6. BÖLÜM
GRUPTA HOMOMORFİZMA ve İZOMORFİZMA

HOMOMORİZMA KAVRAMI

6.1. Tanım: (G,Δ) ve $(H,*)$ iki grup olsun. $f: G\to H$ bir fonksiyon olsun. Eğer f fonksiyonu "Grup işlemini koruyorsa", yani her $a,b\in G$ için

$$f(a\Delta b)=f(a)*f(b)$$

ise f 'ye G'den H'ye bir grup homomorfizması veya kısaca homomorfizma denir.

Örnek: $I_G: G\to G$ birim dönüşümü;

$$I_G(xy)=xy=I_G(x)I_G(y)$$

olduğundan birim dönüşümü bir homomorfizmasıdır.

Örnek: $G=(\mathbb{Z},+)$ ve $n\in\mathbb{Z}$ olsun. $f: G\to G$ dönüşümü her $x\in\mathbb{Z}$ için $f(x)=nx$ şeklinde tanımlansın. f bir homomorfizmadır. Çünkü

$$f(x+y)=n(x+y)=nx+ny=f(x)+f(y)$$

dir.

Örnek: $G=(\mathbb{R},+)$ ve $H=(\mathbb{R}^+,\cdot)$ olsun. $f: G\to H, f(x)=e^x$ şeklinde tanımlansın. Her $x,y\in\mathbb{R}$ için

$$f(x+y)=e^{x+y}=e^x\cdot e^y=f(x)\cdot f(y)$$

olup f bir grup homomorfizması olur.

Yine $g: H\to G, g(x)=\ln x$ de bir homomorfizmadır. Bu ikinci örnek okuyucuya bırakılmıştır.

Örnek: $G=(\mathbb{Z},+)$ ve $H=(\mathbb{Z}_n,\oplus)$ olsun. $f: G\to H, f(x)=\bar{x}$ modül dönüşümü verilsin. Her $x,y\in\mathbb{Z}$ için

$$f(x+y)=\overline{x+y}=\bar{x}\oplus\bar{y}=f(x)\oplus f(y)$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm bir homomorfizmadır. çünkü her $x,y\in\mathbb{Z}$ için

Örnek: $G = GL_n(\mathbb{R}), H = (\mathbb{R}\backslash\{0\}, \cdot)$ olsun. $f : G \to H, f(X) = \det(X)$ olsun. Her $X, Y \in GL_n(\mathbb{R})$ için

$$f(X \cdot Y) = \det(X \cdot Y) = \det(X) \cdot \det(Y) = f(X) \cdot f(Y)$$

olup f bir homomorfizmadır.

Örnek: G bir grup, $N \lhd G$ olsun. $f : G \to G/N$ her $x \in G$ için $f(x) = Nx$ şeklinde tanımlanan dönüşüm örten bir homomorfizmadır. Bu dönüşüme G den G/N üzerine olan kanonik (doğal) homomorfizma denir. Her $x, y \in G$ için

$$f(xy) = N(xy) = (Nx)(Ny) = f(x)f(y)$$

olup f bir homomorfizmadır. Her $Y = Nx \in G/N$ için $f(x) = Nx = Y$ olup f 'nin örten olduğu görülür.

6.1. Teorem: G ve H iki grup ve $f : G \to H$ bir homomorfizma olsun.

i) e, G'nin ve e_0 da H'nin birim elemanı ise $f(e) = e_0$
ii) Her $a \in G$ için $f(a^{-1}) = [f(a)]^{-1}$
iii) $f(G) \leq H$
iv) G Abelyen ve f örten ise H'de Abelyen
v) G devirli ve f örten ise H'de devirlidir.

İspat: i) Her $g \in G$ için

$$\begin{aligned} f(g) = f(ge) = f(g)f(e) &\Rightarrow f(g) = f(g)f(e) \\ &\Rightarrow f(g)^{-1}f(g) = f(g)^{-1}f(g)f(e) \\ &\Rightarrow e_0 = e_0 f(e) \\ &\Rightarrow e_0 = f(e) \end{aligned}$$

ii) Her $a \in G$ için

$$f(a)f(a^{-1}) = f(aa^{-1}) = f(e) = e_0$$
$$f(a^{-1})f(a) = f(a^{-1}a) = f(e) = e_0$$

olup $f(a^{-1}) = [f(a)]^{-1})$ dir.

iii) $x, y \in f(G)$ alalım.

$$\begin{aligned} x, y \in f(G) &\Rightarrow f(a) = x, f(b) = y \text{ olacak şekilde } \exists\, a, b \in G \text{ vardır} \\ &\Rightarrow ab^{-1} \in G \text{ olup } f(ab^{-1}) = f(a)f(b^{-1}) = f(a)[f(b)]^{-1} = xy^{-1} \\ &\Rightarrow xy^{-1} \in f(G) \\ &\Rightarrow f(G) \leq H \end{aligned}$$

olur.

iv) G Abelyen ve f örten olsun. $x, y \in H$ olsun.

$x, y \in H \Rightarrow$ f örten olduğundan $\exists\, a, b \in G$ için $f(a) = x, f(b) = y$ vardır

$\Rightarrow xy = f(a)f(b) = f(ab) = f(ba)$, (G Abelyen old. yani $ab = ba$)

$\Rightarrow xy = f(ba) = f(b)f(a) = yx$
$\Rightarrow$ H, Abelyen gruptur.

v) $G = \langle a \rangle$ devirli ve f örten olsun. f örten olduğundan $f(G) = H$ yazalım. $G = \{a^n : n \in \mathbb{Z}\}$ olup $f(G) = \{f(a^n) : n \in \mathbb{Z}\}$ dir. Şimdi $n > 1$ ise

$$f(a^n) = f(\underbrace{a \cdot a \dots a}_{n\ \text{tane}}) = \underbrace{f(a)f(a)\dots f(a)}_{n\ \text{tane}} = f(a)^n$$

Benzer şekilde $n < 0$ ise

$$\begin{aligned} f(a^n) &= f((a^{-1})^{-n}) \\ &= \underbrace{f(a^{-1})f(a^{-1})\dots f(a^{-1})}_{n\ \text{tane}} \\ &= \underbrace{f(a)^{-1}f(a)^{-1}\dots f(a)^{-1}}_{n\ \text{tane}} \\ &= [f(a)^{-1}]^{-n} \\ &= f(a)^n \end{aligned}$$

Ayrıca $n = 0$ ise $f(a^0) = f(e) = e_0 = f(a)^0$ dır. Sonuç olarak her n $n \in \mathbb{Z}$ için $f(a^n) = f(a)^n$ dir. O halde

$$H = f(G) = \{f(a^n) : n \in \mathbb{Z}\} = \{f(a)^n : n \in \mathbb{Z}\} = \langle f(a) \rangle$$

olup H'de devirlidir.

6.2. Tanım: $f : G \to H$ bir homomorfizma olsun. Bir $h \in H$ için $f(x) = h$ ise $x \in G$ elemanına h'nin ters görüntüsü denir. h'nin birden fazla ters görüntüsü olabilir. h'nin ters görüntülerinin kümesi

$$f^{-1}(h) = \{x \in G : f(x) = h\}$$

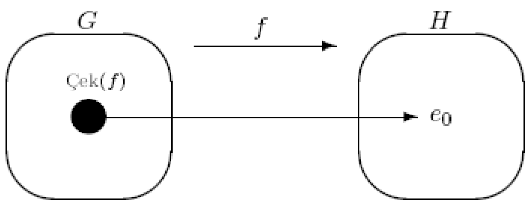
şeklinde ifade edilebilir.

GRUP HOMOMORFİZMASININ ÇEKİRDEĞİ

6.3. Tanım: G, H iki grup $f : G \to H$ bir homomorfizma ve H'nin birim elemanı e_0 olsun.

$$\text{Çek}(f) = \{x \in G : f(x) = e_0\} = f^{-1}(e_0)$$

ifadesine f 'nin çekirdeği denir.



Çek(f) boş küme olamaz, çünkü $f(e) = e_0$ olduğundan $e \in$ Çek(f) olmalıdır.

6.2. Teorem: $f : G \to H$ bir grup homomorfizması ise $\text{Çek}(f) \lhd G$ dir.

İspat:

$$\begin{aligned}
a, b \in \text{Çek}(f) &\Rightarrow f(a) = f(b) = e_0 \\
&\Rightarrow f(ab^{-1}) = f(a)f(b^{-1}) = f(a)f(b)^{-1} \\
&\Rightarrow f(ab^{-1}) = e_0\,(e_0)^{-1} \\
&\Rightarrow ab^{-1} \in \text{Çek}(f) \\
&\Rightarrow \text{Çek}(f) \leq G
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
g \in G, a \in \text{Çek}(f) &\Rightarrow f(gag^{-1}) = f(g)f(a)f(g^{-1}) \\
&\Rightarrow f(gag^{-1}) = f(g)f(a)f(g)^{-1} \\
&\Rightarrow f(gag^{-1}) = f(g)e_0f(g)^{-1} \\
&\Rightarrow f(gag^{-1}) = e_0 \\
&\Rightarrow gag^{-1} \in \text{Çek}(f)
\end{aligned}$$

olup $\text{Çek}(f) \lhd G$ olduğu görülür. //

Şimdi bir $h \in H$ nin ters görüntü kümesinin Çek(f) nin bir sol koseti (veya sağ koseti) olduğunu göreceğiz.

6.3. Teorem: $f : G \to H$ bir homomorfizma, $h \in H$ ve $x \in f^{-1}(h)$ olsun. Bu durumda $f^{-1}(h) = x \cdot \text{Çek}(f)$ dir.

İspat: Önce $f^{-1}(h) \subseteq x \cdot \text{Çek}(f)$ olduğunu gösterelim. $x \in f^{-1}(h)$ ise $f(x) = h$ dir.

$$\begin{aligned}
b \in f^{-1}(h) &\Rightarrow f(b) = h \\
&\Rightarrow f(x) = f(b) \\
&\Rightarrow f(x)^{-1}f(x) = f(x)^{-1}f(b) \\
&\Rightarrow e_0 = f(x)^{-1}f(b) = f(x^{-1}b) \\
&\Rightarrow x^{-1}b \in \text{Çek}(f) \\
&\Rightarrow \exists\, k \in \text{Çek}(f), x^{-1}b = k \\
&\Rightarrow b = xk \in x \cdot \text{Çek}(f)
\end{aligned}$$

olup $f^{-1}(h) \subseteq x \cdot \text{Çek}(f)$ elde edilir. Şimdi de

$$\begin{aligned}
b \in x \cdot \text{Çek}(f) &\Rightarrow \exists\, k \in \text{Çek}(f), b = xk \\
&\Rightarrow f(b) = f(x)f(k) \\
&\Rightarrow f(b) = f(x)e_0 \\
&\Rightarrow f(b) = f(x) \\
&\Rightarrow f(b) = h \\
&\Rightarrow b \in f^{-1}(h)
\end{aligned}$$

olur ve $x \cdot \text{Çek}(f) \subseteq f^{-1}(h)$ dir. O halde $f^{-1}(h) = x \cdot \text{Çek}(f)$ dir. ı

6.1. Sonuç: $h \in H$ elemanının bütün ters görüntüleri $x \in f^{-1}(h)$ olmak üzere $x \cdot \text{Çek}(f)$ kümesidir.

İZOMORFİZMA KAVRAMI

6.4. Tanım: $f: G \to H$ grup homomorfizması birebir ve örten ise f 'ye bir izomorfizma denir. Eğer G'den H'ye bir izomorfizma (yani birebir ve örten bir homomorfizma) varsa G ile H gruplarına izomorfiktirler veya eş yapılıdırlar denir ve $G \cong H$ yazılır.

