1. BÖLÜM
DOĞRUNUN ANALİTİĞİ

Doğrunun analitiği kavramını incelemeden önce kartezyen çarpım, fonksiyonlar, doğrusal fonksiyonlar ve temel geometri konusu bilinmesi gerekir. Bu bölüm doğrusal fonksiyonların devamı niteliğindedir.

DOĞRU DEMETİ

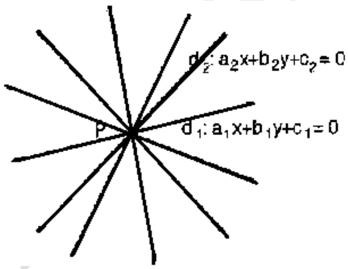
1.1.Tanım: Denklemleri

$d_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ve $d_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$

olan iki doğrunun kesim noktalarından geçen doğruların tümüne doğru demeti denir. Bu doğru demetinin denklemi

$$a_1x + b_1y + c_1 + \lambda(a_2x + b_2y + c_2) = 0, \lambda \in \mathbb{R}$$

biçimindedir.



Örnek: $my + 2x - 4m - 12 = 0$ doğruları hangi noktada kesişirler?

Çözüm: 1. Yol: Verilen denklemde parametreler, m ye göre düzenlenir, sonra m'ye bağlı polinom denklem çözümlenir.

$$(y - 4)m + (2x - 12) = 0 \cdot m + 0$$
$$y - 4 = 0 \ \wedge 2x - 12 = 0$$
$$y = 4 \ \wedge x = 6$$

verilen denklemlerinin ortak çözüm noktaları $P(6, 4)$ dir.

2. Yol: m parametresine, keyfi iki değer vererek doğru demetindeki doğrulardan iki tanesinin denklemini buluruz. Bu doğruların kesişen doğrular olacağı açıktır. Kesişen iki doğrunun kesim noktasını bulmak için iki bilinmeyenli iki denklemin ortak çözümü yapılır.

$$m = 0 \Leftrightarrow 2x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = 6$$
$$m = 1 \Leftrightarrow y + 2x - 4 - 12 = 0 \Leftrightarrow y = 4$$

verilen denklemlerinin ortak çözüm noktaları $P(6,4)$ olarak bulunur.

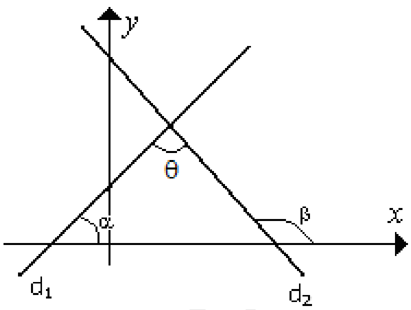
İKİ DOĞRU ARASINDAKİ AÇI

1.1.Teorem: d_1 ve d_2 doğrularının eğimleri sırasıyla m_1 ve m_2 olsun. İki doğru arasındaki açı θ ise,

$$\tan\theta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

dir.

İspat:



"Bir dış açı kendisine komşu olmayan iki iç açının toplamına eşittir" teoremine göre,

$$\beta = \theta + \alpha \text{ ise } \theta = \alpha - \beta$$

olarak bulunur. Trigonometride toplam ve fark formüllerine göre

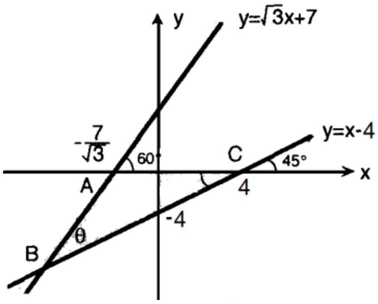
$$\tan\theta = \tan(\alpha - \beta)$$
$$= \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha \cdot \tan\beta}$$
$$= \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

bulunur.

Örnek: $y = \sqrt{3}x + 7$ ve $y = x - 4$ doğruları arasındaki açı kaç derecedir?

Çözüm: $y = \sqrt{3}x + 7$ doğrusunun eğimi $m_1 = \sqrt{3}$ olduğundan $\tan 60 = \sqrt{3}$

$y = x - 4$ doğrusunun eğimi $m_2 = 1$ olduğundan $\tan 45 = 1$ dir.
Verilen doğruların grafiği



biçimindedir. Ayrıca iç ters açılardan $m(A\hat{C}B) = 15$ dir. Buna göre,

$$60 = \theta + 45 \text{ ise } \theta = 15$$

olarak bulunur.

Örnek: $y = ax$ ve $y = -x$ doğruları arasındaki açı 37^0 ise a'nın değeri nedir?

Çözüm: $y = ax$ doğrusunun eğimi $m_1 = a$
$y = -x$ doğrusunun eğimi $m_2 = -1$
şeklindedir. O halde,

$$\tan\theta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} = \frac{a-(-1)}{1+a\cdot(-1)} = \frac{3}{4}$$

$$4a + 4 = 3 - 3a$$

$$a = \frac{3}{4}$$

bulunur.

1.1. Not: a) $\tan\theta > 0$ ise doğrular arasındaki açı dar açıdır.
b) $\tan\theta < 0$ ise doğrular arasındaki açı geniş açıdır.

Örnek: $2x - y + 10 = 0$ ve $3x + y + 8 = 0$ doğruları arasındaki dar ve geniş açıların ölçüsünü bulunuz.

Çözüm: $2x - y + 10 = 0$ doğrusunun eğimi $m_1 = 2$
$3x + y + 8 = 0$ doğrusunun eğimi $m_2 = -3$
şeklindedir. O halde,

$$\tan\theta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} = \frac{2-(-3)}{1+2\cdot(-1)} = -1$$

dir. $\tan 135 = \tan 315 = -1$ olur.

Örnek: $3y^2 + 5xy - 2x^2 = 0$ doğruları arasındaki açıların ölçüsünü bulunuz.

Çözüm: $3y^2 + 5xy - 2x^2 = 0$

$$(y + 2x)(3y - x) = 0$$

doğruları elde edilir. Bu doğruların eğimleri,

$$m_1 = -2 \text{ ve } m_2 = \frac{1}{3}$$

dür. Bu iki doğru arasındaki açı α kabul edersek,

$$\tan\alpha = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} = \frac{-2 - \frac{1}{3}}{1 + (-2)\cdot\frac{1}{3}} = -7$$

olarak bulunur. İki doğru arasındaki açı denildiğinde, bütünler iki açı incelenecek demektir. Bütünler iki açının tanjantları zıt işaretli olduğundan,

$$\tan\alpha = -7 \text{ veya } \tan(180 - \alpha) = -7$$

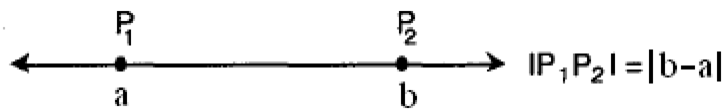
olur.

REEL DÜZLEM ÜZERİNDEKİ NOKTALAR ARASI UZAKLIK

1.1. Aksiyom: $P_1(a, 0)$ ve $P_2(b, 0)$ reel sayı doğrusu üzerinde iki nokta olsun. P_1 ve P_2 noktaları arasındaki uzaklık

$$|P_1P_2| = |b - a|$$

dir.



Örnek: $A(3, 0)$ ve $B(10, 0)$ noktaları arasındaki uzaklık nedir?

