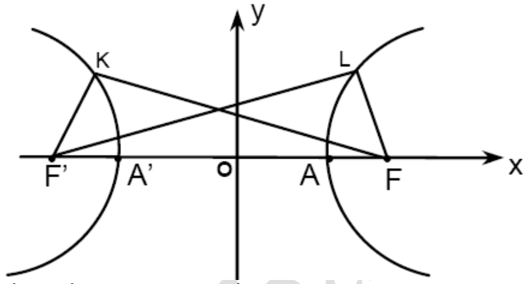
4. BÖLÜM
HİPERBOLÜN ANALİTİĞİ

HİPERBOL ve HİPERBOLÜN DENKLEMİ

4.1.Tanım: Düzlemde sabit iki noktaya olan uzaklıkları farkı sabit olan noktaların kümesine hiperbol denir. Sabit olan iki nokta hiperbolün odakları, odakların orta noktasına da hiperbolün merkezi denir.



$$\big||KF| - |KF'|\big| = \big||LF| - |LF'|\big| = 2a$$

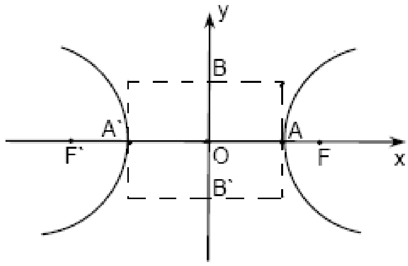
A ve A' noktaları hiperbolün köşeleridir.
F ve F' noktaları hiperbolün odaklarıdır.

P(x, y) noktası odaklara olan uzaklığı daima sabittir. Yani; $|AA'| = 2a$ ise

$$\big||PF| - |PF'|\big| = \big||KF| - |KF'|\big| = \big||AF| - |AF'|\big| = 2a$$

dır.

4.2. Tanım: $F'(-c, 0)$ ve $F(c, 0)$ hiperbolün odakları, $A'(-a, 0)$ ve $A(a, 0)$ hiperbolün köşeleri olsun. Bir hiperbolde $c^2 = a^2 + b^2$ denklemini sağlayacak şekilde $B'(-b, 0)$ ve $B(b, 0)$ noktaları tanımlanır. $A'(-a, 0)$ ve $A(a, 0)$ noktalarına asal eksen köşegenleri, $B'(-b, 0)$ ve $B(b, 0)$ noktalarına yedek eksen köşegenleri adı verilir. $|AA'| = 2a$ asal eksen uzunluğu, $|BB'| = 2a$ yedek eksen uzunluğu denir.



4.1. Teorem: $F'(-c, 0)$ ve $F(c, 0)$ hiperbolün odakları, $A'(-a, 0)$ ve $A(a, 0)$ hiperbolün asal eksen köşeleri $B'(-b, 0)$ ve $B(b, 0)$ noktalarına yedek eksen köşegenleri olsun. Bu takdirde merkezil hiperbol denklemi;

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

dir.

İspat: $P(x, y)$ noktası hiperbolde keyfi nokta olsun. $P(x, y)$ noktasının sabit iki noktaya olan uzaklıkları farkı daima sabit olduğundan $\left||PF'| - |PF|\right| = 2a$ olur.

$$|PF'|^2 - 2|PF||PF'| + |PF|^2 = 4a^2$$
$$(x - c)^2 + y^2 + (x + c)^2 + y^2 - 4a^2 = 2|PF||PF'|$$
$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 + x^2 + 2cx + c^2 + y^2 - 4a^2 = 2|PF||PF'|$$
$$(x^2 + y^2) + (c^2 - 2a^2) = \sqrt{(x - c)^2 + y^2} \cdot \sqrt{(x + c)^2 + y^2}$$

eşitliklerini yazabiliriz. Son eşitlikte iki yanın da karesini alarak,

$$(x^2 + y^2)^2 + 2(x^2 + y^2)(c^2 - 2a^2) + (c^2 - 2a^2)^2 = [(x - c)^2 + y^2] \cdot [(x + c)^2 + y^2]$$

Eşitliğini elde ederiz. Bu eşitlikte gördüğümüz kare alma ve çarpma işlemlerini yaparak

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

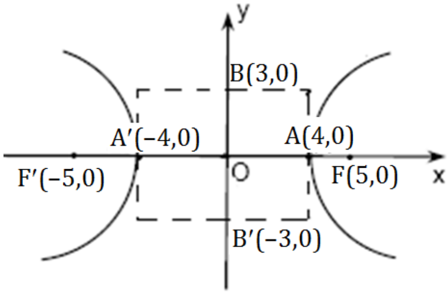
bulunur. $2c > 2a$ olduğundan $c^2 - a^2 > 0$ dır. Öyleyse $b^2 = c^2 - a^2$ yazarsak

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

elde edilir.