6.1. Not: Birebir homomorfizmalara monomorfizma; örten homomorfizmalara da epimorfizma adları verilmektedir.

6.2. Not: Gruplar arasındaki "izomorfik (eş yapılı) olma" bağıntısının bir denklik bağıntısı olduğunu göstereceğiz. Bu yüzden cebirciler iki izomorfik grup arasında fark gözetmezler. İki izomorfik grubun yapıları aynıdır. Sadece elemanları farklıdır. Bu yüzden, mesela, elemanlar arasında uygun eşleme yapıldığında grup tablolarının aynı olduğu görülür.

Örnek: $A = \{1, -1, i, -i\}$ kümesi çarpma işlemi ile bir gruptur. $\mathbb{Z}_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$ alalım. i sayısının kuvvetleri alınırsa,

$$i^0 = 1, i^1 = i, i^2 = -1, i^3 = -i$$

olduğu görülür. Buna göre $f: \mathbb{Z}_4 \to A$ dönüşümünü

$$f(\bar{0}) = 1, f(\bar{1}) = i, f(\bar{2}) = -1, f(\bar{3}) = -i$$

yazılabilir. f 'nin 1-1 ve örten olduğu açıktır. f 'nin homomorfizma olduğunu gösterelim.

$$f(\bar{1} \oplus \bar{2}) = f(\bar{3}) = -i \text{ ve } f(\bar{1})f(\bar{2}) = i(-1) = -i$$

diğer işlemler yapıldıktan sonra $A \cong \mathbb{Z}_4$ yazabiliriz. Şimdi grup tablolarının (elemanları f 'de verilen sırada yazdığımızda) aslında aynı olduğunu görelim.

$\oplus$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$

$\cdot$	1	i	-1	$-i$
1	1	i	-1	$-i$
i	i	-1	$-i$	1
-1	-1	$-i$	1	i
$-i$	$-i$	1	i	-1

Benzer şekilde $G = \langle a \rangle = \{e, a, a^2, a^3\}$ 4-üncü mertebeden devirli grup ise $A \cong G$ dir. Bu şekildeki tüm grupların sınıfına 4-üncü mertebeden devirli grup denir ve hepsi de C_4 ile gösterilir. Genel olarak n-inci mertebeden devirli gruplar C_n ile gösterilir. Bu durumda $\mathbb{Z}_4 \cong C_n$ olduğu açıktır.

6.3. Not: 4 elemanlı olup da C_n'e izomorfik olmayan bir grup vardır. Bu grupta, birim eleman hariç, bütün elemanların dereceleri 2'dir. Yani her elemanın tersi kendisidir. Bu gruba Klein-4 grubu denir. Mesela, $\mathbb{Z}_8^* = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}, \bar{7}\}$ bir Klein-4 grubudur.

Örnek: D_3 dihedral grubunun $D_3 = \{e, f, f^2, g, fg, f^2g\}$ grubundan S_3 grubuna ϕ dönüşümünü

$\phi: \; e \to f_1, f \to f_5, f^2 \to f_4, fg \to f_6, g \to f_2, f^2g \to f_3$

şeklinde tanımlarsak bir izomorfizma elde ederiz. O halde $D_3 \cong S_3$ dür. $gf = f^2g$ eşitliği kullanılarak tablodaki boşlukları dolduralım.

$\cdot$	e	f	f^2	g	fg	f^2g
e	e	f	f^2	g	fg	f^2g
f	f	f^2	e	fg	f^2g	g
f^2	f^2	e	f	f^2g	g	fg
g	g	f^2g	fg	e	f^2	f
fg	fg					
f^2g	f^2g					

6.4. Teorem: $f: G \to H$ homomorfizmasının birebir olması için gerek ve yeter şart $\text{Çek}(f) = \{e\}$ olmasıdır.

İspat: $\Rightarrow$ f birebir olsun. $f(x) = e_0$ olsun. $f(e) = e_0$ olup f, 1-1 olduğundan $x = e$ olmalıdır. O halde $f(x) = e_0$ olacak şekildeki tek eleman $x = e$ dir. Yani $\text{Çek}(f) = \{e\}$ olur.

$\Leftarrow$: $\text{Çek}(f) = \{e\}$ olsun. Her $x, y \in G$ için

$$\begin{aligned} f(x) = f(y) &\Rightarrow f(x)f(y)^{-1} = e_0 \\ &\Rightarrow f(xy^{-1}) = e_0 \\ &\Rightarrow xy^{-1} \in \text{Çek}(f) = \{e\} \\ &\Rightarrow xy^{-1} = e \\ &\Rightarrow x = y \end{aligned}$$

olup f 'nin 1-1 olduğu gösterilmiş olur.

6.5. Teorem: G,H,K birer grup olsun.

i) $f : G \to H$ izomorfizma ise $f^{-1} : H \to G$ de izomorfizma
ii) $f : G \to H$; $g : H \to K$ izomorfizma ise $g \circ f : G \to K$ izomorfizmadır.

İspat:
i) Birebir ve örten bir dönüşümün tersi de 1-1 ve örten olacağından f^{-1} de 1-1 ve örtendir. O halde f^{-1} in homomorfizma olduğunu göstermemiz yeterlidir. $h_1, h_2 \in H$ olsun. f, 1-1 ve örten olduğundan $f(g_1) = h_1, f(g_2) = h_2$ olacak şekilde sadece bir tane $g_1, g_2 \in G$ eleman çifti vardır. Şimdi
$$f(g_1g_2) = f(g_1)f(g_2) = h_1h_2 \Rightarrow f^{-1}(h_1h_2) = g_1g_2 = f^{-1}(h_1)f^{-1}(h_2)$$
olup f^{-1} bir homomorfizmadır.

ii) Birebir ve örten iki dönüşümün bileşkesi 1-1 ve örten olacağından $g \circ f$, 1-1 ve örtendir. O halde $g \circ f$'nin bir homomorfizma olduğunu göstermemiz yeterlidir. $x, y \in G$ olsun.
$$\begin{aligned}(g \circ f)(xy) &= g(f(xy)) \\ &= g(f(x) \cdot f(y)) \quad \text{(f hom. olduğundan)} \\ &= g(f(x)) \cdot g(f(y)) \quad \text{(g hom. olduğundan)} \\ &= (g \circ f)(x) \cdot (g \circ f)(y)\end{aligned}$$
olup $g \circ f$ bir homomorfizmadır. O halde $g \circ f$ bir izomorfizmadır.

6.2. Sonuç: G'den G'ye I_G birim dönüşümü bir izomorfizmadır. O halde her grup kendine izomorfiktir. Yukardaki teoremde $G \cong H \Rightarrow H \cong G$ ve $G \cong H, H \cong K \Rightarrow G \cong K$ olduğu gösterilmiştir. O halde gruplar üzerinde tanımlanan izomorfik olma bağıntısı bir denklik bağıntısıdır. Bu bağıntıya göre farklı gruplar (ilk 10 mertebe için) tabloda verilmiştir.

Mertebe	Abelyen Gruplar	Abelyen Olmayan Gruplar	Toplam
1	C_1	–	1
2	C_2	–	1
3	C_3	–	1
4	C_4 ve $C_2 \times C_2$(Klein–4)	–	2
5	C_5	–	1
6	C_6	S_3	2
7	C_7	–	1
8	$C_8, C_4 \times C_2$ ve $C_2 \times C_2 \times C_2$	Q_8 ve D_4	5
9	C_9 ve $C_3 \times C_3$	–	2
10	C_{10}	D_5	2
C_n : n–inci mertebeden devirli grup		D_n : eşkenar n–genin dihedral grubu	
Q_8 : Quaternionlar (Alıştırma 3.8)		S_3 : Permütasyon grubu (Örnek 1.16)	
$G \times H$: G ile H gruplarının "direkt çarpımı" (bu notlarda anlatılmamıştır)			

İzomorfik olma bağıntısına göre 10. mertebeye kadar olan farklı gruplar.

6.6. Teorem: İki devirli grubun izomorfik olması için gerek ve yeter şart bu iki grubun mertebelerinin aynı olmasıdır.

İspat: $\Rightarrow$: G ve H iki devirli grup olsun. $G \cong H$ ise $f : G \to H$ homomorfizması 1-1 ve örten olduğundan $o(G) \cong o(H)$ olmalıdır. (Bu sonuç G ve H devirli olmasa da doğrudur.)

$\Leftarrow$: Şimdi $G = \langle a \rangle, H = \langle b \rangle$ iki devirli grup ve $o(G) = o(H) = n$ olsun. $f : G \to H$ dönüşümü her $x \in \mathbb{Z}$ için $f(a^k) = b^k$ şeklinde tanımlansın. f 'nin 1-1 ve örten bir homomorfizma olduğunu göstereceğiz.

$f(a^k) = f(a^t) \Rightarrow b^k = b^t$ olup $n = \infty$ ise $k = t$ olup $a^k = a^t$ olur ve f birebir olur. Eğer $n < 1$ ise $k \equiv t \pmod n$ olduğunu hatırlayınız. O halde $m, t \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $k = t + mn$ dir. Şimdi

$$a^k = a^{t+mn} = a^t a^{mn} = a^t (a^n)^m = a^t$$

olup f bu durumda da birebirdir.

Şimdi $h \in H$ verilsin. Bir $k \in \mathbb{Z}$ için $h = bk$ şeklindedir. O halde $f(a^k) = b^k = h$ olup f örtendir. $x = a^k \in G$ ve $y = a^t \in G$ olsun.

$$f(xy) = f(a^k a^t) = f(a^{k+t}) = a^{k+t} = b^k b^t = f(a^k) f(a^t) = f(x) f(y)$$

olup f bir homomorfizmadır. O halde $G \cong H$ dir.

6.5. Tanım: G grup, $f : G \to G$ olan bir izomorfizmaya G'nin bir otomorfizması denir.

G'nin bir $a \in G$ elemanı için $f_a : G \to G, f_a(x) = axa^{-1}$ şeklinde tanımlanan f_a dönüşümü her zaman bir otomorfizmadır. Bu tür bir otomorfizmaya G'nin bir iç otomorfizması denir. G'nin iç otomorfizmalarının kümesi I(G) ile gösterilir. G nin bütün otomorfizmalarının kümesi Oto(G) nin bileşke işlemi ile bir grup olduğunu göstereceğiz. Bu gruba G nin otomorfizmalar grubu denir.

$$\text{Oto}(G) = \{f : G \to G \mid f, 1-1, \text{örten bir homomorfizma}\}$$

olur.

