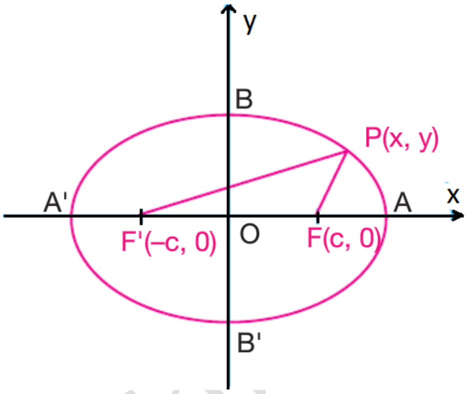
3. BÖLÜM
ELİPSİN ANALİTİĞİ

ELİPS ve ELİPSİN DENKLEMİ

3.2.Tanım: Düzlemde sabit iki noktaya olan uzaklıkları toplamı sabit olan noktaların kümesine elips denir. Sabit olan iki nokta elipsin odakları, odakların orta noktasına da elipsin merkezi denir.



A, A', B ve B' noktaları elipsin köşeleridir.
F ve F' noktaları elipsin odaklarıdır.

P(x, y) noktası odaklara olan uzaklığı daima sabittir. Yani; $|AA'| = 2a$ ise

$$|PF| + |PF'| = 2a$$

dır.

3.3.Tanım: Şekildeki gibi bir elipste büyük eksene (AA' doğrusuna) asal eksen, küçük eksen (BB' doğrusuna) yedek eksen denir.

$$|AA'| = 2a, |BB'| = 2b, |FF'| = 2c$$

olarak alınırsa,

$$|OA| = |OA'| = |BF'| = |B'F| = |B'F'| = a$$

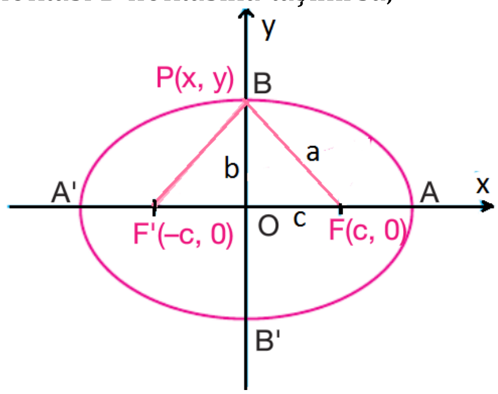
olur.

3.1. Teorem: Asal eksen uzunluğu ($|AA'| = 2a$), yedek eksen uzunluğu ($|BB'| = 2b$), odaklar arası uzunluk ($|FF'| = 2c$) alınırsa,

$$a^2 + b^2 = c^2$$

olur. $(a > b, a > c)$

İspat: $P(x, y)$ noktası B noktasına taşınırsa,



$$|BF| = a, \ |BO| = b, \ |OF| = c$$

olur ki, bu bize Pisagor teoreminden,

$$a^2 = b^2 + c^2$$

olduğunu gösterir.

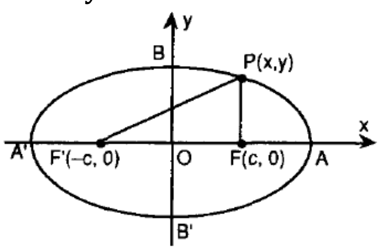
3.4. Tanım: Merkezi orijinde ve eksenleri koordinat eksenleri olan elipse merkezil elips denir.

3.2. Teorem: Asal eksen uzunluğu $(|AA'| = 2a)$, yedek eksen uzunluğu $(|BB'| = 2b)$ olan bir merkezil elips denklemi;

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

dir.

İspat: $P(x, y)$ noktası odaklara olan uzaklığı daima sabit olduğundan $|PF| = |PF'| = 2a$ olduğunu biliyoruz.



$$|PF| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \text{ ve } |PF'| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2$$
$$4cx = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$
$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx$$
$$a\sqrt{x^2 - 2cx + c^2 + y^2} = a^2 - cx$$
$$a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2) = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$$
$$a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$$
$$a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 + c^2x^2$$
$$a^2x^2 - x^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2$$
$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)\,, \quad (a^2 = b^2 + c^2)$$
$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$
$$\frac{b^2x^2}{a^2b^2} + \frac{a^2y^2}{a^2b^2} = 1$$
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Örnek: Asal eksen uzunluğu 8 ve yedek eksen uzunluğu 6 birim olan odakları x ekseni üzerinde olan elipsin denklemini bulunuz.

Çözüm: $2a = 8$ ve $2b = 6$ ise $\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$ yani $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ dir.

Örnek: $9x^2 + 16x^2 = 576$ elipsi veriliyor.

a) Eksen uzunluklarını

b) Odakları arası uzaklığı bulunuz.

Çözüm: $9x^2 + 16x^2 = 576$
$$\frac{9x^2}{576} + \frac{16y^2}{576} = 1$$
$$\frac{x^2}{8^2} + \frac{y^2}{6^2} = 1$$

a) Eksen uzunlukları;

Asal eksen $a = \pm 8$ ve yedek eksen uzunluğu $b = \pm 6$ olup $2a = \pm 16$ ve $2a = \pm 12$

b) Odakları arası uzaklığı;

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$c^2 = 8^2 - 6^2$
$c = \pm 2\sqrt{7}$

Örnek: $9x^2 + 25x^2 = 225$ elipsinin odaklarının koordinatları nedir?

Çözüm: $9x^2 + 25x^2 = 225$

$$\frac{9x^2}{225} + \frac{25y^2}{225} = 1$$
$$\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$$

Asal eksen $a = \pm 5$ ve yedek eksen uzunluğu $b = \pm 3$ dir.

$a^2 = b^2 + c^2$
$c^2 = 5^2 - 3^2$
$c = 4$

Odaklarının koordinatları $F(4,0)$ ve $F(-4,0)$ dır.

Örnek: Asal ekseni A(2, 0) noktasında olan ve $K(\sqrt{2},1)$ noktasından geçen elipsin denklemini bulunuz.

Çözüm: $a = 2$ olduğundan elips $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ şeklindedir. $K(\sqrt{2},1)$ noktası denklemini sağladığından,

$$\frac{\sqrt{2}^2}{4} + \frac{1^2}{b^2} = 1$$
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{b^2} = 1$$

$$b^2 = 2$$
$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$$

denklemi elde edilir.

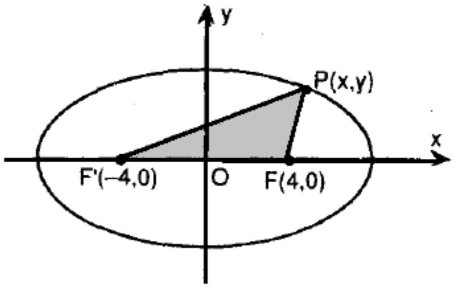
Örnek: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ elipsi üzerinde birinci bölgede bir P(x, y) noktası alınmaktadır. F ve F' odaklar olmak üzere PFF' üçgeninin çevresi kaç birimdir?