Örnek: $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ hiperbolünün denklemini bulunuz ve grafiğini çiziniz.

Çözüm: $a = 4, b = 3$ olduğundan $c^2 = a^2 + b^2 = 4^2 + 3^2$ olup $c = \pm 5$ olur.



//

Bu soruda;
Asal eksen uzunluğu $|AA'| = 2a = 2 \cdot 4 = 8$ br
Yedek eksen uzunluğu $|BB'| = 2b = 2 \cdot 3 = 6$ br
Odaklar arası uzunluk $|FF'| = 2c = 2 \cdot 5 = 10$ br

Örnek: Asal eksen köşeleri $A(2,0)$ noktasında olan ve $K(4,1)$ noktasından geçen hiperbolün denklemini bulunuz.

Çözüm: $a = 2$ olduğundan elips $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ şeklindedir. $K(4,1)$ noktası denklemini sağladığından,

$$\frac{4^2}{4} - \frac{1^2}{b^2} = 1$$
$$b^2 = \frac{1}{3}$$
$$\frac{x^2}{4} - 3y^2 = 1$$

denklemi elde edilir.

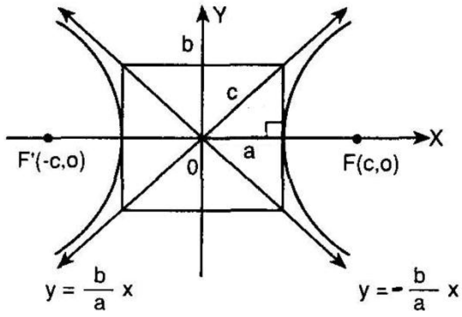
Örnek: $(x-4)(x+4) = 4y^2$ denklemi analitik düzlemde ne belirtir?

Çözüm: $(x-4)(x+4) = 4y^2$
$$x^2 - 16 = 4y^2$$
$$x^2 - 4y^2 = 16$$
$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$$

olup hiperbol belirtir.

HİPERBOLÜN ASİMPTOTLARI

4.3. Tanım: Bir hiperbolün merkezinden geçen eğik asimptotlara hiperbolün asimtotları denir. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ hiperbolünde $y = \mp \frac{b}{a}x$ birer eğik asiasimptotlarıdır.



Örnek: $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{2} = 1$ hiperbolünün asimptotlarının denklemini bulunuz.

Çözüm: $a = 2$ ve $b = \sqrt{2}$ olduğundan asimptotlarının denklemleri

$$y = \mp \frac{b}{a}x = \mp \frac{\sqrt{2}}{2}x$$

olur.

Örnek: Bir asimptotunun denklemi $y = 2x$ olan ve $P(10, 12)$ noktasından geçen hiperbolün denklemini yazınız.

Çözüm: $y = \mp \frac{b}{a}x \Leftrightarrow 2 = \frac{b}{a} \Leftrightarrow b = 2a$

olur. Ayrıca $P(10, 12)$ noktası, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ hiperbolünün üzerinde olduğuna göre denklemi sağlamalıdır.

$$\frac{10^2}{a^2} - \frac{12^2}{(2a)^2} = 1$$

$$\frac{100}{a^2} - \frac{144}{4a^2} = 1$$

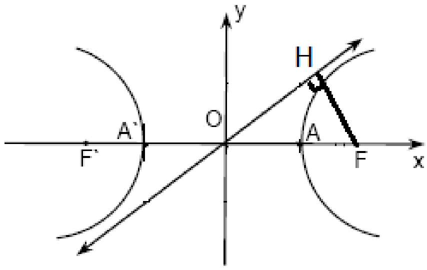
$$a^2 = 64$$

$$a = 8 \text{ ve } b = 16$$

$$\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{256} = 1$$

4.2. Teorem: Denklemi $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{2} = 1$ olan hiperbolde, odaklardan birinin asimptotlardan birine olan uzaklığı sabittir ve $|b|$ dir.

İspat:



$F(c,0)$ noktasının $bx - ay = 0$ esimptotuna uzaklığı;

$$|FH| = \frac{|bc+(-a)\cdot 0|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|bc|}{\sqrt{c^2}} = |b|$$

bulunur.

HİPERBOLÜN DIŞ MERKEZİ

4.4. Tanım: Hiperbolün odaklar arasındaki uzaklığının asal eksen uzunluklarına oranına elipsin dış merkezliği denir ve e ile gösterilir.

$$e = \frac{|FF'|}{|AA'|} = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a} > 1$$

Örnek: $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ hiperbolünün dış merkezini bulunuz.