Çözüm: $|AB| = |10 - 3| = 7$ //

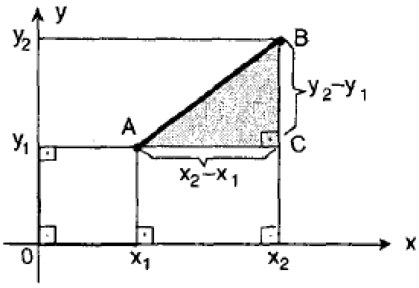
İKİ NOKTA ARASINDAKİ UZAKLIK

1.2. Teorem: İki boyutlu analitik düzlemde $A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ noktalarını alalım. Bu iki nokta arasındaki uzaklık,

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

dir.

İspat:



$A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ noktaları şekildeki gibi ABC dik üçgenini oluştursun. $|AC|$ ve $|BC|$ arasındaki uzaklık

$$|AC| = x_2 - x_1 \text{ ve } |BC| = y_2 - y_1$$

şeklinde olur. Pisagor teoremi uygulanırsa;

$$|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2$$
$$|AB|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$
$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

bulunur.

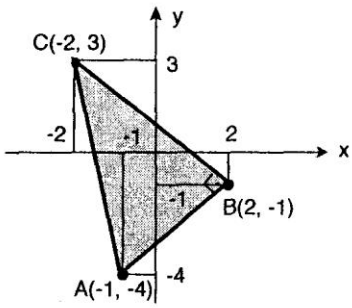
1.2. Not: $(a-b)^2 = (b-a)^2$ olduğundan iki nokta arasındaki uzaklık, $|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ ya da $|AB| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ denklemlerinden biri ile hesaplanır.

Örnek: $A(2, 8)$ ve $B(14, 3)$ noktaları arasındaki uzaklığı bulunuz.

Çözüm: $|AB| = \sqrt{(14-2)^2 + (3-8)^2} = 13$ birimdir.

Örnek: $A(-1, -4)$, $B(2, -1)$, ve $C(-2, 3)$ noktaları köşe kabul eden ABC üçgeni bir dik üçgen midir?

Çözüm: $|AB|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$



$|AB|^2 = (2-(-1))^2 + (-1-(-4))^2 = 18$
$|BC|^2 = (-2-2)^2 + (3-(-1))^2 = 32$

$$|AC|^2 = (-2-(-1))^2 + (3-(-4))^2 = 50$$

bulunur. Pisagor teoremine uygulanırsa,

$$|AB|^2 + |BC|^2 = |AC|^2$$

$$18^2 + 32^2 = 50^2$$

elde edilir. Öyleyse Pisagor teoremi doğrulandığından üçgen dik üçgendir.

Örnek: $A(k,2)$ ve $B(1,-1)$ noktaları arasındaki uzaklık 5 br ise k ne olabilir?

Çözüm: $|AB| = 5$

$$|AB| = \sqrt{(-1-2)^2 + (1-k)^2} = 5$$

$$9 + (1-k)^2 = 25$$

$$(1-k)^2 = 16$$

$$1-k = 4 \ \wedge 1-k = -4$$

$$k = -3 \ \wedge k = 5$$

Örnek: $A(2,-1)$ ve $B(-4,3)$ noktalarından eşit uzaklıkta bulunan noktaların geometrik yeri nedir?

Çözüm: $A(2,-1)$ ve $B(-4,3)$ noktalarından eşit uzaklıkta bulunan noktaların kümesi $C(x,y)$ olsun. $|CA| = |CB|$ olduğundan;

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-(-1))^2} = \sqrt{(x-(-4))^2 + (y-3)^2}$$

olur. Buna göre;

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = (x+4)^2 + (y-3)^2$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 = x^2 + 8x + 16 + y^2 - 6y + 9$$

$$4x + 8y - 20 = 0$$

$$2x + 4y - 5 = 0$$

doğru denklemini verir. Bu bize verilen A ve B noktalarının bu doğru üzerinde olduğunu verir.

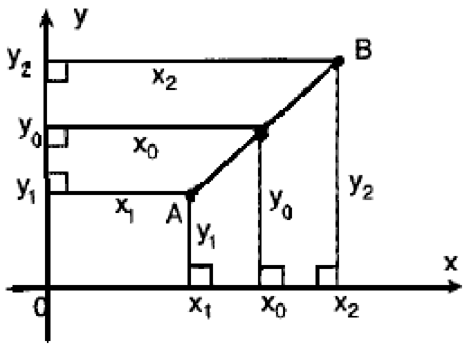
BİR DOĞRU PARÇASININ ORTA NOKTASI

1.3. Teorem: Analitik düzlemde $A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ noktalarını alalım. Bu iki noktanın orta noktası $M(x_0, y_0)$ ise,

$$x_0 = \frac{x_1+x_2}{2}, y_0 = \frac{y_1+y_2}{2}$$

biçimindedir.

İspat:



[AB] doğrusunun orta noktası $M(x_0, y_0)$ ise, verilen şekilde koordinat düzlemde oluşan iki yamuk şekillerinin tabanları x_1 ve x_2, y_1 ve y_2 dir. x_0 ve y_0 da bu yamukların orta tabanlarıdır. Yamukta orta taban özelliğinden

$$x_0 = \frac{x_1+x_2}{2}, y_0 = \frac{y_1+y_2}{2}$$

bulunur.

Örnek: Uç noktaları $A(-5,3)$ ve $B(7,9)$ olan AB doğru parçasının orta noktasının koordinatları toplamı kaçtır?

Çözüm: [AB] doğrusunun orta noktası $M(x_0, y_0)$ ise,

$$x_0 = \frac{x_1+x_2}{2} = \frac{-5+7}{2} = 1, y_0 = \frac{y_1+y_2}{2} = \frac{3+9}{2} = 6$$

olup

$$M(x_0, y_0) = M(1,5)$$

dir.

Örnek: $A(5, a)$ ve $B(b, -9)$ noktaları uç noktaları kabul eden [AB] nin orta noktası $C(6,4)$ ise $3a + 2b$ nin değeri nedir?

Çözüm: $6 = \frac{5+b}{2}$ ise $b = 7$

$4 = \frac{a-9}{2}$ ise $a = 17$

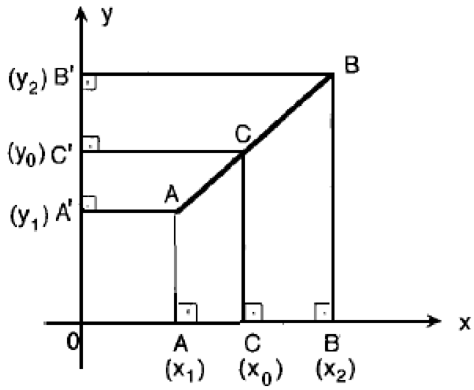
$3 \cdot 17 + 2 \cdot 7 = 65$

BİR DOĞRU PARÇASINI BELİRLİ BİR ORANA GÖRE BÖLEN NOKTANIN KOORDİNATLARI

1.4. Teorem: Analitik düzlemde $A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ noktalarını alalım. Bu iki noktanın λ oranına göre bölen nokta $C(x_0, y_0)$ ise,

$$x_0 = \frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, y_0 = \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$$
biçimindedir. ($\lambda \neq 1$)

İspat:



[AB] doğrusunun λ oranına göre bölen nokta $C(x_0, y_0)$ ise
$$\frac{|AC|}{|CB|} = \lambda \ , \ (\lambda \neq 1)$$
olur. Doğru parçalarının izdüşümleri orantılı olduğundan,
$$\frac{|AC|}{|CB|} = \lambda, \frac{|A'C'|}{|C'B'|} = \lambda$$

$$\frac{x_0-x_1}{x_2-x_0} = \lambda, \frac{y_0-y_1}{y_2-y_0} = \lambda$$

$$x_0 = \frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, y_0 = \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$$
bulunur. //

Bu teoreme göre şu tespiti yapmak yerindedir.

