7. BÖLÜM
İZOMETRİ

İZOMETRİ KAVRAMI

7.1. Tanım: Herhangi iki noktayı aralarındaki uzaklık aynı kalacak şekilde farklı iki noktaya götüren dönüşümlere izometri (eşmetrel) dönüşümü denir.

Düzlemde $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$(x,\ y) \to (a_1x + b_1y + c_1,\ a_2x + b_2y + c_2\ )$$

biçiminde tanımlanan dönüşüm, uzaklığı koruyor ise bu dönüşüme izometri oluşur. Bu türden dönüşümler $\mathbb{R}^2$ de uzaklıkları değiştirmeyen birebir dönüşümlerdir.

Örnek:

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$(x,\ y) \to \left(\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y,\ \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y\right)$$

dönüşümünün bir izometri olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Düzlemde, $P_1(x_1,\ y_1)$ ve $P_2(x_2, y_2)$ noktalarını alalım. Bu iki noktanın f dönüşümü altındaki görüntüleri $P'_1(x'_1,\ y'_1)$ ve $P'_2(x'_2, y'_2)$ olsun.

$$|P'_1P'_2| = \sqrt{(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2}$$

$$= \sqrt{\left[\left(\frac{1}{2}x_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}y_2\right) - \left(\frac{1}{2}x_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}y_1\right)\right]^2 + \left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x_2 + \frac{1}{2}y_2\right) - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x_1 + \frac{1}{2}y_1\right)\right]^2}$$

$$= \sqrt{\left[\frac{1}{2}(x_2 - x_1) - \frac{\sqrt{3}}{2}(y_2 - y_1)\right]^2 + \left[\frac{\sqrt{3}}{2}(x_2 - x_1) + \frac{1}{2}(y_2 - y_1)\right]^2}$$

$$= \left\{\left[\frac{1}{4}(x_2 - x_1)^2 - \frac{2\sqrt{3}}{4}(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) - \frac{3}{4}(y_2 - y_1)^2\right] + \right.$$
$$\left. + \left[\frac{3}{4}(x_2 - x_1)^2 + \frac{2\sqrt{3}}{4}(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) + \frac{1}{4}(y_2 - y_1)^2\right]\right\}^{1/2}$$

$$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$= |P_1P_2|$
olur. Bu bize uzaklığın aynı kaldığı görsterir. O halde verilen dönüşüm bir izometridir.

Örnek:

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \to \left(\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - 3, -\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y + 5\right)$$

dönüşümünün bir izometri olduğunu gösteriniz.

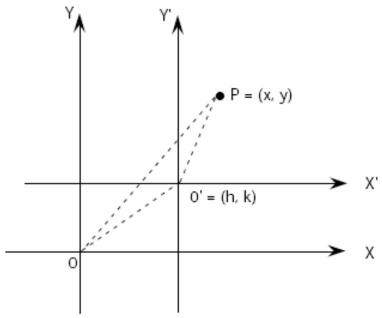
Çözüm: Düzlemde $P_1(x_1,\ y_1)$ ve $P_2(x_2, y_2)$ noktalarını alalım. Bu iki oktanın g dönüşümü altındaki görüntüleri $P'_1(x'_1,\ y'_1)$ ve $P'_2(x'_2, y'_2)$ olsun.

$$|P'_1P'_2| = \sqrt{(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2}$$
$$= \left\{\left[\left(\frac{3}{5}x_2 + \frac{4}{5}y_2 - 3\right) - \left(\frac{3}{5}x_1 + \frac{4}{5}y_1 - 3\right)\right]^2 + \right.$$
$$\left. + \left[\left(-\frac{4}{5}x_2 + \frac{3}{5}y_2 + 5\right) - \left(\frac{4}{5}x_1 + \frac{3}{5}y_1 + 5\right)\right]^2\right\}^{1/2}$$
$$= \left\{\left[\frac{9}{25}(x_2 - x_1)^2 + \frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5}(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) + \frac{16}{25}(y_2 - y_1)^2\right] + \right.$$
$$\left.\left[\frac{16}{25}(x_2 - x_1)^2 - \frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5}(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) + \frac{9}{25}(y_2 - y_1)^2\right]\right\}^{1/2}$$
$$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$= |P_1P_2|$$

elde edilir. Bu g dönüşümünün bir izometri olduğunu gösterir.

