1. BÖLÜM
TÜREV

TÜREVİN TANIMI

Nasîrüddin Tûsî
(18 Şubat 1201, Tus, İran - 24 Haziran 1274, Bağdat, Irak)

1.1. Tanım: $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $a \in A$ için

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

ifadesine f fonksiyonun türevi denir. y', $f'(x)$, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df(x)}{dx}$ sembollerinden biriyle gösterilir. Burada $x - a = h$ seçilirse, $f : A \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

şekline dönüşür. // Burada x değişkeninin a noktasına ya da h değişkeninin 0'a yakınsadığını görmekteyiz. Bu da iki mesafenin arasındaki uzaklık daraldıkça alınan değerlerdeki değişiklikleri incelenmesi olur.

Örnek: $f(x) = 4x$ fonksiyonunun türevini bulunuz.

Çözüm: $f(x + h) = 4(x + h)$ olduğuna göre,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{4x + 4h - 4x}{h} = 4$$

bulunur.

Önek: $f(x) = x^2$ fonksiyonunun türevini bulunuz.

Çözüm: $f(x+h) = (x+h)^2$ olduğuna göre,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{h(2x+h)}{h}$$
$$= 2x$$

şeklindedir.

Örnek: $f(x) = 5x^3$ fonksiyonunun türevini bulunuz.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{5(x+h)^3 - 5x^3}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{5(x^3 + 3x^2h + 3h^2x + h^3) - 5x^3}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{15x^2h + 15h^2x + 5h^3}{h}$$
$$= 15x^2$$

CEBİRSEL FONKSİYONLARIN TÜREVİ

(Türevin özellikleri konusunda $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ olarak kabul edileceğinden bu ifadeler her teorem ve örnekte tekrar edilmeyecektir.)

1.1. Teorem: $c \in A$ için $f(x) = c$ ise $f'(x) = 0$ dir.

İspat: $f(x) = f(x+h) = c$ olduğuna göre,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{c - c}{h} = 0$$

olarak bulunur.

Örnek: $f(x) = 5$ ise $f'(x) = 0$

Örnek: $f(x) = \frac{8}{3}$ ise $\frac{df(x)}{dx} = 0$

Örnek: $y = \sqrt{10}$ ise $\frac{dy}{dx} = 0$

1.2. Teorem: $f(x) = cx$ ise $f'(x) = c$ dir.

İspat: $f(x+h) = c(x+h)$ olduğuna göre,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{cx + ch - cx}{h} = c$$

olarak bulunur.

Örnek: $f(x) = 7x$ ise $f'(x) = 7$ dir.

Örnek: $f(x) = \frac{1}{3}x$ ise $\frac{df(x)}{dx} = \frac{1}{3}$ dir.

Örnek: $y = x$ ise $\frac{dy}{dx} = 1$ dir.

1. 3. Teorem: $f(x) = cx^n$ ise $f'(x) = cnx^{n-1}$ dir.

İspat: $f(x+h) = c(x+h)^n$ olduğuna göre,

$$\begin{aligned} f'(x) &= c \cdot \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\ &= c \cdot \lim_{h\to 0} \frac{x^n + nx^{n-1}h + n(n-1)x^{n-2}h^2 + \ldots + h^n - x^n}{h} \\ &= c \cdot \lim_{h\to 0} \frac{h(nx^{n-1} + n(n-1)x^{n-2}h + \ldots + h^{n-1})}{h} \\ &= c \cdot \lim_{h\to 0}(nx^{n-1} + n(n-1)x^{n-2}h + \ldots + h^{n-1}) \\ &= cnx^{n-1} \end{aligned}$$

dir.

Örnek: $f(x) = 5x^{16}$ ise $f'(x) = 80x^{15}$

Örnek: $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ ifadesinin türevini bulunuz.

Çözüm: $\dfrac{1}{x^2} = x^{-2}$ olduğuna göre $f(x) = x^{-2}$ olur. Şu halde $f'(x) = -x^{-3}$ dir.

Örnek: $f(x) = 3x^6$ ise $f'(1)$ nedir?

Çözüm: $f'(x) = 18x^5$ olup $'(x) = 18 \cdot 1^5 = 18$ dir.

1. 4. Teorem: $f(x) = u(x) + v(x)$ ise $f'(x) = u'(x) + v'(x)$ olur.

İspat: $f(x+h) = u(x+h) + v(x+h)$ olduğuna göre

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{[u(x+h)+v(x+h)]-[u(x)+v(x)]}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h)-u(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{v(x+h)-v(x)}{h} \\
&= u'(x) + v'(x)
\end{aligned}
$$

olur.

Örnek: $f(x) = x^3 - 5x^2$ ise $f'(x) = 3x^2 - 10x$

Örnek: $f(x) = 4x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 20$ ise $f'(x) = 16x^3 + 9x^3 - 4x$

Örnek: $f(x) = x^5 - \dfrac{1}{x^3}$ ise $f'(1)$ i bulunuz.

Çözüm: $f(x) = x^5 - \dfrac{1}{x^3} = x^5 - x^{-3}$ olarak düşünelim. Buna göre $f'(x) = 5x^4 + 3x^{-4}$ dir. Şu halde

$$f'(1) = 5 \cdot 1^4 + 3 \cdot 1^{-4} = 8$$

olur.