6.7. Teorem: G'nin otomorfizmalarını kümesi Oto(G) bileşke işlemi ile bir gruptur.

İspat: 6.5 teorem gereğince otomorfizma izomorfizmanın özel durumu olduğundan iki otomorfizmanın bileşkesi bir otomorfizmadır. Ayrıca $f \in Oto(G) \Rightarrow f^{-1} \in Oto(G)$ dir. Birim dönüşüm bir otomorfizma olup $Oto(G)$ nin birim elemanıdır. Fonksiyonlardaki bileşke işleminin birleşme özelliği olup $Oto(G)$ bir grup olur.

Örnek: $A = \{1, -1, i, -i\}$ grubunun bütün otomorfizmalarını bulalım. I_A birim dönüşümü bir otomorfizmadır. $f \in Oto(A)$ olsun. $f(1) = 1$ olmak zorundadır. $f(i) = -1$ diyelim. O halde $f(i \cdot i) = f(i)f(i)$ yani $f(-1) = (-1)(-1) = 1$ olmalıdır. Bu da f 'nin 1-1 olmadığı anlamına gelir. Şimdi de $f(i) = -i$ seçelim. Buradan

$$f(-1) = f(i \cdot i) = f(i)f(i) = (-i)(-i) = -1$$
$$f(-i) = f(-1)f(i) = (-1)(-i) = i$$

seçilmelidir. f, 1-1 ve örten olup diğer bir otomorfizmadır. Bu grubun başka otomorfizması yoktur. O halde $Oto(A) = \{I_A, f\}$ dir. Otomorfizma grubunun tablosu şöyledir:

$\circ$	I_A	f
I_A	I_A	f
f	f	I_A

Örnek: G bir grup olsun. Bir $a \in G$ için $f_a : G \to G, f_a(x) = axa^{-1}$ şeklinde tanımlanan dönüşümün G'nin bir otomorfizması olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $x, y \in G$ olsun.

$$f_a(xy) = a(xy)a^{-1} = (axa^{-1})(aya^{-1}) = f_a(x)fa(y)$$

olup f_a bir homomorfizmadır. Ayrıca

$$f_a(x) = f_a(y) \Rightarrow axa^{-1} = aya^{-1} \Rightarrow x = y$$

olup f_a birebirdir. Şimgi verilen her $g \in G$ için $x = a^{-1}ga$ seçersek

$$f_a(x) = axa^{-1} = a(aga^{-1})a^{-1} = g$$

olup f_a nın örten olduğu görülür. Yani $f_a \in Oto(G)$ dir.

6.8. Teorem: $G = \langle a \rangle = \{e, a, a^2, \ldots, a^{n-1}\}$, n-inci mertebeden devirli grup olsun. $f_k : G \to G, f_k(a) = a^k$ olmak üzere

$$Oto(G) = \{f_k \mid 1 \leq k < n, OBEE(k,n) = 1\}$$

dir.

İspat: $f \in Oto(G)$ olsun. $f(a) = a^k$ olsun. G'nin üretici elemanları $1 \leq m < n$ ve $OBEB(m, n) = 1$ olmak üzere a^m şeklindedir. O halde $OBEB(n, k) = 1$ dir.

Tersine $\text{OBEB}(k,n)=1$ olmak üzere f_k dönüşümünü düşünelim. $f(a)=a^k$, G'nin üretici elemanı olup f_k örtendir. Ayrıca f_k 1-1 bir homomorfizmadır. Yani $f_k \in \text{Oto}(G)$ dir. O halde

$$\text{Oto}(G)=\{f_k \mid 1\le k<n, \text{OBEB}(k,n)=1\}$$

dir.

Örnek: $\mathbb{Z}_8$'in otomorfizmalar grubu olan $\text{Oto}(\mathbb{Z}_8)$ i belirleyiniz.

Çözüm: 8 ile aralarında asal olan sayılar 1, 3, 5 ve 7 dir. O halde $\text{Oto}(\mathbb{Z}_8)=\{f_1,f_3,f_5,f_7\}$ dir.

$f_1(\bar{0})=1\cdot\bar{0}=\bar{0}$	$f_3(\bar{0})=3\cdot\bar{0}=\bar{0}$	$f_5(\bar{0})=5\cdot\bar{0}=\bar{0}$	$f_7(\bar{0})=7\cdot\bar{0}=\bar{0}$
$f_1(\bar{1})=1\cdot\bar{1}=\bar{1}$	$f_3(\bar{1})=3\cdot\bar{1}=\bar{3}$	$f_5(\bar{1})=5\cdot\bar{1}=\bar{5}$	$f_7(\bar{1})=7\cdot\bar{1}=\bar{7}$
$f_1(\bar{2})=1\cdot\bar{2}=\bar{2}$	$f_3(\bar{2})=3\cdot\bar{2}=\bar{6}$	$f_5(\bar{2})=5\cdot\bar{2}=\bar{2}$	$f_7(\bar{2})=7\cdot\bar{2}=\bar{6}$
$f_1(\bar{3})=1\cdot\bar{3}=\bar{3}$	$f_3(\bar{3})=3\cdot\bar{3}=\bar{1}$	$f_5(\bar{3})=5\cdot\bar{3}=\bar{7}$	$f_7(\bar{3})=7\cdot\bar{3}=\bar{5}$
$f_1(\bar{4})=1\cdot\bar{4}=\bar{4}$	$f_3(\bar{4})=3\cdot\bar{4}=\bar{4}$	$f_5(\bar{4})=5\cdot\bar{4}=\bar{4}$	$f_7(\bar{4})=7\cdot\bar{4}=\bar{4}$
$f_1(\bar{5})=1\cdot\bar{5}=\bar{5}$	$f_3(\bar{5})=3\cdot\bar{5}=\bar{7}$	$f_5(\bar{5})=5\cdot\bar{5}=\bar{1}$	$f_7(\bar{5})=7\cdot\bar{5}=\bar{3}$
$f_1(\bar{6})=1\cdot\bar{6}=\bar{6}$	$f_3(\bar{6})=3\cdot\bar{6}=\bar{2}$	$f_5(\bar{6})=5\cdot\bar{6}=\bar{6}$	$f_7(\bar{6})=7\cdot\bar{6}=\bar{2}$
$f_1(\bar{7})=1\cdot\bar{7}=\bar{7}$	$f_3(\bar{7})=3\cdot\bar{7}=\bar{5}$	$f_5(\bar{7})=5\cdot\bar{7}=\bar{3}$	$f_7(\bar{7})=7\cdot\bar{7}=\bar{1}$

Örnek: Abelyen bir G grubunun iç otomorfizmalar kümesi I(G)'yi belirleyin.

Çözüm: G Abelyen olduğundan, her $a\in G$ için

$$f_k: G\to G, f_a(x)=axa^{-1}=x$$

olup $f_a=I_G$ özdeşlik dönüşümü olduğu görülür. O halde G Abelyen ise $I(G)=\{I_G\}$ dir.

6.9. Teorem: C_n, n-inci mertebeden devirli grup ise $C_n\cong\mathbb{Z}_n$ dir. C_∞ sonsuz devirli grup ise $C_\infty\cong\mathbb{Z}$ dir.

İspat: $C_n=\{e,a,a^2,\dots,a^{n-1}\}$ olsun. $f: C_n\to\mathbb{Z}_n$ dönüşümünü her $k\in\mathbb{Z}$ için $f(a^k)=\bar{k}$ olarak tanımlayalım. Her $\bar{k}\in\mathbb{Z}_n=\{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\dots,\overline{n-1}\}$ için $f(a^k)=\bar{k}$ olup f örtendir. (Burada $a^0=e$ dir.)

$$f(a^k)=f(a^k)\Rightarrow\bar{k}=\bar{k}\Rightarrow k\equiv m \ (\text{mod } n)\Rightarrow a^k=a^m$$

olup f, 1-1 dir. Ayrıca

$$f(a^k a^m)=f(a^{k+m})=k+m=\overline{k+m}=f(a^k)+f(a^m)$$

olup f bir homomorfizmadır. O halde f bir izomorfizma olup $C_n\cong\mathbb{Z}_n$ dir.

Şimdi de $f: C_\infty \to \mathbb{Z}$ dönüşümünü her $k \in \mathbb{Z}$ için $f(a^k) = k$ şeklinde tanımlayalım.

$$f(a^n a^m) = f(a^{n+m}) = n + m = f(a^n) + f(a^m)$$

olup f bir homomorfizmadır. Ayrıca $f(a^n) = f(a^m) \Rightarrow n = m \Rightarrow a^n = a^m$ olduğu açıktır. Yani f, 1-1 dir. Verilen her $y \in \mathbb{Z}$ için $x = a^y$ seçilirse $f(x) = y$ olacağından f örtendir. O halde $C_\infty \cong \mathbb{Z}$ dir.

Örnek: G devirli ve mertebesi sonsuz olsun. Bu durumda G'nin otomorfizmalar grubunu belirleyiniz.

Çözüm: G devirli olduğundan bir $a \in G$ için $G = \langle a \rangle$ dır. $f: G \to G$ bir $k \in \mathbb{Z}$ için $f(a) = a^k$ dır. f otomorfizma olduğundan örtendir. O halde $a \in G$ için öyle bir $b \in G$ vardır ki $f(b) = a$ olur. G devirli olduğundan bir $r \in \mathbb{Z}$ için $b = a^r$ olmalıdır.

$$f(b) = f(a^r) = a \Rightarrow (a^r)^k = a \Rightarrow a^{rk} = a \Rightarrow k = \pm 1$$

elde edilir. $k = 1$ olduğunda $f(a) = a \Rightarrow f = I_G$ bulunur. $k = -1$ olduğunda $f(a) = a^{-1}$ dir. Buna göre

$$\text{Oto}(G) = \{I_G, f \mid \forall a \in G, f(a) = a^{-1}\}$$

dir.

Örnek: $f: G \to S$ bir grup homomorfizması ve $\text{Çek}(f) = \{e\}$ olsun. Her $a \in G$ için a ile f(a) nın derecelerinin aynı olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $o(a) = m$ olsun. $[f(a)]^m = f(a^m) = f(e) = e_0$ olur. Şimdi $[f(a)]^n = e_0$ olacak şekilde $1 \le n < m$ doğal sayısı olduğunu kabul edelim. O zaman $[f(a)]^n = f(a^n) = e_0$ olup $\text{Çek}(f) = \{e\}$ olduğundan $a^n = e$ olur. Bu da $o(a) = m$ olması ile çelişir. Buradan $o(f(a)) = m$ elde edilir.

5.1. Lemma: $f: G \to H$ bir homomorfizma olsun.

i) $N \le G$ ise $f(N) \le H$

ii) $N \lhd G$ ise $f(N) \lhd H$ dir.

İspat:

i) $x, y \in f(N) \Rightarrow \exists\, a, b \in N, f(a) = x, f(b) = y$

$$\Rightarrow ab^{-1} \in N, f(ab^{-1}) = f(a)f(b)^{-1} = xy^{-1}$$

$$\Rightarrow xy^{-1} \in f(N)$$

$$\Rightarrow f(N) \le H$$

ii) $x \in f(N) \Rightarrow \exists\, n \in N, f(n) = x$
$x \in H \Rightarrow f$ örten, $\exists\, g \in G, f(g) = h$
$\Rightarrow f(\underbrace{gng^{-1}}_{\in N}) = f(g)f(n)f(g)^{-1} = hxh^{-1}$
$\Rightarrow hnh^{-1} \in f(N)$
$\Rightarrow f(N) \lhd H$

5.2. Lemma: $f : G \to H$ bir grup homomorfizması olsun.
a) $K \leq H$ ise $f^{-1}(K) \leq G$
b) $K \lhd H$ ise $f^{-1}(K) \lhd G$
dir.