DÜZLEMDE ÖTELEME

Kartezyen koordinat sisteminde, birinci sistemin koordinat eksenlerine paralel, yani $OX//O'X'$, $OY//O'Y'$ ve başlangıç noktası $O'(h,k)$ olacak şekilde ikinci bir eksen sistemini seçelim.



Şimdi, XOY sisteminde koordinatları (x, y) olan bir P noktasının $X'O'Y'$ yeni koordinat sistemindeki bu noktanın, (x', y') koordinatları arasındaki bağıntıyı araştıralım.

$$|OP| = |OO'| + |O'P|$$
$$(x, y) = (h, k) + (x', y')$$
$$(x, y) = (x' + h, y' + k)$$

sıralı ikililerin eşitliği tanımından

$$x = x' + h \text{ ve } y = y' + k$$

öteleme formülleri elde edilir. Bu son eşitlikten

$$x' = x - h \text{ ve } y' = y - k$$

bulunur. Böylece öteleme

$$T_{(h,k)} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$(x, y) \to (x', y') = (x - h, y - k)$$

biçiminde tanımlanan, düzlemi kendi kendine dönüştüren bir harekettir. Öteleme düzlemin herhangi bir P noktasını, düzlemin başka bir P' noktasına taşır.

Örnek: P(4, –1) noktasının $T_{(-3,-5)}$ kadar ötelemesini bulunuz.

Çözüm: P noktasının yeni sistemdeki koordinatları

$$x' = x - h \text{ ve } y' = y - k$$

denkleminden yararlanılarak bulunur. Buna göre,

$$x' = 4 - (-3) \text{ ve } y' = -1 - (-5)$$
$$(x', y') = (7, 4)$$

Örnek: $y^2 - 3x + 2y + 7 = 0$ parabolünü $T_{(2,-1)}$ kadar ötelemesini yapınız.

Çözüm:

$$T_{(2,-1)} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$(x, y) \to (x', y') = (x - 2, y + 1)$$

Buradan

$$x' = x - 2 \text{ ve } y' = y + 1$$
$$x = x' + 2 \text{ ve } y = y' - 1$$

denklemlerini verilen denklemde yerine yazalım.

$$(y' - 1)^2 - 3(x' + 2) + 2(y' - 1) + 7 = 0$$
$$(y')^2 - 2y' + 1 - 3x' - 6 + 2y' - 2 + 7 = 0$$
$$(y')^2 - 3x' = 0$$

parabolü elde edilir.

7.1. Teorem:

$$T_{(h,k)} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$(x, y) \to (x', y') = (x - h, y - k)$$

öteleme dönüşümünün, bir izometri dönüşümdür.

İspat: Düzlemde $A(x_1,\ y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ gibi iki nokta alalım. Bu iki nokta arasındaki uzaklık

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

dır. $A(x_1,\ y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ noktaları, $T_{(h,k)}$ ötelemesi ile yeni sistemde uzaklıklar korunduğundan bir öteleme dönüşümü aynı zamanda bir izometri dönüşümdür.

ÖTELEMELERİN BİLEŞKESİ

7.2. Teorem: $T_{(h_1,k_1)}$ ve $T_{(h_2,k_2)}$ gibi herhangi iki ötelemenin $T_{(h_1,k_1)} \circ T_{(h_2,k_2)}$ bileşkesi yine bir ötelemedir.

İspat:

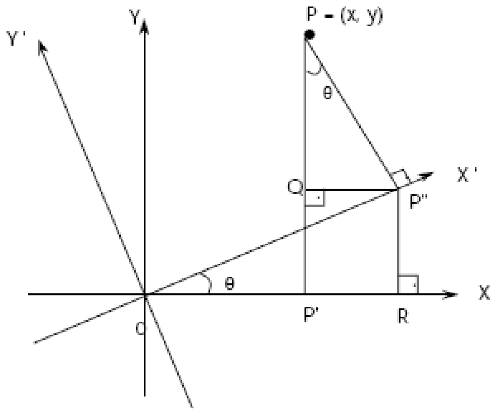
$$\begin{aligned}\left[T_{(h_1,k_1)} \circ T_{(h_2,k_2)}\right](x,y) &= T_{(h_1,k_1)}[T_{(h_2,k_2)}(x,y)] \\ &= T_{(h_1,k_1)}[x - h_2, y - k_2] \\ &= (x - h_2 - h_1, y - k_2 - k_1) \\ &= (x - (h_1 + h_2), y - (k_1 + k_2))\end{aligned}$$

olur ki, bu bize ötelemenin bileşkesinin de yine bir öteleme olduğunu gösterir.