1. $\lambda > 0$ ise C noktası, [AB] doğru parçası arasındadır. Yani C, [AB] doğrusunu içten bölen noktadır. ($\lambda \neq 1$)

2. $\lambda < 0$ ise C noktası, [AB] doğru parçasının dışındadır. Yani C, [AB] doğrusunu dıştan bölen noktadır.

3. $\lambda = -1$ ise C noktası, [AB] doğru parçasının orta noktasıdır.

Örnek: Uç noktaları $A(3, -8)$ ve $B(11, 0)$ kabul eden [AB] doğru parçasını $\lambda = 3$ oranında bölen C noktasının koordinatlarını bulunuz.

Çözüm: $C(x_0, y_0)$ olsun. $x_1 = 3, y_1 = -8, x_2 = 11, y_2 = 0$ olduğundan

$$x_0 = \frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda} = \frac{3+3\cdot 11}{1+3} = 9$$

$$y_0 = \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda} = \frac{-8+3\cdot 0}{1+3} = -2$$

$$C(x_0, y_0) = C(9, -2)$$

bulunur.

Örnek: $A(6,0)$ ve $B(0,2)$ noktaları veriliyor. $\frac{|CA|}{|CB|} = \frac{1}{2}$ olacak şekilde $[AB]$ doğru parçasının dışında C noktası veriliyor. C noktasının apsisi nedir?

Çözüm: C noktasının apsisi x olsun. $x_1 = 6, x_2 = 0$ ve $\lambda = 3$ dır.

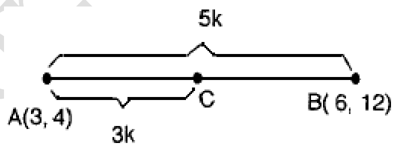
$$x_0 = \frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda} = \frac{6+2\cdot 0}{1+2} = 2$$

bulunur. //

Bu kısım sorular oran ve orantıdan yararlanarak da hesaplanabilir.

Örnek: $A(3,4)$ ve $B(6,12)$ noktaları veriliyor. $[AB]$ doğru parçasını A dan itibaren $\frac{3}{5}$ oranında bölen C noktasının koordinatlarını bulunuz.

Çözüm:



5k uzaklığa karşılık apsis 3 br azalmışsa,

3k uzaklığa karşılık apsis $\frac{9}{5}$ br artar.

Buna göre $x_0 = 3 + \frac{9}{5} = \frac{24}{5}$ br dir.

5k uzaklığa karşılık apsis 8 br azalmışsa,

3k uzaklığa karşılık apsis $\frac{24}{5}$ br artar.

Buna göre $x_0 = 4 + \frac{24}{5} = \frac{44}{5}$ br dir. O halde $C\left(\frac{24}{5}, \frac{44}{5}\right)$ dir.

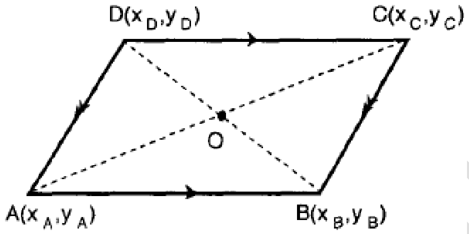
KÖŞE KOORDİNATLARI VERİLEN BİR DÖRTGENİN PARALELKENAR OLMA ŞARTI

1.5. Teorem: Köşe koordinatları $A(x_A, y_B), B(x_B, y_B), C(x_C, y_C), D(x_D, y_D)$ olan noktaların bir paralel kenar olması için gerek ve yeter şart,

$$x_A + x_C = x_B + x_D \text{ ve } y_A + y_C = y_B + y_D$$

dir.

İspat: $A(x_A, y_B), B(x_B, y_B), C(x_C, y_C), D(x_D, y_D)$ noktalarından geçen paralel kenar olsunlar.



Bir paralelkenarda köşegenler birbirini ortaladığından, köşegenlerin kesim noktası olan O noktası, [AC] ve [BD] nin orta noktasıdır. 1.3. teoreme göre,

O noktası [AC] nin orta noktası ise $O\left(\frac{x_A+x_C}{2}, \frac{y_A+y_C}{2}\right)$

O noktası [BD] nin orta noktası ise $O\left(\frac{x_B+x_D}{2}, \frac{y_B+y_D}{2}\right)$

dir. [AC] ve [BD] nin orta noktaları çakışık olduğundan

$$\left(\frac{x_A+x_C}{2}, \frac{y_A+y_C}{2}\right) = \left(\frac{x_B+x_D}{2}, \frac{x_B+x_D}{2}\right)$$

bulunur. Buna göre,

$$x_A + x_C = x_B + x_D \text{ ve } y_A + y_C = y_B + y_D$$

dir.

Örnek: Köşe koordinatları $A(1,4), B(-5,-3), C(8,-6), D(a,b)$ olan ABCD paralelkenarında D köşesinin koordinatları nedir?

Çözüm: $a - 5 = 1 + 8$ ise $a = 14$

$b - 3 = 4 - 6$ ise $b = 1$

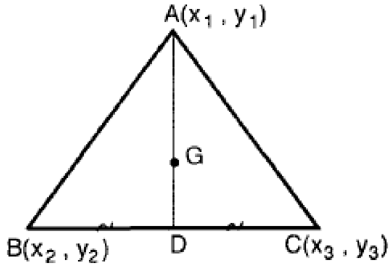
$D(14, 1)$

ÜÇGENİN AĞIRLIK MERKEZİ

1.6. Teorem: Köşe koordinatları $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$ olan ABC üçgeninin kesim noktasının (ağılık merkezinin) koordinatları,

$$G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$

dir.



İspat: AD, BC kenarına ait kenarortay ve AD kenarortayı üzerinde $|AG| = \frac{2}{3}|AD|$ olacak şekilde G noktası alalım. G noktası kenarortayların kesim noktasıdır.

$$\frac{|AG|}{|GD|} = \frac{2}{1} \text{ olup } \lambda = 2$$

dir. D noktasının koordinatları

$$D\left(\frac{x_2+x_3}{2}, \frac{y_2+y_3}{2}\right)$$

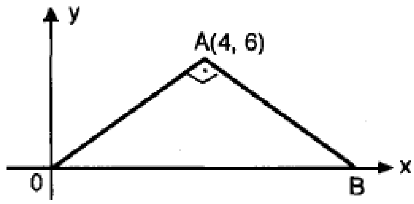
dir. G noktasının koordinatları (x, y) ile gösterilirse, G noktası [AD] nı içten bölen nokta olduğu için $\lambda < 0$ dan $\lambda = -2$ olacaktır. Bu durumda

$$G(x, y) = G\left(\frac{x_1+2.\frac{x_2+x_3}{2}}{1+2}, \frac{y_1+2.\frac{y_2+y_3}{2}}{1+2}\right)$$

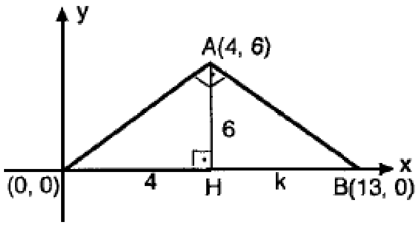
$$G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$

elde edilir.

