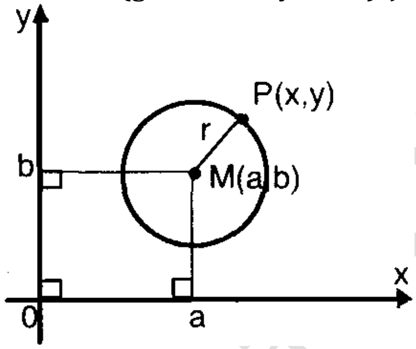
2. BÖLÜM
ÇEMBERİN ANALİTİĞİ

ÇEMBER ve ÇEMBER DENKLEMİ

2.1.Tanım: Analitik düzlemde alınan bir M(a, b) noktasından r birim uzaklıktaki noktaların kümesine (geometrik yerine) çember denir.



2.1. Teorem: Merkezi M(a, b) ve yarıçapı r olan çemberin denklemi;

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

şeklindedir.

İspat: Merkezi M(a, b) ve yarıçapı r olan çember üzerinde herhangi bir nokta P(x, y) alalım. $|PM| = r$ alınırsa iki nokta arsındaki uzaklık teoremi gereği,

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r$$

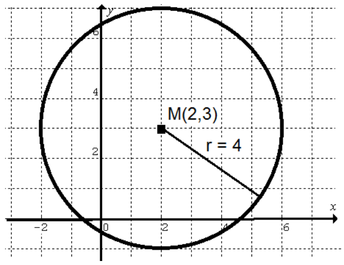
$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

bulunur.

Örnek: Merkezi M(2, 3) ve yarıçapı $r = 4$ olan çemberin denklemini bulunuz.

Çözüm: $a = 2, b = 3$ ve $r = 4$ olacağından,

$$(x-2)^2+(y-3)^2=4^2$$
$$(x-2)^2+(y-3)^2=16$$



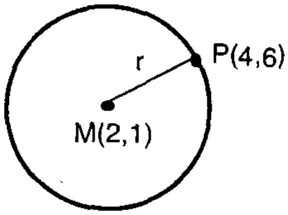
bulunur.

Örnek: $(x+10)^2+(y-2)^2=36$ çemberinin merkezini ve yarıçapını bulunuz.

Çözüm: Merkezi M(10, 2) ve yarıçapı $r=6$ dir.

Örnek: Merkezi M(2, 1) olan ve P(4, 6) noktasından geçen çemberin denklemini bulunuz.

Çözüm: Merkezi M(2, 1) olan P(4, 6) noktasından geçtiğine göre $|PM|=r$ uzunluğu yarıçap değeridir.



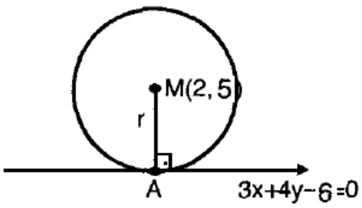
$$r=|PM|=\sqrt{(4-2)^2+(6-1)^2}=\sqrt{29}$$

dir. Merkezi M(2, 1) ve yarıçapı $r=\sqrt{29}$ olan çemberin denklemi;

$$(x-2)^2+(y+1)^2=29$$

olur.

Örnek:



Merkezi M(2, 5) olan çember, denklemi $3x+4y-6=0$ olan doğruya teğettir. Bu çemberin denklemini yazınız.

Çözüm: Bir noktanın bir doğruya uzaklığından,

$$r = \frac{|2 \cdot 3 + 5 \cdot 4 - 6|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 4$$

bulunur. Merkezi M(2, 5) ve yarıçapı $r = 4$ olan çemberin denklemi;

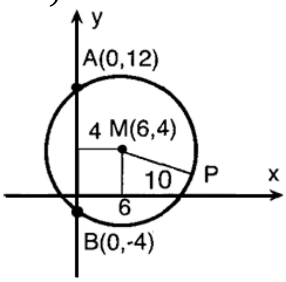
$$(x - 2)^2 + (y - 5)^2 = 16$$

olur.

Örnek: Merkezi M(6, 4) ve yarıçapı $r = 10$ olan çemberin y eksenini kestiği noktaların koordinatlarını bulunuz.

Çözüm: Verilen çemberin denklemi,

$$(x - 6)^2 + (y - 4)^2 = 100$$



biçimindedir. Bu denklemde y eksenini kestiği noktalar, $x = 0$ ile bulunur.

$$(0 - 6)^2 + (y - 4)^2 = 100$$
$$(y - 4)^2 = 64$$
$$y - 4 = 8 \text{ ve } y - 4 = -8$$
$$y = 12 \text{ ve } y = -4$$

Örnek: A(0, 1), B(0, 6) ve C(3, 0) noktalarından geçen çember denklemini bulunuz.

Çözüm: Çemberin denklemi;

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

olduğundan,

A(0, 1) için $(0 - a)^2 + (1 - b)^2 = r^2$ ise $a^2 + (1 - b)^2 = r^2$

B(0, 6) için $(0 - a)^2 + (6 - b)^2 = r^2$ ise $a^2 + (6 - b)^2 = r^2$

C(3, 0) için $(3 - a)^2 + (0 - b)^2 = r^2$ ise $(3 - a)^2 + b^2 = r^2$

bulunur. İlk iki eşitlikten,

$$a^2 + (1 - b)^2 = a^2 + (6 - b)^2$$
$$(1 - b)^2 = (6 - b)^2$$
$$1 - b = 6 - b \text{ ve } 1 - b = -6 + b$$
$$b = \frac{7}{2}$$

birinci ve üçüncü denklemden,

$$a^2 + (1-b)^2 = (3-a)^2 + b^2$$

$$a^2 + \left(1-\frac{7}{2}\right)^2 = (3-a)^2 + \left(\frac{7}{2}\right)^2$$

$$a^2 + \frac{25}{4} = a^2 - 6a + 9 + \frac{49}{4}$$

$$\frac{25}{4} = -6a + 9 + \frac{49}{4}$$

$$a = \frac{5}{2}$$

Birinci denklemden,

$$\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(1-\frac{7}{2}\right)^2 = r^2$$

$$\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(1-\frac{7}{2}\right)^2 = r^2$$

$$r^2 = \frac{25}{2}$$

bulunur. Buradan,

$$\left(x-\frac{5}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{25}{2}$$

elde edilir.

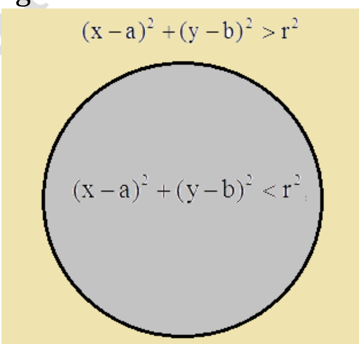
2.2.Tanım: $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ çemberinde

i) $\{(x,y): (x-a)^2 + (y-b)^2 < r^2, x,y \in \mathbb{R}\}$

kümesine çemberin iç bölgesi

ii) $\{(x,y): (x-a)^2 + (y-b)^2 > r^2, x,y \in \mathbb{R}\}$

kümesine çemberin dış bölgesi denir.



ÇEMBERİN GENEL DENKLEMİ

Merkezi M(a, b) ve yarıçapı r olan çemberin denklemi,

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

idi. Bu denklem şu şekilde düzenlenirse,

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 - r^2 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$$

yazılabilir. Burada;

$$D = -2a, E = -2b \text{ ve } F = a^2 + b^2 - r^2$$

alınırsa çember denklemi,

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

elde edilir.

2.3. Tanım: Merkezi M(a, b) ve yarıçapı r olan çember denkleminde,

$$D = -2a, E = -2b \text{ ve } F = a^2 + b^2 - r^2$$

alınırsa çember denklemi,

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

biçiminde yazılmasına çemberin genel denklemi denir.

Bu çemberin merkezi;

$$M(a, b) = M\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$$

olur ve yarıçapı

$$r^2 = a^2 + b^2 - F$$

$$r^2 = \left(-\frac{D}{2}\right)^2 + \left(-\frac{E}{2}\right)^2 - F$$

$$r = \frac{\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}}{2}$$

bulunur. Burada $\Delta = D^2 + E^2 - 4F$ ifadesine çember denkleminin diskitiminantı denir.

Örnek: $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 36$ çemberinin denklemini genel çember denklemine çeviriniz.

Çözüm: $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 36$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 = 36$$

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y - 23 = 0$$

Örnek: Genel denklemi $x^2 + y^2 + 8x - 16y + 55 = 0$ olan çemberin denklemini bulunuz.

Çözüm: $a = -\frac{D}{2} = -\frac{8}{2} = -4$

$$b = -\frac{E}{2} = -\frac{-16}{2} = 8$$

$$r = \frac{\sqrt{D^2+E^2-4F}}{2} = \frac{\sqrt{8^2+(-16)^2-4\cdot 55}}{2} = 5$$

olduğundan merkezi M(−4, 8) ve yarıçapı r = 5 olan bir çemberdir.

2.2. Teorem:

$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ denkleminde, $\Delta = D^2 + E^2 - 4F$ olmak üzere,

i) $\Delta > 0$ ise merkezi $M\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$ ve yarıçapı $r = \frac{\sqrt{D^2+E^2-4F}}{2}$ olan bir çemberdir.

ii) $\Delta = 0$ ise merkezi; $M\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$ olan bir noktadır.

iii) $\Delta > 0$ ise $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ denklemi bir çember belirtmez.