7.1. Not: $T_{(h_1,k_1)} \circ T_{(h_2,k_2)} = T_{(h_2,k_2)} \circ T_{(h_1,k_1)}$ olduğundan ötelemelerin bileşkesi değişimlidir.

DÜZLEMDE DÖNME

Başlangıç noktaları aynı olan XOY ve $X'OY'$ eksen sistemlerini alalım. $X'OY'$ sistemi, XOY sisteminin eksenleri başlangıç noktası etrafında, pozitif yönde (saat yönünün tersi) θ açısı kadar döndürerek seçelim. Şimdi XOY ilk sistemde koordinatları $(x,\ y)$ olan bir P noktasının $X'OY'$ ikinci sistemdeki, bu noktanın (x', y') koordinatları arasındaki ilişkiyi araştıralım.



Verilen şekle dikkat edelim. P noktasının, X- eksenine dik izdüşümü P′ , X′− eksenine dik izdüşümü P′′ olsun. Şekilden ROP′′ açısı ile P′PP′′ açılarının θ açısına eşit olduğu görülüyor. Buna göre,

$$\begin{aligned} x = |AP'| &= |OR| - |P'R| \\ &= |OR| - |QP''| \\ &= |OP''| \cos\theta - |PP''| \sin\theta \\ &= x' \cos\theta - y' \sin\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y = |PP'| &= |PQ| + |QP'| \\ &= |PQ| + |RP''| \\ &= |OP''| \sin\theta + |PP''| \cos\theta \\ &= x' \sin\theta + y' \cos\theta \end{aligned}$$

Böylece, X ve Y eksenlerinin başlangıç noktası etrafında θ açısı kadar dönmesiyle elde edilen yeni sistem arasında,

$$x = x' \cos\theta - y' \sin\theta \text{ ve } y = x' \sin\theta + y' \cos\theta$$

ya da

$$x' = x\cos\theta + y\sin\theta \text{ ve } y' = -x\sin\theta + y\cos\theta$$

denklemleri elde edilir. Birinci denkleminden P noktasının ikinci sistemde (x', y') koordinatları bilindiğinde, bu noktanın birinci sistemdeki (x, y) koordinatları bulunur.

İkinci denklemden ise, P noktasının ilk sistemdeki (x, y) koordinatları bilindiğinde, bu noktanın ikinci sistemde ki (x', y') koordinatları bulunur. Böylece dönme,

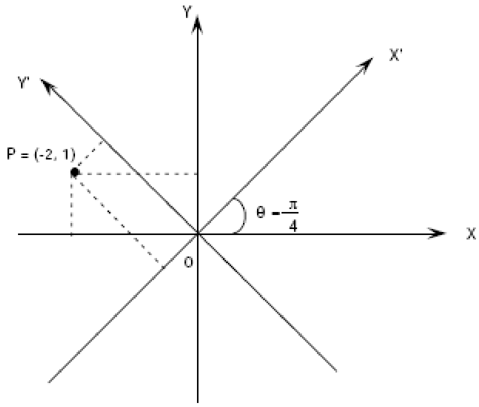
$$R_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \to (x', y') = (x\cos\theta + y\sin\theta, -x\sin\theta + y\cos\theta)$$

biçiminde tanımlanan, düzlemi kendi kendine dönüştüren bir izometridir. Öteleme dönüşümünde olduğu gibi, bu dönüşümde de, düzlemin bir P noktası başka bir P' noktasına götürür.

Örnek: $R_{\pi/4}$ dönmesi ile $P(-2, 1)$ noktasının görüntüsünü bulunuz.

Çözüm:



$x' = x\cos\theta + y\sin\theta$ ve $y' = -x\sin\theta + y\cos\theta$
denklemleri kullanılarak,

$$x' = -2\cos\frac{\pi}{4} + 1\sin\frac{\pi}{4} = -2\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$y' = -2\sin\theta + 1\cos\theta = 2\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$(x', y') = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$$

elde edilir.