Örnek: Şekildeki AOB dik üçgeninde $A(4, 6)$ olduğuna göre üçgenin ağırlık merkezinin koordinatları nedir?



Çözüm:



$[AH] \perp [OB]$ çizelim. Öklid teoreminden

$|AH|^2 = |OH| \cdot |HB|$

$6^2 = 4 \cdot k$

$k = 9$

bulunur. $|HB| = 9$ ise $|OB| = 13$ olur ki $B(13, 0)$ dır. Ayrıca $A(4, 6)$ ve $O(0, 0)$ olduğundan ağırlık merkezi $G\left(\frac{0+4+13}{3}, \frac{0+6+9}{3}\right) = G\left(\frac{17}{3}, 2\right)$ dir.

ÜÇGENİN ALANI

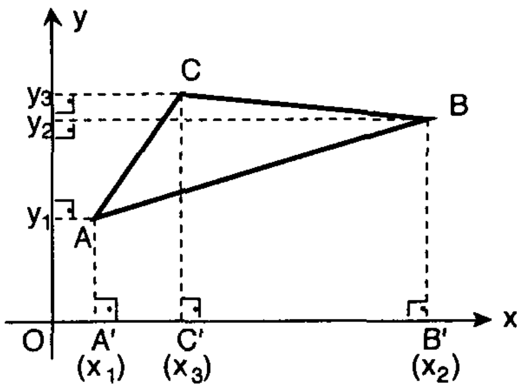
Köşe noktalarının koordinatları üzerinde çizilen üçgenin alanı iki türlü yapılabilir. Şimdi bunlardan bir tanesini verelim. "Bir noktanın bir doğruya olan en kısa uzaklığı" kısmında örnekle bir yöntem daha verilecektir. Ayrıca lineer cebir derslerinde de üçüncü bir yöntemden bahsedilecektir.

1.7. Teorem: Köşe koordinatları $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$ olan ABC üçgeninin alanı,

$$A(ABC) = \frac{1}{2}|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)|$$

biçimindedir.

İspat: $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$ üç nokta olmak üzere ABC üçgeninin alanını bulalım.



A, B, C noktalarından Ox eksenine AA′, BB′ ve CC′ dikmelerini çizelim. Üçgenin alanını

$$A(ABC) = A(AA'C'C) + A(CC'B'B) - A(AA'B'B) \quad (1)$$

dir. $AA'C'C, CC'B'B, AA'B'B$ birer yamuk olup,

$$A(AA'C'C) = \frac{|AA'|+|CC'|}{2}|A'C'| = \frac{y_1+y_3}{2}(x_3 - x_1) \qquad (2)$$
$$A(CC'B'B) = \frac{|BB'|+|CC'|}{2}|B'C'| = \frac{y_2+y_3}{2}(x_2 - x_3) \qquad (3)$$
$$A(AA'B'B) = \frac{|AA'|+|BB'|}{2}|B'C'| = \frac{y_1+y_2}{2}(x_2 - x_1) \qquad (4)$$

bulunur. (2), (3) ve (4) eşitliklerini (1) de yerine yazarsak,

$$A(ABC) = \frac{y_1+y_3}{2}(x_3 - x_1) + \frac{y_2+y_3}{2}(x_2 - x_3) - \frac{y_1+y_2}{2}(x_2 - x_1)$$

$$2A(ABC) = (y_1 + y_3)(x_3 - x_1) + (y_2 + y_3)(x_2 - x_3) - (y_1 + y_2)(x_2 - x_1)$$

olurki, çarpmanın toplama üzerine dağılma özelliği kullanılarak

$$2A(ABC) = x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_1(y_1 - y_2)$$

bulunur. Bir üçgenin alanı negatif olamayacağından mutlak değer kullanılarak,

$$A(ABC) = \frac{1}{2}|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)|$$

elde edilir. //

ABC üçgeninin alanı sıfır çıkarsa A, B, C noktaları bir doğru üzerindedir.

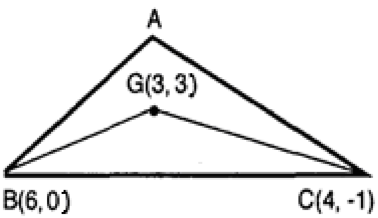
Örnek: Köşeleri $A(2,4), B(-1,3), C(5,0)$ olan ABC üçgeninin alanı kaç birim karedir?

Çözüm: Burada $x_1 = 2, y_1 = 4, x_2 = -1, y_2 = 3, x_3 = 5, y_3 = 0$ olduğundan,

$$\begin{aligned} A(ABC) &= \frac{1}{2}|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)| \\ &= \frac{1}{2}|2 \cdot (3 - 0) + (-1)(0 - 4) + 5 \cdot (4 - 3)| \\ &= \frac{15}{2}\ br^2 \end{aligned}$$

elde edilir.

Örnek:



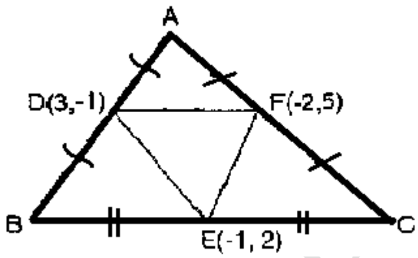
Şekildeki ABC üçgeninde $B(6,0), C(4,-1)$ noktaları veriliyor. Üçgenin ağırlık merkezi $G(3,3)$ ise, alanı kaç birim karedir?

Çözüm: BCG üçgeninin alanı, ABC üçgenin alanının $\frac{1}{3}$ ü kadardır. Buna göre,

$$
\begin{aligned}
A(ABC) &= 3 \cdot A(BCG) \\
&= 3 \cdot \frac{1}{2}\left|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\right| \\
&= 3 \cdot \frac{1}{2}\left|3 \cdot \big(0 - (-1)\big) + 6((-1) - 3) + 4 \cdot (3 - 0)\right| \\
&= \frac{27}{2}\ \text{br}^2
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Örnek:



Şekilde kenar orta noktaları $D(3,-1), E(-1,2), F(-2,5)$ olan ABC üçgeninin alanı kaç birim karedir?

Çözüm: "Bir üçgenin kenarların orta noktalarını ikişer ikişer birleştiren doğru parçaları üçgenin alanını 4 eş parçaya ayırır" aksiyomunu hatırlarsak,

$$
\begin{aligned}
A(ABC) &= 4 \cdot A(DEF) \\
&= 4 \cdot \frac{1}{2}\left|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\right| \\
&= 4 \cdot \frac{1}{2}\left|3 \cdot (2 - 5) + (-1)(5 - (-1)) + (-2) \cdot ((-1) - 2)\right| \\
&= 18\ \text{br}^2
\end{aligned}
$$

elde edilir.