İspat: i tanımda verilmiştir.

ii) $\Delta = 0$ ise $r = \frac{\sqrt{D^2+E^2-4F}}{2} = \frac{0}{2} = 0$ olacağından çember merkezi; $M\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$ olan bir noktadır.

iii) $\Delta < 0$ ise reel kök olmayacağından $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ denklemi bir çember belirtmez.

Örnek: $mx^2 + my^2 + (m-2)xy + 4mx - 12y + 24 = 0$ denklemi bir çember belirttiğine göre bu çemberin merkezinin koordinatlarını ve yarıçapını bulunuz.

Çözüm: Genel çember denklemi olması için $C = 0$ olacağından $m - 2 = 0$ yani $m = 2$ olmalıdır. Buna göre genel denklem,

$$2x^2 + 2y^2 + 8x - 12y + 24 = 0$$

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y + 12 = 0$$

$$a = -\frac{D}{2} = -\frac{4}{2} = -2$$

$$b = -\frac{E}{2} = -\frac{6}{2} = -3$$

$$r=\frac{\sqrt{D^2+E^2-4F}}{2}=\frac{\sqrt{4^2+(-6)^2-4\cdot 12}}{2}=1$$

olduğundan merkezi M(−4, 8) ve yarıçapı $r=1$ olan bir çemberdir.

Örnek: $k\in\mathbb{Z}$ olmak üzere, $x^2+y^2+4x+2y+k-1=0$ çemberin genel denklemi olduğuna göre k'nin alabileceği en büyük tamsayı nedir?

Çözüm: Genel çember denklemi olması için $\Delta>0$ olmalıdır.

$$D^2+E^2-4F>0$$
$$4^2+2^2-4(k-1)>0$$
$$6>k$$
$$k=5$$

Örnek: $x^2+y^2+8x+ky+20=0$ denkleminin bir nokta belirtmesi için k ne olmalıdır?

Çözüm: Denklemin bir nokta olması için $\Delta=0$ olmalıdır.

$$D^2+E^2-4F=0$$
$$8^2+k^2-4\cdot 12=0$$
$$k=4$$

Örnek: A(0, 3) ve B(4, 0) noktalarından geçen ve merkezi $x+y=0$ doğrusu üzerinde bulunan çemberin genel denklemini bulunuz.

Çözüm: Çemberin genel denklemi $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ olduğundan,

A(0, 3) için $0^2+3^2+D\cdot 0+E\cdot 3+F=0$ ise $3E+F=-9$ (1)

B(4, 0) için $4^2+0^2+D\cdot 4+E\cdot 0+F=0$ ise $4D+F=-16$ (2)

bulunur. Çemberin merkezi $M\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right)$ olduğundan bu nokta $x+y=0$ doğrusu üzerinde bulunduğundan, merkez koordinatları bu doğru denklemini sağlar. O halde,

$$-\frac{D}{2}-\frac{E}{2}=0$$
$$D+E=0 \qquad (3)$$

bulunur. Buna göre (1), (2) ve (3) denkleminden,

$$D=-1, E=1, F=-12$$
$$x^2+y^2-x+y-12=0$$

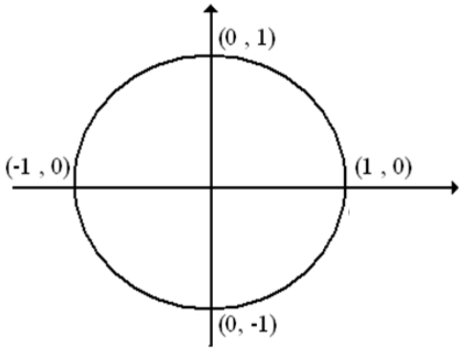
olur.

ÇEMBERDE ÖZEL DURUMLAR

1. Merkezil Çember Denklemi

2.4. Tanım: Merkezi M(0, 0) noktasında olan çemberlere merkezil çember denir. $a = 0, b = 0$ için çember denklemi $x^2 + y^2 = r^2$ dir.

Örnek: Trigonometride kullanıla birim çember bir merkezil çemberdir.



$x^2 + y^2 = 1$

Örnek: A(3, 4) noktasından geçen merkezil çember denklemini bulunuz.

Çözüm: A(3, 4) noktası $x^2 + y^2 = r^2$ denklemi üzerinde olduğundan,

$$3^2 + 4^2 = r^2$$
$$r = 5$$

olup çember denklemi $x^2 + y^2 = 25$ olur.

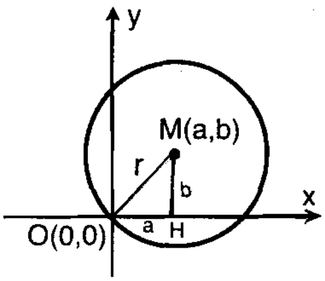
2. Başlangıç Noktasından Geçen Çember Denklemi

2.3. Teorem: Merkezi M(a, b) ve yarıçapı r olan çemberin başlangıç noktasından geçmesi için

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey = 0$$

biçiminde olmalıdır.

İspat:



Merkezi M(a, b) ve yarıçapı r olan çember denklemi $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ idi. Bu çember O(0, 0) noktasından geçtiğine göre nokta koordinatları çember denklemini sağlamaktadır. Buradan;

$$(0-a)^2+(0-b)^2=r^2$$
$$a^2+b^2=r^2$$

bulunur. Buna göre;

$$F=a^2+b^2-r^2=0$$

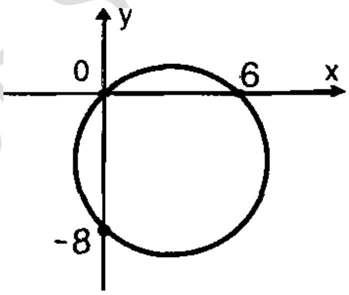
olur. Şu halde çemberin genel denklemi;

$$x^2+y^2+Dx+Ey=0$$

biçimindedir.

Örnek: O(0, 0), A(6, 0) ve B(0, –8) noktalarından geçen çemberin genel denklemi nedir?

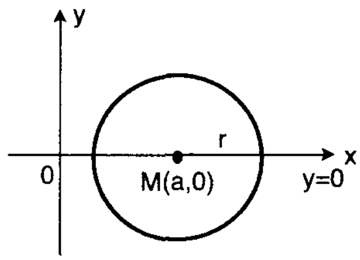
Çözüm: O(0, 0) noktasından geçtiğinden $x^2+y^2+Dx+Ey=0$ denklemi geçerlidir.



A(6, 0) için $6^2+0^2+D\cdot 6+E\cdot 0=0$ ise $D=-6$
B(0, –8) için $0^2+(-8)^2+D\cdot 0+E\cdot(-8)=0$ ise $E=8$
$x^2+y^2-6x+8y=0$

2. Merkezi x–Ekseni Üzerinde Olan Çember Denklemi

2.1. Sonuç: Merkezi x–ekseni üzerinde ve yarıçapı r olan çemberin denklemi;



$$x^2 + y^2 + Dx + F = 0$$

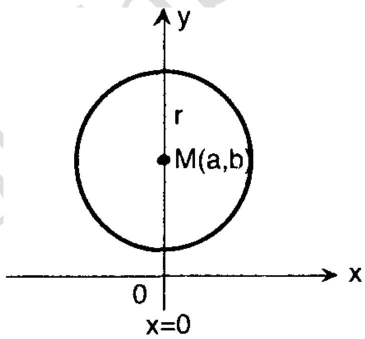
biçimindedir. (Burada $b = 0$ ve $F = a^2 - r^2$ dir.)

Örnek: Merkezinin koordinatları M(5, 0) ve yarıçapı 3 birim olan çemberin genel denklemini bulunuz.

Çözüm: $D = -2a = -2 \cdot 5 = -10$
$F = a^2 - r^2 = 5^2 - 3^2 = 16$
$x^2 + y^2 - 10x + 16 = 0$

4. Merkezi y–Ekseni Üzerinde Olan Çember Denklemi

2.2. Sonuç: Merkezi y–ekseni üzerinde ve yarıçapı r olan çemberin genel denklemi;

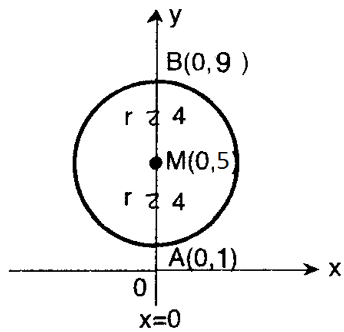


$$x^2 + y^2 + Ex + F = 0$$

biçimindedir. (Burada $a = 0$ ve $F = b^2 - r^2$ dir.)

Örnek: A(0, 1) ve B(0, 9) noktaları veriliyor. [AB] doğru parçasını çap kabul eden çemberin genel denklemini bulunuz.