Örnek: $R_{\pi/6}$ dönmesi altında $x^2 - 3y^2 - 6 = 0$ denklemini bulunuz.

Çözüm: $R_{\pi/6} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$(x, y) \to (x', y') = \left(x\cos\frac{\pi}{6} + y\sin\frac{\pi}{6}, -x\sin\frac{\pi}{6} + y\cos\frac{\pi}{6}\right)$$

denklemleri kullanılarak,

$$x' = x\cos\frac{\pi}{6} + y\sin\frac{\pi}{6} = x\frac{\sqrt{3}}{2} + y\frac{1}{2} = \frac{1}{2}(\sqrt{3}x + y)$$

$$y' = -x\sin\frac{\pi}{6} + y\cos\frac{\pi}{6} = -x\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}y = \frac{1}{2}(-x + \sqrt{3}y)$$

ifadeleri $x^2 - 3y^2 - 6 = 0$ da yerine yazılırsa

$$\left(\frac{1}{2}(\sqrt{3}x + y)\right)^2 - 3\left(\frac{1}{2}(-x + \sqrt{3}y)\right)^2 - 6 = 0$$

$$\frac{1}{4}\left(3x^2 + 2\sqrt{3}xy + y^2\right) - \frac{3}{4}\left(x^2 - 2\sqrt{3}xy + 3y^2\right) - 6 = 0$$

$$2\sqrt{3}xy - 2y^2 - 6 = 0$$

elde edilir.

7.3. Teorem:

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$(x, y) \to (x', y') = (x \cos\theta + y \sin\theta\,, -x \sin\theta + y \cos\theta)$$

dönme dönüşümünün, bir izometri (eşmetrel dönüşüm) olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Düzlemde $A(x_1,\ y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ gibi iki nokta alalım. R_θ dönmesi ile bu noktaların görüntüleri $A(x'_1,\ y'_1)$ ve $B(x'_2, y'_2)$ olsun. Buna göre

$$R_\theta(x_1, y_1) = (x'_1, y'_1) = (x_1 \cos\theta + y_1 \sin\theta\,, -x_1 \sin\theta + y_1 \cos\theta)$$
$$x'_1 = x_1 \cos\theta + y_1 \sin\theta, y'_1 = -x_1 \sin\theta + y_1 \cos\theta$$

ve

$$R_\theta(x_2, y_2) = (x'_2, y'_2) = (x_2 \cos\theta + y_2 \sin\theta\,, -x_2 \sin\theta + y_2 \cos\theta)$$
$$x'_2 = x_2 \cos\theta + y_2 \sin\theta, y'_2 = -x_2 \sin\theta + y_2 \cos\theta$$

dir. Böylece,

$$|A'B'| = \sqrt{(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2}$$
$$= ((x_2 \cos\theta + y_2 \sin\theta) - (x_1 \cos\theta + y_1 \sin\theta))^2$$
$$+((-x_2 \sin\theta + y_2 \cos\theta) - (-x_1 \sin\theta + y_1 \cos\theta))^2\}^{1/2}$$
$$= [(x_2 - x_1) \cos\theta + (y_2 - y_1) \sin\theta]^2$$
$$+[-(x_2 - x_1)\sin\theta + (y_2 - y_1)\cos\theta]^2\}^{1/2}$$

Gerekli işlemler yapıldıktan sonra,

$$|A'B'| = \sqrt{(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2} = |AB|$$

elde edilir. Uzaklıklar aynı kaldığından R_θ dönme dönüşümü bir izometridir.