Çözüm: Odakları x ekseni üzerindedir. $a = 4$ ve $b = 3$ olduğundan,

$$c^2 = a^2 + b^2 = 4^2 + 3^2$$
$$c = 5$$

bulunur. Buna göre elipsinin dış merkezi;

$$e = \frac{c}{a} = \frac{5}{4} > 1$$

elde edilir.

HİPERBOLÜN DOĞRULTMANLARI

4.5. Tanım: Merkezi odaklardan biri ve yarıçapı 2a olan çembere hiperbolün dogrultman çemberi denir.

4.3. Teorem: Odakları x ekseni üzerinde olan $(a > b)$ ve $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ merkezil hiperbolün denkleminde hiperbolün doğrultmanları $x = \pm\frac{a^2}{c}$ doğrusudur. Eğer odaklar y ekseni üzerinde ise $(b > a)$ elipsin doğrultmanları $y = \pm\frac{b^2}{c}$ doğrusudur.

Bu teoremin ispatı elipsteki gibi benzer şekilde yapıldığından okuyucuya bırakılmıştır.

Örnek: $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$ elipsinin doğrultmanlarını bulunuz.

Çözüm: Odakları x ekseni üzerindedir. $a = 5$ ve $b = 4$ dir.

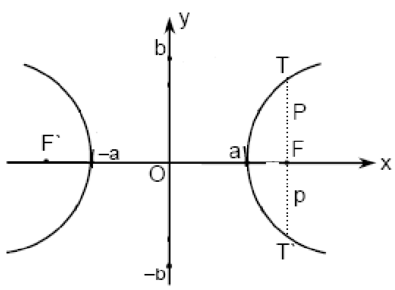
$$c^2 = a^2 - b^2 = 5^2 - 4^2$$

$$c = 3$$

$$x = \pm\frac{a^2}{c} = \pm\frac{5^2}{3} = \pm\frac{25}{c}$$

HİPERBOLÜN PARAMETRESİ

4.6. Tanım: Odakları x ekseni üzerinde olan $(a > b)$ ve $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ merkezil hiperbolün denkleminde $e = \frac{|TF|}{|T'F|}$ değerini sağlayan doğrulara hiperbolün parametresi denir.



[TT'] hiperbolün parametresi

$|TT'| = \frac{2b^2}{a} = 2p$

4.4. Teorem: Odakları x ekseni üzerinde olan ve $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ merkezil elips denkleminde, hiperbolün parametresi $|TT'|=2p=\pm\frac{2b^2}{a}$ dir. Eğer odakları y ekseni üzerinde ise hiperbolün parametresi $|KL|=2p=\pm\frac{2a^2}{b}$ dir.

Bu teoremin ispatı elipsteki gibi benzer şekilde yapıldığından okuyucuya bırakılmıştır.

Örnek: $\frac{x^2}{144}-\frac{y^2}{36}=1$ elipsinin parametrelerini bulunuz.

Çözüm: Odakları x ekseni üzerindedir. $a=12$ ve $b=6$ dir.

$$|KL|=2p=\pm\frac{2\cdot 6^2}{12}=\pm 6$$

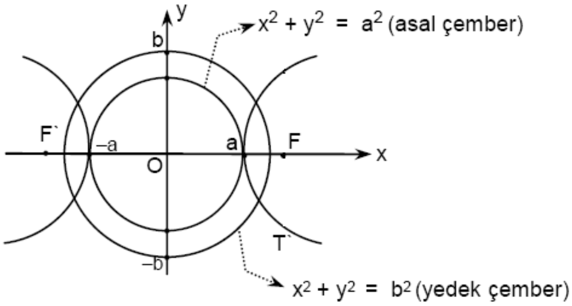
Örnek: $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{b^2}=1$ elipsinin parametresi ± 4 ise odakları arasındaki uzaklığı bulunuz.

Çözüm: Odakları x ekseni üzerindedir. $a=8$ ve $2p=4$ dir.

$$|KL|=2p=\pm\frac{2b^2}{a}$$
$$4=\pm\frac{2b^2}{8}$$
$$b=\pm 4$$

HİPERBOLÜN ASAL ve YEDEK ÇEMBERİ

4.7. Tanım: Çapı asal eksen uzunluğuna eşit olan çembere hiperbolün asal çemberi, çapı yedek eksen uzunluğuna eşit olan çembere hiperbolün yedek çemberi denir.



4.1. Sonuç: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ hiperbolünde;

i) Asal çemberin denklemi $x^2 + y^2 = a^2$ dir.
ii) Yedek çemberin denklemi $x^2 + y^2 = b^2$ dir.

Örnek: $\dfrac{x^2}{8} - \dfrac{y^2}{4} = 1$ hiperbolünün asal ve yedek çemberin denklemini bulunuz.