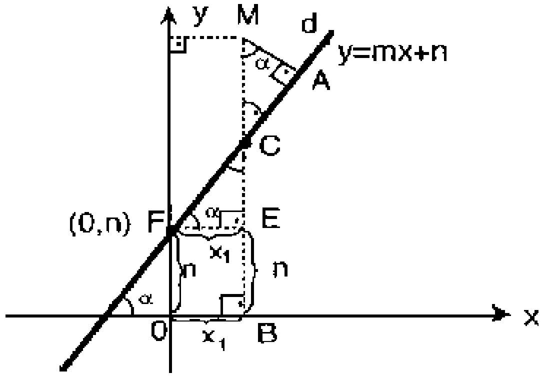
BİR NOKTANIN BİR DOĞRUYA OLAN EN KISA UZAKLIĞI

1.8. Teorem: $P(x_1, y_1)$ noktasının $ax + by + c = 0$ doğrusuna olan en kısa uzaklığı

$$\ell = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

dir.

İspat:



$M(x_1, y_1)$ noktasının, denklemi $y = mx + n$ olan doğrusuna olan uzaklığı, M'den d doğrusuna inilen MA dikme uzunluğudur.

$$|BE| = |OF| = n \text{ ve } |FE| = |OB| = x_1$$

dir. CFE dik üçgeninde

$$\tan\alpha = \frac{|CE|}{|EF|}$$

$$|CE| = |EF| \cdot \tan\alpha$$

$$|CE| = x_1 \cdot \tan\alpha$$

olur. $\tan\alpha$ doğrunun eğimi olup m'dir. Öyleyse $|CE| = m \cdot x_1$ elde edilir. Yine

$$|MC| = |MB| - (|BE| + |EC|) = y_1 - (n + x_1)$$

olur. MAC dik üçgeninden de

$$|\cos\alpha| = \frac{|MA|}{|MC|}$$

$$|MA| = |MC| \cdot |\cos\alpha|$$

yazılır. $|MC|$ nin bulunan değeri yerine konursa,

$$|MA| = |y_1 - mx_1 - n| \cdot |\cos\alpha| \qquad (1)$$

bulunur. Trigonometride,

$$|\cos\alpha| = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} \qquad (2)$$

olduğundan ve $|MA| = \ell$ alınırsa (2) eşitliği (1) eşitliğinde yazılırsa,

$$\ell = |y_1 - mx_1 - n| \cdot \frac{1}{\sqrt{1+m^2}}$$

$$= \frac{|y_1 - mx_1 - n|}{\sqrt{1+m^2}} \qquad (3)$$

bulunur. $ax + by + c = 0$ doğrusu $y = \frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ olduğundan $m = -\frac{a}{b}$, $n = -\frac{c}{b}$ dir. Bu değeri (3) de yazarsak,

$$\ell = \frac{\left|y_1-\left(-\frac{a}{b}\right)x_1-\left(-\frac{c}{b}\right)\right|}{\sqrt{1+\left(-\frac{a}{b}\right)^2}}$$

$$= \frac{\left|\frac{by_1+ax_1+c}{b}\right|}{\sqrt{1+\frac{a^2}{b^2}}}$$

$$= \frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

bulunur.

Örnek: $A(5,2)$ noktasının $4x-3y+6=0$ doğrusuna olan uzaklığı kaç birimdir?

Çözüm: $\ell = \frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|4\cdot5+(-3)\cdot2+6|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}} = 4$

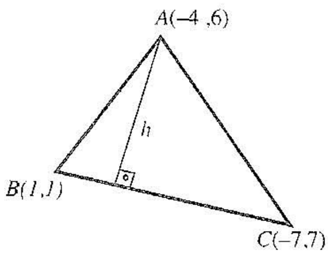
Örnek: $A(2,-1)$ noktasının $3x+4y+c=0$ doğrusuna uzaklığının 4 br olması için c'nin alabileceği değerler nedir?

Çözüm: $\ell = \frac{|2\cdot3+(-1)\cdot4+c|}{\sqrt{3^2+4^2}} = 4$

$|2+c| = 20$
$2+c=20 \ \land \ -(2+c)=20$
$c=18 \ \land \ c=-22$

Örnek: Köşeleri $A(-4,6), B(1,1,), C(-7,7)$ olan üçgenin alanını bulunuz.

Çözüm: BC doğrusunun denklemi;



$$\frac{y-7}{7-1}=\frac{x+7}{-7-1} \text{ ise } 3x+4y-7=0$$

şeklindedir. Üçgenin yüksekliği ise;

$$h=\frac{|3(-4)+4\cdot 6-7|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{5}{5}=1 \text{ br}$$

ayrıca;

$$|BC|=\sqrt{(1-(-7))^2+(1-7)^2}=10 \text{ br}$$

olduğundan

$$A(ABC)=\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 1=5 \text{ br}^2$$

olur.

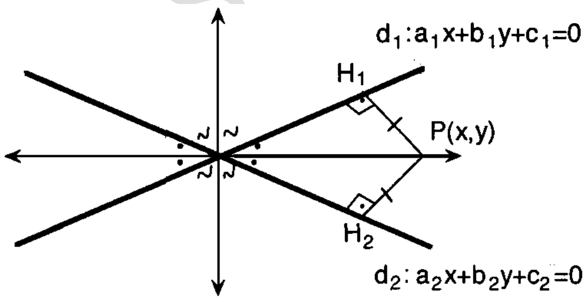
AÇIORTAY DENKLEMLERİ

1.9. Teorem: $d_1: a_1x+b_1y+c_1=0$ ve $d_2: a_2x+b_2y+c_2=0$ doğruları arasından geçen açıortay denklemleri

$$\frac{a_1x+b_1y+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}=\pm\frac{a_2x+b_2y+c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$$

dir.

İspat:



Bir açının açıortayı üzerindeki her nokta, açının kollarından eşit uzaklıkta olacağından

$$|PH_1|=|PH_2|$$

dir. Buna göre açıortay denklemleri,

$$\frac{|a_1x+b_1y+c_1|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}=\frac{|a_2x+b_2y+c_2|}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$$

$$\frac{a_1x+b_1y+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}=\pm\frac{a_2x+b_2y+c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$$

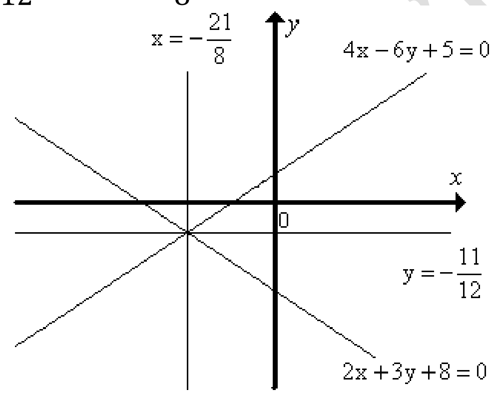
olarak bulunur.

Örnek: $d_1 : 2x + 3y + 8 = 0$ ve $d_2 : 4x - 6y + 5 = 0$ doğruları arasından geçen açıortay denklemlerini bulunuz.