DÖNMELERİN BİLEŞKESİ

7.4. Teorem: R_α ve R_β gibi herhangi iki dönmenin bileşkesi yine bir dönmedir.

İspat:

$$(R_\beta \circ R_\alpha)(x,y) = R_\beta(R_\alpha(x,y))$$
$$= R_\beta(x \cos\alpha + y \sin\alpha\,, -x \sin\alpha + y \cos\alpha)$$
$$= ((x \cos\alpha + y \sin\alpha)\cos\beta + (-x \sin\alpha + y \cos\alpha) \sin\beta,$$
$$-(x \cos\alpha + y \sin\alpha) \sin\beta + (-x \sin\alpha + y \cos\alpha) \cos\beta)$$
$$= (\cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta)x + (\sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta)y,$$
$$-(\cos\alpha \sin\beta + \sin\alpha \cos\beta) + (\cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta)y$$
$$= (x \cos(\alpha + \beta) + y \sin(\alpha + \beta) - x \sin(\alpha + \beta) + y \cos(\alpha + \beta))$$

olur. Burada $\alpha + \beta = \theta$ olsun

$$(R_\beta \circ R_\alpha)(x,y) = (x \cos\theta + y \sin\theta, -x \sin\theta + y \cos\theta) = R_\theta(x, y)$$

olur. Ayrıca,

$$R_\beta \circ R_\alpha = R_{\beta+\alpha} = R_{\alpha+\beta} = R_\alpha \circ R_\beta$$

olduğundan, iki dönmenin bileşimi değişimlidir.

DÜZLEMDE ÖTELEME - DÖNME VE DÖNME - ÖTELEME

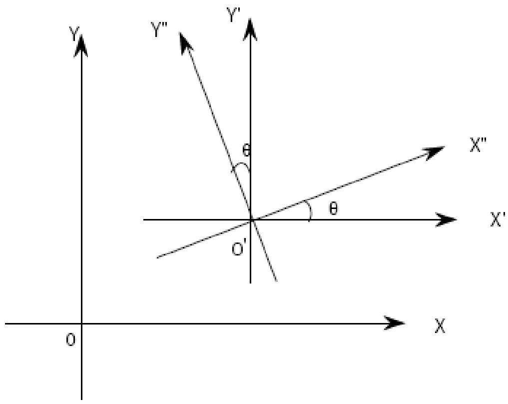
XOY dik koordinat sisteminden, hem başlangıç noktası, hem de eksenlerin doğrultuları farklı olacak şekilde, $X''O'Y''$ eksen sistemi seçelim. İlk sistemde koordinatları (x, y) olan bir P noktasının, $X''O'Y''$ eksen sistemindeki, bu noktanın (x'', y'') koordinatları arasındaki bağıntıları araştıralım. Bu bağıntıları bulmak için iki yol izleyebiliriz.

Birincisi, önce öteleme sonra dönme, ikincisi ise, önce dönme sonra öteleme ile olur. Buna göre, önce öteleme ile başlayalım. XOY sistemi ile başlangıç noktası (h, k) olan iki sistemde P (x, y) noktasının koordinatları arasında

$$x = x' + h \text{ ve } y = y' + k$$

bağıntıları vardı. $X'O'Y'$ sisteminin eksenleri $O'(h,k)$ başlangıç noktası etrafında θ açısı kadar dönmesi ile,

$$x' = x''\cos\theta - y''\sin\theta \text{ ve } y' = x''\sin\theta + y''\cos\theta$$



dir.

Kısaca, öteleme-dönme için

$$\left(R_\theta \circ T_{(h,k)}\right)(x,y) = R_\theta\left(T_{(h,k)}(x,y)\right) = R_\theta(x-h, y-k)$$
$$= ((x-h)\cos\theta + (y-k)\sin\theta, -(x-h)\sin\theta + (y-k)\cos\theta)$$

Böylece, XOY sistemi ve X"O'Y" sistemi arasında,

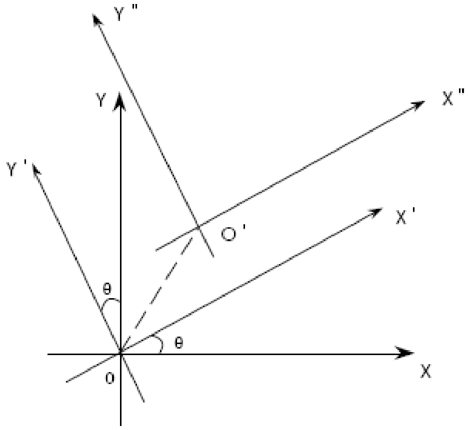
$$x'' = (x-h)\cos\theta + (y-k)\sin\theta \text{ ve } y'' = -(x-h)\sin\theta + (y-k)\cos\theta$$

ya da

$$x = x''\cos\theta - y''\sin\theta + h \text{ ve } y = x''\sin\theta + y''\cos\theta + k$$

denklemleri bulunur.