1. 5. Teorem: $f(x) = u(x) \cdot v(x)$ ise $f'(x) = u'(x)v(x) + v'(x)u(x)$ dir.

İspat: $f(x+h) = u(x+h) + v(x+h)$ olduğuna göre,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)\cdot v(x+h) - u(x)\cdot v(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)\cdot v(x+h) - u(x)\cdot v(x+h) + u(x)\cdot v(x+h) - u(x)\cdot v(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{[u(x+h)-u(x)]\cdot v(x+h) + u(x)\cdot [v(x+h)-v(x)]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)-u(x)}{h}v(x+h) + u(x)\frac{v(x+h)-v(x)}{h}$$

$$= u'(x)\lim_{h\to 0} v(x+h) + u(x)v'(x)$$

$$= u'^{(x)}v(x) + u(x)\,v'(x)$$

dir.

Örnek: $f(x) = (x^2 + 8x)(x^2 + 6)$ ise türevini bulunuz.

Çözüm: $f'(x) = (2x + 8)(x^2 + 6) + (2x)(x^2 + 8x)$

Örnek: $f(x) = x^2(x^3 + 5x - 4)$ ise türevini bulunuz.

Çözüm: $f'(x) = 2x(x^3 + 5x - 4) + (3x^2 + 5)x^2$

1. 6. Teorem: $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ ise $f'(x) = \dfrac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{[v(x)]^2}$ dir.

İspat: $f(x+h) = \dfrac{u(x+h)}{v(x+h)}$ olduğuna göre

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{u(x+h)}{v(x+h)} - \dfrac{u(x)}{v(x)}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)v(x) - u(x)v(x+h)}{h.v(x+h)v(x)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{v(x+h)v(x)}\left[\frac{u(x+h)v(x) - u(x)v(x) + u(x)v(x) - u(x)v(x+h)}{h}\right]$$

$$= \frac{1}{v^2(x)}\lim_{h\to 0}\left[\frac{u(x+h)-u(x)}{h}.v(x) - u(x).\frac{v(x+h)-v(x)}{h}\right]$$

$$= \frac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{[v(x)]^2}$$
dir.

Örnek: $f(x) = \frac{x^2-3}{x^4}$ ise $f'(x)$ i bulunuz.

Çözüm: $f(x) = \frac{2x \cdot x^4 - 4x^3(x^2-3)}{(x^4)^2} = \frac{-2x^5+12x^3}{x^8}$

Örnek: $g(x) = \frac{x^8+3x}{x^6+1}$ ise $g'(x)$ i bulunuz.

Çözüm: $g(x) = \frac{(8x^7+3)(x^6+1) - 6x^5(x^8+3x)}{(x^6+1)^2}$

Örnek: $f(x) = \frac{1}{x^5}$ ise $f'(x)$ i bulunuz.

Çözüm: 1.Yol: Üstlü ifadeler tanımlarını kullanarak
$f(x) = x^{-5}$ olacağından $f'(x) = -5x^{-6}$
bulunur.

2.Yol: Bölüm türevi kullanarak,
$$f'(x) = \frac{0 \cdot x^5 - 5x^4 \cdot 1}{(x^5)^2} = \frac{-5}{x^6} = -5x^{-6}$$
bulunur.

TÜREV ve SÜREKLİLİK

1.7. Teorem: $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$ fonksiyonu $a \in A$ için türevli ise $x = a$ noktasında süreklidir. Yani bir fonksiyonun bir noktada türevi varsa, o noktada süreklidir.

İspat: f fonksiyonu a'da türevlenebilir olduğundan,
$$f(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x-a}(x - a)f(a)$$
eşitliği yazılır. Her iki tarafın $x \to a$ için limitini alalım.

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\lim_{x\to a}(x-a)+\lim_{x\to a} f(a)$$

$$\lim_{x\to a} f(x)=f'(x).0+f(a)$$

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$$

bulunur. Bu ise f fonksiyonunun $x=a$ noktasında sürekli olduğunu gösterir.//

1.1. Not:

1. Bu teoremin tersi doğru değildir. Yani, bir f fonksiyonunun $x = a$ noktasında sürekli ise türevi olmaya bilir, yani tersi doğru değildir. Tersinin doğru olmadığına dair bir örnek vermek yeterlidir. Bu konuda bir örnek mutlak değer fonksiyonun türevi kısmında verilecektir.

2. Bu teoremden şu sonucu çıkarabiliriz. Bir fonksiyon süreksiz olduğu noktalarda türevi yoktur. Bu bilgi ile ilgili örnekler parçalı fonksiyonlar konusunda verilecektir.

BİLEŞKE FONKSİYONUNUN TÜREVİ

1. 8. Teorem (Zincir Kuralı): $A \subset \mathbb{R}$ ve $B \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $f : A \to \mathbb{R}$, $u : B \to \mathbb{R}$ fonksiyonları verilsin. u fonksiyonu $a \in B$ da, u fonksiyonu $u(a) \in A$ de türevlenebiliyor ise $u \circ f$ fonksiyonu $x = a$ da türevlenebilir ve

$$\frac{d(f\circ u)(x)}{dx}=\frac{df(u(x))}{du(x)}\cdot\frac{du(x)}{dx}$$

dir. Bu durum,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

şeklinde olur.

