\beta^{-1}\sigma\beta = (4,5,6)(2,1)$ bulunur.

5.6. Teorem: $\alpha, \beta \in S_n$ ayrık devirlerin çarpımı şeklinde yazılmış iki permütasyon olsun. α ile β'nın eşlenik olması için gerek ve yeter şart bu iki permütasyonun aynı devir yapısına sahip olmalarıdır.

İspat: $\Rightarrow$: α ile β eşlenik olsun. O halde $\tau^{-1}\sigma\tau = \beta$ olacak şekilde $\tau \in S_n$ vardır. Bir 6.2. Lemmaya göre $\tau^{-1}\sigma\tau$ permütasyonu α daki i sembolünün yerine $i\tau$ yazılmasıyla elde edilir. O halde α ile β aynı devir yapısına sahiptir.

$\Leftarrow$: Şimdi de α ile β aynı devir yapısına sahip olsun. α ile β'nın üzerine, aynı uzunluktaki devirler (uzunluğu 1 olanlar dahil) alt alta gelecek şekilde yazalım. Yukarıdaki sembolleri aşağıdaki sembollere eşleyen permütasyona τ dersek, $\tau^{-1}\sigma\tau = \beta$ olduğu açıktır. O halde α ile β eşleniktir.

Örnek: S_8 de $\alpha = (1,3,4)(2,6)(5,7)$ ile $\beta = (1,8)(2,5,7)(3,4)$ permütasyonları eşleniktir. Çünkü

$$\alpha = (1,3,4)(2,6)(5,7)$$
$$\beta = (1,8)(2,5,7)(3,4)$$

yazılırsa $\tau = (1,2,3,5)(4,7,8,6)$ seçilirse $\tau^{-1}\sigma\tau = \beta$ olur. Bunu sağlayan daha fazla τ bulmak için β'nın yazılışı değiştirilebilir, mesela $\beta = (5,7,2)(1,8)(4,3)(6)$ yazılabilir.

2- BASİT ve MAKSİMAL GRUPLAR

5.4. Tanım: En az 2 elemanlı bir G grubunun $\{\mathbf{e}\}$ ve G'den başka normal altgrubu yoksa G'ye basit grup denir.

A_1 ve A_2 aşikar grup olduklarından basit değildir. A_3 ün mertebesi 3 asal olduğundan A_3 basittir. A_4 grubu basit değildir, çünkü 4 elemanlı bir normal altgrubu vardır:

$$V = \{(1),(1\ 2)(3\ 4),(1\ 3)(2\ 4),(1\ 4)(2\ 3)\} \lhd A_4$$

Bir G grubunun öz, hiçbir normal altgrubu yoksa G, basit grup oluşturur.

Örnek: $\mathbb{Z}_5 = \{\bar{\mathbf{0}}, \bar{\mathbf{1}}, \bar{\mathbf{2}}, \bar{\mathbf{3}}, \bar{\mathbf{4}}\}$ grubunun altgrupları (dolayısıyla normal altgrupları) $\bar{\mathbf{0}}$ ve kendisidir. O halde $\mathbb{Z}_5$ basit gruptur. Aslında asal mertebeli her grubun basit olduğunu Lagrange Teoreminden söyleyebiliriz. Ama bunun tersi doğru değildir. Fakat basit ve Abelyen her grup asal mertebelidir.

5.7. Teorem: Bir Abelyen grubun basit olması için gerek ve yeter şart asal mertebeli olmasıdır.

İspat: $\Rightarrow$: G Abelyen ve basit bir grup olsun. O halde $\mathbf{o(G) > 2}$ dir. Bir $\mathbf{e \neq a \in G}$ seçelim. $\mathbf{o(a) = n}$ sonludur. Çünkü eğer $\mathbf{o(a)} = \infty$ olsaydı $\langle \mathbf{a} \rangle$ devirli altgrubu da sonlu olmayıp G'nin (en az 2 elemanlı) normal altgrubu olurdu. G basit olduğundan $\langle \mathbf{a} \rangle = \mathbf{G}$ olmalıdır. Bu durumda G sonsuz devirli grup olurdu. Bu durumda G'nin aşikar olmayan bir altgrubu (yani normal altgrubu) olurdu (Mesela $\langle \mathbf{a^2} \rangle$ gibi). O halde n sonludur. Öyleyse bir p asal böleni vardır. Buna göre $\langle \mathbf{a^{n/p}} \rangle$ altgrubu mertebesi p olan bir normal altgruptur. G basit olduğundan $\mathbf{G} = \langle \mathbf{a^{n/p}} \rangle$ olmalıdır. O halde $\mathbf{o(G) = p}$ dir. Yani G asal sayılı mertebelidir.

$\Leftarrow$: p bir asal sayı olmak üzere $\mathbf{o(G) = p}$ olsun. $\mathbf{U \lhd G}$ olsun. Lagrange teoremi gereğince $\mathbf{o(U)} \mid \mathbf{p}$ dir. p asal olduğundan $\mathbf{o(U) = 1}$ veya $\mathbf{o(U) = p}$ dir. O halde $\mathbf{U = \{e\}}$ veya $\mathbf{U = G}$ olabilir. Yani G basittir. //

Bu kısımda $n \geq 5$ için A_n grubunun basit olduğunu ispatlayacağız. Yani, eğer $H \lhd A_n$ ve $H \neq \{(1)\}$ ise $H = A_n$ olduğunu göstereceğiz. Bu amaçla gerekli teoremleri vereceğiz

5.8. Teorem: $n \geq 5$ için A_n in her elemanı 3-lü devirlerin bir çarpımıdır.

İspat: A_n in her elemanı (yani her çift permütasyon) çift sayıda transpozisyonun çarpımıdır. O halde iki transpozisyonun çarpımının, 3-lü devirlerin bir çarpımı şeklinde yazıldığını göstermek yeterlidir.

Şimdi $(a_1, a_2)(b_1, b_2)$ çarpımını düşünelim. Bu dört sayının birbirinden farklı olduğunu kabul edebiliriz. Çünkü öyle olmasaydı, aşağıda iki durum halinde açıklandığı gibi, bu çarpım ya birim elemana ya da bir 3-lü devire eşit olurdu. ($n \geq 3$ ise, birim eleman 3-lü devirlerin bir çarpımı olarak yazılabilir.)

i) $a_1 = b_1, a_2 \neq b_2$ ise $(a_1, a_2)(b_1, b_2) = (a_1, a_2)(a_1, b_2) = (a_1, a_2, b_2)$
ii) $a_1 = b_1, a_2 = b_2$ ise $(a_1, a_2)(b_1, b_2) = (a_1, a_2)(a_1, a_2) = (a_1)$

Şimdi, $n \geq 5$ olduğundan $1 \leq e \leq n$ olacak şekilde bu dört sayıdan farklı bir e sayısı vardır. Böylece;
$(a_1, a_2)(b_1, b_2) = (e, a_1, a_2)(e, a_1, b_1)(e, b_2, b_1)$
olup iddia doğrudur.