İspat: a) $K \leq H \Rightarrow f^{-1}(K) \leq G$ olduğunu gösterelim.
$x, y \in f^{-1}(K) \Rightarrow \exists\, a, b \in K, f(x) = a, f(y) = b$
$\Rightarrow f(xy^{-1}) = f(x)f(y)^{-1} = ab^{-1} \in K, \quad (K \leq H)$
$\Rightarrow xy^{-1} \in f^{-1}(K)$
$\Rightarrow f^{-1}(K) \leq G$

b) $f^{-1}(K)$ ve $g \in G$ alalım. O halde en az bir $k \in K$ için $f(x) = k$ olmalıdır. Şimdi $f(g) \in H$ ve $K \lhd H$ olduğundan
$f(g)kf(g)^{-1} \in K \Rightarrow f(g)f(x)f(g)^{-1} \in K$
$\Rightarrow f(gxg^{-1}) \in K$
$\Rightarrow gxg^{-1} \in f^{-1}(K)$
olup $f^{-1}(K) \lhd G$ olduğu gösterilmiş olur.

İZOMORFİZMA TEOREMLERİ

G bir grup olsun. Bir $N \lhd G$ için $f : G \to G/N$ homomorfizmasının varlığını göstermiştik. Acaba bunun tersi de doğru mudur? Yani, G ve H birer grup olmak üzere $G/N \cong H$ olacak şekilde bir $N \lhd G$ normal altgrubu var mıdır?

6.10. Teorem (1. İzomorfizma Teoremi): $f : G \to H$ örten bir homomorfizma olsun. O zaman $G/\text{Çek}(f) \cong H$ dır.

İspat: İspat: boyunca $K = \text{Çek}(f)$ diyelim.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] & & H \\ & G/K \arrow[ur, "r"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} g \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] & & f(g) \\ & Kg \arrow[ur, "r"'] & \end{tikzcd}$$

Her $g \in G$ için $r(Kg) = f(g)$ şeklinde bir $r : G/K \to H$ dönüşümü tanımlayalım. r'nin bir izomorfizma olduğunu göstereceğiz.

i) r iyi tanımlanmıştır. Bunun için $X = Ka$ ve $X = Kb$ şeklinde yazıldığında $r(X) = f(a)$ ve $r(X) = f(b)$ olur. Bu durumda $f(a) = f(b)$ olduğunu göstermeliyiz. Şimdi K altgrup ve f homomorfizma olduğundan:

$$\begin{aligned} Ka = Kb &\Rightarrow Kab^{-1} = K \\ &\Rightarrow ab^{-1} \in K = \text{Çek}(f) \\ &\Rightarrow f(ab^{-1}) = e_H \\ &\Rightarrow f(a)f(b)^{-1} = e_H \\ &\Rightarrow f(a) = f(b) \end{aligned}$$

bulunur.

ii) r homomorfizmadır. Gerçekten, her $X, Y \in G/K$ için $r(XY) = r(X)r(Y)$ olduğunu göstereceğiz. $X = Ka$ ve $Y = Kb$ şeklinde olsun.

$$\begin{aligned} r(XY) &= r(Ka \cdot Kb) \\ &= r(Kab), \qquad (K \lhd G) \\ &= f(ab) \\ &= f(a)f(b) \\ &= r(Ka)r(Kb) \\ &= r(X)r(Y) \end{aligned}$$

olup r bir homomorfizmadır.

iii) r örtendir. Gerçekten, her $h \in H$ için $r(X) = h$ olacak şekilde bir $x \in G/K$ bulmalıyız. $h \in H$ verilsin. f örten olduğundan bir $a \in G$ için $h = f(a)$ dır. Şimdi $X = Ka$ seçersek, $r(X) = r(Ka) = f(a) = h$ olur. Yani r örtendir.

iv) r, 1-1 dir. Gerçekten, r'nin çekirdeğinde sadece G/K nın birim elemanı olduğunu, yani $\text{Çek}(r) = \{K\}$ olduğunu gösterirsek, r, 1-1 olur. $X \in \text{Çek}(r)$ alalım $X = Kg$ şeklindedir. Buna göre,

$$\begin{aligned} r(X) = e_H \Rightarrow r(Kg) &= e_H \\ &\Rightarrow f(g) = e_H \\ &\Rightarrow g\ 2\ \text{Çek}(f) = K \\ &\Rightarrow X = Kg = K \\ &\Rightarrow \text{Çek}(r) = \{K\} \end{aligned}$$

olur. O halde $G/K \cong H$ yazabiliriz.

6.4. Not: Bu teorem "$f : G \to H$ yerine $f : G \to f(G)$ biçiminde de ifade edilir.

Örnek: $G=(\mathbb{Z},+), H=(\mathbb{Q}\backslash\{0\},\ \cdot\ )$ ve $f:G\to H$ dönüşümü her $x\in G$ için

$$f(x)=\begin{cases} 1, & x \text{ çift} \\ -1, & x \text{ tek} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. $f:G\to f(G)$ örten bir fonksiyondur. f'nin bir homomorfizma olduğunu gösterelim.

Çözüm: $x,y\in\mathbb{Z}$ verilsin.

Durum 1: x ve y çift ise $f(x+y)=1$ ve $f(x)f(y)=1\cdot 1=1$

Durum 2: x ve y tek ise $f(x+y)=1$ ve $f(x)f(y)=(-1)\cdot(-1)=1$

Durum 3: x ve y nin biri tek biri çift ise $f(x+y)=-1$ ve $f(x)f(y)=-1$

dir. Buna göre f bir homomorfizmadır.

$K=\text{Çek}(f)=\{x\in\mathbb{Z}: f(x)=1\}=\{x\in\mathbb{Z}: x \text{ çift sayı}\}=2\mathbb{Z}$

dir. K'nın farklı sağ kosetleri

$\{K+0, K+1\}$ olup $G/K=\{K+0,K+1\}$

olur.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f"] & f(G)=\{-1,1\} \\ G/K \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

$\psi: G/K\to f(G)$ dönüşümünü $\psi(K+0)=1$, $\psi(K+1)=-1$ şeklinde tanımlayalım. ψ bir izomorfizma olup $G/K\cong f(G)$ dir.

Örnek: G ve K herhangi iki grup olsun. $f:G\to K$ bir grup homomorfizması ve G sonlu ise $o(f(G))o(G)$ dir, gösteriniz.

Çözüm:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "f \text{ hom.}"] \arrow[dr] & & f(G)\subseteq K \\ & G/\text{Çek}(f) \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

Birinci İzomorfizma teoreminden $G/\text{Çek}(f)\cong f(G)$ dir. G sonlu olduğundan $G/\text{Çek}(f)$ de sonludur. O halde $o(G/\text{Çek}(f))=o(f(G))$ olup Lagrange teoreminden;

$$\frac{o(G)}{o(\text{Çek }(f))}=o(f(G))\Rightarrow\frac{o(G)}{o(f(G))}=o(\text{Çek}(f))\Rightarrow o(f(G))\mid o(G)$$

olur.

Örnek: $\mathbb{R}^*=(\mathbb{R}\backslash\{0\},\ \cdot\ )$ grubu olmak üzere $GL_n(\mathbb{R})/SL_n(\mathbb{R})\cong\mathbb{R}^*$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $G = GL_n(\mathbb{R})$ olsun. G'nin matris çarpımına göre bir grup olduğunu biliyoruz. $f : G \to \mathbb{R}^*$, $f(X) = \det(X)$ şeklinde determinant fonksiyonu tanımlayalım.

$$X, Y \in G \Rightarrow f(XY) = \det(XY) = \det(X)\det(Y) = f(X)f(Y)$$

olup f bir homomorfizmadır.

$$\text{Çek}(f) = \{x \in G \mid f(X) = \det(X) = 1\} = SL_n(\mathbb{R})$$

elde ederiz. Ayrıca f örtendir, çünkü determinantı verilen bir reel sayı olan bir matris her zaman yazılabilir. O halde Birinci İzomorızma Teoreminden

$$GL_n(\mathbb{R})/\text{Çek}(f) \cong \mathbb{R}^* \text{ yani } GL_n(\mathbb{R})/SL_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^*$$

olur.

6.11. Teorem: (İkinci İzomorfizma Teoremi): G bir grup, $H \leq G$ ve $N \lhd G$ olsun. $H \cap N \lhd H$ ve $HN \leq G$ dir. Ayrıca $H/(H \cap N) \cong HN/N$ dir.

İspat: $HN \leq G$ dir. Gerçekten, $x = h_1n_1, y = h_2n_2 \in HN$ alalım.

$$\begin{aligned} xy^{-1} &= (h_1n_1)(h_2n_2)^{-1} \\ &= h_1 \underbrace{n_1n_2^{-1}}_{\in N} h_2^{-1} \\ &= h_1n_3h_2^{-1} \\ &= (\underbrace{h_1h_2^{-1}}_{\in H})(\underbrace{h_1n_3h_2^{-1}}_{\in N}), \qquad (N \lhd G) \\ &= h_3n_4 \in HN \end{aligned}$$

olup 4.1. teoremden $HN \leq G$ dir.

HN/N faktör grubunu oluşturmak için $N \lhd HN$ olduğunun gösterilmesi gerekir:

$N \lhd HN$ dir. Gerçekten, her $n \in N$ için $n = e \cdot n \in HN$ olduğundan $N \subseteq HN$ olduğu görülür. N ve HN her ikisi de altgrup olduğundan $N \leq HN$ dir. Şimdi $x \in N$ ve $hn \in HN$ alalım.

$$(hn)x(hn)^{-1} = h(nxn^{-1})h^{-1} = hn_1h^{-1} \in N, \qquad (N \lhd G)$$

olduğundan $N \lhd HN$ dir.

Şimdi $f : H \to HN/N$ dönüşümü her $h \in H$ için $f(h) = Nh$ şeklinde tanımlansın. f örten ve homomorfizmadır. Gerçekten, Önce f örten olduğunu gösterelim.

$Nhn \in HN/N$ verilsin. $N \lhd G$ olduğundan $Nhn = hNn = hN = Nh = f(h)$ olup f örtendir.

Şimdi f homomorfizma olduğunu gösterelim. Her $h_1, h_2 \in HN$ için $N \lhd G$ olduğundan

$$f(h_1h_2) = Nh_1h_2 = Nh_1Nh_2 = f(h_1)f(h_2)$$

olup f bir homomorfizmadır.

O halde Birinci izomorfizma teoreminden $H/Çek(f) \cong HN/N$ dir.

$Çek(f) = H \cap N$ dir. Gerçekten HN/N grubunun birim elemanı N'dir.

$$\begin{aligned} Çek(f) &= \{x \in H : f(x) = N\} \\ &= \{x \in H : Nx = N\} \\ &= \{x \in H : x \in N\}, \quad (Nx = N \Leftrightarrow x \in N) \\ &= H \cap N \end{aligned}$$

olur. //

Bir homomorfizmanın çekirdeği her zaman normal altgrup olduğundan $H \cap N \lhd H$ elde edilir.