Çözüm: $a = \sqrt{8}$ ve $b = 2$ dir.
i) Asal çemberin denklemi $x^2 + y^2 = 8$ dir.
ii) Yedek çemberin denklemi $x^2 + y^2 = 4$ dir.

HİPERBOLÜN DOĞRULTMAN ÇEMBERİ

4.8. Tanım: Merkezi hiperbolün odaklarından biri ve yarıçap uzunluğu 2a olan çembere hiperbolün doğrultman çemberi denir.

4.2. Sonuç:
i) $F(c, 0) \wedge r = 2a$ ise $(x - c)^2 + y^2 = 4a^2$
ii) $F(-c, 0) \wedge r = 2a$ ise $(x + c)^2 + y^2 = 4a^2$

Örnek: $\dfrac{x^2}{36} - \dfrac{y^2}{16} = 1$ hiperbolünün, asal, yedek ve doğrultman çemberinin denklemlerini bulunuz.

Çözüm: Verilen denklemde $a^2 = 36, b^2 = 16$ olduğundan

$$c^2 = a^2 + b^2 = 36 + 16 = 52$$

olur. Buna göre $a = 6, b = 4, c = 2\sqrt{13}$ olduğundan hiperbolün odakları $F\left(2\sqrt{13}, 0\right)$ ve $F'(-2\sqrt{13}, 0)$ dir.

i) Asal çemberin denklemi $x^2 + y^2 = 36$ dir.
ii) Yedek çemberin denklemi $x^2 + y^2 = 16$ dir.
iii) Doğrultman çemberinin denklemi

$$(x-c)^2 + y^2 = 4a^2 \text{ ve } (x+c)^2 + y^2 = 4a^2$$
$$(x-2\sqrt{13})^2 + y^2 = 144 \text{ ve } (x+2\sqrt{13})^2 + y^2 = 144$$

olur.

HİPERBOL İLE DOĞRUNUN BİRBİRİNE GÖRE DURUMLARI

$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ elipsi ile $y = mx + n$ doğrusunu ele alalım.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{(mx+n)^2}{b^2} = 1$$

$$b^2x^2 - a^2(mx+n)^2 = a^2b^2$$

$$b^2x^2 - a^2m^2x^2 - 2a^2mnx - a^2n^2 - a^2b^2 = 0$$

$$(-a^2m^2 + b^2)x^2 - (2a^2mn)x - a^2(n^2 + b^2) = 0$$

İkinci dereceden denklemde,

$$\Delta = (-2a^2mn)^2 - 4(-a^2)(-a^2m^2 + b^2)(n^2 + b^2)$$

$$= 4a^4m^2n^2 + 4a^2(-a^2m^2n^2 - a^2m^2b^2 + b^2n^2 + b^4)$$

$$= 4a^2(a^2m^2n^2 - a^2m^2n^2 - a^2m^2b^2 - b^2n^2 - b^4)$$

$$= 4a^2b^2(-a^2m^2 + n^2 + b^2)$$

bulunur. Burada $4a^2b^2 > 0$ olduğundan,

$$\Delta_1 = -a^2m^2 + n^2 + b^2$$

alınabilir.

i) $\Delta_1 = -a^2m^2 + n^2 + b^2 > 0$ doğru hiperbolü 2 farklı noktada keser.
ii) $\Delta_1 = -a^2m^2 + n^2 + b^2 = 0$ doğru hiperbole teğettir.
iii) $\Delta_1 = -a^2m^2 + n^2 + b^2 < 0$ doğru hiperbolü kesmez.

HİPERBOLDE TEĞET ve NORMALİN DENKLEMİ

4.5. Teorem: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ hiperbolünün üzerindeki $P(x_0,y_0)$ noktasından çizilen teğetin denklemi;

$$\frac{x\cdot x_0}{a^2}-\frac{y\cdot y_0}{b^2}=1$$

dir.

İspat: Hiperbolün denkleminde,

$$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2 \qquad (1)$$

$$b^2x^2-a^2(mx+n)^2=a^2b^2$$

$$(b^2-a^2m^2)x^2+2a^2mnx-a^2(n^2+b^2)=0$$

denklemini elde ederiz. Bu denklemin kökleri x_1 ve x_2 ise, bu sayılar doğrunun hiperbolü kestiği noktaların apsisleridir. Doğru, hiperbole teğet olduğunda $x_1=x_2$ olacağından $\Delta=0$ olmalıdır. O halde,