Çözüm: $a = 5$ ve $b = 3$ olduğundan,

$c^2 = a^2 - b^2$

$c^2 = 5^2 - 3^2$

$c = 4$

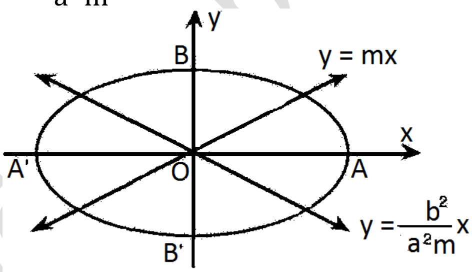


$|PF| + |PF'| = 2a = 10$ br ve $|FF'| = 2c = 8$ br olduğundan,

$Ç(PFF') = |PF| + |PF'| + |FF'| = 10 + 8 = 18$ br

bulunur.

3.5. Tanım: Bir elipsin merkezinden geçen doğrulara elipsin köşegenleri denir. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ elipsinde $y = mx$ ve $y = -\frac{b^2}{a^2 m}x$ birer köşegenlerdir. $y = mx$ köşegenine $y = -\frac{b^2}{a^2 m}x$ köşegenin eşleniği denir.



ELİPSİN DIŞ MERKEZİ

3.6. Tanım: Elipsin odaklar arasındaki uzaklığının asal eksen uzunluklarına oranına elipsin dış merkezliği denir ve e ile gösterilir.

$$e = \frac{|FF'|}{|AA'|} = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}$$

$a > c$ olduğundan $0 < e < 1$ olur.

Örnek: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ elipsinin dış merkezini bulunuz.

Çözüm: Odakları x ekseni üzerindedir. $a = 5$ ve $b = 3$ olduğundan,

$$c^2 = a^2 - b^2 = 5^2 - 3^2$$
$$c = 4$$

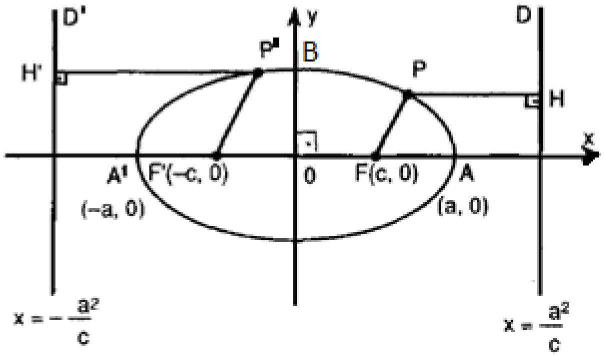
bulunur. Buna göre elipsinin dış merkezi;

$$e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5} < 1$$

elde edilir.

ELİPSİN DOĞRULTMANLARI

3.7. Tanım: Odakları x ekseni üzerinde olan $(a > b)$ ve $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ merkezil elips denkleminde $e = \frac{|PF|}{|PH|}$ değerini sağlayan doğrulara elipsin doğrultmanları denir. Eğer odaklar y ekseni üzerinde ise $(b > a)$ benzer şekilde doğrultmanlar tanımlanır.



3.3. Teorem: Odakları x ekseni üzerinde olan $(a > b)$ ve $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ merkezil elips denkleminde elipsin doğrultmanları $x = \pm\frac{a^2}{c}$ doğrusudur. Eğer odaklar y ekseni üzerinde ise $(b > a)$ elipsin doğrultmanları $y = \pm\frac{b^2}{c}$ doğrusudur.

İspat: P noktasını B noktası üzerine taşıyalım. Bu durumda, $|PF| = a$ olur.

$$\frac{|PF|}{|PH|} = e$$

$$\frac{|PF|}{|PH|} = \frac{c}{a} \quad , \quad \text{(Elipsin dış merkezliğinden)}$$

$$\frac{a}{|PH|} = \frac{c}{a}$$
$$|PH| = \frac{a^2}{c}$$

Buna göre elipsin doğrultmanları $x = \pm\frac{a^2}{c}$ doğrusu olur.

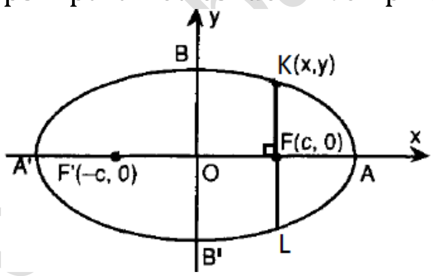
Örnek: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ elipsinin doğrultmanlarını bulunuz.

Çözüm: Odakları x ekseni üzerindedir. $a = 5$ ve $b = 4$ dir.

$$c^2 = a^2 - b^2 = 5^2 - 4^2$$
$$c = 3$$
$$x = \pm\frac{a^2}{c} = \pm\frac{5^2}{3} = \pm\frac{25}{c}$$

ELİPSİN PARAMETRESİ

3.8. Tanım: Elipsin odaklarının herhangi birinden asal eksene dik çizilen kiriş uzunluğuna elipsin parametresi denir ve 2p ile gösterilir.



3.4. Teorem: Odakları x ekseni üzerinde olan ve $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ merkezil elips denkleminde, elipsin parametresi $|KL| = 2p = \pm\frac{2b^2}{a}$ dir. Eğer odakları y ekseni üzerinde ise elipsin parametresi $|KL| = 2p = \pm\frac{2a^2}{b}$ dir.

İspat: K(c, p) noktası $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ denklemini sağladığından,

$$\frac{c^2}{a^2} + \frac{p^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{p^2}{b^2} = 1 - \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2-c^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2}$$
$$p^2 = \frac{b^4}{a^2}$$
$$p = \pm\frac{b^2}{a}$$
$$|KL| = 2p = \pm\frac{2b^2}{a}$$
bulunur.

Örnek: $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1$ elipsinin parametrelerini bulunuz.

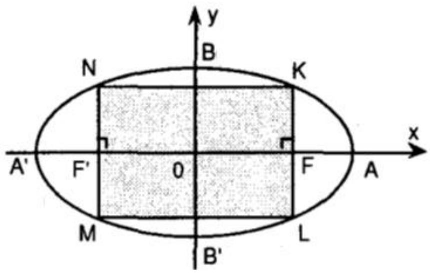
Çözüm: Odakları x ekseni üzerindedir. $a = 13$ ve $b = 5$ dir.
$$|KL| = 2p = \pm\frac{2{\cdot}5^2}{13} = \pm\frac{50}{13}$$

Örnek: $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ elipsinin parametresi ± 9 ise odakları arasındaki uzaklığı bulunuz.

Çözüm: Odakları x ekseni üzerindedir. $a = 8$ ve $2p = 9$ dir.
$$|KL| = 2p = \pm\frac{2b^2}{a}$$
$$9 = \pm\frac{2b^2}{8}$$
$$b = \pm 6$$

Örnek: $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{25} = 1$ elipsinin F ve F' odaklarından asal eksene çizilen dikmeler elipsi noktalarında kestiğine göre, bu noktaların oluşturduğu dikdörtgenin alanını bulunuz.