5.9. Teorem: $H \lhd A_n$ olsun. Eğer H bir 3-lü devir içeriyorsa o zaman $H = A_n$ dir.

İspat: $(a,b,c) \in H$ olsun. $x,y,z \in \{1,2,\dots,n\}$ olsun ve x, y, z birbirinden farklı olsunlar. $\theta \in S_n$ elemanı a'yı x'e, b'yi y'ye ve c'yi z'ye eşleyen bir eleman ise $\theta^{-1}(a,b,c)\theta = (x,y,z)$ dir. Eğer θ çift ise $H \lhd A_n$ olduğundan $(x,y,z) \in H$ dir. Eğer θ tek ise $n \geq 5$ olduğundan a, b, c'den farklı e, f sayıları vardır. O zaman $\psi = (e,f)\theta$ çifttir.

$$\begin{aligned}\psi^{-1}(a,b,c)\psi &= \theta^{-1}(e,f)(a,b,c)(e,f)\theta \\ &= \theta^{-1}(a,b,c)\theta \\ &= (x,y,z)\end{aligned}$$

olup normallikten dolayı $(x,y,z) \in H$ olur. x, y, z'nin seçimi keyfî olduğundan H, S_n deki bütün 3-lü devirleri içerir ve 5.8. teoremden dolayı $H = A_n$ dir.

5.10. Teorem: $H \lhd A_n$ olsun. Eğer H, iki ayrık transposizyonun çarpımını içeriyorsa $H = A_n$ dir.

İspat: $\alpha = (a_1,a_2)(a_3,a_4) \in H$ iki ayrık transpozisyonun çarpımı olsun. $n \geq 5$ olduğundan bu dört sayıdan farklı $e \in \{1,2,\dots,n\}$ sayısı vardır. $\theta = (a_1,a_2,e)$ olsun. $\theta \in A_n$ olup normallikten dolayı $\theta^{-1}\alpha\theta = (a_2,e)(a_3,a_4) \in H$ dir. Şimdi,

$$\begin{aligned}\alpha^{-1}(\theta^{-1}\alpha\theta) &= (a_1,a_2)(a_3,a_4)(a_2,e)(a_3,a_4) \\ &= (a_1,a_2)(a_2\ e) \\ &= (a_1,e,a_2) \in H\end{aligned}$$

olup H bir 3-lü devir içerir. 5.8. teoremden dolayı $H = A_n$ dir.

5.11. Teorem: $n \geq 5$ için A_n basit gruptur.

İspat: $H \lhd A_n$ ve $H \neq \{(1)\}$ olsun. O zaman $(1) \neq \alpha \in H$ vardır. $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ ayrık devirler olmak üzere $\alpha = \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_k$ olsun. Ayrık devirler değişmeli olduğundan $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ ların uzunluklarına göre büyükten küçüğe sıralandığını; yani $i = 1,2,\dots,k-1$ için

"α_i nin uzunluğu" ≥ "$\alpha_1 + 1$ in uzunluğu"

olduğunu varsayabiliriz.

1. Durum: $\alpha_1 = (a_1,a_2,\dots,a_m)$ ve $m \geq 4$ olsun.

$\alpha = (a_1, a_2, a_3)$ olsun. $\sigma \in A_n$ olduğu ve σ'nın $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_k$ ile değişmeli olduğu açıktır. $\sigma^{-1} \in A_n$ ve $H \lhd A_n$ olduğundan

$$\begin{aligned}\beta &= \alpha^{-1}(\sigma^{-1}\alpha\sigma)\\ &= \alpha_k^{-1} \dots \alpha_1^{-1}(a_2, a_3 a_1, a_4, \dots, a_m)a_2, \dots, a_k\\ &= \alpha_1^{-1}(a_2, a_3, a_1, a_4, \dots, a_m)\\ &= (a_m, a_{m-1}, \dots, a_2, a_1)(a_2, a_3, a_1, a_4, \dots, a_m)\\ &= (a_1 a_2, a_4)\end{aligned}$$

olup $\beta \in H$ dir. 5.8. teoremden sonuç ortaya çıkar.

2. Durum: $m = 3$ olsun ve α_2 de bir 3-lü devir olsun.

$\alpha_1 = (a_1, a_2, a_3)$ ve $\alpha_2 = (a_4, a_5, a_6)$ diyelim. $\sigma = (a_2, a_3, a_4) \in A_n$ olsun. Şimdi

$$\begin{aligned}\alpha^{-1}(\sigma^{-1}\alpha\sigma) &= \alpha_1^{-1}\alpha_2^{-1} \dots \alpha_k^{-1}(a_1, a_3, a_4)(a_2, a_5, a_6)\alpha_3\alpha_4 \dots \alpha_k\\ &= \alpha_1^{-1}\alpha_2^{-1}(a_1, a_3, a_4)(a_2, a_5, a_6)\end{aligned}$$

olup Durum 1'den dolayı sonuç elde edilir.

3. Durum: $m = 3$ ve $\alpha_2\alpha_3 \dots \alpha_k$ ların hepsi transpozisyon olsun.

$\alpha_1 = (a_1, a_2, a_3)$ olsun. $\alpha^2 = (a_1, a_2, a_3)^2 = (a_1, a_3, a_2) \in H$ olup sonuç 5.8. teoremden ortaya çıkar.

4. Durum: Bütün α_i ler transpozisyon olsun.

$\alpha_1 = (a_1, a_2), \alpha_2 = (a_3, a_4)$ olsun. $\sigma = (a_2, a_3, a_4)$ diyelim. Şimdi

$$\begin{aligned}\alpha^{-1}(\sigma^{-1}\alpha\sigma) &= (a_1, a_3)(a_4, a_2)\alpha_3\alpha_4 \dots \alpha_k\alpha_k^{-1}\alpha_{k-1}^{-1} \dots \alpha_1^{-1}\\ &= (a_1, a_3)(a_4, a_2)(a_1, a_2)(a_3, a_4)\\ &= (a_1, a_3)(a_4, a_2) \in H\end{aligned}$$

olup 5.9. teoremden sonuç ortaya çıkar.

5.5. Tanım: G bir grup, $\mathbf{N} \lhd \mathbf{G}$ olsun. N'yi kapsayan, M ve G'den başka hiçbir normal altgrup yoksa M'ye G'nin bir maksimal normal altgrubu denir.

Örnek: $\mathbb{Z}$ de $\mathbf{N} = \mathbf{3}\mathbb{Z} = \langle \mathbf{3} \rangle$ normal altgrubu maksimal altgruptur.

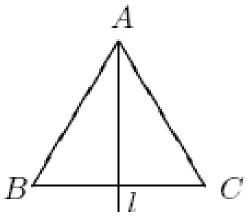
5.12. Teorem: $\mathbf{N} \lhd \mathbf{G}$ maksimal normal alt gruptur ancak ve ancak G/N basit gruptur.