$$\Delta=4a^4m^2n^2-4(b^2-a^2m^2)(-a^2)(n^2+b^2)$$

$$0=a^2m^2n^2+(b^2-a^2m^2)(n^2+b^2)$$

$$0=a^2m^2n^2+b^2n^2+b^4-a^2m^2n^2-a^2m^2b^2$$

$$0=b^2n^2+b^4-a^2m^2b^2$$

$$0=b^2(n^2+b^2-a^2m^2)$$

$$0=a^2m^2-b^2-n^2 \qquad (2)$$

dir. $P(x_0,y_0)$ noktası teğet üzerinde olduğundan doğrunun denklemini sağlayacağından;

$$y_0=mx_0+n \text{ ya da } n=y_0-mx_0 \qquad (3)$$

bulunur. (3) denklemini (2) de yerine yazarsak

$$a^2m^2-b^2-(y_0-mx_0)^2=0$$

$$a^2m^2-b^2-y_0^2+2y_0mx_0-x_0^2m^2=0$$

$$(a^2-x_0^2)m^2+2y_0x_0m-b^2-y_0^2=0 \qquad (4)$$

Eğer $a^2\neq x_0^2$ ise, (4) denklemi m'ye göre ikinci dereceden bir denklemdir. P noktasında eğrinin farklı iki teğeti olamayacağına göre, bu denklemin kökleri eşit olmalıdır. O halde,

$$m=\frac{-2x_0y_0}{2(a^2-x_0^2)}=\frac{x_0y_0}{x_0^2-a^2}$$

teğetin eğimini verir.

$$n=y_0-mx_0=y_0-\left(\frac{x_0y_0}{x_0^2-a^2}\right)x_0=\frac{x_0^2y_0-a^2y_0-x_0^2y_0}{x_0^2-a^2}=\frac{-a^2y_0}{x_0^2-a^2}$$

$P(x_0,y_0)$ noktası, hiperbolün bir noktası olduğundan (1) eşitliği

$$b^2x_0^2-a^2y_0^2=a^2b^2$$

$$b^2(x_0^2-a^2)=a^2y_0^2$$

$$x_0^2-a^2=\frac{a^2y_0^2}{b^2}$$

yazabiliriz. Buradan; $y_0 \neq 0$ için,

$$m = \frac{x_0 y_0}{x_0^2 - a^2} = \frac{x_0 y_0}{a^2 y_0^2} b^2 = \frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}$$

$$n = -\frac{a^2 y_0}{x_0^2 - a^2} = \frac{-a^2 y_0}{a^2 y_0^2} b^2 = -\frac{b^2}{y_0}$$

elde edilir. Teğetin denklemi

$$y = mx + n$$

$$y = \left(\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}\right) x + \left(-\frac{b^2}{y_0}\right)$$

$$\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0} x - y = \frac{b^2}{y_0}$$

$$\frac{x \cdot x_0}{a^2} - \frac{y \cdot y_0}{b^2} = 1$$

dir.

Örnek: $3x - 2y + k = 0$ doğrusunun $3x^2 - 5y^2 = 55$ hiperbolüne teğet olması için k ne olmalıdır?

Çözüm: $3x^2 - 5y^2 = 55$

$$\frac{x^2}{\frac{55}{3}} - \frac{y^2}{11} = 1$$

hiperbolünde

$$y = \frac{3}{2} x + \frac{k}{2}$$

teğeti

$$-a^2 m^2 + n^2 + b^2 = 0$$

$$-\frac{55}{3} \cdot \frac{9}{4} + 11 + \frac{k^2}{4} = 0$$

$$\frac{k^2}{4} = \frac{165}{4} - 11 = \frac{121}{4}$$

$$k = \pm 11$$

4.6. Teorem: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ hiperbolünün üzerindeki $P(x_0, y_0)$ noktasından çizilen teğetin değme noktası;

$$D\left(-\frac{a^2 \cdot m}{n}, \frac{b^2}{n}\right)$$

dir.

İspat: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ hiperbolünün üzerindeki $P(x_0,y_0)$ noktasını alalım. Teğetin denklemi $\frac{x{\cdot}x_0}{a^2}-\frac{y{\cdot}y_0}{b^2}=1$ olmaktadır. Yine biz biliyoruz ki teğetin denklemi $y=mx+n$ şeklindedir. Bu iki denklem çakışık olması gerekir.

$b^2xx_0-a^2yy_0-a^2b^2$ ve $mx-y+n=0$
İki doğru biribine çalıkış ise;

$$\frac{b^2{\cdot}x_0}{m}=\frac{-a^2{\cdot}y_0}{-1}=-\frac{a^2b^2}{n}$$

olacağından

$$x_0=\frac{a^2m}{n},\ y_0=-\frac{b^2}{n}$$

bulunur. Buna göre değme noktasının koordinatları

$$D\left(-\frac{a^2{\cdot}m}{n},\frac{b^2}{n}\right)$$

olur.