İspat: Türev tanımını kullanarak,

$$\frac{d(f\circ u)(x)}{dx}=\lim_{x\to a}\frac{f(u(x))-f(u(a))}{x-a}$$

yazılır. Limiti alınacak ifadeyi $(u(x)-u(a))$ ile çarpıp bölersek;

$$\frac{d(f\circ u)(x)}{dx}=\lim_{x\to a}\frac{f(u(x))-f(u(a))}{u(x)-u(a)}.\frac{u(x)-u(a)}{x-a}$$

bulunur. u fonksiyonu $x=a$ da türevli olduğundan süreklidir. Bu nedenle,

$$\lim_{x\to a} u(x)=u(a)$$

dir. O halde,

$$\lim_{x\to a}\frac{f(u(x))-f(u(a))}{u(x)-u(a)}=\frac{df(u(x))}{dx}$$
olacağından bu değerleri yerine yazılarak,
$$\frac{d(f\circ u)(x)}{dx}=\frac{df(u(x))}{dx}.\frac{du(x)}{dx}$$
olduğu görülür.

Örnek: $y=(x^4-2x^2)^8$ türevini bulunuz.

Çözüm: $u=x^4-2x^2$ seçilirse $y=u^8$ olur. $\frac{dy}{du}=8u^7$ ve $\frac{dy}{dx}=4x^3-4x$ dir. Burada $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$ olacağından
$$\frac{dy}{du}=8u^7\cdot(4x^3-4x)=8\left(x^4-2x^2\right)^7\cdot(4x^3-4x)$$
bulunur.

Örnek: $y=(3x^2-4)^{25}$ türevini bulunuz.

Çözüm: $u=3x^2-4$ seçilirse $y=u^{25}$ olur. $\frac{dy}{du}=25u^{24}$ ve $\frac{dy}{dx}=6x$ dir. Burada $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$ olacağından
$$\frac{dy}{du}=25u^{24}\cdot 6x=150(3x^2-4)^{24}$$
bulunur.

Örnek: $f(2x-1)=x^3+x^2+10$ ise $f'(3)$ ün değerini bulunuz.

Çözüm: $2x-1=3$ ise $x=2$ dir. $u=2x-1$ alınırsa $\frac{df(x)}{dx}=\frac{df(u)}{du}\cdot\frac{du}{dx}$ olur. Buna göre eşitliğin her iki tarafının türevini alalım.

$$f'(2x-1)\cdot 2=3x^2+2x$$
$$f'(2\cdot 2-1)\cdot 2=3\cdot 2^2+2\cdot 2$$
$$f'(3)=8$$
olur.

Örnek: $f(x^2)=4\,g(5-4x)$ ve $g'(3)=\frac{1}{8}$ ise $f'\left(\frac{1}{4}\right)$ ün değeri nedir?

Çözüm: Her iki tarafın türevini bileşke fonksiyonun türevine göre alalım.

x yerine $\frac{1}{2}$ yazarsak

$$f'\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2\right) 2 \cdot \frac{1}{2} = -16\, g'\left(5 - 4 \cdot \frac{1}{2}\right)$$

$$f'\left(\frac{1}{4}\right) = -16 \cdot \frac{1}{8} = -2$$

olur.

Örnek: $f(2x+1) \cdot g(x^2+1) = 3x,\ g(2) = 3$ ve $f'(3) = 2$ ise $g(2)$ ün değerini bulunuz.

Çözüm: $f(2x+1) \cdot g(x^2+1) = 3x$ eşitliğinde $x = 1$ alınırsa

$$f(3) \cdot g(2) = 3$$
$$f(3) \cdot 3 = 3$$
$$f(3) = 1$$

olur. Verilen eşitliğin her iki yanının x'e göre türevi alınırsa

$$2\, f'(2x+1) \cdot g(x^2+1) + f(2x+1) \cdot 2x \cdot g'(x^2+1) = 3$$

bulunur. $x = 1$ alınırsa

$$2\, f'(3) \cdot g(2) + f(3) \cdot 2 \cdot 1 \cdot g'(2) = 3$$
$$2 \cdot 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot g'(2) = 3$$
$$g'^{(2)} = -\frac{9}{2}$$

elde edilir.

KÖKLÜ İFADELERİN TÜREVİ

1.9. Teorem: $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. $f(x) = \sqrt[n]{u(x)}$ şeklinde ise

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{n \cdot \sqrt[n]{u(x)^{n-1}}}$$

dir.

İspat: $f(x) = \sqrt[n]{u(x)} = (u(x))^{1/n}$ eşitliğinde zincir kuralını kullanarak türevini alırsak

$$f'(x) = \frac{1}{n}\big(u(x)\big)^{\frac{1-n}{n}} u'(x) = \frac{u'(x)}{n \cdot u(x)^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{u'(x)}{n \cdot \sqrt[n]{u(x)^{n-1}}}$$

bulunur.