Çözüm: $M\left(\frac{0+0}{2}, \frac{1+9}{2}\right) = M(0,5)$ ve $r = 1 + 4 = 9 - 4 = 5$ olduğundan,

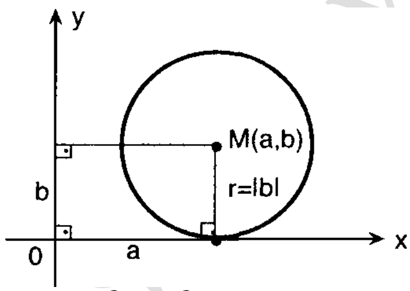


$E = -2b = -2 \cdot 5 = -10$ ve $F = b^2 - r^2 = 5^2 - 4^2 = 9$

$x^2 + y^2 - 10x + 9 = 0$

5. x–Eksenine Teğet Olan Çember Denklemi

2.3. Sonuç: x–eksenine teğet, merkezi M(a, b) ve yarıçapı r olan çemberin denklemi;



$$(x - a)^2 + (y \mp b)^2 = r^2$$

biçimindedir. (Burada $r = |b|$ dir.)

Örnek: Merkezinin koordinatları M(3, 4) ve x–eksenine teğet olan çemberin genel denklemini bulunuz.

Çözüm: $r = |b| = |4| = 4$

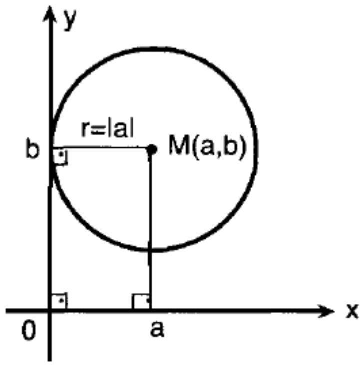
$(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 4^2$

$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 = 16$

$x^2 + y^2 - 6x - 8y + 9 = 0$

6. y–Eksenine Teğet Olan Çember Denklemi

2.4. Sonuç: y–eksenine teğet, merkezi M(a, b) ve yarıçapı r olan çemberin denklemi;



$$(x \mp a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

biçimindedir. (Burada $r = |a|$ dir.)

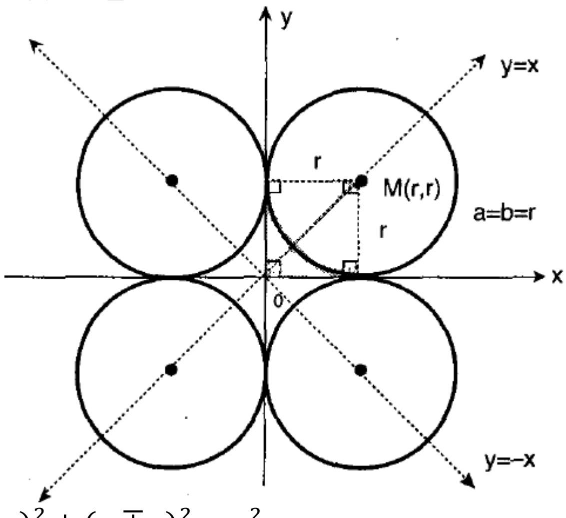
Örnek: Merkezinin koordinatları M(–5, 3) ve x–eksenine teğet olan çemberin genel denklemini bulunuz.

Çözüm: $r = |a| = |-5| = 5$

$$(x-5)^2 + (y-4)^2 = 5^2$$
$$x^2 - 10x + 25 + y^2 - 8y + 16 = 25$$
$$x^2 + y^2 - 10x - 8y + 16 = 0$$

7. x ve y–Eksenine Teğet Olan Çember Denklemi

2.5. Sonuç: Hem x hem y eksenine teğet, merkezi M(a, b) ve yarıçapı r olan çemberin denklemi;



$$(x \mp r)^2 + (y \mp r)^2 = r^2$$

biçimindedir. (Burada $r = |a| = |b|$ dir.)

Örnek: Merkezinin koordinatları M(–6, 6) ve x ve y eksenine teğet olan çemberin genel denklemini bulunuz.

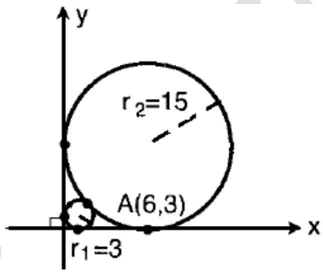
Çözüm: $r = |a| = |b| = |-6| = 6$

$$(x-6)^2 + (y-6)^2 = 6^2$$
$$x^2 - 12x + 36 + y^2 - 12y + 36 = 36$$
$$x^2 + y^2 - 12x - 12y + 36 = 0$$

Örnek: Her iki eksene teğet olan ve A(6, 3) noktasından geçen çemberin denklemini bulunuz.

Çözüm: Çember A(6, 3) noktasından geçtiği için bu nokta denklemi sağlar.

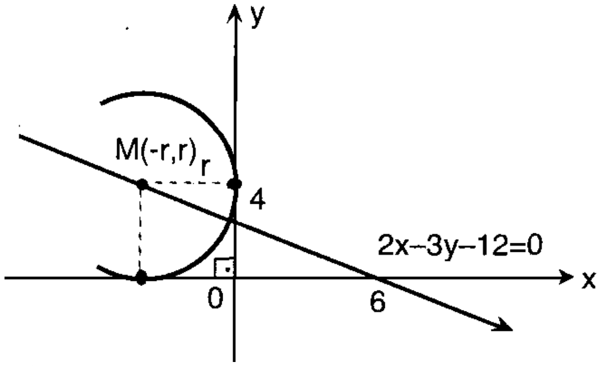
$$(6-r)^2 + (3-r)^2 = r^2$$
$$36 - 12r + r^2 + 9 - 6r + r^2 = r^2$$
$$r^2 - 18r + 45 = 0$$
$$r = 3, r = 15$$



Küçük çemberin denklemi $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 3^2$
Büyük çemberin denklemi $(x-15)^2 + (y-15)^2 = 15^2$
A(6, 3) noktasından geçen çemberin denklemini $(x-15)^2 + (y-15)^2 = 225$

Örnek: Merkezi $2x + 3y - 12 = 0$ doğrusu üzerinde bulunan ve II. bölgede her iki eksene de teğet olan çemberin yarıçapı kaçtır?

Çözüm: Çemberin merkezi II. bölgede M(–r, r) alınırsa bu nokta doğru üzerinde olduğundan,



$$2(-r) + 3r - 12 = 0$$
$$r = 12$$

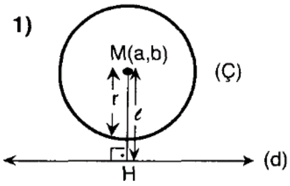
bulunur.

BİR DOĞRU İLE BİR ÇEMBERİN BİRBİRİNE GÖRE DURUMLARI

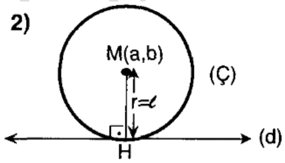
2.5. Tanım: Çemberi bir noktada kesen doğrulara teğet denir. Buna göre $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ çemberi ile $y = mx + n$ doğrusu verilmiş olsun. Çember merkezinin doğruya olan uzaklığını ℓ ile gösterelim.

$$(x-a)^2 + (mx + n - b)^2 = r^2$$
$$x^2 - 2ax + a^2 + m^2x^2 + 2m(n-b)x + (n-b)^2 - r^2 = 0$$
$$(1+m^2)x^2[2m(n-b) - 2a]x + [a^2 + (n-b)^2 - r^2] = 0$$

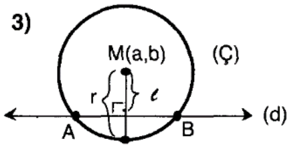
2. derece denklemi elde edilir. Bu denklemde;



$\ell > r$ ise $(d) \cap (Ç) = \varnothing$



$\ell = r$ ise $(d) \cap (Ç) = \{H\}$



$\ell < r$ ise $(d) \cap (Ç) = \{A, B\}$

1) $\Delta < 0$ ise doğru denklemi kesmez. Çember ile doğrunun ortak noktaları yoktur. $(d) \cap (Ç) = \varnothing$

2) $\Delta = 0$ ise doğru denklemi bir noktada keser. Doğru çembere teğettir. $(d) \cap (Ç) = \{H\}$

3) $\Delta > 0$ ise doğru denklemi iki noktada keser. $(d) \cap (Ç) = \{A, B\}$

2.1. Not: Eğer çember M(0, 0) noktasında ise çember ile doğru arasındaki denklem;

$$(1 + m^2)x^2 + 2mnx + (n^2 - r^2) = 0$$

$$\Delta = 4[r^2(1 + m^2) - n^2]$$

olur.

Örnek: $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 50$ çemberi ile $y = x - 1$ doğrusunun kesim noktalarını bulunuz.

Çözüm: $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 50$

$(x - 3)^2 + (x - 1 + 4)^2 = 50$

$x^2 - 6x + 9 + x^2 + 6x + 9 = 50$

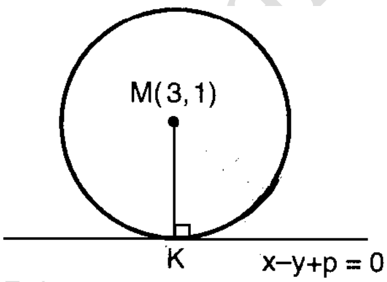
$x = \pm 4$

Eğer $x = 4$ ise $y = 3$ olup $A(4, 3)$ noktasında keser.

Eğer $x = -4$ ise $y = -5$ olup $B(-4, -5)$ noktasında keser.

Örnek: Genel denklemi $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 16$ olan çemberin $x - y + p = 0$ doğrusuna teğet olması için p ne olmalıdır.