Çözüm: $a = \pm 6$ ve $b = \pm 5$
$c^2 = a^2 - b^2 = 6^2 - 5^2$ ise $c = \sqrt{11}$



$|NK| = |ML| = |NM| = 2c = 2\sqrt{11}$

$|NM| = |KL| = 2c = \pm\frac{2b^2}{a} = \pm\frac{2\cdot5^2}{6} = \pm\frac{25}{3}$

$A(KLMN) = 2\sqrt{11}\frac{25}{3} = \pm\frac{50\sqrt{11}}{3}\ br^2$

ELİPSİN BASIKLIĞI

İki elipsin şekilleri arasında farklılıklar vardır. Mesela a değerleri aynı olan iki elipsin b değerleri farklı ise b'nin değerine göre şekil değişikliği oluşur. Bu şekil değişikliğini elipsin basıklığı biçiminde tanımlanır.

3.9. Tanım: Büyük eksen uzunluğu ile küçük eksen uzunluğu farkının büyük eksen uzunluğuna oranına elipsin basıklığı denir.

3.5. Teorem: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ merkezil elips denkleminin elipsin basıklığı $1 - \frac{b}{a}$ dir.

İspat: Büyük eksen uzunluğu ile küçük eksen uzunluğu farkının büyük eksen uzunluğuna oranı;

$$\frac{2a-2b}{2a} = \frac{2(a-b)}{2a} = \frac{a-b}{a} = 1 - \frac{b}{a}$$

kadardır.

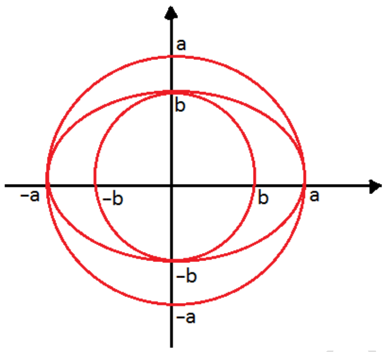
Örnek: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$ elipsinin basıklığını bulunuz.

Çözüm: $a = 4$ ve $b = 5$ dir.

$$1 - \frac{b}{a} = 1 - \frac{5}{4} = -\frac{1}{4}$$

ELİPSİN ASAL ve YEDEK ÇEMBERİ

3.10. Tanım: Çapı asal eksen uzunluğuna eşit olan çembere elipsin asal çemberi, çapı yedek eksen uzunluğuna eşit olan çembere elipsin yedek çemberi denir.



3.1. Sonuç: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ elips denkleminde;

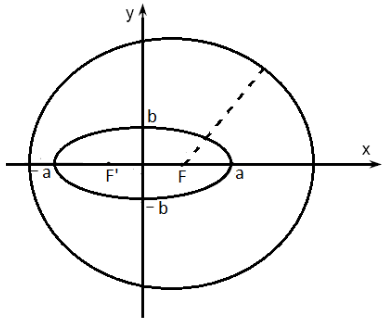
i) Asal çemberin denklemi $x^2 + y^2 = a^2$ dir.
ii) Yedek çemberin denklemi $x^2 + y^2 = b^2$ dir.

Örnek: $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$ elipsinin asal ve yedek çemberin denklemini bulunuz.

Çözüm: $a = \sqrt{8}$ ve $b = 2$ dir.
i) Asal çemberin denklemi $x^2 + y^2 = 8$ dir.
ii) Yedek çemberin denklemi $x^2 + y^2 = 4$ dir.

ELİPSİN DOĞRULTMAN ÇEMBERİ

3.11. Tanım: Merkezi elipsin odaklarından biri ve yarıçap uzunluğu 2a olan çembere elipsin doğrultman çemberi denir.



3.2. Sonuç: Merkezi F(c, 0) ve yarıçapı 2a olan doğrultman çemberin denklemi;

$$(x-c)^2+y^2=4a^2$$

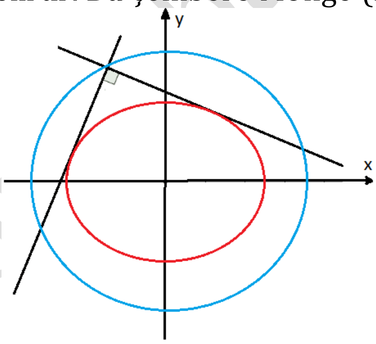
dir. Merkezi F(−c, 0) ve yarıçapı 2a olan doğrultman çemberin denklemi;

$$(x+c)^2+y^2=4a^2$$

dir.

ELİPSİN MONGE (MONJ) ÇEMBERİ

3.12. Tanım: Bir elipste dik kesişen teğetlerin kesim noktalarının geometrik yeri bir çember belirtir. Bu çembere Monge (Monj) çemberi denir.



3.6. Teorem: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ elipsinin Monge (Monj) çemberi;

$$x^2+y^2=a^2+b^2$$

biçimindedir.

İspat: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ elipsi ve $y=mx+n$ teğetini alalım. Elips ve doğru tek bir noktada kesiştikleri için kesişme noktasını veren denklemin tek kökü olmalıdır. Yani elips ve doğru denkleminin ortak çözümünün diskiriminantı 0 dır. Buna göre;

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{(mx+n)^2}{b^2}=1$$

$$b^2x^2+a^2(mx+n)^2=a^2b^2$$

$$b^2x^2+a^2m^2x^2+2a^2mnx+a^2n^2-a^2b^2=0$$

$$(b^2+a^2m^2)x^2+(2a^2mn)x+a^2(n^2-b^2)=0$$

$$\Delta=(2a^2mn)^2-4(b^2+a^2m^2)a^2(n^2-b^2)=0$$

$$a^2[a^2m^2n^2-(b^2+a^2m^2)(n^2-b^2)]=0$$

$$a^2m^2n^2-b^2n^2+b^4-a^2m^2n^2+a^2m^2b^2=0$$

$$-b^2n^2+b^4+a^2m^2b^2=0$$

$$b^2(-n^2+b^2+a^2m^2)=0$$

$$b^2+a^2m^2-n^2=0 \qquad (1)$$

bulunur. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ elipsinin dik kesişen teğetlerinden herhangi ikisinin kesiştiği nokta $A(x_0,\ y_0)$ olsun. Bu teğet doğrularının eğimleri de m_1 ve m_2 ise teğet doğrularının denklemleri;

$$y=m_1(x-x_0)+y_0 \text{ ve } y=m_2(x-x_0)+y_0$$

dir. Bu teğet doğrularının denklemlerini genel olarak,

$$y=m(x-x_0)+y_0$$

olarak yazabiliriz. $y=m(x-x_0)+y_0$ ve $y=mx+n$ denklemlerini birbirlerine eşitlersek,

$$n=-mx_0+y_0 \qquad (2)$$

bulunur. (1) denkleminde (2) denklemini yazarsak,

$$a^2m^2+b^2-(-mx_0+y_0)^2=0$$

$$a^2m^2+b^2-m^2x_0^2-2mx_0y_0-y_0^2=0$$

$$(a^2-x_0^2)m^2-2mx_0y_0+b^2-y_0^2=0 \qquad (3)$$

olur. m'ye bağlı bu ikinci derecede denklemin kökleri teğetlerin eğimleri olan m_1 ve m_2 yi verir. (3) denkleminin kökler çarpımından,

$$m_1m_2=\frac{b^2-y_0^2}{a^2-x_0^2},\ (m_1m_2=-1)$$

$$-1=\frac{b^2-y_0^2}{a^2-x_0^2}$$

$$x_0^2 + y_0^2 = a^2 + b^2$$

x0 ve y0 dik kesişen teğetlerin kesiştiği noktanın apsis ve ordinatı olup, her zaman bu eşitlik geçerlidir. Buna göre dik kesişen teğetler,

$$x^2 + y^2 = a^2 + b^2$$

çemberi üzerinde kesişir.