Çözüm: $\frac{2x+3y+8}{\sqrt{2^2+3^2}} = \pm \frac{4x-6y+5}{\sqrt{4^2+(-6)^2}}$

$$\frac{2x+3y+8}{\sqrt{13}} = \pm \frac{4x-6y+5}{2\sqrt{13}}$$

$$2x + 3y + 8 = \pm(2x - 3y + 5)$$
$$2x + 3y + 8 = 2x - 3y + 5 \text{ ve } 2x + 3y + 8 = -2x + 3y - 5$$
$$y = -\frac{11}{12} \text{ ve } x = -\frac{21}{8}$$



PARALEL İKİ DOĞRU ARASINDAKİ UZAKLIK

1.10. Teorem: $d_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ve $d_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$ iki paralel doğruları arasındaki uzaklık,

$$h = \frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

dir.

İspat: 1.8. teorem gereği d_2 doğrusu üzerinde alınan bir (x_2, y_2) noktasının d_1 doğrusuna en kısa uzaklığı;

$$h = \frac{|a_1x+b_1y+c_1|}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad (1)$$

dir. Ayrıca (x_2, y_2) noktası, d_2 doğrusunun denklemini sağlar. Yani $a_2x + b_2y = -c_2$ dir. Bulduğumuz değeri (1) de yerine yazarsak,

$$h = \frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

elde edilir.

Örnek: $d_1 : 12x - 4y + 13 = 0$ ve $d_2 : 2mx + 8y + 9 = 0$ paralel doğruları arasındaki uzaklık kaç birimdir?

Çözüm: Doğrusal fonksiyonlar konusunda, $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ve $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ iki doğrusunun paralel olması için $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} \neq \frac{c}{f}$ olmalıdır. Buna göre,

$$\frac{12}{m} = \frac{-4}{2} \text{ ise } m = -3$$

dir. $m = -3$ ikinci fonksiyonda yerine yazılırsa, $-6x + 8y + 9 = 0$ denklemi elde edilir. Öyleyse paralel iki doğru arasındaki uzaklık,

$$h = \frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|13 - 9|}{\sqrt{12^2 + (-4)^2}} = \frac{4}{\sqrt{160}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

olur.

Örnek: Denklemleri $6x + 8y + 15 = 0$ ve $a \cdot x + 4y + b = 0$ paralel doğruları arasındaki uzaklık 2 birim ise b'nin alabileceği değerler nelerdir?

Çözüm: Bu iki doğru birbirine paralel ise,

$$\frac{6}{a} = \frac{8}{4} \text{ ise } a = 3$$

dür. Buna göre,

$$h = \frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$2 = \frac{|b - 15|}{\sqrt{3^2 + 4^2}}$$

$$10 = |b - 15|$$

$$b - 15 = 10 \ \wedge \ -(b - 15) = 10$$

$$b = 25 \ \wedge \ b = 5$$

olarak bulunur.

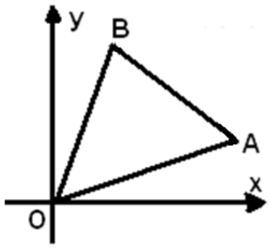
İKİ DOĞRU ARASINDAKİ AÇI

1.11. Teorem: $d_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ve $d_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$ iki doğru arasındaki açı,

$$\cos\alpha = \frac{a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2}{\sqrt{a_1^2+b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2+b_2^2}}$$

dir.

İspat:



A noktasının koordinarları $A\left(\frac{c_1}{a_1}, \frac{c_1}{b_1}\right)$, B noktasının koordinatları $A\left(\frac{c_2}{a_2}, \frac{c_2}{b_2}\right)$ dir.

$$|A|^2 = \frac{c_1^2}{a_1^2} + \frac{c_1^2}{b_1^2}, \ |B|^2 = \frac{c_2^2}{a_2^2} + \frac{c_2^2}{b_2^2}$$

$$|AB|^2 = \left(\frac{c_1}{a_1} - \frac{c_2}{a_2}\right)^2 + \left(\frac{c_1}{b_1} - \frac{c_2}{b_2}\right)^2$$

olur. OAB üçgeninde kosünüs teoremine göre,

$$|AB|^2 = |A|^2 + |B|^2 - 2 \cdot |A| \cdot |B| \cdot \cos\alpha$$

dir. Buna göre,

$$\left(\frac{c_1}{a_1} - \frac{c_2}{a_2}\right)^2 + \left(\frac{c_1}{b_1} - \frac{c_2}{b_2}\right)^2 = \frac{c_1^2}{a_1^2} + \frac{c_1^2}{b_1^2} + \frac{c_2^2}{a_2^2} + \frac{c_2^2}{b_2^2} - 2\sqrt{\frac{c_1^2}{a_1^2} + \frac{c_1^2}{b_1^2}} \cdot \sqrt{\frac{c_2^2}{a_2^2} + \frac{c_2^2}{b_2^2}} \cdot \cos\alpha$$

$$\frac{c_1^2}{a_1^2} - 2\frac{c_1c_2}{a_1a_2} + \frac{c_2^2}{a_2^2} + \frac{c_1^2}{b_1^2} - 2\frac{c_1c_2}{b_1b_2} + \frac{c_2^2}{b_2^2}$$

$$= \frac{c_1^2}{a_1^2} + \frac{c_1^2}{b_1^2} + \frac{c_2^2}{a_2^2} + \frac{c_2^2}{b_2^2} - 2\sqrt{\frac{c_1^2}{a_1^2} + \frac{c_1^2}{b_1^2}} \cdot \sqrt{\frac{c_2^2}{a_2^2} + \frac{c_2^2}{b_2^2}} \cdot \cos\alpha$$

$$-2\frac{c_1c_2}{a_1a_2} - 2\frac{c_1c_2}{b_1b_2} = -2\sqrt{\frac{c_1^2}{a_1^2} + \frac{c_1^2}{b_1^2}} \cdot \sqrt{\frac{c_2^2}{a_2^2} + \frac{c_2^2}{b_2^2}} \cdot \cos\alpha$$

$$\frac{c_1c_2}{a_1a_2} + \frac{c_1c_2}{b_1b_2} = c_1c_2\sqrt{\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{b_1^2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{a_2^2} + \frac{1}{b_2^2}} \cdot \cos\alpha$$

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{b_1b_2}=\sqrt{\frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{b_1^2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{a_2^2}+\frac{1}{b_2^2}}\cdot\cos\alpha$$

$$\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_1a_2b_1b_2}=\sqrt{\frac{a_1^2+b_1^2}{a_1^2\cdot b_1^2}}\cdot\sqrt{\frac{a_2^2+b_2^2}{a_2^2\cdot b_2^2}}\cdot\cos\alpha$$

$$a_1a_2+b_1b_2=\sqrt{a_1^2+b_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2+b_2^2}\cdot\cos\alpha$$

$$\cos\alpha=\frac{a_1\cdot a_2+b_1\cdot b_2}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$$

elde edilir.

Örnek: $d_1 : 3x+2y+6=0$ ve $d_2 : x-y+5=0$ doğruları arasındaki açı nedir?