İspat: $\Rightarrow$: $\mathbf{N} \lhd \mathbf{G}$ maksimal olsun. $\mathbf{L} \lhd \mathbf{G}$ ise G'de öyle bir $\mathbf{K} \lhd \mathbf{G}$ vardır ki $\mathbf{N} \lhd \mathbf{K}$ ve $\mathbf{L} = \mathbf{K}/\mathbf{N}$ dir. Fakat N maksimal olduğundan $\mathbf{M} = \mathbf{K}$ **veya** $\mathbf{K} = \mathbf{G}$ dir. Bu durumda L, G/N nin öz olmayan normal altgrubudur.

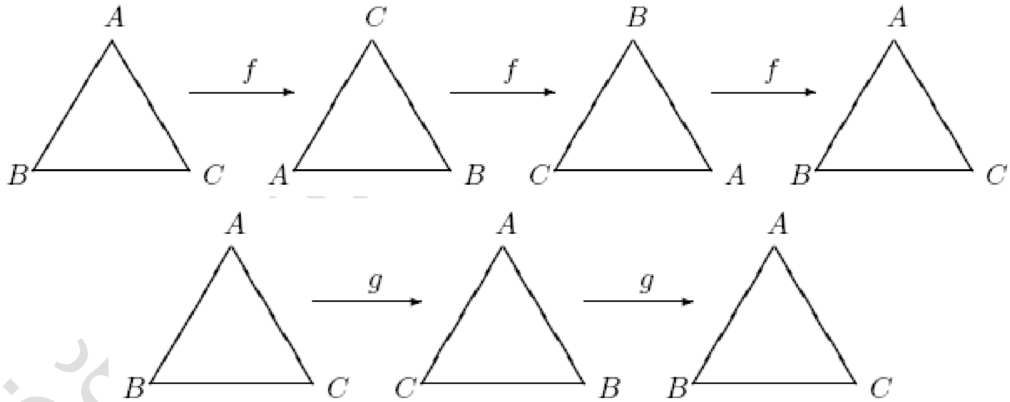
$\Leftarrow$: G/N basit olsun. Bölüm grubu tanımına göre G'nin N'yi kapsayan N ve G'den başka hiçbir normal altgrubu olamaz. Yani $\mathbf{N} \lhd \mathbf{G}$ dir.

3- DİHEDRAL GRUPLAR

Şekildeki ABC eşkenar üçgenini düşünelim.



Bu üçgeni tam ortasından ve düzleme dik bir eksen etrafında $\mathbf{120^0}$ saatin ters yönünde döndürme işlemine f diyelim. l doğrusu etrafında $\mathbf{180^0}$ döndürmeye g diyelim. Bu durumda $\mathbf{f^3} = \mathbf{e}$ ve $\mathbf{g^2} = \mathbf{e}$ dir. Birim dönüşüm (yani e) olarak üçgenin orjinal hali anlaşılmaktadır.



Bu şekilde elde edeceğimiz bütün farklı dönmelerin kümesi $\{\mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{f^2}, \mathbf{g}, \mathbf{fg}, \mathbf{f^2g}\}$ 'dir. Bu şekilde elde ettiğimiz gruba eşkenar üçgenin dihedral grubu denir ve $\mathbf{D_3}$ ile gösterilir. Benzer şekilde eşkenar n-genler kullanılarak elde edilen gruplar sınıfına dihedral gruplar diyeceğiz. Şimdi bu tanımı verelim.

5.6. Tanım: $\mathbf{n} \geq \mathbf{3}$ bir tamsayı olsun. n kenarlı düzgün bir çokgenin tüm dönme ve yansımalarının oluşturduğu gruba dihedral grup denir ve $\mathbf{D_n}$ ile gösterilir.

Örnek: $\mathbf{D_4}$ dihedral grubunun elemanlarını belirleyiniz.

Çözüm: Çokgenin bir köşesi A olmak üzere O merkezi ve A'dan geçen doğruya göre yansımayı b, 0^0 lık dönmeyi 1, $\frac{\mathbf{360}}{\mathbf{n}}$ derecelik dönmeyi α ile gösterirsek, n tane dönmeyi $\mathbf{1}, \mathbf{a}, \dots, \mathbf{a^{n-1}}$ ve n tane yansımayı $\mathbf{b}, \mathbf{ab}, \dots, \mathbf{a^{n-1}b}$ ile ifade edebiliriz. O halde $\mathbf{D_n}$ in tüm elemanları a ve b'nin kuvvetlerinin çarpımı ile elde edilmiş olur. Bu durumda

$$\mathbf{D_n} = \{\mathbf{e}, \mathbf{a}, \mathbf{a^2}, \dots, \mathbf{a^{n-1}}, \mathbf{b}, \mathbf{ab}, \dots, \mathbf{a^{n-1}b}\}$$

ifade edilen bir gruptur. Şimdi de $\mathbf{D_4}$ ü yani karenin tüm dönme ve yansımalarından oluşan grubu elde edelim. Bu durumda karenin hiç hareket etmemesi (1) ile gösterir. Karenin merkezi etrafında saat yönünün tersine 90^0 dönmesi $\boldsymbol{\alpha} = (\mathbf{1\ 2\ 3\ 4})$ ile gösterir isek $\boldsymbol{\alpha}^2 = (\mathbf{1\ 3})(\mathbf{2\ 4})$, $\boldsymbol{\alpha}^3 = (\mathbf{1\ 4\ 3\ 2})$ bulunur.

h yatay ekseni etrafında bir yansımayı $\boldsymbol{\beta} = (\mathbf{1\ 4})(\mathbf{2\ 3})$ alırsak

$$\boldsymbol{\alpha\beta} = (\mathbf{2\ 4}),\ \boldsymbol{\alpha}^2\boldsymbol{\beta} = (\mathbf{1\ 2})(\mathbf{3\ 4}),\ \boldsymbol{\alpha}^3\boldsymbol{\beta} = (\mathbf{1\ 3})$$

elde edilir. Buna göre

$$\mathbf{D_n} = \{\mathbf{e}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}^2, \boldsymbol{\alpha}^3, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha\beta}, \boldsymbol{\alpha}^3\boldsymbol{\beta}\}$$

olarak bulunmuş olur.

4- p-GRUPLARI

5.7. Tanım: G bir grup ve p bir asal sayı olsun. Eğer G grubunun her elemanının mertebesi p'nin bir kuvveti ise G'ye bir p-grubu denir.

Örnek: $G = \langle i \rangle$ devirli grubunu göz önüne alalım. Grupta

$$o(1) = 1 = 2^0,\ o(-1) = 2 = 2^2,\ o(i) = o(-i) = 4 = 2^2$$

dir. O halde $G = \langle i \rangle$ grubu bir 2-gruptur.

5.5. Not: i) Bir p-grup sonlu ya da sonsuz olabilir.

ii) Sonlu bir grubun p-grup olması için gerek ve yeter şart grubun mertebesinin p'nin bir kuvveti olmasıdır.

iii) Bir grubun değişmeli olması ile p-grup olması arasında bir ilişki yoktur.

5.8. Tanım: G sonlu değişmeli bir grup, p asal sayı $p \mid o(G)$ olsun.

$$G_p = \{x \in G : \; o(x) = p^r, r \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}\}$$

şeklinde tanımlanır.