Örnek: $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ hiperbolünün üzerindeki $y=2x+5$ teğetinin değme noktalarını bulunuz.

Çözüm: $a=4, b=3$

$$D\left(-\frac{a^2{\cdot}m}{n},\frac{b^2}{n}\right)=D\left(-\frac{4^2{\cdot}2}{5},\frac{3^2}{5}\right)=D\left(-\frac{32}{5},\frac{9}{5}\right)$$

4.7. Teorem: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ hiperbolünün üzerindeki $P(x_0,y_0)$ noktasından çizilen normalin denklemi;

$$y-y_0=-\frac{a^2{\cdot}y_0}{b^2{\cdot}x_0}(x-x_0)$$

dir.

Bu teoremin ispatı 4.5. teoremine benzer yöntemle yapılacağından okuyucuya bırakılmıştır.

Örnek: Odakları F(5, 0), F′(–5, 0) ve dış merkezliği $e=\frac{5}{4}$ olan hiperbolün $P(8,3)$ noktasındaki teğet ve normalin denklemlerini yazınız.

Çözüm: Önce hiperbolün denklemini oluşturalım.

$|FF'| = 2c = 10,\ e = \frac{5}{4}$ olduğundan $c = 5, a = 4, b = 3$ bulunur. Buna göre hiperbolün denklemi;

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

olur. $P(8,3)$ noktasındaki teğetin denklemi;

$$\frac{x \cdot x_0}{a^2} - \frac{y \cdot y_0}{b^2} = 1$$

$$\frac{x \cdot 8}{16} - \frac{y \cdot 3}{9} = 1$$

$$3x - 2y - 6 = 0$$

olur. $P(8,3)$ noktasındaki hiperbolün denklemi;

$$y - y_0 = -\frac{a^2 \cdot y_0}{b^2 \cdot x_0}(x - x_0)$$

$$y - 3 = -\frac{16 \cdot 3}{9 \cdot 8}(x - 8)$$

$$3y - 2x + 7 = 0$$

olur.

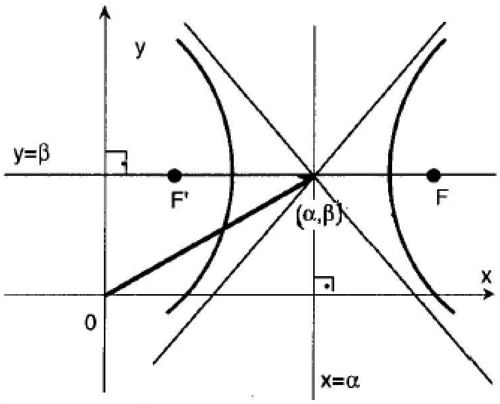
İKİZKENAR HİPERBOL

4.9. Tanım: Eksen uzunlukları esit olan $(a = b)$ hiperbollere ikizkenar hiperbol denir. Asimptotları $y = x$ ve $y = -x$ doğrularıdır.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1 \ \text{ ve } x^2 - y^2 = a^2$$

MERKEZİL OLMAYAN HİPERBOLÜN DENKLEMİ ve HİPERBOLÜN ÖTELENMESİ

4.8. Teorem: Merkezi $M(\alpha, \beta)$ noktasında olan hiperbolün denklemi;



$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}-\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$$

dir.

Bu teoremi ispatı 4.1. teoremin ispatına benzer şekilde olduğundan okuyucuya bırakılmıştır.

4.10. Tanım: Merkezi M(0, 0) noktasında olan hiperbolün $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ denklemi merkezi $M(\alpha,\beta)$ noktasında olan hiperbolün $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}-\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$ noktasına taşınmasına hiperbolün ötelenmesi adı verilir.

Ötelenmiş hiperbolün;
Merkezi : $M(\alpha,\beta)$
Odakları : $F(\alpha+c,\beta)\ \wedge F'(\alpha-c,\beta)$
Asimptotları : $y-\ \beta=\frac{b}{a}(x-\alpha)$ ve $y-\ \beta=-\frac{b}{a}(x-\alpha)$

Örnek: $\frac{(x-3)^2}{144}-\frac{(y-4)^2}{25}=1$ denkleminin belirttiği hiperbolün merkezini ve odaklarını bulunuz.

Çözüm: $\frac{(x-3)^2}{144}-\frac{(y-4)^2}{25}=1$ hiperbolün merkezini M(3, 4) dür.
$a^2=144$ ise $a=12$
$b^2=25$ ise $b=5$
$c^2=a^2+b^2=144+25=169$ ise $c=13$
bulunur. Buna göre hiperbolün odakları;
$F(\alpha+c,\beta)=(3+13,4)=(16,4)$

$$F'(\alpha - c, \beta) = (3 - 13, 4) = (-10, 4)$$

olur.