Çözüm: 1. Yol: 4 yarıçaplı ve M(3, 1) mekezli çemberin doğruya olan uzaklığı;



$$|MK| = \frac{|1 \cdot 3 - 1 \cdot 1 + p|}{\sqrt{3^2 + 1^2}}$$

$$4 = \frac{|2 + p|}{\sqrt{10}}$$

$$p = 2 + 4\sqrt{10} \text{ ve } p = 2 - 4\sqrt{10}$$

2. Yol: $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 16$

$(x - 3)^2 + (x + p - 1)^2 = 16$

$x^2 - 6x + 9 + x^2 + 2(p - 1)x + (p - 1)^2 = 16$

$2x^2 + (2p - 8)x + p^2 - 2p - 6 = 0$

2. dereceden denklemi elde edilir. Çemberin doğruya teğet olması için $\Delta = 0$ olmalıdır.

$(2p - 8)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (p^2 - 2p - 6) = 0$

$(p - 4)^2 - 2 \cdot (p^2 - 2p - 6) = 0$

$p^2 - 8p + 16 - 2p^2 + 4p + 12 = 0$
$p^2 + 4p - 28 = 0$
$p = 2 + 4\sqrt{10}$ ve $p = 2 - 4\sqrt{10}$

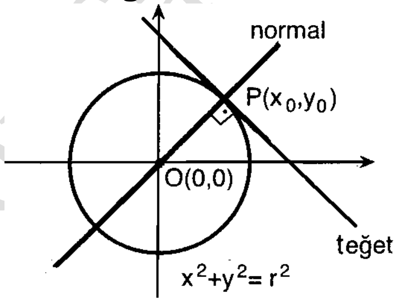
Örnek: $(x-4)^2 + (y-2)^2 = 9$ çemberi ile $y = 2x + 5$ doğrusunu birbirine göre durumu nedir?

Çözüm: $r^2 = 9, m = 2$ ve $n = 5$ olduğundan uyarıdan;
$(1 + m^2)x^2 + 2mnx + (n^2 - r^2) = 0$
$(1 + 2^2)x^2 + 2 \cdot 2 \cdot 5x + (5^2 - 3^2) = 0$
$5x^2 + 20x + 16 = 0$
$\Delta = 80 > 0$
bulunur. Şu halde çember doğru ile iki noktada kesişir.

ÇEMBERİN TEĞETİNİN ve NORMALİNİN DENKLEMİ

2.6. Tanım: Teğetin değme noktasında teğete dik olan ve çember merkezinden geçen dik doğruya çemberin normali denir.

1. Merkezil Çemberde Teğet ve Normalin Denklemleri



2.4. Teorem: $x^2 + y^2 = r^2$ merkezil çemberde teğetin değme noktası $P(x_0, y_0)$ ise çemberin normalinin denklemi;
$$xy_0 - yx_0 = 0$$
dır.

İspat: $O(0,0)$ ve $P(x_0, y_0)$ noktalarından geçen normalin eğimi;
$$m_N = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_0 - 0}{x_0 - 0} = \frac{y_0}{x_0}$$
dir. Buna göre normalin denklemi;
$$y - y_0 = m_N(x - x_0)$$

$$y - y_0 = \frac{y_0}{x_0}(x - x_0)$$
$$yx_0 - x_0y_0 = xy_0 - x_0y_0$$
$$xy_0 - yx_0 = 0$$

olur.

2.5. Teorem: $x^2 + y^2 = r^2$ merkezil çemberde teğetin değme noktası $P(x_0, y_0)$ ise çemberin teğetinin denklemi;

$$xx_0 + yy_0 = r^2$$

dır.

İspat: $O(0, 0)$ ve $P(x_0, y_0)$ noktalarından geçen normalin eğimi $m_N = \frac{y_0}{x_0}$ olduğunu 2.4. teoremden biliyoruz. Teğet ve normal dik iki doğru olduğundan,

$$m_T \cdot m_N = -1$$
$$m_T \cdot \frac{y_0}{x_0} = -1$$
$$m_T = -\frac{x_0}{y_0}$$

dir. Buna göre teğetin denklemi;

$$y - y_0 = m_T(x - x_0)$$
$$y - y_0 = -\frac{x_0}{y_0}(x - x_0)$$
$$yy_0 - y_0y_0 = -xx_0 + x_0x_0$$
$$yy_0 + xx_0 = x_0^2 + y_0^2$$
$$yy_0 + xx_0 = r^2$$

olur.

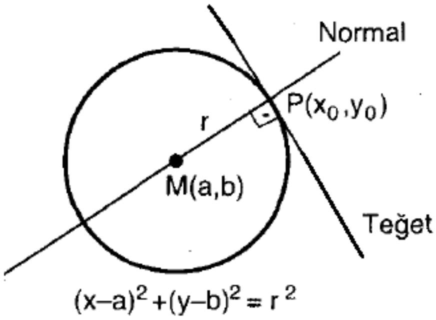
Örnek: $x^2 + y^2 = 16$ çemberine $A(2, 2\sqrt{3})$ noktasında teğetin değme noktası olduğuna göre teğet ve normalin denklemini bulunuz.

Çözüm: $A(2, 2\sqrt{3})$ noktası çemberin denklemini sağlamaktadır. A noktası çember üzerindedir.

Teğet denklemi $xx_0 + yy_0 = r^2$ ise $2x + 2\sqrt{3}y = 16$

Normalin denklemi $xy_0 - yx_0 = 0$ ise $-2x + 2\sqrt{3}y = 0$

2. Merkezi M(a, b) ve Yarıçapı r Olan Çemberde Teğet ve Normalin Denklemleri



2.6. Teorem: M(a, b) merkezli $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ çemberde teğetin değme noktası $P(x_0,y_0)$ ise çemberin normalinin denklemi;

$$(x-x_0)(y_0-b)-(y-y_0)(x_0-a)=0$$

dır.

İspat: M(a, b) ve $P(x_0,y_0)$ noktalarından geçen normalin eğimi;

$$m_N=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{y_0-b}{x_0-a}$$

dir. Buna göre normalin denklemi;

$$y-y_0=m_N(x-x_0)$$
$$y-y_0=\frac{y_0-b}{x_0-a}(x-x_0)$$
$$(x-x_0)(y_0-b)-(y-y_0)(x_0-a)=0$$
$$(x-x_0)(y_0-b)-(y-y_0)(x_0-a)=0$$

olur.

2.7. Teorem: M(a, b) merkezli $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ çemberde teğetin değme noktası $P(x_0,y_0)$ ise çemberin teğetin denklemi;

$$(x-x_0)(x_0-a)+(y-y_0)(y_0-b)=0$$

dır.

İspat: M(a, b) ve $P(x_0,y_0)$ noktalarından geçen normalin eğimi $m_N=\frac{y_0-b}{x_0-a}$ olduğunu 2.6. teoremden biliyoruz. Teğet ve normal dik iki doğru olduğundan,

$$m_T\cdot m_N=-1$$
$$m_T\cdot\left(\frac{y_0-b}{x_0-a}\right)=-1$$
$$m_T=-\frac{x_0-a}{y_0-b}$$

dir. Buna göre teğetin denklemi;

$$y-y_0=m_N(x-x_0)$$

$$y - y_0 = -\frac{x_0 - a}{y_0 - b}(x - x_0)$$
$$(y - y_0)(y_0 - b) = -(x - x_0)(x_0 - a)$$
$$(x - x_0)(x_0 - a) + (y - y_0)(y_0 - b) = 0$$

olur.

2.6. Sonuç: $M(a, b)$ merkezli $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ çemberde teğetin değme noktası $P(x_0, y_0)$ ise çemberin teğetin denklemi;

i) $(x - a)(x_0 - a) + (y - b)(y_0 - b) = r^2$

ii) $xx_0 + yy_0 - a(x + x_0) - b(y + y_0) + a^2 + b^2 - r^2 = 0$

şeklinde de yazılabilir.

Örnek: 4. bölgede olan $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 65$ çembere $P(2, b)$ noktasından çizilen teğet ve normalin denklemini bulunuz.

Çözüm: $M(3, -4)$ olmak üzere; $P(2, b)$ noktası çemberin üzerinde olduğundan,

$$(2 - 3)^2 + (b + 4)^2 = 65$$
$$b = 20 \wedge b = -12$$

dir. Çember 4. bölgede olduğundan $P(2, -12)$ alınır.

Teğet denklemi

$(x - 2)(2 - 3) - (y - (-12))(-12 - (-4)) = 0$ ise $8y + x + 94 = 0$

Normalin denklemi

$(x - 2)(-12 - (-4)) - (y - (-12))(2 - 3) = 0$ ise $y - 8x + 28 = 0$

Örnek: $(x - 1)^2 + (y + 4)^2 = 10$ çemberi üzerindeki $P(4, -3)$ noktasından çizilen teğet, x eksenini kestiği noktayı bulunuz.