O halde $H/(H \cap N) \cong HN/N$ dir.

6.12. Teorem (Üçüncü İzomorfizma Teoremi): G bir grup ve H ile K da G'nin normal altgrupları ve ayrıca $K \leq H$ olsun. O zaman $H/N \lhd G/K$ dır ve

$$\frac{G/K}{H/K} \cong G/H$$

dir.

İspat: Her $h \in H$, $k \in K$ için $hkh^{-1} \in K$ dır. Çünkü $h \in G$ ve $K \lhd G$ dir. O halde $K \lhd H$ dır. Şimdi

$$\psi : G/K \to G/H, \text{ her } Kg \in G/K \text{ için } \psi(Kg) = Hg$$

şeklinde tanımlayalım.

ψ iyi tanımlıdır. Gerçekten,

$$Ka = Kb \Rightarrow ab^{-1} \in K \Rightarrow ab^{-1} \in H \Rightarrow Ha = Hb \Rightarrow \psi(Ka) = \psi(Kb)$$

ψ homorızmadır. Gerçekten,

$$\psi(KaKb) = \psi(Kab) = Hab = HaHb = \psi(Ka)\psi(Kb)$$

ψ örtendir. Gerçekten, Verilen her $Y = Ha \in G/H$ için $X = K\,a \in G/K$ seçilirse $\psi(X) = \psi(Ka) = Ha = Y$ olur.

$Çek(\psi) = H/K$ dir. Gerçekten; G/H grubunun birim elemanı H'dir. O halde

$$\begin{aligned}\text{Çek}(\psi) &= \{Kx \in G/K : \psi(Kx) = Hx = H\}\\ &= \{Kx \in G/K : x \in H\}\\ &= H/K\end{aligned}$$

bulunur. Bir homomorfizmanın çekirdeği her zaman normal altgrup olduğundan $H/K \lhd G/K$ elde edilir. Ayrıca, Birinci İzomorfizma teoreminden

$$(G/K) = \text{Çek}(\psi) \cong G/H \text{ yani } \frac{G/K}{H/K} \cong G/H$$

bulunur.

6.13. Teorem (Eşleme Teoremi): $f : G \to H$ örten bir grup homomorfizması olsun. O zaman G'nin Çek(f) yi içeren altgrupları ile H'nin altgrupları arasındaki $A \to (A)$ eşlemesi birebir ve örten bir eşlemedir. Ayrıca, bu eşleme normal altgrupları normal altgruplara eşler.

İspat: $A \leq G$ ve $\text{Çek}(f) \leq A$ olsun. Bu durumda 5.1.a lemmadan $B = f(A) \leq H$ dir. Bu eşlemenin birebir olduğunu gösterelim. Çekirdeği içeren başka bir $A_1 \leq G$ için $f(A_1) = B$ olsun. $A = A_1$ olduğunu gösterelim.

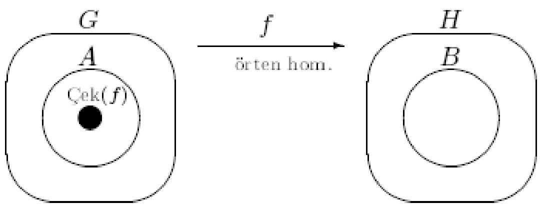
$$\begin{aligned} x \in A &\Rightarrow f(x) \in B\\ &\Rightarrow \exists\, y \in A_1, f(y) = f(x), \qquad (f(A_1) = B)\\ &\Rightarrow xy^{-1} \in \text{Çek}(f)\\ &\Rightarrow xy^{-1} \in A_1\\ &\Rightarrow \exists\, u \in A_1, xy^{-1} = u\\ &\Rightarrow x = uy \in A_1\end{aligned}$$

olup $A \subseteq A_1$ olduğu görülür. Benzer şekilde $A_1 \subseteq A$ olduğu ispatlanır. O halde bu eşleme 1-1 dir.

Şimdi de bu eşlemenin örten olduğunu görelim. $B \leq H$ verilsin. 5.2.a lemmadan $f^{-1}(B) \leq G$ dir. $\text{Çek}(f) \subseteq f^{-1}(B)$ olduğu kolaylıkla görülür. Gerçekten,

$$k \in \text{Çek}(f) \Rightarrow f(k) = e_0 \in B \Rightarrow k \in f^{-1}(B)$$

dir. O halde verilen her $B \leq H$ altgrubu için $A = f^{-1}(B)$ seçersek, A kümesi, çekirdeği içeren bir altgrup olur ve $f(A) = f(f^{-1}(B)) = B$ olur. Çünkü f örten olduğundan bir altkümenin ters görüntüsünün görüntüsü kendisidir.



Buradan, bu eşlemenin tersi olan $B \to f^{-1}(B)$ eşlemesinin de 1-1 ve örten olduğunu söyleriz.

Şimdi, 5.1.b lemmadan $A \lhd G \Rightarrow f(A) \lhd H$ olduğundan ve 5.2.b lemmadan $B \lhd H \Rightarrow f^{-1}(B) \lhd G$ olduğundan bu eşlemenin normal altgrupları normal altgruplara eşlediği söylenebilir.

Örnek: $G = (\mathbb{Z}, +)$ ve $H = (\mathbb{Z}_6, \oplus)$ ve $f : G \to H$; her $x \in \mathbb{Z}$ için $f(x) = x$ şeklinde tanımlansın. f'nin örten bir homomorfizma olduğu kolaylıkla gösterilebilir. $Çek(f) = 6\mathbb{Z}$ olup,

G'nin Çek(f)'yi içeren altgrupları: $A_1 = 6\mathbb{Z}, A_2 = 2\mathbb{Z}, A_3 = 3\mathbb{Z}, A_4 = \mathbb{Z}$
Z6'nın bütün altgrupları: $B_1 = \{\overline{0}\}, B_2 = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\}, B_3 = \{\overline{0}, \overline{3}\},\ B_4 = \mathbb{Z}_6$//

Bütün altgruplar normal olup $i = 1, 2, 3, 4$ için $B_i = f(A_i)$ eşlemesinin 1-1 ve örten olduğu görülür.

6.14. Teorem (Dördüncü İzomorfizma Teoremi): G bir grup ve $N \lhd G$ olsun. O zaman G'nin N'yi içeren altgruplarının kümesi ile G/N nin altgruplarının kümesi arasında $A \to A/N$ eşlemesi 1-1 ve örtendir. Bu eşleme altında G'nin normal altgrupları G/N nin normal altgrupları ile eşlenir.

İspat: $\psi: G \to G/N$, $\psi(x) = Nx$ şeklinde tanımlanan kanonik homomorfizmayı düşünelim. Bu fonksiyonun çekirdeği N olan örten bir homomorfizma olacağına göre;

$$\psi(A) = \{\psi(a) : a \in A\} = \{Na : a \in A\} = A/N$$

olup; Eşleme teoreminde $H = G/N$ ve $f = \psi$ alırsak istenen sonuç ortaya çıkar.

6.15. Teorem: $f : G \to H$ örten homomorfizma olsun. $T \lhd H$ ve $S = \{x \in G : f(x) \in T\}$ olsun. O zaman

$$G/S \cong H/T \text{ ve } G/S \cong (G/Çek(f))/(S/Çek(f))$$

dir.

İspat:

$$\begin{tikzcd} f:G \arrow[rr, "\text{örten}"] \arrow[dr] & & H \arrow[dl] \\ & H/T & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} g \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\psi"'] & & f(g) \arrow[dl, "\eta"] \\ & Th = Tf(g) & \end{tikzcd}$$

$T \lhd H$ olduğundan $H \to H/T$ bir η kanonik (doğal) homorfizması vardır öyle ki $\eta(h) = Th$ dır. Şimdi $\psi : G \to H/T$ dönüşümünü $\psi(g) = T\,f(g)$ şeklinde tanımlayalım. Burada örten ve homomorfizma olduğunu göstermeliyiz.

ψ örtendir. Gerçekten; $Th \in H/T$ verilsin. f örten olduğundan $\exists\, g' \in G$ için $f(g') = h$ dır. $(g') = T\,f(g') = Th$ olup ψ örtendir.

ψ homomorfizmadır. Gerçekten her $g_1, g_2 \in G$ için,

$$\begin{aligned}\psi(g_1 g_2) &= Tf(g_1, g_2)\\ &= Tf(g_1)f(g_2)\\ &= Tf(g_1)Tf(g_2), \quad (T \lhd H)\\ &= \psi(g_1)\psi(g_2)\end{aligned}$$

olup ψ bir homomorfizmadır. Birinci izomorfizma teoreminden $G/Çek(\psi) \cong H/T$ dir.

$Çek(\psi) = S$ dir. Gerçekten H/T nin birim elemanı T olduğundan:

$$Çek(\psi) = \{x \in G : \psi(x) = T\} = \{x \in G : Tf(x) = T\} = \{x \in G : f(x) \in T\} = S$$

olup $S = Çek(\psi)$ elde edilir.

O halde $G/S \cong H/T$ dir.

Şimdi $S \lhd G$ ve $Çek(f) \lhd G$ dir. Ayrıca $Çek(f) \leq S$ olduğundan, üçüncü izomorfizma teoreminden

$$G/S \cong (G/Çek(f))/(S/Çek(f))$$

elde edilir.

Örnek: G bir grup ve $I(G)$, G'nin iç otomorfizmalar grubu olsun. $I(G) \lhd Oto(G)$ ve $G/Z(G) \cong I(G)$ dir. ($Z(G)$: G'nin merkezi)

Çözüm: $I(G) = \{t_a : a \in G, t_a : G \to G, t_a(x) = axa^{-1}\}$ kümesi olduğunu hatırlayalım.

$I(G) \leq Oto(G)$ dir. Gerçekten, $t_a, t_b \in I(G)$ alalım. t_b otomorfizmasının tersi $t_{b^{-1}}$ dir. Çünkü:

$$t_b(t_{b^{-1}}(x)) = b(b^{-1}xb)b^{-1} = x \text{ ve } t_{b^{-1}}(t_b(x)) = b^{-1}(bxb^{-1})b = x$$

dir. Şimdi;

$$\begin{aligned}[t_a(t_b)^{-1}](x) &= t_a[(tb)^{-1}(x)]\\ &= t_a[t_{b^{-1}}(x)]\\ &= at_{b^{-1}}(x)a^{-1}\\ &= a(t_{b^{-1}}xb)a^{-1}\\ &= (ab^{-1})x(ba^{-1})\\ &= cxc^{-1}, \quad (c = ab^{-1})\end{aligned}$$

$= t_c(x)$

bulunur. Buna göre $t_a(t_b)^{-1} \in I(G)$ olup, 4.1. teoremden, $I(G) \leq Oto(G)$ dir.