ÇÖZÜMLÜ ALIŞTIRMALAR

1. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ hiperbolünün odakları arası uzaklığı kaç birimdir?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 10

Çözüm: $a = 3, b = 4, c = 5$ olduğundan $|FF'| = 2c = 10$ br

Cevap: E

2. Bir köşesi A(0, 5) ve dış merkezliği $e = 3$ olan hiperbolünde yedek eksen uzunluğu nedir?

A) 8 B) 10 C) $10\sqrt{2}$ D) 12 E) $12\sqrt{2}$

Çözüm: A(0, 5) olduğuna göre odaklar y ekseni üzerindedir.

$a = 4$ ve $e = \frac{c}{a} = 3$ ise $c = 15$

$c^2 = a^2 + b^2$

$15^2 = 5^2 + b^2$

$b = 10\sqrt{2}$

Cevap: C

3. $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$ hiperbolü üzerindeki bir M noktasının, F ve F′ odaklarına olan uzaklıklarının kareleri farkı $|MF'|^2 - |MF|^2 = 160$ dır. $|MF'|$ kaç birimdir?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Çözüm: $a = 5$, $|MF'| - |MF| = 10$ dir.

$(|MF'| - |MF|)(|MF'| + |MF|) = 160$

$10(|MF'| + |MF|) = 160$

$|MF'| + |MF| = 16$ ve $|MF'| - |MF| = 10$

Bu iki denklem çözülürse;

$|MF'| = 13$ ve $|MF| = 3$

bulunur.

Cevap: D

4. $3x^2 - 4y^2 = 12$ hiperbolünün asimptotları arasındaki dar açının tanjantı kaçtır?

A) 4 B) $4\sqrt{3}$ C) 5 D) $5\sqrt{3}$ E) 6

Çözüm: $3x^2 - 4y^2 = 12$

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$$

$$a = 2\ ,\ b = \sqrt{3}$$

Asimptot denklemleri $y = \mp \frac{b}{a}x = \mp \frac{\sqrt{3}}{2}x$ olacağından hiperbolünün asimptotları arasındaki dar açının tanjantı;

$$y = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{\sqrt{3}}{1 - \frac{3}{4}} = 4\sqrt{3}$$

elde edilir.

Cevap: E

5. $x^2 - 3y^2 = 1$ hiperbolünün asimptotlarından biri x ekseni ile kaç derecelik açı yapar? (1. bölgedeki değeri)

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Çözüm: $x^2 - 3y^2 = 1$

$$x^2 - \frac{y^2}{\frac{1}{3}} = 1$$

$$a = 1 \text{ ve } b = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Asimptot denklemleri $y = \mp \frac{b}{a}x = \mp \frac{\sqrt{3}}{3}x$ dir.

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x \text{ ise } \tan 30 = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ olup } 30^0$$

$$y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x \text{ ise } \tan 150 = -\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ olup } 150^0$$

olur.

6. $x^2 - 9y^2 = 7$ hiperbolünün $P(-4,1)$ noktasındaki teğetin denklemi nedir?

A) $4x + 9y + 7 = 0$ B) $4x + 9y - 7 = 0$ C) $4x + 9y = 0$
D) $4x - 9y + 7 = 0$ E) $4x - 9y - 7 = 0$

Çözüm: $x^2 - 9y^2 = 7$

$$\frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{\frac{7}{9}} = 1$$

Teğetin denklemi

$$\frac{x \cdot x_0}{a^2} - \frac{y \cdot y_0}{b^2} = 1$$

$$\frac{x(-4)}{7} - \frac{y \cdot 1}{\frac{7}{9}} = 1$$

$$4x + 9y + 7 = 0$$

olur.

Cevap: A

7. $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{2} = 1$ hiperbolün bir teğetinin eğimi $\frac{\sqrt{3}}{2}$ dir. Değme noktasının koordinatlarının biri nedir?

A) $D(\sqrt{3},4)$ B) $D(2\sqrt{3},4)$ C) $D(3\sqrt{3},4)$
D) $D(3\sqrt{3},3)$ E) $D(3\sqrt{3},2)$

Çözüm: $a^2 = 3$ ve $b^2 = 2$ dir.

Teğetin eğimi $\frac{\sqrt{3}}{2}$ olduğundan $y = \frac{\sqrt{3}}{2}x + n$ olur. Ayrıca teğet olma koşulundan $-a^2m^2 + n^2 + b^2 = 0$ olacağından,

$$-(\sqrt{3})^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + n^2 + 2^2 = 0$$

$$n = \mp \frac{1}{2}$$

bulunur. $n = -\frac{1}{2}$ alınırsa,

$$D\left(-\frac{a^2 \cdot m}{n}, \frac{b^2}{n}\right) = D\left(-\frac{-3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}}, \frac{-2}{-\frac{1}{2}}\right) = D(3\sqrt{3},4)$$

dir.