Örnek: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ elipsinin birbirine dik teğetlerinin kesim noktalarının geometrik yerinin denklemini bulunuz.

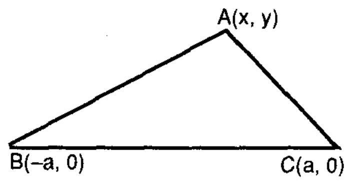
Çözüm: Odakları x ekseni üzerindedir. $a = 5$ ve $b = 4$ olduğundan dik teğetlerinin kesim noktalarının geometrik yerinin denklemi,

$$x^2 + y^2 = 5^2 + 4^2 = 41$$

çemberidir.

Örnek: Köşeleri A(x, y), B(–a, 0), C(a, 0) olan ABC üçgeninin [AB] ve [AC] kenarlarını eğimleri çarpımı, $-\frac{b^2}{a^2}$ dir. A köşesinin geometrik yeri nedir?

Çözüm:



$$m_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y}{x+a}, \; m_{AC} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y}{x-a}$$

$$m_1 m_2 = -\frac{b^2}{a^2}$$

$$\frac{y}{x+a} \cdot \frac{y}{x-a} = -\frac{b^2}{a^2}$$

$$\frac{y^2}{x^2 - a^2} = -\frac{b^2}{a^2}$$

$$a^2 y^2 = -b^2(x^2 - a^2)$$

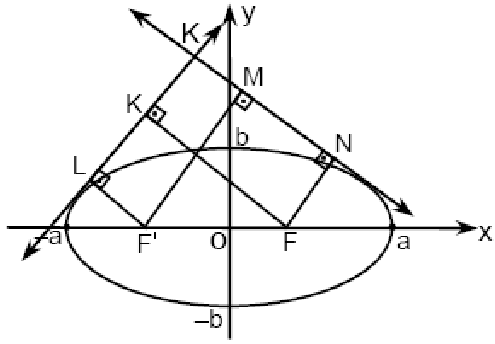
$$b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$$

$$\frac{b^2x^2}{a^2b^2}+\frac{a^2y^2}{a^2b^2}=\frac{a^2b^2}{a^2b^2}$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

A köşesinin geometrik yeri bir elipstir.

3.7. Teorem: Bir elipsin odaklarından elipsin herhangi bir teğetine olan uzaklıkların çarpımları sabittir.

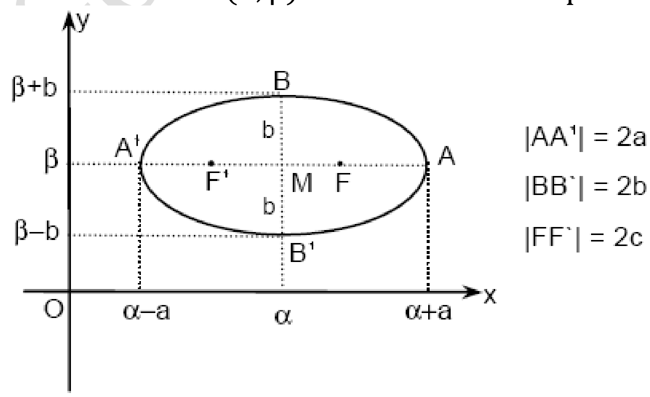


$$|FN|\cdot|F'M|=|FK|\cdot|F'L|=\cdots=b^2$$

Bu teoremin ispatı üçgende benzerlikte kolayca çıktığından okuyucuya bırakılmıştır.

MERKEZİL OLMAYAN ELİPSİN DENKLEMİ ve ELİPSİN ÖTELENMESİ

3.8. Teorem: Merkezi $M(\alpha,\beta)$ noktasında olan elipsin denklemi;



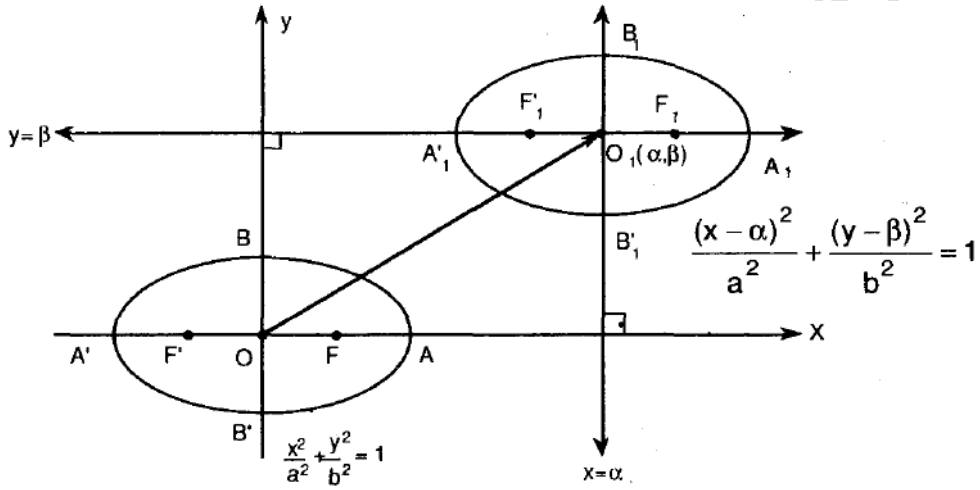
$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$$

dir.

Bu teoremi ispatı 3.1. teoremin ispatına benzer şekilde olduğundan okuyucuya bırakılmıştır.

Koordinatları; $A(\alpha+a,\beta), A'(\alpha-a,\beta), B(\alpha,\beta+b), B'(\alpha,\beta-b)$
Odakları; $A(\alpha+c,\beta), F'(\alpha-a,\beta)$

3.13. Tanım: Merkezi M(0, 0) noktasında olan elipsin $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ denklemi merkezi $M(\alpha,\beta)$ noktasında olan elipsin $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$ noktasına taşınmasına elipsin ötelenmesi adı verilir.



Örnek: $\frac{(x-3)^2}{169}+\frac{(y-4)^2}{144}=1$ denkleminin belirttiği elipsin merkezini ve odaklarını bulunuz.

Çözüm: $\frac{(x-3)^2}{169}+\frac{(y-4)^2}{144}=1$ elipsin merkezini M(3, 4) dür.

$a^2=169$ ise $a=13$

$b^2=144$ ise $b=12$

$c^2=a^2-b^2=169-144=25$ ise $c=5$

bulunur. Buna göre elipsin odakları;

$F(\alpha+c,\beta)=(3+5,4)=(8,4)$

$F'(\alpha-c,\beta)=(3-5,4)=(-2,4)$

olur.

ELİPSİN GENEL DENKLEMİ

3.9. Teorem: Merkezi $M(\alpha, \beta)$ noktasında olan elipsin genel denklemi;

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

dir.