5.13. Teorem: G sonlu değişmeli bir grup, p bir asal sayı ve $p \mid o(G)$ olsun. Bu durumda $G_p \leq G$ dir.

İspat: $0 \in G$ için $o(0) = 1 = p^0$ olup $0 \in G_p$ ise $G_p \neq \varnothing$ dir. Ayrıca $x \in G_p$ için $x \in G$ olup $G_p \subseteq G$ dir.

$x, y \in G_p$ ise $o(x) = p^r, o(y) = p^s$ olacak şekilde $r, s \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ vardır. $o(y) = p^s$ ise $o(-y) = p^s$ dir. Genelliği bozmadan $\max(r, s) = r$ alalım.

$$p^r(x - y) = p^r x + p^r(-y) = p^r x + p^{r-s}(-y) = 0 + p^{r-s}0 = 0$$

olup $o(x - y) \mid p^r$ dir. Böylece $x - y \in G_p$ ve $G_p \leq G$ bulunur.

5.6. Not: Her grup p-grubu olmak zorunda değildir. Eğer G sonlu değişmeli bir grup p bir asal sayı ve $p \mid o(G)$ ise G'nin en geniş p-altgrubu G_p dir.

Örnek: $G = \mathbb{Z}_{12}$ grubu için $o(G) = 12 = 2^2 3$ olup $\mathbb{Z}_{12}$ p-grup değildir. G'nin G_2 ve G_3 vardır.

$$G_2 = \{\overline{x} \in G : \; o(\overline{x}) = 2^r, r \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}\} = \{\overline{0}, \overline{3}, \overline{6}, \overline{9}\} = \langle \overline{3} \rangle$$
$$G_3 = \{\overline{x} \in G : \; o(\overline{x}) = 3^r, r \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}\} = \{\overline{0}, \overline{4}, \overline{8}\} = \langle \overline{4} \rangle$$

Peter Ludwig Mejdell Sylow

12 Aralık 1832, Oslo, Norveç - 07 Eylül 1918, Oslo, Norveç

5.9. Tanım: G sonlu bir grup, p asal sayı, $r \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $p^m \mid o(G)$ ve $p^{m+1} \nmid o(G)$ olsun. Bu durumda G grubunun mertebesi p^m olan altgrubuna Sylow p-altgrubu adı verilir.

Örnek: $S_3 = \{(1), (1\ 2), (1\ 3), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$ grubunu göz önüne alalım. $o(S_3) = 2 \cdot 3 = 6$ olduğudan Sylow 2-altgrubu ve Sylow 3-altgruplar vardır.

$$H_1 = \langle(1,2)\rangle = \{(1), (1\ 2)\}$$
$$H_2 = \langle(1,3)\rangle = \{(1), (2\ 3)\}$$
$$H_3 = \langle(2,3)\rangle = \{(1), (2\ 3)\}$$

Sylow 2-altgruplarıdır.

$$H_4 = \langle(1\ 2\ 3)\rangle = \langle(1\ 3\ 2)\rangle = \{(1), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$$

Sylow 3-altgruplarıdır.

5.10. Tanım: G sonlu bir grup ve $H \leq G$ olsun. $g \in G$ için

$$gHg^{-1} = \{ghg^{-1} \mid h \in G\}$$

kümesi G'nin altgrubudur. gHg^{-1} altgrubuna H altgrubunun g ile eşleniği adı verilir.

5.14. Teorem: G sonlu bir grup $a \in G$ olsun. O zaman

$$o(C(a)) = \frac{o(G)}{o(M(a))}$$

dır.

İspat: x, M(a) merkezinin G içindeki farklı sol kalan sıfırlarının kümesi olsun. $M(a) \leq G$ olduğunu biliyoruz. $T: x \to C(a)$, $T(xM(a)) = xax^{-1}$ ile tanımlansın. T, 1-1 ve örten olduğunu göstermek okuyucuya bırakılmıştır. Buradan $o(C(a)) = o(x)$ dır. Buna göre;

$$o(C(a)) = o(x) = \frac{o(G)}{o(M(a))}$$

elde edilir.

5.1. Sonuç: G sonlu bir grup ise $o(G) = \sum \frac{o(G)}{o(M(a))}$ dır. Buradaki toplam G'nin her bir eşlenik sınıfından seçilen bir eleman üzerindedir. Bu eşitliği G'nin sınıf denklemi denir. Sınıf denklemi $o(G) = o(M) + \sum \frac{o(G)}{o(M(a))}$ şeklinde de ifade edilebilir. $o(C(a)) = 1$ olması için gerek ve yeter şart $a \in M$ olmasıdır. Buna göre;

$$a \in M \Leftrightarrow \forall x \in G, xa = ax \Leftrightarrow \forall x \in G, xax^{-1} = a \Leftrightarrow c(a) = \{a\}$$

dir.

5.15. Teorem: G aşikar olmayan sonlu bir grup p asal bir tamsayı olsun. G'nin p grup olması için gerek ve yeter şart $o(G) = p^k$ olacak şekilde bir k pozitif tamsayının olmasıdır.

İspat: $\Rightarrow$: G, p-grup olsun. Eğer $q \neq p, q \cdot o(G)$ ise Cauchy teoremi gereği G'de mertebesi q olan eleman olur ki bu G'nin p-grup olması ile çelişir. Şu halde $o(G) = p^k, k \in \mathbb{Z}^+$ vardır.

$\Leftarrow$: $o(G) = p^k, k \in \mathbb{Z}^+$ olsun. Lagrance teoremine göre G'nin her elemanının mertebesi p'nin bir kuvvetidir. Böylece G bir p-gruptur.

5.16. Teorem: Sonlu bir p-grubun merkezi birimden farklıdır.

İspat: p asal, $n \geq 1$ ve $o(G) = p^n$ olsun. $a \in G$ için $M(a) \leq G$ ve Lagrange teoremine göre $o(M(a))o(G) = p^n$ dır.

$a \in M \Leftrightarrow M(a) = G \Leftrightarrow na = n$ denklikleri göz önüne alınarak eşlenik sınıf denklemi yazılırsa;

$$o(G) = p^n = o(M) + \sum \frac{p^n}{p^n q} = o(M) + p^{n-na}$$

bulunur. Bu eşitlikten $p \mid o(M)$ bulunur. O halde $0(M) > 1$ dir.

5.1. Sonuç: p asal tamsayı olmak üzere p^2 mertebeli grup değişmelidir. Gerçekten, G grubu değişmelidir ancak ve ancak $M = G$ dir. Önceki teoreme göre $o(M) \neq 1$ ve $o(M) \mid p^2$ olacağından $o(M) \mid p$ ve $o(M) = p^2$ olur. Eğer $o(M) = p$ olmadığını gösterirsek ispat tamamlanır.