Örnek: $f(x) = \sqrt{4x+7}$ ise $n = 2$ ile $u(x) = 4x + 7$ ve $u'(x) = 4$ olduğundan,

$$f'(x) = \frac{4}{2\cdot\sqrt{4x+7}} = \frac{2}{\sqrt{4x+7}}$$

şeklindedir.

Örnek: $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 8x + 16}$ ise $n = 3$ ile $u(x) = x^2 - 8x + 16$ ve $u'(x) = 2x - 8$ olduğundan

$$f'(x) = \frac{2x-8}{3\cdot\sqrt[3]{(x^2-8x+16)^2}} = \frac{2(x-4)}{3\cdot\sqrt[3]{x-4}}$$

şeklindedir.

Örnek: $f(x) = 4x^5 + \sqrt{3x+10}$ ise $n = 2$ ile $u(x) = 3x + 10$ ve $u'(x) = 3$ olduğundan

$$f'(x) = 20x^4 + \frac{3}{2\cdot\sqrt{3x+10}}$$

şeklindedir.

Örnek: $y = \sqrt{x^2 - 4x + 1}$ ise y' in $x = 0$ için değeri nedir?

Çözüm: $y' = \frac{2x-4}{2\cdot\sqrt{x^2-4x+1}}$, $x = 0$ için $y' = \frac{-4}{2} = -2$ dir.

Örnek: $f: \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$, $:$ $f(x) = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x}}$ tanımlanıyor. $f'(x)$ in değeri nedir?

Çözüm: $u(x) = \frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x}$ ise $u'^{(x)} = -\frac{1}{x^2}$ olduğundan

$$f'(x) = \frac{-\frac{1}{x^2}}{3\cdot\sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x}\right)^2}}$$

$$f'(1) = \frac{-1}{3\cdot\sqrt[3]{4}}$$

olarak bulunur.

TERS FONKSİYONLARIN TÜREVİ

1.10. Teorem: $A \subset \mathbb{R}$, $B \subset \mathbb{R}$, $f : A \to B$ birebir ve örten, $f(a) = b$ şartını sağlayan türevlenebilir bir fonksiyon olsun. Bu takdirde,

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$$

şeklindedir.

İspat: $$(f^{-1})'(b) = \lim_{y\to b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y-b}$$
$$= \lim_{y\to b} \frac{x-a}{f(x)-f(a)}$$
$$= \lim_{x\to a} \frac{1}{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}$$
$$= \lim_{x\to a} \frac{1}{f'(a)}$$

olur. (Bir fonksiyonun tersinin türevini bularken, verilen fonksiyonun tersi alınarak türevi bulunabilir.)

Örnek: $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = \sqrt{8x}$ fonksiyonu verilsin. Bu takdirde $(f^{-1})'(4)$ nin değeri nedir?

Çözüm: $\sqrt{8x} = 4$ ise $x = 2$ olacağından $(f^{-1})'(4) = \frac{1}{f'(2)}$ dir. Şu halde,

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{(\sqrt{8x})'} = \frac{1}{\frac{8}{2\sqrt{8x}}} = \frac{\sqrt{8x}}{4}$$

$$(f^{-1})'(4) = \frac{\sqrt{8 \cdot 2}}{4} = 1$$

bulunur. (Bu fonksiyonun tersi alınarak da bu soru ikinci bir yöntem olarak çözülebilir.)

Örnek: $f : (1, \infty) \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ fonksiyonu verilsin. Bu takdirde $(f^{-1})'(3)$ nin değeri nedir?

Çözüm: $\sqrt{x^2 - 1} = 3$ ise $x = \pm\sqrt{10}$ olur. $x = -\sqrt{10}$ tanım kümesinde olmadığından

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{(\sqrt{x^2-1})'} = \frac{1}{\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}} = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$$

$$(f^{-1})'(3) = \frac{\sqrt{\sqrt{10}^2-1}}{\sqrt{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

bulunur.

TRİGONOMETRİK FONKSİYONLERIN TÜREVİ

1.11. Teorem:

i) $f:\mathbb{R} \to [-1,1], f(x) = \sin u(x)$ ise $f'(x) = \cos u(x) \cdot u'(x)$

ii) $f:\mathbb{R} \to [-1,1], f(x) = \cos u(x)$ ise $f'(x) = -\sin u(x) \cdot u'(x)$

iii) $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \tan u(x)$ ise $f'(x) = (1+\tan^2 u(x)) \cdot u'(x)$

iv) $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \cot u(x)$ ise $f'(x) = -(1+\cot^2 u(x)) \cdot u'(x)$

v) $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sec u(x)$ ise $f'(x) = \sec u(x) \cdot \tan u(x) \cdot u'(x)$

vi) $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \csc u(x)$ ise $f'(x) = -\csc u(x) \cdot \cot u(x) \cdot u'(x)$

dir.