Çözüm: $M(1, -4)$ ve $P(4, -3)$ noktaları arasından geçen normalin eğimi;

$$m_N = \frac{-3 - (-4)}{4 - 1} = \frac{1}{3}$$

ve teğetin eğitimi,

$$m_T \cdot m_N = -1$$
$$m_T \cdot \frac{1}{3} = -1$$
$$m_T = -3$$

bulunur. Buna göre teğetin denklemi,

$$y - (-3) = -3(x - 4)$$
$$y = -3x + 9$$

dir. Bu doğruyu x eksenini kestiği nokta,

$$y = 0 \text{ için } 0 = -3x + 9 \text{ ise } x = 3$$

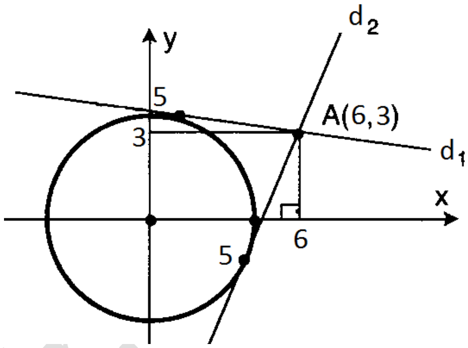
olur.

BİR ÇEMBERE DIŞINDA ALINAN BİR NOKTADAN ÇİZİLEN TEĞETLER

Bir çemberin dışında bir noktadan iki teğet geçtiğini geometri derslerinden bilinmektedir. Şimdi bunlarla ilgili örnekler verelim.

Örnek: $x^2 + y^2 = 25$ çembere $A(6, 3)$ noktasından çizilen teğetlerin denklemini bulunuz.

Çözüm: $A(6, 3)$ noktasından çembere çizilen teğetler d_1 ve d_2 bu iki doğrudan geçen $y = mx + n$ olsun.



$A(6, 3)$ noktası doğruyu sağladığından $3 = m6 + n$ dir. (1)
Ayrıca $y = mx + n$ doğrusunun $x^2 + y^2 = r^2$ merkezil çemberinin teğetlik şartı,

$$r^2(1 + m^2) - n^2 = 0$$

idi. Buradan,

$$25(1 + m^2) - n^2 = 0$$

$$25(1 + m^2) = n^2 \qquad (2)$$

bulunur. Bu (1) ve (2) denklemleri çözülürse,

$$m = 18 \pm 2\sqrt{37} \text{ ve } m = -81 \pm 12\sqrt{37}$$

$$y = (18 \pm 2\sqrt{37})x + (-81 \pm 12\sqrt{37})$$

doğrusal denklemlerini elde ederiz.

Örnek: $x^2 + y^2 = 9$ çemberinin $2x + 3y + 5 = 0$ doğrusuna paralel teğetlerin denklemini bulunuz.

Çözüm: İstenen doğru denklemleri $y = mx + n$ olsun.

$2x + 3y + 5 = 0$ doğrusunun eğimi $m = -\frac{2}{3}$ dür.

İstenen teğetler $2x + 3y + 5 = 0$ doğrusuna paralel olacağından eğimleri eşit olmalıdır. Yani istenen doğru denklemleri $y = -\frac{2}{3}x + n$ olur. Teğetlik şartından,

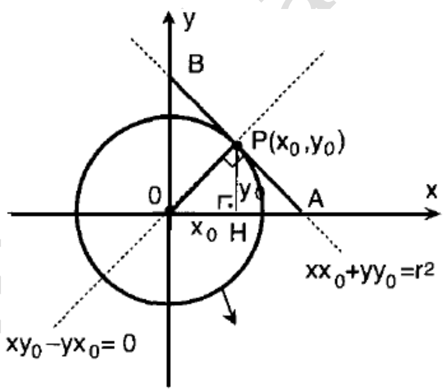
$$r^2(1+m^2) - n^2 = 0$$
$$3^2\left(1+\left(-\frac{2}{3}\right)^2\right) - n^2 = 0$$
$$n = \pm\frac{2\sqrt{10}}{3}$$

bulunur. Buna göre;

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{2\sqrt{10}}{3} \text{ ve } y = -\frac{2}{3}x - \frac{2\sqrt{10}}{3}$$

teğet denklemleri elde edilir.

MERKEZİL ÇEMBERLERDE TEĞET, NORMAL, TEĞETALTI ve NORMALALTI UZUNLUKLARI



2.7. Tanım: Teğetin x eksenini kestiği nokta ile değme noktası arasındaki teğet uzunluğu ($|AP|$), normalin x eksenini kestiği nokta ile değme noktası arasındaki teğet uzunluğu ($|OP|$) denir.

2.8. Tanım: Teğetin değme noktasının x eksenine dik izdüşümünün H noktasında kesilsin. $|PH|$ doğru parçasının uzunluğuna teğetaltı uzunluğu, $|OH|$ doğru parçasının uzunluğuna normalaltı uzunluğu denir.

2.8. Teorem: $x^2+y^2=r^2$ merkezil çemberde teğetin değme noktası $P(x_0,y_0)$ ise teğetin uzunluğu;

$$|AP| = \left|\frac{y_0 r}{x_0}\right|$$

dır.

Çözüm: Merkezil çemberin teğetinin denklemi $xx_0+yy_0=r^2$ dir.

$$y=0 \text{ ise } x=\frac{r^2}{x_0} \text{ olup } A\left(\frac{r^2}{x_0},0\right) \text{ dir.}$$

$$|AP| = \sqrt{\left(x_0-\frac{r^2}{x_0}\right)^2+y_0^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{x_0^2-r^2}{x_0}\right)^2+y_0^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{-y_0^2}{x_0}\right)^2+y_0^2}$$

$$= \sqrt{\frac{y_0^4}{x_0^2}+y_0^2}$$

$$= \sqrt{\frac{y_0^4+x_0^2y_0^2}{x_0^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{y_0^2(y_0^2+x_0^2)}{x_0^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{y_0^2r^2}{x_0^2}}$$

$$= \left|\frac{y_0 r}{x_0}\right|$$

2.9. Teorem: $x^2+y^2=r^2$ merkezil çemberde teğetin değme noktası $P(x_0,y_0)$ ise teğetaltı uzunluğu;

$$|HA| = \frac{y_0^2}{|x_0|}$$

dır.

İspat: $|HA| = |OA| - |OH| = \frac{r^2}{x_0^2} - x_0 = \frac{r^2-x_0^2}{x_0^2} = \frac{y_0^2}{x_0^2} = \frac{y_0^2}{|x_0|}$

2.10. Teorem: $x^2+y^2=r^2$ merkezil çemberde normalin değme noktası $P(x_0,y_0)$ ise normalin uzunluğu;

$$|OP|=r$$

dır.

İspatı aşikâr olduğundan okuyucuya bırakılmıştır.

2.11. Teorem: $x^2+y^2=r^2$ merkezil çemberde normalin değme noktası $P(x_0,y_0)$ ise normalaltı uzunluğu;

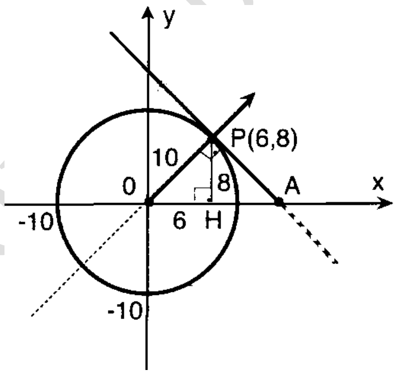
$$|HO|=x_0$$

dır.

İspatı aşikâr olduğundan okuyucuya bırakılmıştır.

Örnek: $x^2+y^2=100$ çemberi üzerindeki P(6, 8) noktasından teğet çizliyor. Teğet, teğetaltı, normal ve normalaltı uzunluğunu bulunuz.

Çözüm:



i) Teğet uzunluğu $|AP|=\left|\frac{y_0 r}{x_0}\right|=\left|\frac{8\cdot 10}{6}\right|=\frac{40}{3}$ br

ii) Teğetaltı uzunluğu $|HA|=\frac{y_0^2}{|x_0|}=\frac{8^2}{|6|}=\frac{32}{3}$ br

iii) Normal uzunluğu $|OP|=r=10$ br

iv) Normalaltı uzunluğu $|HO|=6$ br

BİR NOKTA İLE BİR ÇEMBERİN KONUMU

2.12. Teorem: $P(x_0,y_0)$ noktası $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ çemberi civarında olsun. $P=(x_0-a)^2+(x_0-b)^2-r^2$ olmak üzere;

i) $P>0$ ise nokta çember dışındadır.

ii) $P=0$ ise nokta çember üzerindedir.

iii) $P<0$ ise nokta çember içerisindedir.

İspat: $P=(x_0-a)^2+(y_0-b)^2-r^2$ noktası $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ çemberi üzerinde ise denklem sağlanacağından $P=0$ olup nokta çember üzerindedir.

Buna göre çemberin dış bölgesi $(x-a)^2+(y-b)^2>r^2$ denklemiyle sağlandığından, $P=(x_0-a)^2+(y_0-b)^2-r^2>0$ olmalıdır.

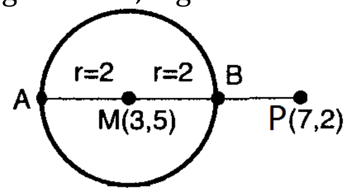
Yine çemberin dış bölgesi $(x-a)^2+(y-b)^2<r^2$ denklemiyle sağlandığından, $P=(x_0-a)^2+(y_0-b)^2-r^2<0$ olmalıdır.

Örnek: A(2, 3)noktası $(x-4)^2+(y-4)^2>25$ çemberinin hangi bölgesindedir.

Çözüm: $P=(2-4)^2+(3-2)^2-25=-20<0$ olup A(2, 3) noktası çemberin içinde bir noktadır.

Örnek: P(7, 2) noktası ile $(x-3)^2+(y-5)^2=4$ çemberi arasındaki en kısa ve en uzun uzaklık kaç birimdir?