$o(M) = p$ olsun. $\exists\, a \in G - M$ alalım. $M < M(a)$ ve $M \neq M(a)$ ğın $o(M) > p$ ve $o(M) \mid p^2$ yani $o(M) = p^2$ ve $M(a) = G$ bulunur

$o(M) = p$ ancak ve ancak $a \in M$ olduğundan $a \in G - M$ olması ile çelişir. O halde $o(M) = p$ olamaz.

5.11. Tanım: G bir grup ve $A \neq \emptyset$ olsun. Bir $* : G \times A \to A$,

$$(g,a) \to *((g,a)) = g*a$$

fonksiyonu verilsin. Eğer;

i) $\forall\, a \in A$ için $e*a = a$

ii) $\forall a \in A, \forall g, h \in G$ için $(gh)*a = g*(h*a)$ ise $*$ fonksiyonuna G'nin A üzerine bir etkisi ve A'ya bir G kümesi denir.

Uygulama da gerek olmadıkça, $g*a$ elemanı ga ile gösterilecektir.

Örnek: $\forall a \in A$ ve $\forall g \in G$ için $g*a = a$ ile tanımlı $*$ fonksiyonu G'nin A üzerine bir etkisidir. Buna aşikar etki denir.

Örnek: G bir grup $H \leq G$ olsun. $\forall h \in H$ ve $\forall g \in G$ için $h*g = hgh^{-1}$ ile tanımlı $*$ fonksiyonu H'nın G üzerine bir etkisidir. Buna H'nın G üzerine eşlenikleme etkisi denir.

$\forall h, k \in H, \forall g \in G$ için

$$\begin{aligned}(hk)*g &= (hk)g(hk)^{-1}\\ &= (hk)g(k^{-1}h^{-1})\\ &= h(kgk^{-1})h^{-1}\\ &= h*(kgk^{-1})h^{-1}\\ &= h*(k*g)\end{aligned}$$

ve $e*g = ege^{-1} = g$ dir.

Örnek: $G \leq S_n$ olsun. O zaman G, I_n üzerine doğal olarak etki eder $\sigma * i = \sigma(i)$ dir. Kolaylıkla $I(i) = i$ ve $\forall \sigma, \tau \in G$ için $\sigma\tau(i) = \sigma(\tau(i))$ dir.

5.17. Teorem: G grubu A kümesi üzerine etki etsin. Aşağıdakiler sağlanır.

i) $\forall a, b \in A$ için $a \sim b \Leftrightarrow ga = b$ olacak biçimde $g \in G$ vardır. $\sim$ A üzerinde denklik bağıntısıdır.

ii) $\forall a \in A$ için $G_a = \{g \in G \mid ga = a\} \leq G$ dir.

İspat: i) $\forall a \in A$ için $ea = a$ olduğundan $a \sim a$ dır.

$\forall a, b \in A$ için $a \sim b$ ise $ga = b$ dir. $g^{-1}(ga) = g^{-1}b$, $a = g^{-1}b$ olup $b \sim a$ dır.

$a, b, c \in A$ için $a \sim b$ ve $b \sim c$ ise $ga = b$ ve $hb = c$ olacak şekilde $g, h \in G$ vardır. $h(ga) = c \Leftrightarrow (hg)a = c$ olup $a \sim b$ dir.

ii) $ea = a$ olup $e \in G_a \Leftrightarrow G_a \neq \emptyset$ dır. Şimdi $g, h \in G_a$ olsun. $ga = ha = a$ dır. Ayrıca $ha = a \Leftrightarrow a = h^{-1}a$ olup $h^{-1} \in G_a$ dır. Şimdi

$$(gh^{-1})a = g(h^{-1}a) = ga = a$$

olup $gh^{-1} \in G_a$ dolayısıyla $G_a \leq G$ dir.

5.11. Tanım: G bir grup ve A kümesi üzerine etki etsin. $a \in A$ olsun. a'nın $\sim$ denklik bağıntısına göre denklik sınıfına G'nin a'yı içeren yörüngesi denir ve $Y_G(a)$ ile gösterilir. G_a altgrubuna da a'nın G içindeki dengeleyicisi denir.

Örnek: $S_3 = \{I, (1\ 2), (1\ 3), (2\ 3), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$, $A = \{1, 2, 3\}$ üzerine doğal etki etsin. $Y_G(1)$ ve G_1 bulalım. $Y_G(1) = \{1, 2, 3\}$ ve $G_1 = \{I, (2\ 3)\}$ olur.

5.18. Teorem: G sonlu bir grup ve A sonlu bir G küme olsun.

i) $\forall a \in A$ için $o(Y_G(a)) = \dfrac{G}{G_a}$ dır.

ii) G'nin A üzerindeki birbirinden farklı yörüngeleri

$$Y_G(a_1), Y_G(a_2), \ldots, Y_G(a_s)$$

ise $o(A) = \sum_{i=1}^{s} o(Y_G(a_i)) = \sum_{i=1}^{s} \dfrac{o(G)}{o(G_i)}$ dir.

İspat:

i) $B = \{gG_A \mid g \in G\}$ olsun. $o(B) = \dfrac{o(G)}{o(G_a)}$ dır. O halde $o(B) = o(Y_G(a))$ olduğunu göstermek yeterlidir. $\varphi: Y_G(a) \to B, \varphi(ga) = gG_A$ olarak tanımlayalım.

$ga = ha \Leftrightarrow h^{-1}(ga) = a \Leftrightarrow (h^{-1}g)a = a \Leftrightarrow h^{-1}g \in G_A \Leftrightarrow ga = hG_A$ olup φ iyi tanımlı ve 1-1 dir. Ayrıca tanım gereği örtendir. Böylece ispat biter.

ii) G'nin farklı bütün yörüngeleri $Y_G(a_1), Y_G(a_2), \ldots, Y_G(a_s)$ olsun. 5.11. tanımdan $A = \bigcup_{i=1}^{s} Y_G(a_i)$ ve (i) den dolayı

$$o(A) = o\left(\bigcup_{i=1}^{s} Y_G(a_i)\right) = \sum_{i=1}^{s} o(Y_G(a_i)) = \sum_{i=1}^{s} \frac{o(G)}{o(G_i)}$$

bulunur.

5.12. Tanım: G grubu kendi üzerine eşlenikleme biçiminde etki etsin. $\forall a \in G$ için G'nin a'yı içeren yörüngesine a'nın eşlenik sınıfı denir C(a) ile gösterilir. A'nın dengeleyicisine de a'nın G içindeki merkezleyeni denir ve M(a) ile gösterilir. Böylece

$$c(a) = \{\, xax^{-1} \mid g \in G\}, M(a) = \{g \in G \mid ga = ag\}$$

dir.

5.19. Teorem: G sonlu bir grup olsun.

i) $\forall$ a $\in$ A için $o(C(a)) = \dfrac{o(G)}{o(G_a)}$ dır.

ii) G'nin A üzerindeki birbirinden farklı bütün eşlenik sınıfları

$$C(a_1), C(a_2), \dots, C(a_s)$$

olsun. O zaman $o(G)=\sum_{i=1}^{s}\dfrac{o(G)}{o(M(a_i))}$ dir.