İspat: Elipsin denklemi $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$ idi. Bu denklem şu şekilde düzenlenirse,

$$b^2(x-\alpha)^2 + a^2(y-\beta)^2 = a^2b^2$$

$$b^2(x^2 - 2\alpha x + \alpha^2) + a^2(y^2 - 2\beta y + \beta^2) = a^2b^2$$

$$b^2x^2 + a^2y^2 + (-2b^2\alpha)x + (-2a^2\beta)y + (b^2\alpha^2 + a^2\beta^2 - a^2b^2) =$$

yazılabilir. Burada;

$$b^2 = A, a^2 = C, -2b^2\alpha = D, -2a^2\beta = E \text{ ve } b^2\alpha^2 + a^2\beta^2 - a^2b^2 = F$$

alınırsa genel elips denklemi,

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

elde edilir. $(B = 0)$

Örnek: $\frac{(x-3)^2}{25} + \frac{(y+2)^2}{16} = 1$ denklemden genel elips denklemini bulunuz.

Çözüm: $\alpha = 3, \beta = -2, a = 5, b = 4$

$A = b^2 = 16$

$C = a^2 = 25$

$D = -2b^2\alpha = -2 \cdot 16 \cdot 3 = -96$

$E = -2a^2\beta = -2 \cdot 25 \cdot (-2) = 100$

$F = b^2\alpha^2 + a^2\beta^2 - a^2b^2 = 16 \cdot 9 + 25 \cdot 4 - 25 \cdot 16 = -156$

olacağından,

$$16x^2 + 25y^2 - 96x + 100y - 156 = 0$$

elde edilir.

ELİPSİN ALANI ve ÇEVRE UZUNLUĞU

3.10. Teorem: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ denklemi ile verilen elipsin alanı $A = \pi ab \text{ br}^2$ dir.

Bu teoremin ispatı integralin uygulamaları konusunda örnek olarak verilmiştir.

Örnek: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ elipsin alanını bulunuz.

Çözüm: $a=5, b=4$
$A=\pi ab=\pi 5\cdot 4=20\pi\ br^2$ dir.

3.1. Not: Elipsin çevre uzunluğu çeşitli kitaplarda $Ç=(a+b)\pi$ br olarak verilmesine rağmen bu bilgi yanlıştır. Elipsin çevre uzunluğu Taylor serisi ile yapılabilir. Şimdi Kuvvet serileri konusunda ispatı yapılacak teoremi verelim.

3.10. Teorem: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ denklemi ile verilen elipste, $a>b$ olmak üzere elipsin çevre uzunluğu;

$$Ç=2\pi a\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{\rho^2}{1}-\left(\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\right)^2\frac{\rho^4}{3}-\left(\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\right)^2\frac{\rho^6}{5}-\left(\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8}\right)^2\frac{\rho^8}{7}-\cdots\right]$$

dir. Burada $\rho=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}$ dir.

Bu teoremin ispatı Kuvvet serisi konusunda anlatılacaktır.

Örnek: $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$ elipsinin çevre uzunluğunu bulunuz.

Çözüm: $a^2=8, b^2=4$ ve $\rho=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1-\frac{4}{8}}=\frac{1}{2}$

$$Ç=2\pi 2\sqrt{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{1}-\left(\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\right)^2\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4}{3}-\left(\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\right)^2\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^6}{5}-\left(\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8}\right)^2\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^8}{7}-\cdots\right]$$

$$=4\sqrt{2}\pi\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{28}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^4\frac{1}{3}-\left(\frac{15}{48}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^6\frac{1}{5}-\left(\frac{105}{384}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^8\frac{1}{7}\cdots\right]$$

$$=4\sqrt{2}\pi\left[1-\frac{1}{16}-\frac{3}{1024}-\frac{5}{8192}-\frac{1575}{147457}\cdots\right]$$

$= 16{,}5897052219$ br

ELİPS İLE DOĞRUNUN BİRBİRİNE GÖRE DURUMLARI

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ elipsi ile $y = mx + n$ doğrusunu ele alalım.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(mx+n)^2}{b^2} = 1$$

$$b^2x^2 + a^2(mx+n)^2 = a^2b^2$$

$$b^2x^2 + a^2m^2x^2 + 2a^2mnx + a^2n^2 - a^2b^2 = 0$$

$$(a^2m^2 + b^2)x^2 + (2a^2mn)x + a^2(n^2 - b^2) = 0$$

İkinci dereceden denklemde,

$$\Delta = (2a^2mn)^2 - 4a^2(a^2m^2 + b^2)(n^2 - b^2)$$

$$= 4a^4m^2n^2 - 4a^2(a^2m^2n^2 - a^2m^2b^2 + b^2n^2 - b^4)$$

$$= 4a^2(a^2m^2n^2 - a^2m^2n^2 + a^2m^2b^2 - b^2n^2 + b^4)$$

$$= 4a^2b^2(a^2m^2 - n^2 + b^2)$$

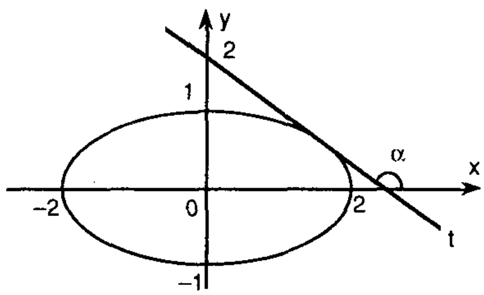
bulunur. Burada $4a^2b^2 > 0$ olduğundan,

$$\Delta_1 = a^2m^2 - n^2 + b^2$$

alınabilir.

i) $\Delta_1 = a^2m^2 - n^2 + b^2 > 0$ doğru elipsi 2 farklı noktada keser.
ii) $\Delta_1 = a^2m^2 - n^2 + b^2 = 0$ doğru elipse teğettir.
iii) $\Delta_1 = a^2m^2 - n^2 + b^2 < 0$ doğru elipsi kesmez.

Örnek: $\frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1$ elipsine 135^0 teğet olan doğrusunun denklemi nedir?



Çözüm: Teğet $y = mx + n$ doğrusu olsun.
$a = 2, b = 1$ ve $m = \tan 135 = -1$
$\Delta_1 = a^2m^2 - n^2 + b^2 = 2^2m^2 - n^2 + 1^2 = 4m^2 - n^2 + 1$
$4(-1)^2 - n^2 + 1 = 0$
$n = \pm\sqrt{5}$
$y = -x \pm \sqrt{5}$

Örnek: $x^2 + 8y^2 = 48$ elipsinin $x - 4y + k = 0$ doğrusuna teğet olması için k'nın alabileceği değerler nelerdir?

Çözüm: $a^2 = 48, b^2 = 6$ ve $y = \frac{x}{4} + \frac{k}{4}$

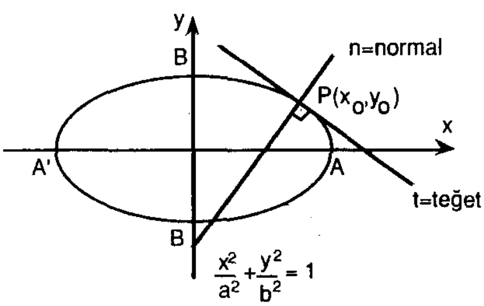
Teğet olma şartından,
$\Delta_1 = a^2m^2 - n^2 + b^2$
$48\left(\frac{1}{4}\right) - \left(\frac{k}{4}\right)^2 + 6 = 0$
$k = 12\sqrt{12}$
bulunur.