Şimdi, bu denklemleri dönme-öteleme ile elde edelim.



Önce R_θ dönmesi ile P(x, y) noktasının koordinatları

$$R_\theta(x,y) = (x',y') = (x\cos\theta + y\sin\theta, -x\sin\theta + y\cos\theta)$$

dır. Başlangıç noktası XOY sistemine göre $O'(h,k)$ olan ve koordinat eksenleri $X'O'Y'$ sisteminin eksenlerine paralel olan X"O′Y" sisteminde bir P(x, y) noktasının koordinatlarını bulalım. Önce, (h, k) noktasının $X'OY'$ sistemindeki koordinatları

$$R_\theta(h,k) = (h\cos\theta + k\sin\theta, -h\sin\theta + k\cos\theta) = (h',k')$$

olarak bulunur.

Sonra $T_{(h',k')}$ ötelemesi ile,

$$\begin{aligned} T_{(h',k')}(x',y') &= T_{(h',k')}(x\cos\theta + y\sin\theta, -x\sin\theta + y\cos\theta) \\ &= (x\cos\theta + y\sin\theta - h', -x\sin\theta + y\cos\theta - k') \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, $\left(T_{(h',k')} \circ R_\theta\right)(x,y) = (x'',y'')$

$$\begin{aligned} x'' &= x\cos\theta + y\sin\theta - h' \\ &= x\cos\theta + y\sin\theta - (h\cos\theta + k\sin\theta) \\ &= (x-h)\cos\theta + (y-k)\sin\theta \qquad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y'' &= -x\sin\theta + y\cos\theta - k' \\ &= -x\sin\theta + y\cos\theta - (-h\sin\theta + k\cos\theta) \\ &= -(x-h)\sin\theta + (y-k)\cos\theta \qquad (2) \end{aligned}$$

ya da

$$x = x\cos\theta - y\sin\theta + h \text{ ve } y = x\sin\theta + y\cos\theta + k$$

denklemleri bulunur. Buradan görüldüğü gibi dönme-öteleme dönüşümü ile (1) ve (2) denklemleri elde edilir.

Örnek: XOY dik koordinat sisteminde P(2, −1) noktası verilsin. Bu noktanın $R_{\frac{\pi}{6}} \circ T_{(5,-3)}$ dönüşümü altındaki resmini bulunuz.

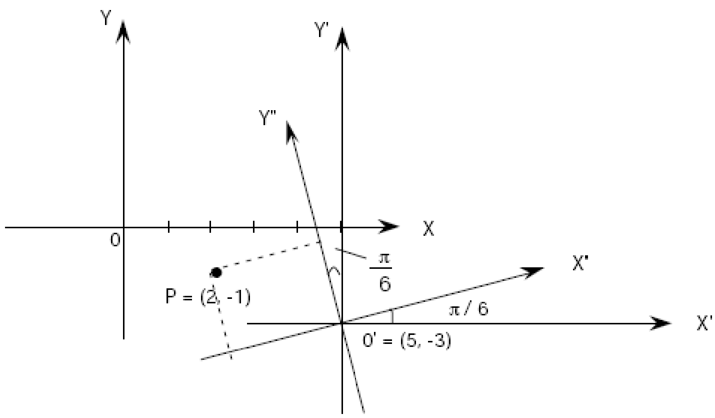
Çözüm:

$$R_\theta \circ T_{(h,k)} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$(x, y) \to (x'', y'') =$$
$$= ((x-h)\cos\theta + (y-k)\sin\theta, -(x-k)\sin\theta + (y-k)\cos\theta)$$

olduğundan

$$R_{\frac{\pi}{6}} \circ T_{(5,-3)} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$(2, -1) \to (x'', y'') =$$
$$= ((2-5)\cos\frac{\pi}{6} + \left(-1-(-1)\right)\sin\frac{\pi}{6}, -(2-5)\sin\frac{\pi}{6} + (-1-(-1))\cos\frac{\pi}{6})$$
$$(x'', y'') = \left((-3)\frac{\sqrt{3}}{2},\ 3\frac{1}{2}\right)$$

bulunur. P noktasının X"O′Y" sisteminde koordinatları $\left((-3)\frac{\sqrt{3}}{2},\ 3\frac{1}{2}\right)$ dir.