İspat: G kendi üzerine eşleniklenme biçiminde etki etsin.

i) a $\in$ G olsun. 5.16. teoremden dolayı $o(Y_G(a)) = \dfrac{o(G)}{o(G_a)}$ olduğundan 5.12. tanımdan $C(a) = o(Y_G(a))$ ve $o(M(a)) = o(G_a)$ olduğundan $o(C(a)) = \dfrac{o(G)}{o(G_a)}$ bulunur.

ii) G'nin birbirinden farklı bütün eşlenik sınıfları $C(a_1), C(a_2), \dots, C(a_s)$ olsun. 5.18. teoremden (ii) uygulanırsa (i) den dolayı

$$o(G)=\sum_{i=1}^{s} o(C(a_i))=\sum_{i=1}^{s}\frac{o(G)}{o(M(a_i))}$$

dir. Şimdi Sylow teoremlerine alt yapı hazırlayalım.

$$o(A)=\sum_{i=1}^{s} Y_G(a_i)=\sum_{i=1}^{s}\frac{o(G)}{o(G_{a_i})}$$

idi. Burada

$Fiks(G) = \{\, a \in A \mid ga = a, \forall\, g \in G\}$ olarak tanımlansın. $o(Fiks(G))$, uzunluğu bir olan yörünge sayısıdır. Uzunluğu birden büyük yörüngelerin bi-rer temsilcisi $b_1, b_2, \dots, b_r$ olsun.

$$o(A)=o(Fiks(G))+\sum_{j=1}^{r} o(Y_G(b_j))=o(Fiks(G))+\sum_{j=1}^{r}\frac{o(G)}{o(Gb_j)}$$

dir.

A = G alınırsa G kendi üzerine eşleniklenme biçiminde etki etsin. $Y_G(a_j)) = C(b_j)$ ve $G_{b_j} = M(b_j)$ olduğundan

$$o(G)=o(Fiks(G))+\sum_{j=1}^{r}o(C(b_j))=o(Fiks(G))+\sum_{j=1}^{r}\frac{o(G)}{o(M(b_j))}$$

olur. Ayrıca $a \in Fiks(G)$ iken $\frac{o(G)}{o(Ma)} = 1$ olduğudan $G = M(a)$ yani $a \in M$ dir. Buna göre $Fiks(G) = M$ olup

$$o(G)=o(M)+\sum_{j=1}^{r}\frac{o(G)}{o(C(b_j))}$$

bulunur. (Buna G'nin sınıf denklemi denir.)

5.7. Not: i) G sonlu bir grup ve G'nin mertebesini bölen bir asal p olsun. O zaman G'nin mertebesi p olan bir elemanı vardır. (Cauchy teoremi)

ii) $o(G) = p^n$ olan bir grup A sonlu bir G-küme olsun. O zaman

$$o(A) \equiv o(Fiks(G))(\text{mod } P)$$

dir.

iii) $k\,p^m$ elemanlı bir kümenin $OBEB(k, p) = 1$, p^m elemanlı alt kümelerinin sayısı s ise $s \equiv k\ (\text{mod } P)$ dir.

5.20. Teorem (Birinci Sylow Teoremi): G sonlu bir grup olsun. p bir asal sayı, $k, m \in \mathbb{N}$ ve $OBEB(k, p) = 1$ olmak üzere $o(G) = k\,p^m$ olsun. O zaman G'nin mertebesi p^m olan bir p-altgrubu vardır.

İspat: G'nin p^m elemanlı alt kümelerinin sayısı M olsun. 5.8. nottan $o(p) \equiv k(\text{mod } P)$ ve $OBEB(k, p) = 1$ olduğundan $p \nmid M$ dir. $A \in M$ ve $g \in G$ için $gA = \{ga \mid a \in A\}$ olarak tanımlansın. $o(gA) = o(A) = p^m$ olduğundan $gA \in M$ dir.

Tanıma göre M bir G-kümedir. G'nin M üzerindeki farklı yörüngeleri $A_1, A_2, \dots, A_r \in M$ olmak üzere $Y_G(A_1), Y_G(A_2), \dots, Y_G(A_r)$ olsun.

$$o(M) = o(Y_G(A_1), Y_G(A_2), \dots, Y_G(A_r))$$

dir. Ayrıca $p \nmid M$ olduğundan bir $1 \leq i \leq r$ için $p \nmid Y_G(A_i)$ dir. $S = A_i$ olsun. 5.18. teoremden (i) den $\frac{o(G)}{o(G_S)} = o(Y_G(s))$ ve $p \nmid o(Y_G(s))$ olduğundan $p \nmid \frac{G}{G_S}$ dir. $p^m \mid o(G_s)$ olduğundan $p^m \leq o(G_s)$ dir. $a \in S$ alalım. Her $m \in G_s$ için $xS = S$ olup $xa \in S$ dir. Buradan $G_s a \subseteq S$ ve $o(G_s a) \leq o(S)$ bulunur. Ayrıca $o(G_s) = o(G_s a)$ ve $o(S) = p^m$ olduğundan $o(G_s) \leq p^m$ ve böylece $o(G_s) = p^m$ olur.

5.21. Teorem (İkinci Sylow Teoremi): G sonlu bir grup olsun. G'nin herhangi iki Sylow p-altgrubu G içinde eşleniktir.

İspat: $m \in \mathbb{Z}^+$ ve $\mathrm{OBEB}(k, p) = 1$ olmak üzere $o(G) = k\,p^m$ olsun. G'nin iki Sylow p-altgrubu P ve Q olsun. $o(P) = o(Q) = p^m$ dir. $gPg^{-1} = Q$ olacak biçimde bir $g \in G$ olduğunu göstermek yeterlidir. $A = \{gP \mid a \in G\}$ olsun. $o(P) = \frac{G}{P}$ dir. Şimdi Q, A üzerinde her $y \in Q$ ve $gP \in A$ için $y(gP) = (yg)P$ şeklinde etki etsin.

Q bir p-grubu olduğundan 5.8. not (ii) den $o(A) \equiv o(\mathrm{Fiks}\ (Q))\ (\mathrm{mod}\ P)$ dir. Ayrıca $o(A) = \frac{o(G)}{o(P)} = \frac{k\,p^n}{p^n} = k$ olduğundan $P \nmid o(A)$ ve $\mathrm{Fiks}\ (Q) \neq \varnothing$ dir.

$gP \in \mathrm{Fiks}(Q)$ olsun. $y \in Q$ için $ygP = gP$ olduğundan $g^{-1}ygP = P$ ve $g^{-1}yg \in P$ olur. Buradan $g^{-1}Qg \leq p$ bulunur. Ayrıca $o(P) = o(g^{-1}ygP)$ olduğundan $P = g^{-1}Qg$ dir.

5.22. Teorem (Üçüncü Sylow Teoremi): G sonlu bir grup ve G'nin Sylow p-altgruplarının sayısı np olsun. O zaman $n_p = \frac{o(G)}{o(N_G(P))}$ ve $n_p \equiv 1\ (\mathrm{mod}\ P)$ dir.