ELİPSTE TEĞET ve NORMALİN DENKLEMİ

3.12. Teorem: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ elipsi üzerindeki $P(x_0, y_0)$ noktasından çizilen teğetin denklemi;

$$\frac{x \cdot x_0}{a^2} + \frac{y \cdot y_0}{b^2} = 1$$

dir.



İspat: $P(x_0, y_0)$ noktası teğet üzerinde olduğundan doğrunun denklemini sağlar. Buna göre;

$$y_0 = mx_0 + n$$

dir. Bu değeri teğet olma şartında yerine yazarsak,

$$\Delta_1 = a^2m^2 - n^2 + b^2 = 0$$

$$= a^2m^2 - (y_0 - mx_0)^2 + b^2 = 0$$

$$= a^2m^2 - y_0^2 + 2mx_0y_0 - m^2x_0^2 + b^2 = 0$$

$$= (a^2 - x_0^2)m^2 + 2mx_0y_0 + (b^2 - y_0^2) = 0$$

bulunur. Doğru elipse teğet olduğundan 2. oluşan bu denklemin kökleri birbirine eşittir.

$$m_1 = m_2 = -\frac{b}{2a} = -\frac{2x_0y_0}{2(a^2-x_0^2)}$$

olduğunda teğetin eğimi $m_T = -\frac{x_0y_0}{a^2-x_0^2}$ olur. Bu eğimi doğru denkleminde yerine yazarsak,

$$n = y_0 - mx_0 = y_0 - \left(-\frac{x_0y_0}{a^2-x_0^2}\right)x_0 = \frac{a^2y_0}{a^2-x_0^2}$$

bulunur. Buna göre doğru;

$$y = mx + n = \left(-\frac{x_0y_0}{a^2-x_0^2}\right)x + \frac{a^2y_0}{a^2-x_0^2} = \frac{a^2y_0-x_0y_0x}{a^2-x_0^2} \qquad (1)$$

dir. Ayrıca $P(x_0, y_0)$ noktası elips üzerinde olduğundan,

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$$

$$b^2x_0^2 + a^2y_0^2 = a^2b^2$$

$$a^2y_0^2 = a^2b^2 - b^2x_0^2$$

$$\frac{a^2y_0^2}{b^2} = a^2 - x_0^2 \qquad (2)$$

bulunur. (2) denklemini (1) noktasında yerine yazarsak,

$$y = \frac{a^2y_0-x_0y_0x}{a^2-x_0^2} = \frac{a^2y_0-x_0y_0x}{\frac{a^2y_0^2}{b^2}} = \frac{a^2b^2y_0-x_0y_0b^2x}{a^2y_0^2}$$

$$a^2y_0y = a^2b^2y_0 - x_0y_0b^2x$$

$$x_0y_0b^2x + a^2y_0y = a^2b^2y_0$$

$$\frac{x_0y_0b^2x}{a^2b^2y_0} + \frac{a^2y_0^2y}{a^2b^2y_0} = 1$$

$$\frac{x \cdot x_0}{a^2} + \frac{y \cdot y_0}{b^2} = 1$$

olur. //

Bu teoremde teğetin eğimi türev yöntemiyle de bulunur.

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ elipsin türevini alalım.

$$y' = \frac{\frac{2x}{a^2}}{\frac{2y}{b^2}} = \frac{b^2 x}{a^2 y}$$

$P(x_0, y_0)$ noktasında teğetin eğimi $m_T = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}$ olur. Bu denklem doğru denkleminde yerine yazılarak,

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - y_0 = \left(-\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}\right)(x - x_0)$$

$$a^2 y_0 y - a^2 y_0 y_0 = -b^2 x_0 x + b^2 x_0 x_0$$

$$a^2 y_0 y + b^2 x_0 x = a^2 y_0^2 + b^2 x_0^2$$

$$a^2 y_0 y + b^2 x_0 x = a^2 b^2, \quad (a^2 y_0^2 + b^2 x_0^2 = a^2 b^2)$$

$$\frac{x \cdot x_0}{a^2} + \frac{y \cdot y_0}{b^2} = 1$$

bulunur.

3.13. Teorem: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ elipsi üzerindeki $P(x_0, y_0)$ noktasından çizilen normalin denklemi;

$$y - y_0 = \frac{a^2 y_0}{b^2 x_0}(x - x_0)$$

dir.

İspat: 3.12. teoremde $P(x_0, y_0)$ noktasındaki teğetin eğimi $m_T = -\frac{x_0 y_0}{a^2 - x_0^2}$ olarak bulunmuştu. (2) denklemini bu denklemde yerine yazarsak,

$$m_T = -\frac{x_0y_0}{a^2-x_0^2} = -\frac{x_0y_0}{\frac{a^2y_0^2}{b^2}} = -\frac{b^2x_0y_0}{a^2y_0^2} = -\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$$

bulunur. Normalin eğimi teğetin eğimine dik olacağından normalin eğimi,

$$m_N \cdot m_T = -1$$

$$m_N\left(-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}\right) = -1$$

$$m_N = \frac{a^2y_0}{b^2x_0}$$

dir. Buna göre $P(x_0, y_0)$ noktasındaki normalin denklemi,

$$y - y_0 = \frac{a^2y_0}{b^2x_0}(x - x_0)$$

olur.

Örnek: $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{8} = 1$ elipsinin P(3, –2) noktasındaki teğet ve normalinin denklemini bulunuz.

Çözüm: $a^2 = 18, b^2 = 8$ ve P(3, –2) noktası $\frac{3^2}{18} + \frac{(-2)^2}{8} = 1$ olup denklemi sağlar.

$$m_T = -\frac{x_0y_0}{a^2-x_0^2} = -\frac{3\cdot(-2)}{18-3^2} = \frac{2}{3}$$

$$m_N = \frac{a^2y_0}{b^2x_0} = \frac{18\cdot(-2)}{8\cdot 3} = -\frac{3}{2}$$

Teğet denklemi $\frac{x\cdot 3}{18} + \frac{y\cdot(-2)}{8} = 1$ ise $2x - 3y - 6 = 0$

Normalin denklemi $y - (-2) = -\frac{3}{2}(x - 3)$ ise $2x - 3y - 5 = 0$

Örnek: $\frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{10} = 1$ elipsinin P(1, -2) noktasındaki teğetin ve normalin eğimi nedir?

Çözüm: $a^2 = 7, b^2 = 10$ ve P(1,–2) noktasında $\frac{1^2}{7} + \frac{(-2)^2}{10} = \frac{1}{7} + \frac{2}{5} \neq 1$ olduğundan bu nokta elips üzerinde değildir. Bu yüzden teğet ve normalin denklemi yazılamaz.

DEĞME NOKTASININ KOORDİNATLARI

3.14. Teorem: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ elipsi üzerinde $P(x_0, y_0)$ noktasından çizilen teğet var ise,

$$P(x_0, y_0) = P\left(\frac{a^2m}{n}, \frac{b^2}{n}\right)$$

dir.