İspat: i) Trigonometrideki dönüşüm formülünün

$$\sin A - \sin B = 2\cos\frac{A+B}{2} \cdot \sin\frac{A-B}{2}$$

olduğunu hatırlayalım. Buna göre

$$f'(x) = \lim_{x\to a}\frac{\sin u(x) - \sin u(a)}{x-a}$$

$$= \lim_{x\to a}\frac{2\cos\left(\frac{u(x)+u(a)}{2}\right)\sin\left(\frac{u(x)-u(a)}{2}\right)}{x-a}$$

yazılır. Limiti alınacak ifadeyi $(u(x)-u(a))$ ile çarpıp bölersek

$$f'(x) = \lim_{x\to a}\frac{\cos\left(\frac{u(x)+u(a)}{2}\right)\sin\left(\frac{u(x)-u(a)}{2}\right)}{\left(\frac{u(x)-u(a)}{2}\right)}.\left(\frac{u(x)-u(a)}{x-a}\right)$$

$$= \lim_{x\to a}\cos\left(\frac{u(x)+u(a)}{2}\right).\lim_{x\to a}\frac{\sin\left(\frac{u(x)-u(a)}{2}\right)}{\left(\frac{u(x)-u(a)}{2}\right)}.\lim_{x\to a}\left(\frac{u(x)-u(a)}{x-a}\right)$$

bulunur. u fonksiyonu $x = a$ da türevli olduğundan süreklidir. Bu nedenle

$$\lim_{x\to a} u(x) = u(a)$$

dir. Ayrıca, $\lim_{x\to a}\dfrac{\sin\left(\dfrac{u(x)-u(a)}{2}\right)}{\left(\dfrac{u(x)-u(a)}{2}\right)}=1$ dir. O halde

$$f'(x)=\cos u(x)\cdot u'(x)$$

biçimindedir.

ii) (i) şıkkına benzer yöntemle ispat edilir.

iii) $f(x)=\tan u(x)=\dfrac{\sin u(x)}{\cos u(x)}$ olduğuna göre bölümün türevini uygularsak

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\cos u(x)\cdot u'(x)\cdot\cos u(x)-(-\sin u(x))\cdot u'(x)\cdot\sin u(x)}{\cos^2 u(x)} \\ &= \left[\frac{\cos^2 u(x)+\sin^2 u(x)}{\cos^2 u(x)}\right]u'(x) \\ &= [1+\tan^2 u(x)]u'(x) \end{aligned}$$

bulunur.

iv) (iii) şıkkına benzer yöntemle ispat edilir.

v) $f(x)=\sec u(x)=\dfrac{1}{\cos u(x)}$ olduğuna göre bölümün türevini uygularsak

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{0\cdot\cos u(x)-(-\sin u(x))\cdot u'(x)\cdot 1}{\cos^2 u(x)} \\ &= \frac{\sin u(x)}{\cos^2 u(x)}u'(x) \\ &= \frac{1}{\cos u(x)}\cdot\frac{\sin u(x)}{\cos u(x)}\cdot u'(x) \\ &= \sec u(x)\cdot\tan u(x)\cdot u'(x) \end{aligned}$$

bulunur.

vi) d şıkkına benzer yöntemle ispat edilir.

Örnek: $f(x)=\sin x^3$ ise $u(x)=x^3$ olacağından $f'(x)=\cos x^3\cdot 3x^2$ dir.

Örnek: $y = \tan\frac{x}{2}$ ise $u(x) = \frac{x}{2}$ olacağından $\frac{dy}{dx} = \left(1 + \tan^2\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}$ dir.

Örnek: $y = \cos^3 4x$ ise $u(x) = 4x$ ve zincir kuralı gereği
$$y' = 3\cos^2 4x\cdot(-\sin 4x)\cdot 4 = -12\cos^2 4x\cdot\sin 4x$$
biçimindedir.

Örnek: $y = \sin^5 x^6$ ise $u(x) = x^6$ ve zincir kuralı gereği
$$y' = 5\sin^4 x^6\cdot\cos x^6\cdot 6x^5 = 30\sin^4 x^6\cdot\cos x^6\cdot x^5$$
biçimindedir.

Örnek: $y = \cot^3 x^{10}$ ise $u(x) = x^{10}$ ve zincir kuralı gereği
$$y' = -3\cot^2 x^{10}\cdot(1+\cot^2 x^{10})\cdot 10x^9$$
biçimindedir.

Örnek: $y = \tan(\sin x)$ ise $u = \sin x$ olacağından
$$y' = (1+\tan^2(\sin x))\cdot\cos x$$
dir.

Örnek: $y = \sin^2 x - \cos^2 x$ ise zincir kuralı gereği
$$\begin{aligned} y' &= 2\sin x\cos x - 2\cos x\,(-\sin x) \\ &= \sin 2x + \sin 2x \\ &= 2\sin 2x \end{aligned}$$
dir.

Örnek: $f(x) = \sec 3x$ ise $u(x) = 3x$ olacağından $f'(x) = 3\sec 3x\tan 3x$
dir.

Örnek: $f(x) = \frac{1+\sin x^3}{2+\sin x}$ ise $f'(0)$ ın değeri nedir?

Çözüm: $f'(x) = \frac{(3x^2\cos x^3)(2+\sin x) - \cos x(1+\sin x^3)}{(2+\sin x)^2}$

$$f'(0)=\frac{\left(3\cdot 0^2\cos 0^3\right)(2+\sin 0)-\cos 0\left(1+\sin 0^3\right)}{(2+\sin 0)^2}=-\frac{1}{4}$$

Örnek: $f(x)=\sin(3x+8)^5$ ise $f'(x)$ nin değeri nedir?