Örnek: XOY dik koordinat sisteminde $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ elipsi verilsin. Başlangıç noktası $O'(1, 0)$ olan ve koordinat eksenleri O' noktası etrafında pozitif yönde $\frac{\pi}{3}$ döndürülerek elde edilen yeni sistemde, verilen denklemi yazınız.

Çözüm:

$$(R_{\frac{\pi}{3}} \circ T_{(1,0)})(x, y) = R_{\frac{\pi}{3}}(x-1, y)$$

$$=\left((x-1)\frac{1}{2}+y\frac{\sqrt{3}}{2},-(x-1)\frac{\sqrt{3}}{2}+y\frac{1}{2}\right)$$

Buna göre,

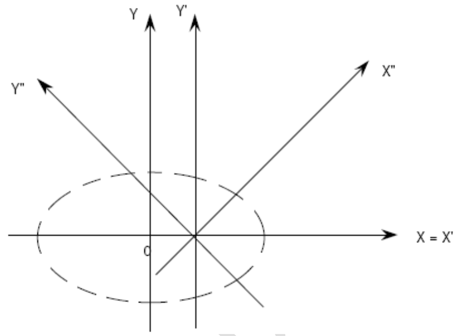
$$x''=\frac{1}{2}(x-1)+\sqrt{3}y, y''=\frac{1}{2}\left(-\sqrt{3}x+\sqrt{3}\right)+y$$

dir. Bu denklemler $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ da yerine koyularak,

$$\frac{\left(\frac{1}{2}(x-1)+\sqrt{3}y\right)^2}{9}+\frac{\left(\frac{1}{2}\left(-\sqrt{3}x+\sqrt{3}\right)+y\right)^2}{4}=1$$

$$\frac{\left((x-1)+2\sqrt{3}y\right)^2}{36}+\frac{\left(\left(-\sqrt{3}x+\sqrt{3}\right)+2y\right)^2}{16}=1$$

yeni sistemdeki denklem bulunur.



Örnek: Bir $T_{(2,1)}$ ötelemesi ile dönmesinin bileşkesinin değişimli olup, olmadığını gösteriniz.

Çözüm: Öteleme-dönme için;

$$\left(R_{\frac{\pi}{3}}\circ T_{(2,1)}\right)(x,y)=R_{\frac{\pi}{3}}\left(T_{(2,1)}(x,y)\right)$$

$$=R_{\frac{\pi}{3}}(x-2,y-1)$$

$$=\left((x-2)\cos\frac{\pi}{3}+(y-1)\sin\frac{\pi}{3},-(x-2)\sin\frac{\pi}{3}+(y-1)\cos\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=\left((x-2)\frac{\sqrt{3}}{2}+(y-1)\frac{1}{2},-(x-2)\frac{1}{2}+y\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$x''=\frac{1}{2}(x-2)+\frac{\sqrt{3}}{2}(y-1), y''=-\frac{\sqrt{3}}{2}(x-2)+\frac{1}{2}(y-1)$$

$$x''=\frac{x}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}y-1-\frac{\sqrt{3}}{2}, y''=-\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{y}{2}+\sqrt{3}-\frac{1}{2} \qquad (1)$$

elde edilir.

Dönme-öteleme için;

$$(T_{(2,1)} \circ R_{\frac{\pi}{3}})(x,y) = T_{(2,1)}\left(x\cos\frac{\pi}{3} + y\sin\frac{\pi}{3}, -x\sin\frac{\pi}{3} + y\cos\frac{\pi}{3}\right)$$
$$= T_{(2,1)}\left(\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}y, -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{y}{2}\right)$$
$$= \left(\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}y - 2, -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{y}{2} - 1\right)$$

$$x'' = \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}y - 2, y'' = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{y}{2} - 1 \qquad (2)$$

(1) ve (2) den

$$R_{\frac{\pi}{3}} \circ T_{(2,1)} \neq T_{(2,1)} \circ R_{\frac{\pi}{3}}$$

bir öteleme ile dönmenin bileşkesi değişimli değildir.