Çözüm: P noktasının çemberin merkezinden geçen doğrunun çembere değme noktaları şekildeki gibi biri A, diğer B olsun.



İki nokta arasındaki uzaklıktan,

$$|MP|=\sqrt{(5-2)^2+(3-7)^2}=5$$

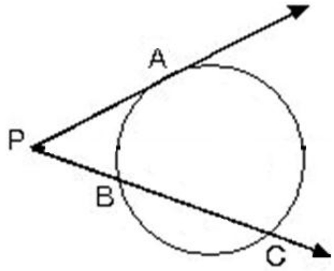
bulunur. Buna göre,

P noktasına en kısa uzaklık $|BP|=|MP|-|MB|=5-2=3$ br

P noktasına en uzun uzaklık $|AP|=|MP|+|MA|=5+2=7$ br

olur.

3.13. Teorem: $P(x_0,y_0)$ noktası, $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ çemberi ve $P=(x-a)^2+(y-b)^2-r^2$ olmak üzere çember üzere çember üzerinde şekildeki gibi noktalar tanımlansın.



Bu takdirde;

$$|PA|^2=|PB|\cdot|PC|=(x_0-a)^2+(y_0-b)^2-r^2$$

olur.

İspat: Geometri derslerinde kuvvet tanımlarını ve teoremlerini hatırlayalım. Çemberde Uzunluk konusunda kuvvet teoremlerinde

$$|PA|^2=|PB|\cdot|PC|$$

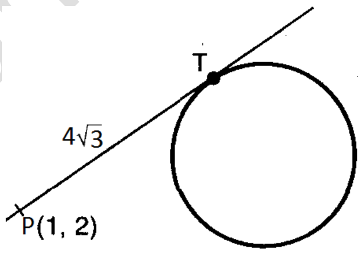
olduğuna göre;

$$|PA|^2=|PB|\cdot|PC|=(x_0-a)^2+(y_0-b)^2-r^2$$

olur.

Örnek: P(1, 2) noktasından $(x-5)^2+(y-b)^2=4$ çemberi çizilen teğet parçasının uzunluğu $4\sqrt{3}$ birim olduğuna göre b'nin değeri nedir?

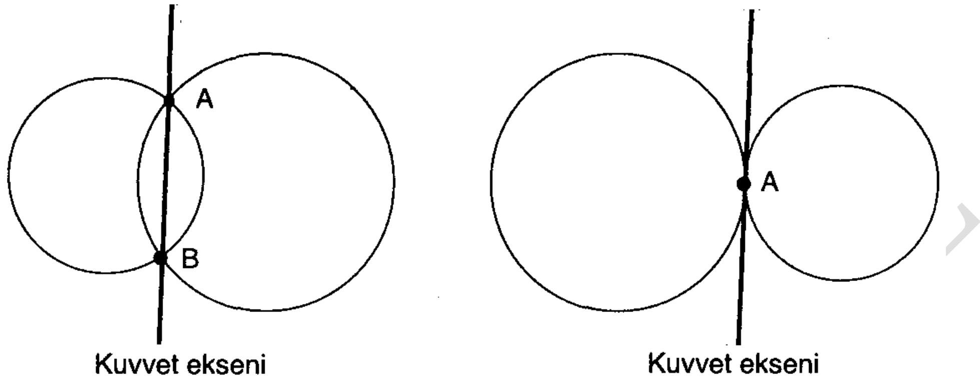
Çözüm:



$$|PA|^2=(x_0-a)^2+(y_0-b)^2-r^2$$
$$(4\sqrt{3})^2=(1-5)^2+(2-b)^2-4$$
$$48=16+(2-b)^2-4$$
$$b^2-4b-32=0$$
$$b=-4 \text{ ve } b=8$$

KUVVET EKSENİ

2.9. Tanım: Düzlemde iki çembere göre, aynı kuvvette olan noktaların kümesi, bu iki çemberin kuvvet ekseni denir. Kesişen iki çemberin kuvvet ekseni, kesim noktalarından geçen bir doğrudur. Dıştan teğet olan iki çemberin kuvvet ekseni, değme noktalarında çembere teğet olan bir doğrudur.



İki çemberin kuvvet ekseni, bu çemberlerin denklemleri arasında x^2 ve x^2 li terimlerin yok edilmesiyle bulunur.

Örnek: Denklemleri $(x-4)^2+y^2=1$ ve $x^2+y^2=9$ olan çemberin kuvvet eksenlerinin denklemini bulunuz.

Çözüm: $(x-4)^2+y^2=1$ denklemini genel denklem şeklinde yazılıp taraf tarafa çıkarılırsa,

$$\left.\begin{array}{r} x^2-8x+y^2+15=0 \\ x^2+y^2-9=0 \end{array}\right\} -8x+24=0 \text{ ise } x=3$$

doğrusu elde edilir.

Örnek: $x^2+y^2+3x-(m-1)y+17=0$ ve $x^2+y^2+2x+y-5=0$ olan çemberlerin kuvvet ekseni $(3, 5)$ noktasından geçtiğine göre m'nin değeri nedir?

Çözüm: Bu iki denklem taraf tarafa çıkarılırsa,

$$x-my+12=0$$

bulunur. $(3, 5)$ noktası denklemi sağladığından

$$3-m\cdot 5+12=0$$
$$m=3$$

olur.

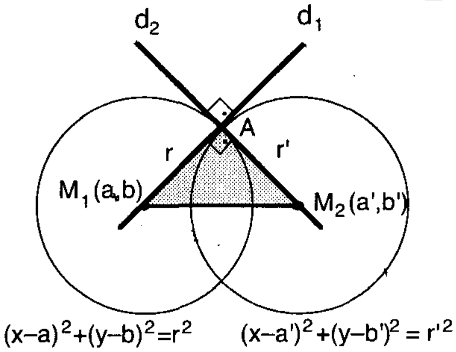
Örnek: $x^2+y^2-9=0$ ve $x^2+y^2-6x+4y-10=0$ olan iki çember A ve B gibi iki noktada kesiştiklerine göre AB doğrusunun denklemini bulunuz.

Çözüm: A ve B kesim noktalarından geçen AB doğrusu, çemberlerin kuvvet eksenidir. Buna göre kuvvet ekseninin denklemi AB doğrusunun denklemidir.

$$\left.\begin{array}{r} x^2+y^2-6x+4y-10=0 \\ x^2+y^2-9=0 \end{array}\right\} 6x-4y+1=0 \text{ ise } x=3$$

İKİ ÇEMBERİN TEĞETLERİN DİK KESİŞME ŞARTI

2.14. Teorem: $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ ve $(x-a')^2+(y-b')^2=r'^2$ iki çember, A bu iki çemberin kesim noktası ve A noktasından çemberlere çizilen d_1 ve d_2 teğetleri olsun. Bu iki teğet dik kesişiyorsa,



$$a^2+b^2-r^2+a'^2+b'^2-r'^2=2(aa'+bb')$$

dir. (İki çemberin kesişme noktalarının teğetleri dik kesişiyorsa kısaca çemberlerin dik kesişmesi diyeceğiz.)

İspat: d_1 ve d_2 teğetleri dik kesişiyorsa M_1M_2A dik üçgeni oluşur. Pisagor teoreminden,

$$|M_1M_2|^2=|M_1A|^2+|M_2A|^2$$
$$(a-a')^2+(b-b')^2=r^2+r'^2$$
$$a^2-2aa'+a'^2+b^2-2bb'+b'^2=r^2+r'^2$$
$$a^2+b^2-r^2+a'^2+b'^2=2(aa'+bb')$$

olur.

2.7. Sonuç: Çemberlerin genel denklemleri $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ ve $x^2+y^2+D'x+E'y+F'=0$ ise, bu iki çemberin kesişme noktalarının teğetlerinin dik kesişme şartı,

$$DD'+EE'=2(F+F')$$

dir.

Örnek: $x^2 + (y-5)^2 = r^2$ ve $(x-2)^2 + y^2 = 4$ çemberleri dik kesişmesi için r ne olmalıdır?

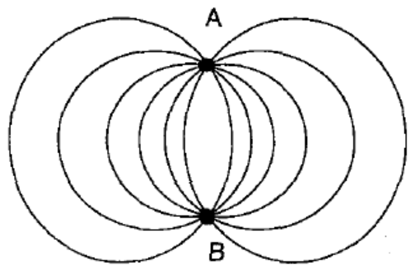
Çözüm: $a^2 + b^2 - r^2 + a'^2 + b'^2 = 2(aa' + bb')$
$0^2 + 5^2 - r^2 + (-2)^2 + 0^2 = 2(0 \cdot (-2) + 5 \cdot 0)$
$r = 5$

Örnek: $x^2 + y^2 - 4x + 6y + m = 0$ ve $x^2 + y^2 + 2x - 8y + 15 = 0$ çemberleri dik kesişmesi için m ne olmalıdır?

Çözüm: $DD' + EE' = 2(F + F')$
$(-4) \cdot 2 + 6 \cdot (-8) = 2(m + 15)$
$m = -13$

ÇEMBER DEMETİ

2.10. Tanım: Genel denklemleri $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ ve $x^2 + y^2 + D'x + E'y + F' = 0$ olan iki çemberin kesim noktaları A ve B olsun. A ve B noktalarından geçen çemberlerin tümüne çember demeti denir. Çember demetinin denklemi; $(\lambda \in \mathbb{R})$



$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F + \lambda(x^2 + y^2 + D'x + E'y + F') = 0$$

dir.