Çözüm: $f'(x)=[\cos(3x+8)^5][5(3x+8)^4\cdot 3]$

Örnek: $f(x)=\sqrt{x}\cos x$ ise $f'(\pi)$ i bulunuz.

Çözüm: $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\cos x+(-\sin x)\sqrt{x}$

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\cos\pi-\sin\pi\cdot\sqrt{\pi}$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}(-1)-0\cdot\sqrt{\pi}$$
$$=-\frac{1}{2\sqrt{\pi}}$$

Örnek: $f(x)=\sin 3x\cdot\cos 2x$ ise $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$ nın değeri nedir?

Çözüm: $f'(x)=3\cos 3x\cdot\cos 2x-2\sin 2x\cdot\sin 3x$

$$f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=3\cos 3\left(\frac{\pi}{6}\right)\cdot\cos 2\left(\frac{\pi}{6}\right)-2\sin 2\left(\frac{\pi}{6}\right)\cdot\sin 3\left(\frac{\pi}{6}\right)$$
$$=3\cos\frac{\pi}{2}\cdot\cos\frac{\pi}{3}-2\sin\frac{\pi}{3}\cdot\sin\frac{\pi}{2}$$
$$=3\cdot 0\cdot\frac{1}{2}-2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 1$$
$$=-\sqrt{3}$$

TERS TRİGONOMETRİK FONKSİYONLARIN TÜREVİ

1.12. Teorem:

i) $f:[-1,1]\to\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, $f(x)=\arcsin u(x)$ ise $f'(x)=\frac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}$

ii) $f:[-1,1]\to\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, $f(x)=\arccos u(x)$ ise $f'(x)=-\frac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}$

iii) $f:\mathbb{R}\to\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, $f(x)=\arctan u(x)$ ise $f'(x)=\frac{u'(x)}{1+u^2(x)}$

iv) $f:\mathbb{R}\to[0,\pi]$, $f(x)=\operatorname{arccot}u(x)$ ise $f'(x)=-\dfrac{u'(x)}{1+u^2(x)}$

v) $f:\mathbb{R}\to[0,\pi]$, $f(x)=\operatorname{arcsec}u(x)$ ise $f'(x)=\dfrac{u'(x)}{u(x)\cdot\sqrt{u^2(x)-1}}$

vi) $f:\mathbb{R}\to\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, $f(x)=\operatorname{arccsc}u(x)$ ise $f'(x)=-\dfrac{u'(x)}{u(x)\cdot\sqrt{u^2(x)-1}}$

dir.

İspat: i) $f(x)=\arcsin u(x)$ ise $u(x)=\sin f(x)$ olduğuna göre eşitliğinin her iki yanını x'e göre türevini türevde zincir kuralına göre alırsak

$(\sin f(x))'=u'(x)$

$f'(x)\cdot\cos f(x)=u'(x)$

$f'(x)=\dfrac{u'(x)}{\cos f(x)}$, $\quad(\cos t=\sqrt{1-\sin^2 t})$

$f'(x)=\dfrac{u'(x)}{\sqrt{1-\sin^2 f(x)}}$

$f'(x)=\dfrac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}$

olarak bulunur.

ii) (i) şıkkına benzer yöntemle ispat edilir.

iii) $f(x)=\arctan u(x)$ ise $u(x)=\tan f(x)$ olduğuna göre eşitliğinin her iki yanını x'e göre türevini türevde zincir kuralına göre alırsak,

$(\tan f(x))'=u'(x)$

$f'(x)\cdot[1+\tan^2 f(x)]=u'(x)$

$f'(x)=\dfrac{u'(x)}{1+\tan^2 f(x)}$

$f'(x)=\dfrac{u'(x)}{1+u^2(x)}$

olarak bulunur.

iv) c şıkkına benzer yöntemle ispat edilir.

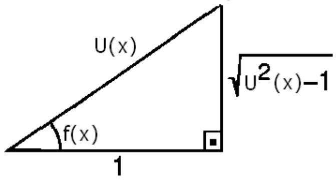
v) $f(x)=\operatorname{arcsec}u(x)$ ise $u(x)=\sec f(x)$ olduğuna göre eşitliğinin her iki yanını x'e göre türevini türevde zincir kuralına göre alırsak

$(\sec f(x))'=u'(x)$

$$f'(x)\cdot \sec f(x)\ \cdot \tan f(x) = u'(x)$$

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{\sec f(x)\cdot \tan f(x)} \qquad (1)$$

bulunur. $u(x) = \sec f(x)$ ifadesini bir dik üçgende yerine yazarsak,



şekli oluşur. Bu şekle göre $\tan f(x) = \sqrt{u^2(x) - 1}$ olacağından (1) eşitliği

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)\cdot\sqrt{u^2(x)-1}}$$

olarak bulunur.

vi) (v) şıkkına benzer yöntemle ispat edilir.

Örnek: $y = \arcsin 3x$ ise $u(x) = 3x$ olacağından $y' = \dfrac{3}{\sqrt{1-(3x)^2}}$ dir.