İspat: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ elipsine çizilen teğetin denklemi, 3.12. teoremde $\frac{x \cdot x_0}{a^2}+\frac{y \cdot y_0}{b^2}=1$ idi. Buradan $a^2y_0y+b^2x_0x=a^2b^2$ yazılabilir. $y=mx+n$ doğrusu ile elips çakışık olmalıdır. Öyleyse;

$$\left.\begin{aligned} a^2y_0y+b^2x_0x-a^2b^2&=0 \\ mx-y+n&=0 \end{aligned}\right\}$$

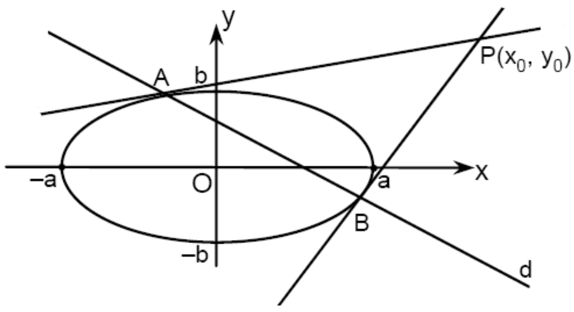
$$\frac{b^2x_0}{m}=\frac{a^2y_0}{-1}=\frac{-a^2b^2}{n}=$$

$$x_0=\frac{a^2m}{n} \text{ ve } y_0=\frac{b^2}{n}$$

bulunur. Buna göre değme noktasının koordinatları $P\left(\frac{a^2m}{n}, \frac{b^2}{n}\right)$ olur.

ELİPSTE KUTUP DOĞRULARI

3.14. Tanım: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ elipsi dışındaki $P(x_0, y_0)$ noktasından çizilen teğetler elipse A ve B noktalarında teğet olsun. AB doğrusuna elipsin kutup doğrusu (değme kirişi) denir.



3.12. Teoremden d doğrusunun denklemi $\frac{x \cdot x_0}{a^2} + \frac{y \cdot y_0}{b^2} = 1$ dir.

ÇÖZÜMLÜ ALIŞTIRMALAR

1. Asal eksen köşeleri A(4, 0), A'(−4, 0) olan ve D(0, 5) noktasından geçen merkezil elipsin yedek ekseninin bir apsisi nedir?

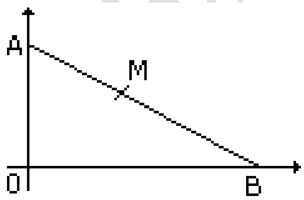
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ elips denkleminde $a = 4$ dir. D(0, 5) noktasından denklem sağladığından,

$$\frac{0^2}{4^2} + \frac{5^2}{b^2} = 1$$
$$b = \mp 4$$

Cevap: E

2.

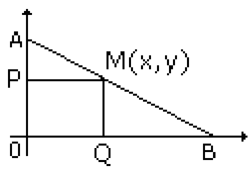


Yandaki şekilde $|AB| = 10$ br ve $\frac{|MA|}{|MB|} = \frac{3}{2}$ tür. A ve B noktaları koordinat eksenleri üzerinde olmak üzere AB doğru parçası kaydırıldığında M noktasının geometrik yeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$ B) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ C) $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$

D) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ E) $x^2 + y^2 = 1$

Çözüm:



M(x, y) olsun. $\frac{|MA|}{|MB|} = \frac{3}{2}$ ve $|AB| = 10$ br olduğundan $|MA| + |MB| = 10$ br'dir. Bu iki eşitlikten, $|MA| = 6, |MB| = 4$ dir. APM üçgeni ile MQB üçgeni benzer üçgenler olduklarından,

$$\frac{|MA|}{|MB|} = \frac{|PM|}{|QB|}$$

MQB dik üçgeninde;

$$|QB|^2 = |MB|^2 - |MQ|^2$$
$$|QB| = \sqrt{4^2 - y^2}$$

ve

$$\frac{3}{2} = \frac{x}{\sqrt{16-y^2}}$$
$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$$

elde edilir.

Cevap: C

3. $y = mx + 5$ doğrusu $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ elipsine teğet olduğuna göre, m aşağıdakilerden hangisidir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ elipsine $y = mx + 5$ doğrusu teğet ise değme şartı $a^2m^2 + b^2 - n^2 = 0$ olduğuna göre,

$$a = 4, b = 3, n = 5$$
$$16m^2 + 9 - 25 = 0$$
$$m = \mp 1$$

olur.

Cevap: A

4. Asal eksenler arası uzaklık 4 birim, odakları arası uzaklığı 2 birim olan noktaların elipsin yedek eksenleri arası uzaklığı kaçtır?

A) 1 B) $\sqrt{3}$ C) 2 D) $\sqrt{5}$ E) 3

Çözüm: $AA' = 2a = 4 \Leftrightarrow a = 2$
$FF' = 2c = 2 \Leftrightarrow c = 1$

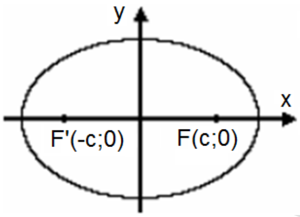
$$a^2 + b^2 = c^2 \Leftrightarrow 2^2 + b^2 = 1^2 \Leftrightarrow b = \pm\sqrt{3}$$

Cevap: B

5. $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$ elipsin odaklarının koordinatları aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(\pm1, 0)$ B) $(\pm2, 0)$ C) $(0, \pm2)$ D) $(\pm1, \pm2)$ E) $(\pm2, \pm2)$

Çözüm:



$$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$$

$a^2 = 8, b^2 = 4$

$a^2 = b^2 + c^2$
$8 = 4 + c^2$
$c = \pm2$

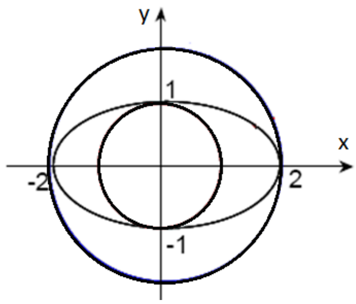
Buna göre elipsin odaklarının koordinatları; $(\pm2, 0)$ dır.

Cevap: B

6. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ elipsi ile bu elipsin asal çemberleri ile yedek çemberinin alanları farkı nedir?

A) 3π B) 4π C) 5π D) 6π E) 7π

Çözüm: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ elipsinde $a = 3$ ve $b = 2$ dir.



Elipsin çevreleyen en küçük çembere asal dairesi, elipsi çevreleyen en büyük çembere yedek dairesi denir. $a = 3$ ve $b = 2$ olduğundan;

Asal çemberinin alanı $S_1 = \pi \cdot a^2 = 9\pi$
Yedek çemberinin alanı $S_2 = \pi \cdot b^2 = 4\pi$
olduğundan $S_1 - S_2 = 9\pi - 4\pi = 5\pi$ br^2 olarak bulunur.

Cevap: C

7. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ elipsinde $\frac{a}{c} = \frac{5}{4}$ ve $a - b = 2$ olduğuna göre, b'nin değeri kaçtır?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

Çözüm: Bir elipste $a^2 = b^2 + c^2$ olduğuna göre

$$c = \frac{4a}{5} \text{ ve } a - b = 2$$
$$a^2 = b^2 + \frac{16a^2}{25} \text{ ve } a - b = 2$$
$$\frac{9a^2}{25} = b^2 \text{ ve } a - b = 2$$

eşitlikleri bulunur. Buna göre $a = 5$ ve $b = 3$ dir.