İspat: G'nin bir Sylow p-altgrubu P ve $A = \{gPg^{-1} \mid g \in G\}$ olsun. G'nin btün Sylow p-altgrupları P'nin eşleniklerinden oluşturduğundan $o(A) = n_p$ dir. $o(A) \equiv 1\ (\mathrm{mod}\ P)$ ve $o(A) = \frac{o(G)}{o(N_G(P))}$ olduğunu göstermek yeterlidir. P, A üzerine eşleniklenme biçiminde etki etsin. P bir p-grubu olduğundan 5.8. not (ii) den $o(A) \equiv o(\mathrm{Fiks}(p))\ (\mathrm{mod}\ P)$ dir.

$P \in \mathrm{Fiks}(p)$ olduğundan $\mathrm{Fiks}(p) \neq \varnothing$ dir. Şimdi $gPg^{-1} \in \mathrm{Fiks}(P)$ olsun. Her $y \in P$ için $y(gPg^{-1})y^{-1} = gPg^{-1}$ olduğundan

$$(gyg^{-1})P(g^{-1}y^{-1}g) = (g^{-1}yg)P(g^{-1}yg)^{-1} = P$$

ve $gyg^{-1} \in N(P)$ olur. y keyfi seçildiğinden $gPg^{-1} \leq N(P)$ dir.

Buradan P ve gPg^{-1}, N(P) nin Sylow p-altgruplarıdır. İkinci Sylow teoreminden $h^{-1}g^{-1}Pgh = P$ olacak biçimde $h \in N(P)$ vardır. $gh \in N(P)$ olduğundan $g \in N(P)$ ve buradan $gPg^{-1} = P$ bulunur. Dolayısla $\mathrm{Fiks}\ (p) = \{p\}$ ve $o(\mathrm{fiks}(P)) = 1$ dir. Bu değer yukarıda yerine konulursa $o(A) \equiv 1\ (\mathrm{mod}\ p)$ bulunur.

Şimdi $o(A)=\dfrac{o(G)}{o(N_G(P))}$ olduğunu gösterelim. $x,y\in G$ için

$$\begin{aligned} xPx^{-1}=yPy^{-1} &\Leftrightarrow (y^{-1})P(y^{-1}x)^{-1}=P \\ &\Leftrightarrow y^{-1}x\,N(P) \\ &\Leftrightarrow x\,N(P)=y\,N(P) \end{aligned}$$

olduğundan $o(A)=\dfrac{o(G)}{o(N_G(P))}$ dir. Özel olarak $o(A)\mid o(G)$ olur.

Örnek: S_4 simetrik grubunun $p=2,3$ için Sylow p-altgrubunu bulunuz.

Çözüm: $o(A)=2^3 3=24$ tür. Öyleyse D_4 bir Sylow 2- altgrubudur. Çünkü $o(D_4)=2^3$ tür. Ayrıca

$\langle(1\ 2\ 3)\rangle,\langle(1\ 2\ 4)\rangle,\langle(1\ 3\ 4)\rangle,\langle(1\ 2\ 3)\rangle$

altgruplarından her biri Sylow 3-altgrubudur.

ÇÖZÜMLÜ ALIŞTIRMALAR

1. $\theta=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\3&7&5&6&1&2&8&4\end{pmatrix}$

permütasyonu verilsin. θ'yı önce ayrık devirlerin sonra da 2-li devirlerin bir çarpımı şeklinde yazınız. θ çift midir, tek midir?

Çözüm: $\theta=(1,3,5)(2,7,8,4,6)=(1,3)(1,5)(2,7)(2,8)(2,4)(2,6)$ olup θ permütasyonu 6 tane transpozisyonun çarpımıdır, yani çifttir.

2. S_3 de $A=\langle(1,2)\rangle$ ve $B=\langle(1,3)\rangle$ altgrupları verilsin. AB çarpımı S_3 ün bir altgrubu mudur?

Çözüm: $A=\langle(1),(1,2)\rangle$ ve $B=\langle(1),(1,3)\rangle$ ise

$$AB=\{(1),(1,2),(1,3),(1,2,3)\}$$

olur. Burada $(1,3)(1,2)=(1,3,2)\in AB$ olup AB bir altgrup değildir.

4. Bir G grubunun normal bir altgrubunun normal bir altgrubu G'de normal olmayabilir. Bir örnek vererek gösteriniz.

Çözüm: $G=A_4$ grubunu alalım.

$$V=\{(1),(1\ 2)(3\ 4),(1\ 3)(2\ 4),(1\ 4)(2\ 3)\}\lhd A_4$$

olduğu açıktır, çünkü ayrık iki transpozisyonun çarpımı şeklindeki bütün permütasyonlar V de olup her $\alpha \in A_4$ ve her $\beta \in V$ için $\alpha^{-1}\beta\alpha$ permütasyonu β ile aynı şekle sahiptir. Yani birim elemandır ya da ayrık iki transpozisyonun çarpımıdır. O halde $\alpha^{-1}\beta\alpha \in V$ dir. Şimdi U={(1), (1 2)(3 4)} dersek $U \lhd V$ olur. Çünkü bu altgrubun indeksi 2'dir. Ancak U, A_4 ün normal altgrubu değildir. Çünkü $(1\ 2\ 3) \in A_4$ için $(1\ 2\ 3)^{-1} \cdot (1\ 2)(3\ 4) \cdot (1\ 2\ 3) = (2\ 3)(1\ 4) \notin U$ dir.

5. $n \geq 3$ için S_n Abelyen değildir. Gösteriniz.

Çözüm: $n \geq 3$ ise $\alpha = (1,2) \in S_n$ ve $\beta = (1,3) \in S_n$ alalım $\alpha\beta = (1,2,3)$ fakat $\beta\alpha = (1,3,2)$ olup S_n abelyen değildir.

6. $H \leq S_n$ bir altgrup olsun. Ya H'nin tüm elemanları çifttir ya da yarısı tek yarısı çifttir. Gösteriniz.

Çözüm: $H \leq S_n$ olsun. H'nin tüm elemanları çift olmasın. $\sigma \in H$ tek olsun. $H\sigma = H$ olup H'yi σ ile çarpmak H'deki bütün çift elemanları tek; tek elemanları da çift yapar. O halde H'deki elemanların yarısı çift yarısı tektir.

7. S_5 de $\alpha = (1,2,3)(4,5)$ permütasyonunun merkezleyenini bulunuz.

Çözüm: $C_\alpha = \{\tau \in S_5 : \tau^{-1}\alpha\tau = \alpha\}$ kümesidir. Başka bir deyişle bu küme α'yı α'ya eşlenik yapan permütasyonların kümesidir. 5.8. teoremde izah edildiği gibi bu permütasyonları bulmak için α'nın altına α yazılıp üstteki sembolleri alttakilere eşleyen permütasyonlar yazılır. O halde

$C_\alpha = \{(1),(1,2,3),(1,3,2),(1,2,3)(4,5),(1,3,2)(4,5),(4,5)\}$

olur.