Cevap: C

8. $\frac{(x-4)^2}{16} - \frac{(y+6)^2}{9} = 1$ hiperbolün asimtotunun denklemlerinden biri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $4y + 3x + 36 = 0$ B) $4y + 3x - 36 = 0$ C) $4y + 3x + 24 = 0$
D) $4y - 3x + 36 = 0$ E) $4y - 3x - 24 = 0$

Çözüm: $M(4, -6)$ dir.
$a^2 = 16$ ve $b^2 = 9$ olduğundan $c^2 = 16 + 9 = 25$ olup $c = 5$ dir.
Asimptotları $y - \beta = \frac{b}{a}(x - \alpha)$

$$y - (-6) = \frac{3}{4}(x - 4)$$
$$4y + 24 = 3x - 12$$
$$4y - 3x + 36 = 0$$

olur.

Cevap: D

9. $x^2 + y^2 = 7$ çemberi ile $y = \pm\frac{1}{x}$ hiperbolü kaç noktada kesişir?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Çözüm: $y = \pm\frac{1}{x}$ hiperbolü çember denkleminde yerine yazılırsa,

$$x^2 + y^2 = 7$$
$$x^2 + \left(\frac{1}{x}\right)^2 = 7$$
$$x^4 - 7x^2 + 1 = 0$$

4. derece denklemi elde edilir. Burada $t = x^2$ dönüşümü yapılırsa $t^2 - 7t + 1 = 0$ denklemi elde edilir. Bu 2. derece denklem de $\Delta = 45$ olacağından

$$t_1 = 7 + 3\sqrt{5}, t_2 = 7 - 3\sqrt{5}$$

dir. Şu halde,

$$x^2 = 7 + 3\sqrt{5} \text{ ise } x = \pm\sqrt{7 + 3\sqrt{5}}$$
$$x^2 = 7 - 3\sqrt{5} \text{ ise } x = \pm\sqrt{7 + 3\sqrt{5}}$$

dir. Buna göre 4 tane kök bulunmaktadır.

Cevap: E

10. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ hiperbolünün asimptotlarıyla $y = 3$ doğrusunun kesim noktaları aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(2, -3)$ ve $(2, -3)$ B) $(2, 3)$ ve $(2,3)$ C) $(-2, 3)$ ve $(2, -3)$
D) $(2, 3)$ ve $(2, -3)$ E) $(2, 3)$ ve $(-2, -3)$

Çözüm: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ hiperbolünün asimptotlarının denklemi,

$$y = \pm\frac{3}{2}x$$

dir. Bu asimptotların $y = 3$ doğrusuyla kesim noktalarının apsisleri, asimptot denkleminde $y = 3$ yazılırsa

$$3 = \pm\frac{3}{2}x$$

olup $(2, 3)$ ve $(2, -3)$ noktaları elde edilir.

Cevap: D

KAYNAKÇA

1. H. Hilmi HACISALİHOĞLU, 2ve 3 Boyutlu Uzayda Analitik Geometri, 7. Bakı, 2005, ANKARA.
2. H. Hilmi HACISALİHOĞLU, Lise Matematik 1, 2, 3, Serhat Yayınları A.Ş. İstanbul, 2001.
3. M. Zeki DERMAN, Ökkeş ÖZKÖSELER, Bayram ÇETİNER, Zafer Yayınları, Ankara, 2005.
4. Ali Rıza İLDENİZ, İsmet PARILDAR, Kemal ALAGÖZ, Tacim GÖLPINAR, Sayısal 1-2, Modern Matematik, Yıldırım Yayınları, 1986, ANKARA.
5. Hüseyin UÇAR, Ali ÖRNEK, Analitik Geometri, İlköğretim Matematik Alan Bilgisi, ABY yayınları, 2014, ANKARA.
6. Emrullah KAPLAN, Analitik Geometri, Etkin Yayıncılık, 2001, ANKARA.
7. Nevzat ASMA, Halit BIYIK, 12. Sınıf Analitik Geometri Konu Özetli oru Bankası, Esen Yayınları, 2008, ANKARA.
8. Mehmet GÜRKAN, Abdullah DEMİRALP, Tahsin PELİT, Analitik Geometri, Lise Ders Kitabı, Başarı Yayınları, Ankara, 2011.
9. Prof. Dr. Yusuf AVCI, Prof. Dr. Ahmet DERNEK, Öğr. Müyesser SAKA, Lise Analitik Geometri Ders Kitabı, Deniz Yayınevi, İstanbul, 2001.