$I(G) \lhd Oto(G)$ dir. Gerçekten her $f \in Oto(G)$ ve $t_a \in I(G)$ için $ft_af^{-1} \in I(G)$ dir. Çünkü

$$\begin{aligned}(ft_af^{-1})(x) &= f(t_a(f^{-1}(x))) \\ &= f(a \cdot f^{-1}(x) \cdot a^{-1}) \\ &= f(a) \cdot f(f^{-1}(x))\, ı\, f(a^{-1}) \\ &= f(a) \cdot x \cdot f(a)^{-1}, (f \text{ hom.}, 1-1 \text{ ve örten}) \\ &= t_{f(a)}(x)\end{aligned}$$

olur.

$G/Z(G) \cong I(G)$ dir: $f : G \to I(G), f(g) = t_g$ olarak tanımlayalım. Burada f örten ve homomorfizma olduğunu gösterelim.

f örtendir. Gerçekten $t_g \in I(G)$ verilsin. $f(g) = t_g$ olup f örtendir.

f homomorfizmadır. Gerçekten

$$t_{ab}(x) = abxb^{-1}a^{-1} = t_a(bxb^{-1}) = t_a(t_b(x)) = [t_at_b](x)$$

olup $t_{ab} = t_at_b$ dir. Yani $f(ab) = t_{ab} = t_at_b = f(a)f(b)$ olur ve f bir homomorfizmadır. O halde birinci izomorfizma teoreminden dolayı $G/Çek(f) \cong I(G)$ dir.

$Çek(f) = Z(G)$ dir. Gerçekten I(G)'nin birim elemanı, G'nin birim dönüşümü olan IG birim fonksiyonudur.

$$\begin{aligned}Çek(f) &= \{a \in G : f(a) = t_a = I_G\} \\ &= \{a \in G : \forall x \in G, t_a(x) = I_G(x)\} \\ &= \{a \in G : \forall x \in G, axa^{-1} = x\} \\ &= \{a \in G : \forall x \in G, ax = xa\} \\ &= Z(G)\end{aligned}$$

dir. O halde $G/Z(G) \cong I(G)$ elde edilir.

BAZI GRUPLARIN İZOMORFİZMALARI

Arthur Cayley
16 Ağustos 1821, Richmond, B. Kr. - 26 Ocak 1895, Cambridge, Birleşik Krallık

Her G sonlu grubunun aslında bir permütasyon grubuna izomorfik olduğu 1878'de Arthur Cayley (1821-1895) tarafından gösterilmiştir. Şimdi o teoremi inceleyelim.

6.16. Teorem (Cayley Teoremi): Her G grubu P(G) permütasyonlar grubunun bir altgrubuna izomorfiktir. Özel olarak n elemanlı bir grup S_n in bir altgrubuna izomorfiktir.

İspat: Her $a \in G$ için $h_a : G \to G$ dönüşümünü $h_a(x) = ax$ şeklinde tanımlayalım. (Yani h_a dönüşümü "soldan a ile çarpmak" dönüşümüdür.) h_a dönüşümü G'nin bir permütasyonudur. Gerçekten,

$h_a(x) = h_a(y) \Rightarrow ax = ay \Rightarrow x = y \Rightarrow h_a$ birebirdir.
$y \in G \Rightarrow x = a^{-1}y$ seçilirse $h_a(x) = a(a^{-1}y) = y \Rightarrow h_a$ örtendir.

Şimdi $f : G \to P(G)$ dönüşümünü her $a \in G$ için $f(a) = ha$ şeklinde tanımlayalım. f 'nin 1-1 homomorfizma olduğunu göstereceğiz. f birebirdir. Gerçekten $a, b \in G$ için

$$\begin{aligned} f(a) = f(b) &\Rightarrow h_a = h_b \\ &\Rightarrow \forall x \in G, h_a(x) = h_b(x) \\ &\Rightarrow \forall x \in G, ax = bx \\ &\Rightarrow a = b \end{aligned}$$

dir.

f bir homomorfizmadır. Gerçekten $a, b \in G$ ise her $x \in G$ için

$$\begin{aligned} [f(ab)](x) &= h_{ab}(x) \\ &= (ab)x \\ &= a(bx) \\ &= h_a(bx) \\ &= h_a(h_b(x)) \\ &= (h_a h_b)(x) \\ &= [f(a)f(b)](x) \end{aligned}$$

olup $f(ab) = f(a)f(b)$ dir. O halde $f : G \to P(G)$ birebir homomorfizmadır.

$f : G \to f(G)$ izomorfizma ve $f(G) \leq P(G)$ olduğundan $G \cong f(G)$ olur. Yani G grubu P(G) nin bir altgrubuna izomorfiktir.

Örnek: $G = \{1, -1, i, -i\}$ çarpma işlemi ile bir gruptur. Buna göre

$$h_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & i & -i \\ 1 & -1 & i & -i \end{pmatrix},\ h_{(-1)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & i & -i \\ -1 & 1 & -i & i \end{pmatrix}$$
$$h_i = \begin{pmatrix} 1 & -1 & i & -i \\ i & -i & -1 & 1 \end{pmatrix},\ h_{(-i)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & i & -i \\ -i & i & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

permütasyonlarını yazalım. Bunlar P(G) nin $4! = 24$ permütasyonundan 4 tanesidir. Bu permütasyonlar P(G) nin bir altgrubunu oluştururlar. Çünkü çarpım (bileşke) tablosu kapalıdır:

$\cdot$	h_1	$h_{(-1)}$	h_i	$h_{(-i)}$
h_1	h_1	$h_{(-1)}$	h_i	$h_{(-i)}$
$h_{(-1)}$	$h_{(-1)}$	h_1	$h_{(-i)}$	h_i
h_i	h_i	$h_{(-i)}$	$h_{(-1)}$	h_1
$h_{(-i)}$	$h_{(-i)}$	h_i	h_1	$h_{(-1)}$

Bu grup tablosunda h sembollerini sildiğimizde aslında G'nin grup tablosunu elde ederiz. Başka bir deyişle $f : G \to f(G)$, f(a)=ha dönüşümü bir izomorfizmadır.

6.17. Teorem: $A_n \lhd S_n$ dir ve $n \geq 2$ için $o(A_n) = \frac{n!}{2}$ dir.

İspat: A_1 aşikar grup olup $A_1 \lhd S_1$ olduğu açıktır. $n \geq 2$ olsun. $\{1, -1\}$ kümesi çarpma işlemi ile bir gruptur. Şimdi $\phi : S_n \to \{1, -1\}$ dönüşümünü

$$\phi(\sigma) = \begin{cases} 1, \sigma \text{ çift} \\ -1, \sigma \text{ tek} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. $\alpha, \beta \in S_n$ alalım. Toplam 4 durum vardır:

$$\alpha, \beta \text{ tek} \Rightarrow \phi(\alpha\beta) = +1 = (-1) \cdot (-1) = \phi(\alpha)\phi(\beta)$$
$$\alpha, \beta \text{ çift} \Rightarrow \phi(ıı) = +1 = (+1) \cdot (+1) = \phi(\alpha)\phi(\beta)$$
$$\alpha \text{ tek}, \beta \text{ çift} \Rightarrow \phi(ıı) = -1 = (-1) \cdot (+1) = \phi(\alpha)\phi(\beta)$$
$$\alpha \text{ çift}, \beta \text{ tek} \Rightarrow \phi(ıı) = -1 = (+1) \cdot (-1) = \phi(\alpha)\phi(\beta)$$

Yani ϕ bir homomorfizmadır. $n \geq 2$ olduğundan S_n'de hem çift hem de tek permütasyonlar vardır. (Örneğin, (1, 2) tek; (1) çifttir.) O halde ϕ örtendir.

$\text{Çek}(\phi) = A_n$ olup bir grup homomorfizmasının çekirdeği her zaman normal altgrup olduğundan $A_n \lhd S_n$ dir (6.2. teoremden). Ayrıca, Birinci izomorfizma teoreminden $S_n/A_n \cong \{-1, 1\}$ dir. Lagrange teoreminden $o(A_n) = \frac{n!}{2}$ elde edilir.

6.18. Teorem: G değişmeli bir grup ve $H_1, H_2 \leq G$ olsun. Grupların iç direk toplamı $G = H_1 \oplus H_2$ ise

i) $G/H_1 \cong H_2$

ii) $G/H_2 \cong H_1$

dır.

İspat: i) İkinci izomorfizma teoremi kullanırsak

$$G/H_1 = H_1 + H_2/H_1 \cong H_2/H_1 \cap H_2 = H_2/\{0\} = H_2$$

bulunur.

ii) i'ye benzer şekilde ispatlanır.

Örnek: $\mathbb{Z}_{12}$ grubunun $\langle\bar{3}\rangle$ ve $\langle\bar{4}\rangle$ altgrupları için $\mathbb{Z}_{12} = \langle\bar{3}\rangle \oplus \langle\bar{4}\rangle$ olduğundan

$$\mathbb{Z}_{12}/\langle\bar{3}\rangle \cong \langle\bar{4}\rangle \text{ ve } \mathbb{Z}_{12}/\langle\bar{4}\rangle \cong \langle\bar{3}\rangle$$

tür.

ÇÖZÜMLÜ ALIŞTIRMALAR

1. $G = (\mathbb{Q}\backslash\{0\}, \cdot)$ olsun. $f : G \to G, f(x) = |x|$ şeklinde tanımlansın.

a) f 'nin bir grup homomorfizması olduğunu gösterip Çek(f) yi bulunuz

b) G/Çek(f) yi yazınız.

Çözüm: a) $x, y \in G$ için

$$f(xy) = |xy| = |x||y| = f(x)f(y)$$

olup f bir homomorfizmadır.

b) $\text{Çek}(f) = \{x \in G : f(x) = |x| = 1\} = \{1, -1\}$

olup

$$G/\text{Çek}(f) = \{\text{Çek}(f) \cdot x : x \in G\} = \{\{x, -x\} : x \in G\} \text{ g}$$

dir.

2. $M_{2\times 2} = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a,b,c,d \in \mathbb{R}\right\}$ kümesi bilinen matris toplamı ile bir gruptur. $f : M_{2\times 2} \to (\mathbb{R},+)$ dönüşümü

$$f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = a + d$$

şeklinde tanımlanıyor.

a) f'nin bir grup homomorfizması olduğunu gösteriniz.

b) Çek(f) yi bulunuz

c) $M_{2\times 2}/$Çek(f) yi yazınız.

Çözüm: a) $a_i, b_i, c_i, d_i \in \mathbb{R}$ olsun.

$$\begin{aligned} f\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}\right) &= f\left(\begin{bmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{bmatrix}\right) \\ &= (a_1 + a_2) + (d_1 + d_2) \\ &= (a_1 + d_1) + (a_2 + d_2) \\ &= f\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}\right) + f\left(\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}\right) \end{aligned}$$

olup f bir homomorfizmadır.

b) $\text{Çek}(f) = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2\times 2} : a + d = 0\right\} = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} : a,b,c \in \mathbb{R}\right\}$

c) $M_{2\times 2}/\text{Çek}(f) = \{\text{Çek}(f) + A : A \in M_{2\times 2}\}$

3. $f : G \to G$ dönüşümü her $a \in G$ için $f(a) = a^{-1}$ şeklinde tanımlansın. f'nin bir grup homomorfizması olması için gerek ve yeter şart G'nin Abelyen olmasıdır. Gösteriniz.