8. A_3 ün grup tablosunu yazınız.

Çözüm: $A_3 = \{(1),(1\ 2\ 3),(1\ 3\ 2)\}$ grubunun tablosu aşağıda verilmiştir.

·	(1)	(123)	(132)
(1)	(1)	(123)	(132)
(123)	(123)	(132)	(1)
(132)	(132)	(1)	(123)

9. $A_n = S_n$ ise $n = 1$ olduğunu gösterin.

Çözüm: $n > 1$ ise S_n grubu 1 ile 2'yi yer değiştirip diğer bütün elemanları sabit bırakan $\alpha = (1,2)$ permütasyonunu içerir. α tek permütasyon olduğundan $A_n \neq S_n$ dir. $A_1 = S_1$ olduğundan $A_n = S_n \Rightarrow n = 1$ dir.

10. Aşağıdaki permütasyonların mertebelerini bulunuz. Tek veya çift olma durumlarını belirtiniz.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 3 & 5 & 7 & 6 & 8 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

b) $(1\ 5\ 2\ 3\ 7)(3\ 4\ 2\ 9\ 5\ 6)$

Çözüm: Öncelikle verilen permütasyonları ayrık devirlerin çarpımı olarak yazalım.

a) $(1\ 9\ 4\ 7)(2\ 3\ 5\ 6\ 8)$

$\text{OKEK}(4,5) = 20$

Teklik ve çiftlik için permütasyonu transpozisyonlarının çarpımı olarak yazalım.

$(1\ 7)(1\ 4)(1\ 9)(2\ 8)(2\ 6)(2\ 5)(2\ 3)$

olup 7 tane yani tek permütasyondur.

b) $(1\ 5\ 7)(2\ 9)(3\ 4)$

$\text{OKEK}(4,\ 2,2) = 4$

Transpozisyonları $(1\ 7)(1\ 6)(1\ 5)(2\ 9)(3\ 4)$ olup 5 tane yani tek permütasyondur.

11. $f = (1\ 4\ 7)(2\ 5\ 8)$, $h = (1\ 5\ 4)(2\ 3\ 6)$ ise $gfg^{-1} = h$ olacak şekilde bir g permütasyonu bulunuz.

Çözüm: $gfg^{-1} = h$

$(g(1)g(4)g(7))(g(2)g(5)g(8)) = (1\ 5\ 4)(2\ 3\ 6)$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 7 & 5 & 3 & 8 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

$(3\ 7\ 4\ 5)(6\ 8)$

olur.

12. S_4 de $\alpha = (1\ \ 3\ 4)(1\ 2\ \ 4)$ permütasyonunun $Z(\alpha)$ merkezleştiricisini bulunuz.

Çözüm: $\beta\alpha\beta^{-1} = \alpha$

$(\beta(1)\beta(2)(\beta(3)\beta(4)) = (1\ 2)(3\ 4)$

$$= (1\ 2)(4\ 3)$$
$$= (2\ 1)(3\ 4)$$
$$= (2\ 1)(4\ 3)$$
$$= (3\ 4)(1\ 2)$$
$$= (3\ 4)(2\ 1)$$
$$= (4\ 3)(1\ 2)$$
$$= (4\ 3)(2\ 1)$$

$Z(\alpha) = \{I, (3\ 4), (2\ 1), (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 3\ 2\ 4), (1\ 4\ 2\ 3),$
$(1\ 4)(2\ 3)\}$

13. Mertebesi 35 olan grup basit grup mudur?

Çözüm: $o(G) = 35 = 5 \cdot 7$, $n_5 = 1 + 5k \mid 7$, $k = 0$ ise $n_5 = 1$, 1 tane Sylow 5-altgrubu vardır. Bu altgrup P ise $P \lhd G$ dir. $5^m \mid o(G)$, $5^{m+1} \nmid o(G)$ için $m = 1$ ve $o(P) = 5$ dir. O halde G grubu basit grup değildir.

14. Mertebesi 30 olan grup basit grup mudur?

Çözüm: $o(G) = 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$

$n_2 = 1 + 2k \mid 15$ için $n_2 \in \{1, 3, 5 \text{ ve } 15\}$

$n_3 = 1 + 3k \mid 10$ için $n_3 \in \{1, 10\}$

$n_5 = 1 + 5k \mid 6$ için $n_5 \in \{1, 6\}$

$n_5 = 6$ ise farklı Slow 5-altgruplarının kesişimi $\{e\}$ olduğundan $4 \cdot 6 = 24$

$n_3 = 10$ ise $2 \cdot 10 = 20$ olup $24 + 20 + 1 = 45$ olması gerekir. $45 > 30$ olup n_3 veya n_5 ten birisi 1 olmak zorunda 1 tane olan normal altgrup olup G basit grup değildir.

15. Mertbesi 48 olan grup basit grup muduru?

Çözüm: $o(G) = 48 = 2^4 \cdot 3$,

$+2k \mid 3$ için $n_2 \in \{1, 3\}$

ise $n_2 = 1$ basit değildir. $n_2 = 3$ olsun. G'nin birbirinden farklı iki Sylow 2-altgrubu P ve Q olsun.

$$o(PQ) = \frac{o(P)o(Q)}{o(P \cap Q)} = \frac{16 \cdot 16}{o(P \cap Q)} \leq 48, \quad o(P \cap Q) \geq 8$$

olmalıdır. $P \cap Q \neq P$ olduğundan $|P \cap Q| = 8$ bulunur.

$$o(PQ) = \frac{16 \cdot 16}{8} = 32$$

bulunur. $P \cap Q \leq P, Q \leq N_G(P \cap Q)$ olup $o(N_G(P \cap Q)) \geq 32$, $o(N_G(P \cap Q)) \mid 48$ olduğundan $o(N_G(P \cap Q)) = 48$ olup $N_G(P \cap Q) = 6$, $P \cap Q \lhd G$ bulunur.

KAYNAKÇA

1. Prof. Dr. Fethi ÇALLIALP, Soyut Cebir, 2011, İstanbul.
2. Yrd. Doç. Dr. Hüseyin BİLGİÇ, Soyut Cebir Ders Notları, Kahramanmaraş Sütçü İmam Üniversitesi, 2012, Kahramanmaraş.
3. Prof. Dr. Şenol Eren, Soyut Cebir, Ondokuz Mayıs Üniversitesi Dijital Ders Platformu, 2021, Samsun.
4. Prof. Dr. Sait Halıcıoğlu, Doç. Dr. Burcu Üngör, Cebir, Açık ders, Ankara Üniversitesi, 2021, Ankara.
5. Doç. Dr. Sebahattin BALCI, Modern Cebire Giriş, Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi Döner Sermaye İşletmeleri Yayınları: 15, 1993, ANKARA.
6. Doç. Dr. Mustafa Bayraktar, Soyut Cebir ve Sayılar Teorisi, Atatürk Üniversitesi Basımevi, 1988, Erzurum.
7. Prof. Dr. H.İbrahim Karataş, Soyut Cebir, TÜBA, 2010, Ankara.