Örnek: $x^2 + y^2 + 2x - 12 = 0$ ve $x^2 + y^2 + 8x + 12 = 0$ çemberlerinin kesim noktaları ile (1, 2) noktasından geçen çemberlerin denklemini bulunuz.

Çözüm: Bu iki kesim noktalarından geçen tüm çemberlerin denklemi,
$(x^2 + y^2 + 2x - 12) + \lambda(x^2 + y^2 + 8x + 12) = 0$
dir. (1, 2) noktası bu iki denklemi sağladığından,

$$(1^2+2^2+2\cdot1-12)+\lambda(1^2+2^2+8\cdot1+12)=0$$
$$\lambda=\frac{1}{5}$$

bulunur. Bu denklemde yerine yazılırsa,

$$(x^2+y^2+2x-12)+\frac{1}{5}(x^2+y^2+8x+12)=0$$
$$5x^2+5y^2+10x-60+x^2+y^2+8x+12=0$$
$$6x^2+6y^2+18x-48=0$$
$$3x^2+3y^2+6x-16=0$$

elde edilir.

Örnek: Denklemi $x^2+y^2+5x-4my+6=0$ olan çember demetinin belirttiği çemberler sabit iki noktadan geçerler. Bu noktaların apsisleri nedir?

Çözüm: $x^2+y^2+5x-4my+6=0$ çember demetinde;
$m=0$ alınırsa $x^2+y^2+5x+6=0$
$m=1$ alınırsa $x^2+y^2+5x-4y+6=0$

Bu iki çember demetteki çemberlerden iki tanesidir ve tüm çemberlerin geçtiği sabit iki noktadan da geçmektedirler. Çemberleri geçtiği sabit iki nota A ve B ise AB doğrusu kuvvet eksenidir. Bu iki çember taraf tarafa çıkarılırsa,

$$y=0$$

bulunur. Burada çember demetindeki tüm çemberler $y=0$ doğrusu üzerindeki A ve B noktalarında kesişmektedirler.

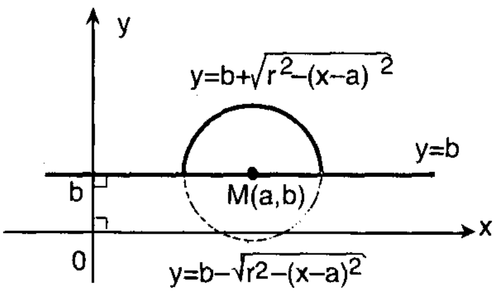
$y=0$ ise $x^2+0^2+5x-4m\cdot0+6=0$
$$x^2+5x+6=0$$
$$x=-3 \text{ ve } x=-2$$

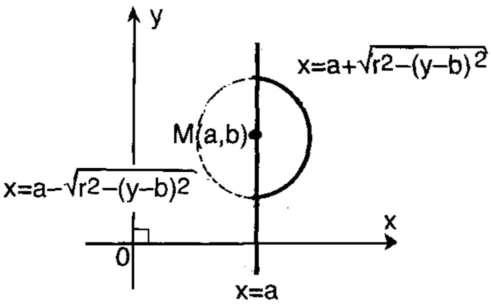
YARIM ÇEMBER DENKLEMLERİ

2.11. Tanım: $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ çember denkleminde,

i) $y=b+\sqrt{r^2-(x-a)^2}$ olarak yazılmasına yarım üst yarım çember
ii) $y=b-\sqrt{r^2-(x-a)^2}$ olarak yazılmasına yarım alt yarım çember
iii) $x=a+\sqrt{r^2-(y-b)^2}$ olarak yazılmasına yarım sağ yarım çember
iv) $x=a-\sqrt{r^2-(y-b)^2}$ olarak yazılmasına yarım sol yarım çember

denir.





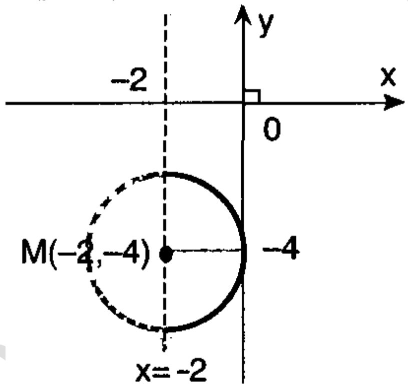
Örnek: $x = -2 + \sqrt{4-(y+4)^2}$ denklemi ile verilen eğrinin grafiğini çiziniz.

Çözüm: $x = -2 + \sqrt{4-(y+4)^2}$

$x + 2 = \sqrt{4-(y+4)^2}$

$(x+2)^2 = 4-(y+4)^2$

$(x+2)^2 + (y+4)^2 = 2^2$

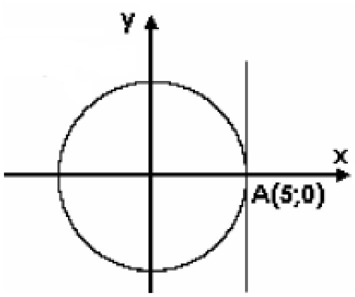


ÇÖZÜMLÜ ALIŞTIRMALAR

1. $x^2 + y^2 = 25$ dairesinin A(5, 0) noktasındaki teğet için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

A) x-eksenine paraleldir B) y-eksenine diktir
C) (0,0) noktasından geçer D) $x = 5$ doğrusudur
E) $x =-5$ doğrusudur

Çözüm:



$x^2 + y^2 = 25$ ve $xx_0 + yy_0 = 25$
$5x + 0 \cdot y = 25$
$x = 5$

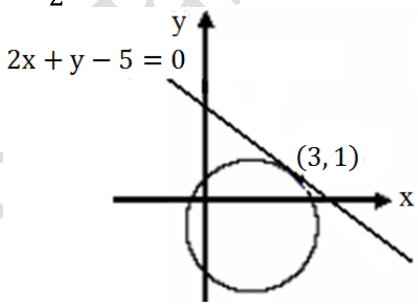
Cevap: D

2. $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 3 = 0$ çembere $(3;\ 1)$ noktasından geçen bir teğet vardır. Teğet hangi noktada y-eksenini keser?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

Çözüm: $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 3 = 0$ çember denkleminde;

$$a = -\frac{D}{2} = -\frac{4}{2} = -2$$
$$b = -\frac{E}{2} = -\frac{2}{2} = -1$$



Çembere üzerindeki K(p, q) noktasından çembere çizilen teğetin denklemi;

$$(x - p)(p - a) + (y - q)(q - b) = 0$$
$$(x - 3)(3 - 2) + (y - 1)(1 - (-1)) = 0$$
$$2x + y - 5 = 0$$

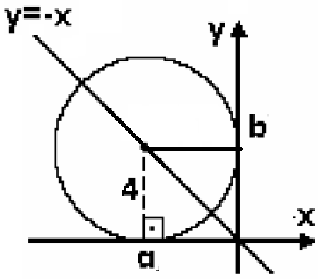
bulunur. $x = 0$ için $y = 5$ dir.

Cevap: C

3. $(x + 4)^2 + (y - 4)^2 = 16$ çemberi üzerinde merkezinden ve orijin noktalarından geçen $y = ax$ doğrusu bulunduğuna göre, a'nın değeri nedir?

A) −1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

Çözüm: $(x+4)^2+(y-4)^2=16$ çemberinin merkezi M(–4, 4) ve $r=4$ dür. M(–4, 4) ve O(0, 0) noktasından geçen doğru $y=-x$ doğrusudur. Buna göre $a=-1$ elde edilir.



Cevap: A

4. $x^2+y^2=5$ çemberinin $y=ax+5$ doğrusuna teğet olması için a'nın değeri nedir?

A) ± 1 B) ± 2 C) ± 3 D) ± 4 E) ± 5

Çözüm: Bir çembere teğet bir doğru olması için $\Delta=0$ olmalıdır.

$x^2+y^2=5$ ve $y=ax+5$

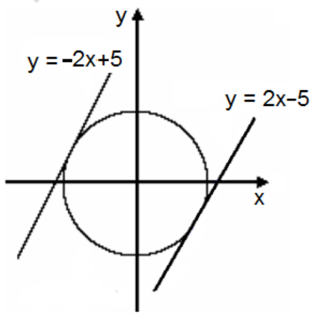
$x^2+(ax+5)^2=5$

$x^2+(ax+5)^2=5$

$x^2(1+a^2)+10ax+20=0$

$\Delta=(10a)^2-4\cdot(1+a^2)\cdot 20=0$

$a=\pm 2$

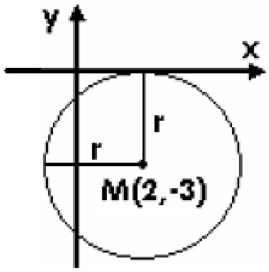


Cevap: B

5. Merkezi (2,–3) ve x-eksenine teğet olan çemberin y-eksenini kesen noktaların toplamı nedir?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Çözüm: Merkezi (2,–3) ve x-eksenine teğet olan çemberde r = 3 dür.



Buna göre çemberin denklemi $(x-2)^2+(y+3)^2=9$ dir. $x=0$ için $y_1=3+\sqrt{5}$ ve $y_2=3-\sqrt{5}$ olacağıdan

$$y_1+y_2=3+\sqrt{5}+3-\sqrt{5}=6$$

bulunur.