Örnek: $y = \cos^{-1} x^2$ ise $u(x) = x^2$ olacağından $y' = \dfrac{-2x}{\sqrt{1-x^4}}$ dir.

Örnek: $f(x) = \arctan^3 5x$ ise $u(x) = 5x$ ve zincir kuralı gereği,

$$f'(x) = 3\cdot \arctan^2 5x \cdot \frac{5}{1+25x^2}$$

bulunur.

Örnek: $y = \operatorname{arcsec} 8x$ ise $u(x) = 8x$ olacağından

$$y' = \frac{8}{8x\cdot\sqrt{(8x)^2-1}} y' = \frac{1}{x\cdot\sqrt{64x^2-1}}$$

dir.

Örnek: $y = \arcsin(\cos x)$ ise $u(x) = \cos x$ olacağından

$$y' = \frac{-\sin x}{\sqrt{1-\cos^2 x}} = \frac{-\sin x}{\sqrt{\sin^2 x}} = -1$$

biçimindedir.

Örnek: $y = \operatorname{arccot}\sqrt{x}$ fonksiyonunun türevini bulmak için önce

$$u'(x) = (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

olduğunu biliyoruz. Buna göre,

$$y' = \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1+\sqrt{x}^2} = -\frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$$

dir.

Örnek: $f(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ ise $f'(3)$ nedir?

Çözüm: $\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

$$f'(x) = \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}$$

$$f'(3) = \frac{-\frac{1}{3^2}}{1+\frac{1}{3^2}} = -\frac{1}{10}$$

Örnek: $y = x^8 \arctan x$ ise $u(x) = x^8$ olacağından

$$y' = 8x^7 \arctan x + \frac{1}{1+x^2}x^8$$

dir.

Örnek: $y = x^6 \operatorname{arccot}(\sin x)$ ise $u(x) = \sin x$ olacağından çarpımın türevinden

$$y' = 6x^6 \operatorname{arccot}(\sin x) + \frac{-\cos x}{1+\sin^2 x}x^6$$

bulunur.

LOGARİTMİK ve ÜSTEL FONKSİYONLARIN TÜREVİ

1.13. Teorem: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = e^{u(x)}$ ise $f'(x) = e^{u(x)} \cdot u'(x)$ dir.

İspat: $f'(x)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{e^{u(x)}-e^{u(a)}}{x-a}$

yazılır. Limiti alınacak ifadeyi $(u(x)-u(a))$ ile çarpıp bölersek

$$f'(x)=\lim_{x\to a}\frac{e^{u(x)}-e^{u(a)}}{(u(x)-u(a))}.\left(\frac{u(x)-u(a)}{x-a}\right)=e^{u(x)}u'(x)$$

elde edilir.

Örnek: $f(x)=e^{3x}$ ise $u(x)=3x$ olacağından $f'(x)=e^{3x}\cdot 3$ dir.

Örnek: $f(x)=e^{x}$ ise $u(x)=x$ olacağından $f'(x)=e^{x}$ dir. (Türevi kendisi olan fonksiyon)

Örnek: $f(x)=e^{\sin x}$ ise $u(x)=\sin x$ olacağından $f'(x)=e^{\sin x}\cos x$ dir.

Örnek: $f(x)=e^{-x^2}$ ise $u(x)=-x^2$ olacağından $f'(x)=-x^2e^{-x^2}$ dir.

Örnek: $f(x)=e^{-\csc x}$ ise $u(x)=-\csc x$ olacağından

$$f(x)=-(-\csc x\cot x)e^{-\csc x}=(\csc x\cot x)e^{-\csc x}$$

dir.

1.14. Teorem: $f:\mathbb{R}^{+}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln u(x)$ ise $f'(x)=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ şeklindedir.

İspat: $f(x)=\ln u(x)$ fonksiyonunun tersi $u(x)=e^{f(x)}$ olduğuna göre 1.13. teorem gereği,

$$u'(x)=e^{f(x)}f'(x)$$

$$f'(x)=\frac{u'(x)}{e^{f(x)}}=\frac{u'(x)}{u(x)}$$

olur.

Örnek: $f(x)=\ln x^3$ ise $u(x)=x^3$ olacağından $f'(x)=\dfrac{3x^2}{x^3}$ dir.

Örnek: $y = \ln(\sin x)$ ise $u(x) = \sin x$ olacağından $y' = \dfrac{\cos x}{\sin x} = \cot x$ dir.

Örnek: $y = x^2 + \ln 3x - \tan x$ ise

$$y' = 2x + \frac{3}{3x} - (1 + \tan^2 x)$$

dir.

Örnek: $y = \ln \dfrac{x^5}{x-2}$ ise y' in $x = 1$ için değeri nedir?

Çözüm: $y = \ln x^5 - \ln(x+3)$ olacağından

$$y' = \frac{5}{x} - \frac{1}{x-2}$$

$$f'(1) = \frac{5}{1} - \frac{1}{1-2} = 6$$

bulunur.

1.15. Teorem: $a \neq 1, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$,

$$f(x) = a^{u(x)} \text{ ise } f'(x) = a^{u(x)} \cdot u'(x) \cdot \ln a$$

dir.