Çözüm: $\Rightarrow$: f bir grup homomorfizması olsun. Her $a, b \in G$ için

$$\begin{aligned} f(ab) = f(a)f(b) &\Rightarrow (ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1} \\ &\Rightarrow (ab)^{-1} = (ba)^{-1} \\ &\Rightarrow ab = ba \end{aligned}$$

olup G'nin Abelyen olduğu görülür.

$\Leftarrow$: Kabul edelim ki G Abelyen olsun.

$$f(ab) = (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} = a^{-1}b^{-1} = f(a)f(b)$$

olup f bir homomorfizmadır.

4. $G = \langle x \rangle$ herhangi bir devirli grup olsun. $f : G \to (\mathbb{Z},+)$ dönüşümü $f(x^n) = n$ şeklinde tanımlansın.

a) f bir homomorfizma olduğunu gösteriniz

b) Çek(f) yi bulunuz.

Çözüm: a) $G = \langle a \rangle$ sonsuz devirli grup ise

$$f(x^n x^m) = f(x^{n+m}) = n + m = f(x^n) + f(x^m)$$

olup f bir homomorfizmadır.

b) $(\mathbb{Z}, +)$ nın birim elemanı 0 olup

$$\text{Çek}(f) = \{x^n : \ f(x^n) = n = 0\} = \{x^0\} = \{e\}:$$

olur.

5. $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\phi(x + iy) = x - iy$ dönüşümü toplamsal $\mathbb{C}$ grubunun bir otomorfizması olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $z_1 = a + bi, z_2 = c + di$ iki kompleks sayı olsun.

$$\begin{aligned}\phi(z_1) = \phi(z_2) &\Rightarrow \phi(a + bi) = \phi(c + di) \\ &\Rightarrow a - bi = c - di \\ &\Rightarrow a = c, b = d \\ &\Rightarrow a + ib = c + id \\ &\Rightarrow z_1 = z_2\end{aligned}$$

olup ϕ 'nin 1-1 olduğu gösterilmiş olur. Verilen her $z = a + bi \in \mathbb{C}$ için $w = a - bi$ seçilirse

$$\phi(w) = \phi(a - bi) = a + bi = z$$

olup ϕ örtendir. Şimdi de

$$\begin{aligned}\phi(z_1 + z_2) &= \phi((a + c) + (b + d)i) \\ &= (a + c) - (b + d)i \\ &= (a - bi) + (c - di) \\ &= \phi(z_1) + \phi(z_2)\end{aligned}$$

olup ϕ bir homomorfizmadır. O halde ϕ bir otomorfizmadır.

6. $G = (\mathbb{C}\backslash\{0\}, \cdot)$ bir grup, $H = \{2 \times 2 \text{ tersi olan reel matrisler}\}$ de bilinen matris çarpımı ile bir gruptur.

a) $\phi : G \to H$, $\phi(a + ib) = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ ile tanımlanan dönüşüm bir grup homomorfizması mıdır?

b)Bu dönüşüm G ile H'yi izomorfik yapar mı?

Çözüm:

$$\phi\,((a + ib)(c + id)) = \phi(ac - bd + i(ad + bc)) = \begin{bmatrix} ac - bd & -ad - bc \\ ad + bc & ac - bd \end{bmatrix}$$

$$\phi\,(a+ib)\phi(c+id)=\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ac-bd & -ad-bc \\ ad+bc & ac-bd \end{bmatrix}$$

olup ϕ nin bir homomorfizma olduğu görülür.

b) $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ ise $\phi(a+bi)=A$ olacak şekilde $a+bi\in\mathbb{C}$ yoktur. Buna göre ϕ örten değildir. O halde ϕ dönüşümü G ile H yi izomorfik yapamaz.

7. $G=(\mathbb{C}\backslash\{0\},\ \cdot\ ), H=(\mathbb{R}^{+},\ \cdot\ )$ ve $z=x+iy$ için

$$\phi : G\to H, \phi(z)=|z|=\sqrt{x^2+y^2}$$

olarak tanımlanan dönüşüm olsun.

a) Bu dönüşüm bir homomorfizma mıdır?
b) Bu dönüşüm G ile H'yi izomorfik yapar mı?

Çözüm: a) $z_1=x+iy, z_2=a+bi$ iki kompleks sayı olsun.

$$\begin{aligned}\phi(z_1z_2)&=\phi((ax-by)+i(ay+xb))\\ &=|(ax-by)+i(ay+xb)|\\ &=\sqrt{(ax-by)^2+(ay+xb)^2}\\ &=\sqrt{a^2x^2-2axby+b^2y^2+a^2y^2+2aybx+b^2x^2}\\ &=\sqrt{a^2(x^2+y^2)+b^2(y^2+x^2)}\\ &=\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{x^2+y^2}\\ &=\phi(z_1)\phi(z_2)\end{aligned}$$

olup ϕ bir homomorfizmadır.

b) $z_1=3+4i$ ve $z_2=3-4i$ seçilirse $|z_1|=|z_2|=5$, yani $\phi(z_1)=\phi(z_2)$ olup $z_1\neq z_2$ dir. O halde ϕ 1-1 değildir. Öyleyse bu dönüşüm G ile H'yi izomorfik olmadığını gösterir.

8. $f:(\mathbb{R},+)\to(\mathbb{R}\backslash\{0\},\ \cdot\ ), f(x)=5^x$ olsun.
a) f 'nin grup homomorfizması olduğunu gösteriniz.
b) Çek(f) yi bulunuz.
c) f örten midir?
d) $\mathbb{R}/$Çek(f) yi yazınız.

Çözüm:
a) Her $x,y\in\mathbb{R}$ için $f(x+y)=5^{x+y}=5^x5^y=f(x)f(y)$ olup f homomorfizmadır.

b) $f(x)=1\Rightarrow 5^x=1\Rightarrow x=0$ olup Çek(f) $=\{0\}$ bulunur.

c) $y = -1 \in \mathbb{R}$ için $f(x) = 5^x = -1$ olacak şekilde $x \in \mathbb{R}$ olmadığından f örten değildir.

d) $\mathbb{R}/Çek(f) = \{Çek(f) + a : a \in \mathbb{R}\} = \{\{a\} : a \in \mathbb{R}\}$:

9. $\phi : \mathbb{Z}_{12} \to \mathbb{Z}_3$ örten homomorfizması $\phi(\bar{1}) = \bar{2}$ şeklinde veriliyor.
a) $K = Çek(\phi)$ altgrubunu bulunuz.
b) $\mathbb{Z}_{12}/K$ grubunu bulunuz.
c) $\phi : \mathbb{Z}_{12}/K \to \mathbb{Z}_3$ bir izomorfizma bulunuz.

Çözüm: $\phi(\bar{1}) = \bar{2}$ eşitliği verildiğinden, diğer elemanların görüntüleri $\phi(a \oplus b) = \phi(a) \oplus \phi(b)$ kuralıyla şöyle bulunur:

$$\phi \begin{cases} \bar{0} \to \bar{0} & \bar{3} \to \bar{0} & \bar{6} \to \bar{0} & \bar{9} \to \bar{0} \\ \bar{1} \to \bar{2} & 4 \to \bar{2} & \bar{7} \to \bar{2} & \overline{10} \to \bar{2} \\ \bar{2} \to \bar{1} & \bar{5} \to \bar{1} & \bar{8} \to \bar{1} & \overline{11} \to \bar{1} \end{cases}$$

a) $K = Çek(\phi) = \{x \in \mathbb{Z}_{12} : \phi(x) = \bar{0}\} = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}\}$

b) $K \oplus \bar{1} = \{\bar{1}, \bar{4}, \bar{7}, \overline{10}\}, K \oplus \bar{2} = \{\bar{2}, \bar{5}, \bar{8}, \overline{11}\}$ ve $K \oplus \bar{0} = K$ farklı sağ kosetlerdir. Yani $\mathbb{Z}_{12} = K = \{K, K \oplus \bar{1}, K \oplus \bar{2}\}$ dir.

c)

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}_{12} \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr] & & \mathbb{Z}_3 \\ & \mathbb{Z}_{12}/K \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

$\psi(K \oplus \bar{0}) = \phi(\bar{0}) = \bar{0}, \psi(K \oplus \bar{1}) = \phi(\bar{1}) = \bar{2},\ \psi(K \oplus \bar{2}) = \phi(\bar{2}) = \bar{1}$ şeklinde tanımlayalım. Birinci izomorfizma teoreminden, ψ iyi tanımlanmış 1-1 ve örten bir homomorfizmadır.

10. $G = \mathbb{Z}_{24}$ olsun. $H = \langle \bar{4} \rangle \leq \mathbb{Z}_{24}$ ve $N = \langle \bar{6} \rangle \lhd \mathbb{Z}_{24}$ olarak verilsin. Bu durumda
a) $H \cap N \lhd H$
b) $(H \oplus N) \leq \mathbb{Z}_{24}$
c) $H/(H \cap N) \cong (H \oplus N)/N$
olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

a) $H = \langle \overline{4} \rangle = \{\overline{0}, \overline{4}, \overline{8}, \overline{12}, \overline{16}, \overline{20}\}$ ve $N = \langle \overline{6} \rangle = \{\overline{0}, \overline{6}, \overline{12}, \overline{18}\}$ bulunur. $H \cap N = \{\overline{0}, \overline{12}\}$ olup $H \cap N \leq H$ olduğu kapalılık özelliği incelenerek görülür. H, Abelyen olduğundan her altgrup normaldir. Buna göre $H \cap N \lhd H$ dir.

b)
$$H \oplus N = \{\, h \oplus n : h \in H, n \in N\} = \{\overline{0}, \overline{6}, \overline{12}, \overline{18}, \overline{4}, \overline{10}, \overline{16}, \overline{22}, \overline{8}, \overline{14}, \overline{20}, \overline{2}\}$$
dır. Bu kümede kapalılık özelliği olduğundan $(H \oplus N) \leq \mathbb{Z}_{24}$ dür.

c) $(H \oplus N)/N = \{N \oplus m : m \in H \oplus N\} = \{N, N \oplus \overline{4}, N \oplus \overline{8}\}$ bölüm grubudur. Şimdi $f : H \to (H \oplus N)/N$, $f(h) = N \oplus h$ tanımlayalım. f örten bir homomorfizmadır, buda ikinci izomorfizma teoremini gösterir.

$f(\overline{0}) = f(\overline{12}) = N, f(\overline{4}) = f(\overline{16}) = N \oplus \overline{4}, f(\overline{8}) = f(\overline{20}) = N \oplus \overline{8}$

dir. $Çek(f) = \{h \in H : f(h) = N\} = \{\overline{0}, \overline{12}\}$ olur. Yani $Çek(f) = H \cap N$ elde edilir. Birinci izomorfizma teoreminden:

$H = Çek(f) \cong (H \oplus N)/N$ yani $H/(H \cap N) \cong (H \oplus N)/N$

olur.

11. $G/\mathbb{Z}_{24}$ olsun. $H = \langle \overline{4} \rangle$ ve $K = \langle \overline{8} \rangle$ altgrupları verilsin.

a) $G/H, G/K$ ve H/K faktör gruplarını yazınız.

b) $(G/K)/(H/K)$ faktör grubunu yazıp G/H a izomorfik olduğunu gösterin.