Cevap: E

6. M(2, 1) merkezli ve $4x+3y=9$ doğrusuna teğet olan çemberin denklemi yarıçapı nedir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: Bir $A(x_1,y_1)$ noktasının ax + by + c = 0 doğrusuna uzaklığı,

$$\ell=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

şeklindedir. M(2,–1) noktasının $4x-3y=4$ doğrusuna olan uzaklığı,

$$\ell=\frac{|4\cdot2+3\cdot1+9|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=4$$

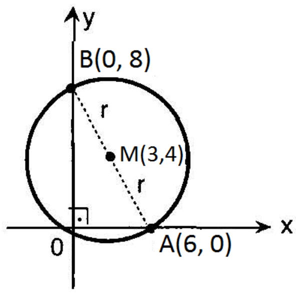
dür. Bu bize çemberin yarıçapını verir.

Cevap: D

7. A(6, 0) ve B(0, 8) noktalarından ve orijinden geçen çemberin yarıçapı nedir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: Çapı gören çember açı 90^0 olacağından [AB] çap olur. [AB] nin orta noktası merkezdir.



$$M\left(-\frac{6+0}{2}, -\frac{0+8}{2}\right) = M(-3, 4)$$

bulunur. $|AB| = 2r$ dir. OAB dik ügeninde Pisagor teoreminden $|AB| = 2r = 10$ elde edilir. Buna göre $r = 5$ br dir.

Cevap: E

8. $x^2 + (a+3)y^2 + (b-2)xy - 4x + (b-a)y - 17 = 0$ denklemi bir çember belirttiğine göre, bu çemberin yarıçapı kaç br'dir?

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

Çözüm: $a + 3 = 1$ ve $b - 2 = 0$
$a = -2$ ve $b = 2$

olur. O halde çember denklemi;

$$x^2 + y^2 - 4x + 4y - 17 = 0$$

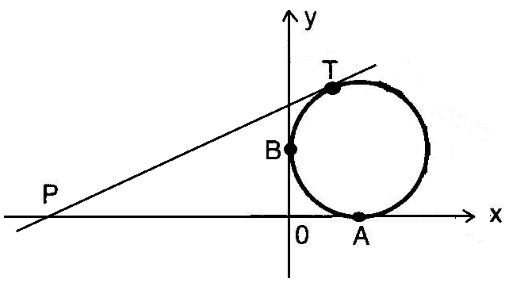
elde edilir. Buna göre çemberin yarıçapı;

$$r = \frac{\sqrt{D^2+E^2-4F}}{2} = \frac{\sqrt{(-4)^2+4^2-4\cdot(-17)}}{2} = 5 \text{ br}$$

olur.

Cevap: A

9.

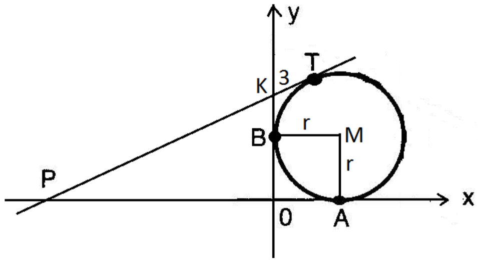


Şekildeki çember eksenlere A ve B noktalarında, $3x - 4y + 12 = 0$ doğrusuna ise T noktasında teğettir. $|PA|$ kaç birimdir?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

Çözüm: $x = 0$ ise $3 \cdot 0 - 4y + 12 = 0$ olup $y = 3$

$y = 0$ ise $3x - 4 \cdot 0 + 12 = 0$ olup $x = -4$



3, 4, 5 kuralından $|KP| = 4$ br

Kuvvet ekseninden $|KT| = |KB| = 3 - r$

$|PT| = |PA|$ ise $5 + 3 - r = 4 + r$ olup $r = 4$ dür.

$|PA| = 4 + r = 8$ br

Cevap: C

10. $x^2 + y^2 + (k-1)x + 3y + 1 = 0$ ve $x^2 + y^2 - 4x + ky + 6 = 0$ çemberlerinin dik kesişmesi için k ne olmalıdır?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

Çözüm: İki çemberin kesişme noktalarının dik kesişme şartı,

$$DD' + EE' = 2(F + F')$$

olduğuna göre;

$$(k-1)(-4) + 3k = 2(1+6)$$
$$k = 5$$

Cevap: B

11. $x^2 + y^2 + kx + 9y + 16 = 0$ çemberinin x-eksenine teğet olması için k ne olmalıdır?

A) ± 5 B) ± 6 C) ± 7 D) ± 8 E) ± 9

Çözüm: Çember x-eksenine teğet ise $\left(\frac{D}{2}\right)^2 = F$ olmalıdır.

$$\left(\frac{k}{2}\right)^2 = 16$$
$$k^2 = 64$$
$$k = 8$$

Cevap: D

12. $x^2+y^2-4x-2y+1=0$ ve $x^2+y^2+2x+6y+1=0$ çemberleri dıştan teğet ise çemberlerin yarıçaplarının toplamı r_1+r_2 nedir?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Çözüm:

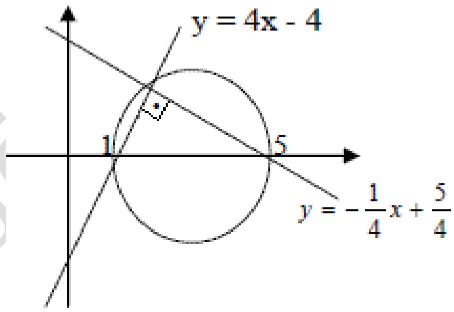
$$r_1=\frac{\sqrt{D^2+E^2-4F}}{2}=\frac{\sqrt{(-4)^2+(-2)^2-4\cdot 1}}{2}=2\text{ br}$$
$$r_2=\frac{\sqrt{D^2+E^2-4F}}{2}=\frac{\sqrt{2^2+6^2-4\cdot 1}}{2}=3\text{ br}$$
$$r_1+r_2=2+3=5\text{ br}$$

Cevap: B

12. $y=0, y=4x-4$ ve $y=-\frac{1}{4}x+\frac{5}{4}$ doğruların oluşturduğu üçgenin çevrel çemberinin merkezinin apsisi nedir?

A) $(\frac{7}{2},0)$ B) $(\frac{3}{2},0)$ C) $(\frac{5}{2},0)$ D) $(2, 0)$ E) $(3, 0)$

Çözüm: Verilen doğrunun grafikği aşağıdaki şekilde verilmiştir.



$y=4x-4$ doğrusunun eğimi 4 ve $y=-\frac{1}{4}x+\frac{5}{4}$ doğrusunun eğimi $-\frac{1}{4}$ olduğuna göre eğimlerin çarpımı -1 verir. Bu durum bu iki doğrunun birbirlerine dik olduğunu gösterir. Ayrıca şekilden de görüleceği gibi çevre açının ölçüsü 90^0 olduğundan çemberin x eksenini kesen noktalar (1, 0) ve (5, 0) noktalarıdır. Bu noktaları birleştiren doğru parçasının orta noktası (3, 0) olarak bulunur.

Cevap: E

13. M(4, 2) merkezli ve $r = \sqrt{13}$ yarıçaplı çemberin x–eksenini kestiği noktaların apsislerinin toplamı nedir?

A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

Çözüm: Çemberin denklemi,

$$(x-4)^2 + (y-2)^2 = 13$$

şeklindedir. Buna göre çemberin x–eksenini kestiği noktaların apsisleri bulmak için y = 0 alınırsa,

$$x_1 = -5, x_2 = 13$$
$$x_1 + x_2 = -5 + 13 = 8$$

bulunur.

Cevap: A

KAYNAKÇA

1. H. Hilmi HACISALİHOĞLU, 2ve 3 Boyutlu Uzayda Analitik Geometri, 7. Bakı, 2005, ANKARA.
2. H. Hilmi HACISALİHOĞLU, Lise Matematik 1, 2, 3, Serhat Yayınları A.Ş. İstanbul, 2001.
3. M. Zeki DERMAN, Ökkeş ÖZKÖSELER, Bayram ÇETİNER, Zafer Yayınları, Ankara, 2005.
4. Ali Rıza İLDENİZ, İsmet PARILDAR, Kemal ALAGÖZ, Tacim GÖLPINAR, Sayısal 1-2, Modern Matematik, Yıldırım Yayınları, 1986, ANKARA.
5. Hüseyin UÇAR, Ali ÖRNEK, Analitik Geometri, İlköğretim Matematik Alan Bilgisi, ABY yayınları, 2014, ANKARA.
6. Emrullah KAPLAN, Analitik Geometri, Etkin Yayıncılık, 2001, ANKARA.
7. Nevzat ASMA, Halit BIYIK, 12. Sınıf Analitik Geometri Konu Özetli oru Bankası, Esen Yayınları, 2008, ANKARA.
8. Mehmet GÜRKAN, Abdullah DEMİRALP, Tahsin PELİT, Analitik Geometri, Lise Ders Kitabı, Başarı Yayınları, Ankara, 2011.
9. Prof. Dr. Yusuf AVCI, Prof. Dr. Ahmet DERNEK, Öğr. Müyesser SAKA, Lise Analitik Geometri Ders Kitabı, Deniz Yayınevi, İstanbul, 2001.