Çözüm:

$$\cos\alpha=\frac{a_1\cdot a_2+b_1\cdot b_2}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2+b_2^2}}=\frac{3\cdot 1+2\cdot(-1)}{\sqrt{3^2+1^2}\cdot\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{30}}$$

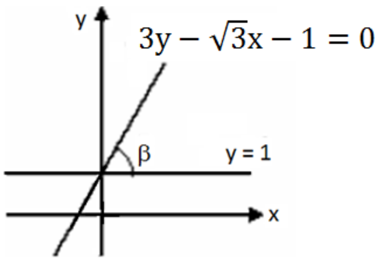
$$\alpha=\arccos\frac{1}{\sqrt{30}}=79{,}48^0$$

ÇÖZÜMLÜ ALIŞTIRMALAR

1. $3y-\sqrt{3}x-1=0$ ile $y=1$ doğruları kaç derecelik açı altında kesişirler.

A) 0 B) 30 C) 45 D) 60 E) 90

Çözüm:



Doğruların eğimleri $m_1=\frac{\sqrt{3}}{3}$ ve $m_2=0$ olduğundan,

$$\tan\beta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} - 0}{1 + \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 0} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

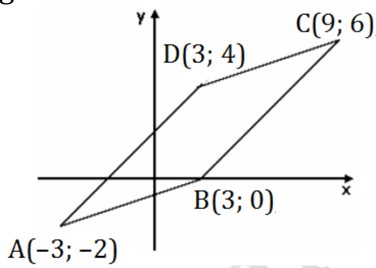
bulunur. Buna göre $\beta = 30^0$ dir.

Cevap: B

2. Köşelerinin koordinatları A(–3; –2), B(3; 0), C(9; 6), D(3; 4) alan dörtgen aşağıdakilerden hangisidir?

A) Kare B) Dikdörtgen C) Paralelkener D) Yamuk E) Deltoid

Çözüm: Verilen değerleri koordinat ekseninde yerine yazalım.



Elde edilen şekle göre, A(–3; –2), B(3; 0), C(9; 6), D(3; 4)

$$|AB| = \sqrt{(3-(-3))^2 + (-2-0)^2} = 2\sqrt{10}$$
$$|DC| = \sqrt{(9-3)^2 + (6-4)^2} = 2\sqrt{10}$$
$$|AD| = \sqrt{(-3-3)^2 + (-2-4)^2} = 6\sqrt{2}$$
$$|BC| = \sqrt{(3-9)^2 + (0-6)^2} = 6\sqrt{2}$$

olarak bulunur ki, bu bize paralel kenar olduğunu gösterir.

Cevap: C

3. $3x + 4y - 20 = 0$ doğrusuna A(2; 6) noktasının en kısa uzaklığı ne kadardır?

A) 2 B) 1 C) 0 D) –1 E) –2

Çözüm: $3x + 4y - 20 = 0$ doğrusuna A(2; 6) noktasına göre,

$$\ell = \frac{|3 \cdot 2 + 4 \cdot 6 - 20|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{10}{5} = 2$$

bulunur.

Cevap: A

4. $x^2 - y^2 = 0$ denklemi doğru demeti ise aşağıdakilerden hangisinin denklemidir?

A) $x = 0$ da doğru B) $y = 0$ da doğru C) Çakışık iki doğru
D) Palel iki doğru E) Kesişen iki doğru

Çözüm: $(x - y)(x + y) = 0$

$$x - y = 0 \ \wedge \ x + y = 0$$

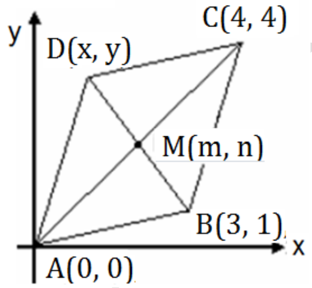
olduğundan başlangıç noktasında kesişen iki doğru denklemi olur.

Cevap: E

5. Bir paralel kenarın A(0, 0), B(3, 1), C(4, 4) ve D(x, y) köşeleri veriliyor. $x + y$ nin değeri kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 5 E) 6

Çözüm: Paralel kenarın köşegenlerinin kesim noktası M(m, n) olsun.



M(m, n) köşegenlerin orta noktası olacağından, |AC| köşegeninden

$$m = \frac{4+0}{2} = 2 \text{ ve } n = \frac{4+0}{2} = 2$$

M(2, 2) elde edilir. |BD| köşegeninden

$$2 = \frac{x+3}{2} \text{ ve } 2 = \frac{y+1}{2}$$

$$x = 1 \text{ ve } y = 3$$

$$x + y = 1 + 3 = 4$$

dir.

Cevap: D

6. A(6; 2) noktasının $4x + 3y = m$ doğrusuna en kısa uzaklığının 1'e eşit olması için m'nin en byük değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 15 B) 20 C) 25 D) 30 E) 35

Çözüm: A(6; 2) noktasının $4x + 3y = k$ doğrusuna uzaklığı,

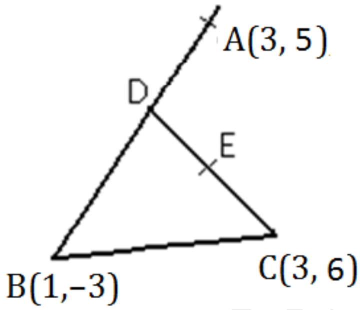
$$\ell = \frac{|4\cdot 6+3\cdot 2-k|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{|30-k|}{5} = 1$$

$|30 - k| = 5$
$30 - k = 5$ ve$30 - k = -5$
$k = 25$ ve $k = 35$

dir.

Cevap: E

7.



Şekle göre, A(3, 5), B(1,–3), C(3, 4), |AD| = |BD| ve |DE| = |EC| olursa, E noktasının koordinatı toplamı ne olur?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

Çözüm: D(a,b) seçilirse,

$$a = \frac{3+1}{2} = 2 \text{ ve } b = \frac{5+(-3)}{2} = 1$$

D(2, 1) olur. E(c, d) seçilirse,

$$c = \frac{3+2}{2} = \frac{5}{2} \text{ ve } c = \frac{6+1}{2} = \frac{7}{2}$$

$D\left(\frac{5}{2},\frac{7}{2}\right)$ olur. $\frac{5}{2} + \frac{7}{2} = 6$ dır.

Cevap: B

8. A(2, 5) noktasının x–eksenine göre simetriği B, y–eksenine göre simetriği C olduğuna göre, |BC| kaç birimdir?

A) $\sqrt{28}$ B) $\sqrt{29}$ C) $2\sqrt{29}$ D) $2\sqrt{31}$ E) $2\sqrt{33}$

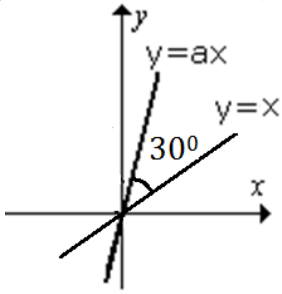
Çözüm: A(2, 5) noktasının x–eksenine göre simetriği B(2, –5), y–eksenine göre simetriği C(–2, 5) olur.

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$= \sqrt{(-5-5)^2 + (2-(-2))^2}$
$= 2\sqrt{29}$

Cevap: C

9. $y = ax$ ve $y = x$ doğruları arasındaki açı 30^0 dir.



a'nın değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\sqrt{3} - 2$ B) $\sqrt{3} + 2$ C) $\sqrt{3} - 1$ D) $\sqrt{3} + 1$ E) $\sqrt{3}$

Çözüm: $y = x$ doğrusunun eğimi $m_1 = 1$
$y = ax$ doğrusunun eğimi $m_2 = a$
dir. İki doğru arasındaki açı,

$$\tan 60 = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$
$$\sqrt{3} = \frac{1-a}{1+1 \cdot a}$$
$$\sqrt{3} + \sqrt{3}a = 1 - a$$
$$\sqrt{3} - 1 = -a(\sqrt{3} + 1)$$
$$a = \frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} = \frac{(1-\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} = \sqrt{3} - 2$$

dır.