Çözüm: a) $G = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \ldots, \overline{23}\}, H = \{\overline{0}, \overline{4}, \overline{8}, \overline{12}, \overline{16}, \overline{20}\}, K = \{\overline{0}, \overline{8}, \overline{16}\}$ bulunur. İstenen faktör grupları:

$G/H = \{H \oplus \overline{0}, H \oplus \overline{1}, H \oplus \overline{2}, H \oplus \overline{3}\}$

$G/K = \{K \oplus \overline{0}, K \oplus \overline{1}, K \oplus \overline{2}, K \oplus \overline{3}, K \oplus \overline{4}, K \oplus \overline{5}, K \oplus \overline{6}, K \oplus \overline{7}\}$

$H/K = \{K \oplus \overline{0}, K \oplus \overline{4}\}$

olur.

b) $H/K \lhd G/K$ olduğundan

$(G/K)/(H/K) = \{(H/K) \oplus X : X \in G/K\}$

$= \{(H/K) \oplus (K \oplus 0), (H/K) \oplus (K \oplus 1), (H/K) \oplus (K \oplus 2), (H/K) \oplus (K \oplus 3)\}$

dır. Şimdi $\psi : G/K \to G/H$; her $K \oplus g \in G/K$ için $\psi(K \oplus g) = H \oplus g$ şeklinde tanımlayalım. Şimdi ψ fonksiyonunu bulalım.

$$\psi \begin{cases} K \oplus \overline{0} \to H \oplus \overline{0} & K \oplus \overline{3} \to H \oplus \overline{3} & K \oplus \overline{6} \to H \oplus \overline{2} \\ K \oplus \overline{1} \to H \oplus \overline{1} & K \oplus 4 \to H \oplus \overline{0} & K \oplus \overline{7} \to H \oplus \overline{3} \\ K \oplus \overline{2} \to H \oplus \overline{2} & K \oplus \overline{5} \to H \oplus \overline{1} & \end{cases}$$

Üçüncü izomorfizma teoremine göre ψ iyi tanımlıdır ve örten bir homomorfizmadır. O halde birinci izomorfizma teoreminden $(G/K)/Çek(\psi) \cong G/H$ dır. G/H nin birim elemanı $H = H \oplus \overline{0}$ olduğundan

$Çek(\psi) = \{X \in G/K : \psi(X) = H \oplus \overline{0} = \{K \oplus \overline{0}, K \oplus \overline{4}\} = H/K$

olup $(G/K)/(H/K) \cong G/H$ elde edilir.

12. $f: \mathbb{Z}_{12} \to \mathbb{Z}_4$, $f(\overline{1}) = \overline{1}$ olacak şekilde örten bir homomorfizma verilsin. $T = \langle \overline{2} \rangle \lhd \mathbb{Z}_4$ ve $S = \{x : f(x) \in T\}$ olsun. $\mathbb{Z}_{12}/S \cong \mathbb{Z}_4/T$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $T = \{\overline{0}, \overline{2}\}$ olup $\mathbb{Z}_4/T = \{T \oplus \overline{0}, T \oplus \overline{1}\}$ dir. $\psi: G \to \mathbb{Z}_4/T = \mathbb{Z}_4/\langle \overline{2} \rangle$ dönüşümünü

$$\psi(g) = T \oplus f(g)$$

şeklinde tanımlayalım. Önce f yi bulalım:

$$f(\overline{0}) = f(\overline{4}) = f(\overline{8}) = \overline{0}, \quad f(\overline{1}) = f(\overline{5}) = f(\overline{9}) = \overline{1},$$
$$f(\overline{2}) = f(\overline{6}) = f(\overline{10}) = \overline{2}, \quad f(\overline{3}) = f(\overline{7}) = f(\overline{11}) = \overline{3}$$

dir. Şimdi ψ yi bulalım.

$$\psi \begin{cases} \overline{0} \to T \oplus \overline{0} & \overline{3} \to T \oplus \overline{1} & \overline{6} \to T \oplus \overline{0} & \overline{9} \to T \oplus \overline{1} \\ \overline{1} \to T \oplus \overline{1} & \overline{4} \to T \oplus \overline{0} & \overline{7} \to T \oplus \overline{1} & \overline{10} \to T \oplus \overline{0} \\ \overline{2} \to T \oplus \overline{0} & \overline{5} \to T \oplus \overline{1} & \overline{8} \to T \oplus \overline{0} & \overline{11} \to T \oplus \overline{1} \end{cases}$$

6.12. teoremden ψ örten bir homomorfizmadır.

$Çek(\psi) = \{x \in \mathbb{Z}_{12} : \psi(x) = T\} = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10}\} = S$

bulunur.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}_{12} \arrow[rr, "\psi"] \arrow[dr] & & \mathbb{Z}_4/T \\ & \mathbb{Z}_{12}/S \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Birinci izomorfizma teoreminden $\mathbb{Z}_{12}/S \cong \mathbb{Z}_4/T = \mathbb{Z}_4/\langle \overline{2} \rangle$ elde edilir.

13. Abelyen olmayan bir grubun en az iki tane iç otomorfizmasının olduğunu gösteriniz.

Çözüm: G Abelyen olmayan bir grup olsun. O zaman $G \neq Z(G)$ olup $G = Z(G)$ en az iki elemanlı bir gruptur. $G = Z(G) \cong I(G)$ olduğundan $I(G)$ iç otomorfizmalar grubu da en az iki elemanlıdır. O halde G'nin en az iki tane iç otomorfizması vardır.

14. $\phi: \mathbb{Z}_{18} \to \mathbb{Z}_{18}$, $\phi(\overline{1}) = \overline{10}$ şeklinde bir homomorfizma veriliyor. $Çek(\phi)$ yi bulup birinci izomorfizma teoremini uygulayınız.

Çözüm: ϕ homomorfizmasının aşağıdaki gibi eşleme yaptığı görülür:

$$\phi\begin{cases}\overline{0}\to\overline{0} & \overline{4}\to\overline{4} & \overline{8}\to\overline{8} & \overline{12}\to\overline{10} & \overline{16}\to\overline{16}\\ \overline{1}\to\overline{10} & 5\to\overline{14} & \overline{9}\to\overline{0} & \overline{13}\to\overline{4} & \overline{17}\to 8\\ \overline{2}\to\overline{2} & \overline{6}\to\overline{6} & \overline{10}\to\overline{10} & \overline{14}\to\overline{14} & \\ \overline{3}\to\overline{12} & \overline{7}\to\overline{16} & \overline{11}\to\overline{2} & \overline{15}\to\overline{6} & \end{cases}$$

Burada ϕ örten olmadığından $\mathbb{Z}_{18}/\text{Çek}(\phi)\cong\phi(\mathbb{Z}_{18})$ olduğu gösterilecektir.

$$K=\text{Çek}(\phi)=\{x\in\mathbb{Z}_{18}:\phi(x)=\overline{0}\}=\{\overline{0},\overline{9}\}$$

bulunur. Ayrıca bölüm grubu

$$\mathbb{Z}_{18}/K=\{K\oplus\overline{0},K\oplus\overline{1},K\oplus\overline{2},K\oplus\overline{3},K\oplus\overline{4},K\oplus\overline{5},K\oplus\overline{6},K\oplus\overline{7},K\oplus\overline{8}\}$$

olarak bulunur. $r:\mathbb{Z}_{18}/\to\phi(\mathbb{Z}_{18})$ fonksiyonu $r(K\oplus x)=\phi(x)$ şeklinde tanımlanır. r fonksiyonunun aşağıdaki gibi eşleme yaptığı görülür:

$$\phi\begin{cases}K\oplus\overline{0}\to\overline{0} & K\oplus\overline{3}\to\overline{12} & K\oplus\overline{6}\to\overline{6}\\ K\oplus\overline{1}\to\overline{10} & K\oplus\overline{4}\to\overline{4} & K\oplus\overline{7}\to\overline{16}\\ K\oplus\overline{2}\to\overline{1} & K\oplus\overline{5}\to\overline{14} & K\oplus\overline{8}\to\overline{8}\end{cases}$$

tablodan, r nin 1-1 ve örten olduğu görülmektedir. Birinci izomorfizma teoreminden dolayı r bir izomorfizma olup $\mathbb{Z}_{18}/K\cong\phi(\mathbb{Z}_{18})$ dir.

15. $\hat{S}_n=\{f\in S_n:\ f(n)=n\}$ kümesinin S_n in bir altgrubu olduğunu ve S_{n-1} e izomorfik olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $S=\{1,2,\dots,n-1,n\}$ olsun. $\hat{S}_n$ aslında son elemanı sabit bırakan permütasyonların kümesidir. $f,g\in\hat{S}_n$ olsun. Bu durumda $g^{-1}\in\hat{S}_n$ olduğu açıktır. Şimdi,

$$[fg^{-1}](n)=g^{-1}(f(n))=g^{-1}(n)=n$$

olup $fg^{-1}\in\hat{S}_n$ olduğu görülür. 4.1. teoremden $\hat{S}_n\leq S_n$. Şimdi $\hat{S}_n\cong S_{n-1}$ olduğunu gösterelim.

$\psi:S_n\to\hat{S}_n$ dönüşümünü her $g\in S_{n-1}$ için $\psi(g)=g\cdot(n)$ şeklinde tanımlayalım. Yani g'ye (n) permütasyonu ilave edelim. ψ izomorfizma olduğunu gösterelim.

ψ 1-1 dir. Gerçekten $\psi(f)=\psi(g)\Rightarrow f\cdot(n)=g\cdot(n)\Rightarrow f=g$ dir.

ψ homomorfizmadır: $\psi(fg)=fg\cdot(n)=f\cdot(n)\cdot g\cdot(n)=\psi(f)\psi(g)$ dir.

ψ örtendir: $g'\in\hat{S}_n$ alalım. Bu durumda $g'=g\cdot(n)$ şeklinde olup burada $g\in S_{n-1}$ dir. O zaman $\psi(g)=g'$ olduğu açıktır.

KAYNAKÇA

1. Prof. Dr. Fethi ÇALLIALP, Soyut Cebir, 2011, İstanbul.

2. Yrd. Doç. Dr. Hüseyin BİLGİÇ, Soyut Cebir Ders Notları, Kahramanmaraş Sütçü İmam Üniversitesi, 2012, Kahramanmaraş.
3. Prof. Dr. Şenol Eren, Soyut Cebir, Ondokuz Mayıs Üniversitesi Dijital Ders Platformu, 2021, Samsun.
4. Prof. Dr. Sait Halıcıoğlu, Doç. Dr. Burcu Üngör, Cebir, Açık ders, Ankara Üniversitesi, 2021, Ankara.
5. Doç. Dr. Sebahattin BALCI, Modern Cebire Giriş, Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi Döner Sermaye İşletmeleri Yayınları: 15, 1993, ANKARA.
6. Doç. Dr. Mustafa Bayraktar, Soyut Cebir ve Sayılar Teorisi, Atatürk Üniversitesi Basımevi, 1988, Erzurum.
7. Prof. Dr. H.İbrahim Karataş, Soyut Cebir, TÜBA, 2010, Ankara.