Cevap: A

8. $16x^2 + 36y^2 = 25$ elipsinin parametresi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\pm\frac{8}{9}$ B) $\pm\frac{10}{9}$ C) $\pm\frac{11}{9}$ D) $\pm\frac{13}{9}$ E) $\pm\frac{14}{9}$

Çözüm: $16x^2 + 36y^2 = 25$

$$\frac{x^2}{\left(\frac{5}{4}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{5}{6}\right)^2} = 1$$

elde edilir. Elipsinin parametresi

$$2p = \pm\frac{2b^2}{a} = \pm\frac{2\left(\frac{5}{6}\right)^2}{\left(\frac{5}{4}\right)} = \pm\frac{8}{9}$$

biçimindedir.

Cevap: A

9. $8x^2 + 20y^2 = 160$ elipsinin dış merkezi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{\sqrt{3}}{5}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{7}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{8}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{10}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{11}$

Çözüm: $8x^2 + 20y^2 = 160$

$$\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{8} = 1$$

$a = 20$ ve $b = 8$

bulunur. Buna göre elipsinin dış merkezi

$$c^2 = a^2 - b^2 = 20 - 8 = 12$$

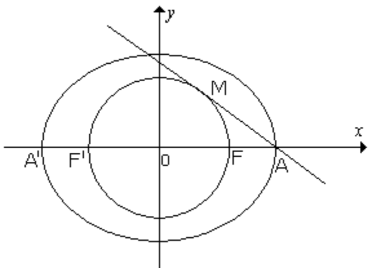
$$c = 2\sqrt{3}$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{3}}{20} = \frac{\sqrt{3}}{10}$$

elde edilir.

Cevap: D

10. $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$ elipsine yedek çember şekildeki gibi M noktasında teğettir. M noktasının oordinatı nedir?



A) $\frac{15}{2}$ B) $\frac{16}{3}$ C) $\frac{17}{4}$ D) $\frac{17}{5}$ E) $\frac{18}{5}$

Çözüm: F odak noktası olsun. Buna göre F nin apsisi $c = \sqrt{100 - 64} = 6$ olup çemberin yarıçapı 6 olduğunu gösterir. OMA dik üçgen ve $A(10, 0)$ olduğundan $|MA| = 8$ dir. Buradan da M'nin oordinatı $y = \frac{6 \cdot 8}{10} = \frac{24}{5}$ tir. Son olarak yerine yazarsak,

$$x^2+y^2=36$$
$$x=\sqrt{36-\frac{576}{25}}=\frac{18}{5}$$

olarak bulunur.

Cevap: E

11. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ elipsinin odakları arasındaki uzaklık kaç birimdir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$

$$a=3 \text{ ve } b=2$$

bulunur. Buna göre elipsinin odakları arasındaki uzaklık,

$$c=\sqrt{3^2-2^2}=5$$
$$2c=10$$

dir.

Cevap: E

12. $y=-2x$ doğrusu, $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{25}=1$ elipsinin bir köşegenidir. Eşlenik köşegenin denklemi nedir?

A) $y=-2x$ B) $y=2x$ C) $y=-3x$ D) $y=3x$ E) $y=x$

Çözüm: $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{64}=1$ elipsine göre, $a=\pm4, b=\pm8$ dır. Şu halde $y=-2x$ doğrusuna göre eşlenik köşegeni,

$$y=-\frac{b^2}{a^2m}x=-\frac{8^2}{4^2(-2)}x=2x$$

olarak bulunur.

Cevap: B

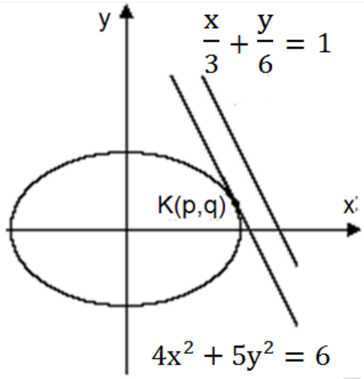
13. $4x^2+5y^2=6$ elipsinin $\frac{x}{3}+\frac{y}{6}=1$ doğrusuna en yakın noktasının apsisi sinüsün hangi değerine eşittir?

A) 0 B) 30 C) 45 D) 60 E) 90

Çözüm: $4x^2 + 5y^2 - 6 = 0$ kapalı fonksiyonun türevi,

$$y' = -\frac{8x}{10y} = -\frac{4x}{5y}$$

olduğundan $K(p,q)$ noktasından geçen teğetin eğimi $m = -\frac{4p}{5q}$ dir.



$K(p,q)$ noktasının $\frac{x}{3} + \frac{y}{6} = 1$ ise $y = 6 - 2x$ doğrusuna uzaklığının minimum olması için $K(p,q)$ noktasından geçen teğet ile $y = 6 - 2x$ doğrusunun birbirlerine paralel olması gerekmektedir. O halde; $y' = -2 = m$ olur. Buna göre,

$$-2 = -\frac{4p}{5q} \text{ ise } q = \frac{2p}{5}$$

$K(p,q)$ noktası elips üzerinde olduğundan elips denklemini sağlar.

$$4p^2 + 5q^2 = 6$$

$$4p^2 + 5\left(\frac{2p}{5}\right)^2 = 6$$

$$p = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 60$$

Cevap: D

KAYNAKÇA

1. H. Hilmi HACISALİHOĞLU, 2ve 3 Boyutlu Uzayda Analitik Geometri, 7. Bakı, 2005, ANKARA.
2. H. Hilmi HACISALİHOĞLU, Lise Matematik 1, 2, 3, Serhat Yayınları A.Ş. İstanbul, 2001.
3. M. Zeki DERMAN, Ökkeş ÖZKÖSELER, Bayram ÇETİNER, Zafer Yayınları, Ankara, 2005.
4. Ali Rıza İLDENİZ, İsmet PARILDAR, Kemal ALAGÖZ, Tacim GÖLPINAR, Sayısal 1-2, Modern Matematik, Yıldırım Yayınları, 1986, ANKARA.
5. Hüseyin UÇAR, Ali ÖRNEK, Analitik Geometri, İlköğretim Matematik Alan Bilgisi, ABY yayınları, 2014, ANKARA.
6. Emrullah KAPLAN, Analitik Geometri, Etkin Yayıncılık, 2001, ANKARA.

7. Nevzat ASMA, Halit BIYIK, 12. Sınıf Analitik Geometri Konu Özetli oru Bankası, Esen Yayınları, 2008, ANKARA.
8. Mehmet GÜRKAN, Abdullah DEMİRALP, Tahsin PELİT, Analitik Geometri, Lise Ders Kitabı, Başarı Yayınları, Ankara, 2011.
9. Prof. Dr. Yusuf AVCI, Prof. Dr. Ahmet DERNEK, Öğr. Müyesser SAKA, Lise Analitik Geometri Ders Kitabı, Deniz Yayınevi, İstanbul, 2001.