Cevap: A

10. Denklemi $4x - 3y + 10 = 0$ ve $4x - 3y + 5 = 0$ olan doğrular arasındaki uzaklık kaç birimdir?

A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) 0

Çözüm: Bu iki doğru eğimleri eşit olduğundan (x ve y katsayıları aynı) birbirlerine paraleldir. İki doğru arasındaki uzaklıktan,

$$h = \frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|10-5|}{\sqrt{4^2+3^2}} = \frac{5}{5} = 1 \text{ br}$$

olur.

Cevap: D

11. Köşegennlerinin koordinatları $A(3,2), B(-2,3)$ ve $C(a,0)$ olan bir ABC üçgeninin alanı $\frac{9}{2}$ ise a kaç olabilir?

A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) 0

Çözüm: $A(3,2), B(-2,3)$ ve $C(a,0)$

$A(ABC) = \frac{1}{2}|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)|$

$\frac{9}{2} = \frac{1}{2}\left|3(3-0) + (-2)(0-2) + a(2-3)\right|$

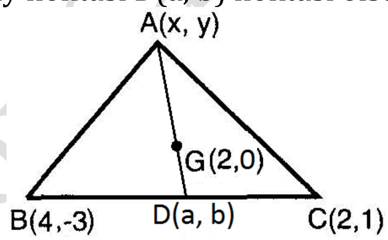
$a = 4$

Cevap: A

12. Bir ABC üçgeninin ağırlık merkezi G'dir. $A(x,y), B(-3,4), C(2,0)$ ve $G(0,2)$ olduğuna göre $x + y$ nin değeri nedir?

A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) 0

Çözüm: Kenarortay noktası $D(a,b)$ noktası olsun.



$a = \frac{4+2}{2} = 3$ ve $b = \frac{-3+1}{2} = -1$

$D(3,-1)$ olur. $|AD|$ kenarortay doğrusunda $|AG| = 2|GD|$ ise $\lambda = 2$ olduğuna göre;

$x_0 = \frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, y_0 = \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$

$2 = \frac{x+2\cdot 3}{1+2}, 0 = \frac{y+2\cdot(-1)}{1+2}$

$x = 0$ ve $y = 2$

$A(0,2)$ olur. $x + y = 0 + 2 = 2$ dir.

Cevap: C

13. $m \in \mathbb{R}$ olmak üzere $A(3m+1, 2m+7)$ noktasının oluşturduğu doğrunun denkleminde $A(a, -1)$ noktasına göre a'nın değeri nedir?

A) -13 B) -11 C) -8 D) -5 E) 0

Çözüm: $m \in \mathbb{R}$ olmak üzere $A(3m+1, 2m+7)$ noktasından

$x = 3m + 1, y = 2m + 7$

$x - 1 = 3m, y - 7 = 2m$

$m = \frac{x-1}{3}, m = \frac{y-7}{2}$

$\frac{x-1}{3} = \frac{y-7}{2}$

$2x - 3y + 19 = 0$

$2 \cdot a - 3 \cdot (-1) + 19 = 0$

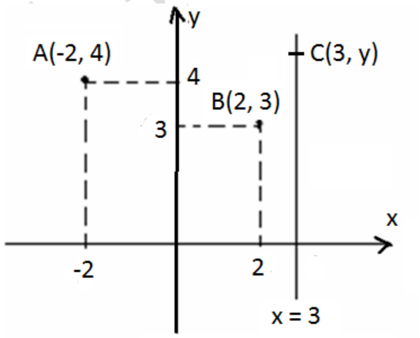
$a = -11$

Cevap: B

17. $x = 3$ doğrusu üzerinde bulunan ve $A(-2,4)$, $B(2, 3)$ noktalarına eşit uzaklıkta olan noktanın ordinatı kaçtır?

A) $\frac{23}{2}$ B) $\frac{25}{2}$ C) $\frac{27}{2}$ D) $\frac{29}{2}$ E) $\frac{31}{2}$

Çözüm: $x = 3$ doğrusu üzerindeki noktaların genel ifadesi $(3, y)$ biçimindedir. $C(3, y)$ olsun.



$A(-2, 4)$, $B(2, 3)$, $C(3, y)$ için iki nokta arasındaki uzaklıklar eşit olacağından,

$|AC| = |BC|$

$\sqrt{(3-(-2))^2 + (y-4)^2} = \sqrt{(3-2)^2 + (y-3)^2}$

$25 + y^2 - 8y + 16 = 1 + y^2 - 6y + 9$

$31 = 2y$

$y = \frac{31}{2}$

olur.

Cevap: E

15. $y^2 - 4xy + 4x^2 + 3y - 6x = 0$ olan denklem iki doğru denkleminin çarpımı şeklindedir. Bu doğru denklemlerinden biri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $y = x$ B) $y = 3x$ C) $y = x + 1$ D) $y = 2x$ E) $y = -x$

Çözüm: $y^2 - 4xy + 4x^2 + 3y - 6x = 0$

$(y - 2x)(y - 2x - 3) = 0$

$y = 2x \wedge y = 2x + 3$

biçiminde iki doğrudur.

Cevap: D

KAYNAKÇA

1. H. Hilmi HACISALİHOĞLU, 2ve 3 Boyutlu Uzayda Analitik Geometri, 7. Bakı, 2005, ANKARA.
2. H. Hilmi HACISALİHOĞLU, Lise Matematik 1, 2, 3, Serhat Yayınları A.Ş. İstanbul, 2001.
3. M. Zeki DERMAN, Ökkeş ÖZKÖSELER, Bayram ÇETİNER, Analitik Geometri, Zafer Yayınları, Ankara, 2005.
4. Ali Rıza İLDENİZ, İsmet PARILDAR, Kemal ALAGÖZ, Tacim GÖLPINAR, Sayısal 1-2, Modern Matematik, Yıldırım Yayınları, 1986, ANKARA.
5. Hüseyin UÇAR, Ali ÖRNEK, Analitik Geometri, İlköğretim Matematik Alan Bilgisi, ABY yayınları, 2014, ANKARA.
6. Emrullah KAPLAN, Analitik Geometri, Etkin Yayıncılık, 2001, ANKARA.
7. Nevzat ASMA, Halit BIYIK, 12. Sınıf Analitik Geometri Konu Özetli oru Bankası, Esen Yayınları, 2008, ANKARA.
8. Mehmet GÜRKAN, Abdullah DEMİRALP, Tahsin PELİT, Analitik Geometri, Lise Ders Kitabı, Başarı Yayınları, Ankara, 2011.
9. Prof. Dr. Yusuf AVCI, Prof. Dr. Ahmet DERNEK, Öğr. Müyesser SAKA, Lise Analitik Geometri Ders Kitabı, Deniz Yayınevi, İstanbul, 2001.
10. Prof. Dr. Mustafa BALCI, Genel Matematik, Palme Yayıncılık, İstanbul, 2021.