Örnek: $-3x + 5y - 3 = 0$ doğrusu verilsin. Bu doğrunun $R_{\frac{\pi}{2}}$ dönmesine göre, görüntüsünün kendisine dik bir doğru olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$$R_{\frac{\pi}{2}}(x,y) = \left(x\cos\frac{\pi}{2} + y\sin\frac{\pi}{2}, -x\sin\frac{\pi}{2} + y\cos\frac{\pi}{2}\right)$$

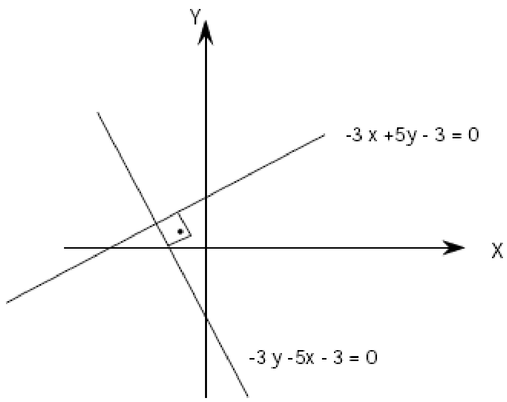
olduğundan

$$x' = x\cos\frac{\pi}{2} + y\sin\frac{\pi}{2} = y, y'' = -y\sin\frac{\pi}{2} + y\cos\frac{\pi}{2} = -x$$

dir. Buna göre $-3x + 5y - 3 = 0$ doğrusunun $R_{\frac{\pi}{2}}$ dönmesine göre resmi

$$-3(y) + 5(-x) - 3 = 0$$
$$-3y - 5x - 3 = 0$$
$$y = -\frac{5}{3}x - 1$$

doğrusudur. Bu doğrunun eğimi $m_2 = -\frac{5}{3}$ iken $-3x + 5y - 3 = 0$ doğrunun eğimi $m_1 = \frac{3}{5}$ dir. $m_1 m_2 = \frac{3}{5}\left(-\frac{5}{3}\right) = -1$ olduğundan, bu iki doğru birbirine diktir.



Örnek: $R_{\frac{\pi}{4}} \circ T_{(-1,2)}$ öteleme-dönme ile resmi $x''^2 - y''^2 + 6 = 0$ olan ifadeyi bulunuz

Çözüm: Önce $T_{(-1,2)}$ dönüşümü, sonra dönüşümü $R_{\frac{\pi}{4}}$ uygulanmalıdır. Bunun için üçüncü sistemden, ikinci sisteme geçiş denklemimiz $R_{\frac{\pi}{4}}$ ile ilgilidir.

$$R_{\frac{\pi}{4}}(x',y') = \left(x' \cos\frac{\pi}{4} + y' \sin\frac{\pi}{4}, -x' \sin\frac{\pi}{4} + y' \cos\frac{\pi}{4}\right)$$

olduğundan,

$$x'' = x' \cos\frac{\pi}{4} + y' \sin\frac{\pi}{4}, y'' = -x' \sin\frac{\pi}{4} + y' \cos\frac{\pi}{4}$$

$$x'' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y'), \; y'' = \frac{\sqrt{2}}{2}(-x' + y')$$

denklemleri $x''^2 - y''^2 + 6 = 0$ da yerine konulursa, $x'^2 - 4x'y' + y'^2 - 6 = 0$ bulunur.

$T_{(-1,2)}$ ötelemesi ile $T_{(-1,2)}(x, y) = \big(x - (-1)\big), y - 2)$ olduğundan

$$x' = x + 1 \text{ ve } y' = y - 2$$

denklemleri ile

$$(x+1)^2 - 4(x+1)(y-2) + (y-2)^2 - 6 = 0$$
$$x^2 + 2x + 1 - 4xy + 8x - 4y + 8 + y^2 - 4y + 4 - 6 = 0$$
$$x^2 - 4xy + y^2 + 10x - 8y + 7 = 0$$

ifadesi bulunur.

KAYNAKÇA

1. H. Hilmi HACISALİHOĞLU, 2ve 3 Boyutlu Uzayda Analitik Geometri, 7. Bakı, 2005, ANKARA.
2. Y. Doç. Dr. Nevin MAHİR, Matematik Öğretmenliği, Analitik Geometri, Anadolu Üniversitesi Yayınları: 1077, Açıköğretim Fakültesi Yayınları: 597, 1999, Eskişehir.