İspat: $f(x) = a^{u(x)}$

$$\ln f(x) = \ln a^{u(x)}$$

$$\ln f(x) = u(x) \cdot \ln a$$

bulunur. Bu eşitliğinin her iki yanını x'e göre türevini alırsak, türevde zincir kuralına göre

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = u'(x) \cdot \ln a$$

$$f'(x) = f(x) \cdot u'(x) \cdot \ln a$$

$$f'(x) = a^{u(x)} \cdot u'(x) \cdot \ln a$$

elde edilir.

Örnek: $f(x) = 5^x$ ise $u(x) = x$ olacağından $f'(x) = 5^x \ln 5$

Örnek: $y = \left(\frac{2}{3}\right)^{8x}$ ise $u(x) = 8x$ olacağından $y' = \left(\frac{2}{3}\right)^{8x} \ln \frac{2}{3}$ dir.

Örnek: $y = x^2 \cdot 5^x$ ise $\dfrac{dy}{dx} = 2x \cdot 5^x + x^2 \cdot 5^x \ln 5$ dir.

Örnek: $y = 2^{\sin^3 x}$ ise $u(x) = \sin^3 x$ olacağından

$$y' = 2^{\sin^3 x} 3 \sin^2 x \, ln \, 2$$

dir.

Örnek: $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{\cos x}$ ise y' nedir?

Çözüm: $y = 2^{-\cos x}$ ve $u(x) = -\cos x$ ve $u(x) = \sin x$ olduğundan,

$$y = 2^{-\cos x} \sin x \ln 2$$

dir.

1.16. Teorem: $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_a u(x)$ ise $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)} \log_a e$ dir.

İspat: $f(x) = \log_a u(x)$

$$a^{f(x)} = a^{\log_a u(x)}$$
$$a^{f(x)} = u(x)$$

bulunur. Bu eşitliğinin her iki yanını x'e göre türevini alırsak, 1.15 teoremi gereği

$$a^{f(x)} f'(x) \cdot \ln a = u'(x)$$
$$f'(x) = \frac{u'(x)}{a^{f(x)}} \cdot \frac{1}{\ln a}$$
$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} \log_a e$$

elde edilir.

Örnek: $f(x) = \log_8 4x$ ise türevini bulunuz.

Çözüm: $u(x) = 4x$ ise $u'(x) = 4$ dir. Buna göre

$$f'(x) = \frac{4}{4x} \log_8 e = \frac{1}{x} \log_8 e$$

dir.

Örnek: $f(x) = \log x^2$ ise türevini bulunuz.

Çözüm: $u(x) = x^2$ ise $u'(x) = 2x$ dir. Buna göre

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2}\log e = \frac{2}{x}\log e$$

dir.

Örnek: $f(x) = \log(x^2 + 3)$ ise türevini bulunuz.

Çözüm: $u(x) = x^2 + 3$ ise $u'(x) = 2x$ dir. Buna göre

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2+3}\log e$$

dir.

Örnek: $y = \log(\tan x)$ ise türevini bulunuz.

Çözüm: $u(x) = \tan x$ ise $u'(x) = 1 + \tan^2 x$ dir. Buna göre

$$y' = \frac{1+\tan^2 x}{\tan x}\log e$$

dir.

1.1. Not: Logaritmik ve üstel fonksiyonun dışında başka bir fonksiyonların türevleri de logaritma yöntemlerini de kullanarak çözebiliyoruz. Şimdi bunları örneklerle gösterelim:

Örnek: $y = x^x$ fonksiyonunun türevini bulunuz.

Çözüm: Bu tür fonksiyonların önce her iki tarafının ln'ini alalım. $\ln y = \ln x^x$ dir. Şimdi logaritmanın kuralından $\ln y = x \ln x$ olarak bulunur. Burada her iki tarafın türevini alırsak,

$$\frac{y'}{y} = \ln x + \frac{1}{x}x$$

$$y' = y(1 + \ln x)$$

$$y' = x^x(1 + \ln x)$$

elde edilir.

Örnek: $y = x^{e^x}$ fonksiyonunun türevini bulunuz.

Çözüm: Bu tür fonksiyonun da önce her iki tarafının ln'ini alalım.

$$\ln y = \ln x^{e^x}$$

$$\ln y = e^x \ \ln x$$

olarak bulunur. Burada her iki tarafın türevini alırsak,

$$\frac{y'}{y} = e^x \ln x + \frac{1}{x} e^x$$

$$y' = ye^x \left(\frac{1}{x} + \ln x\right)$$

$$y' = x^{e^x} e^x \left(\frac{1}{x} + \ln x\right)$$

elde edilir.

Örnek: $y = x^{\sin x}$ fonksiyonunun türevini bulunuz.

Çözüm: Bu tür fonksiyonun da önce her iki tarafının ln'ini alalım.

$$\ln y = \ln x^{\sin x}$$

$$\ln y = \sin x \ \ln x$$

olarak bulunur. Burada her iki tarafın türevini alırsak,

$$\frac{y'}{y} = \cos x \ln x + \frac{1}{x} \sin x$$

$$y' = y\left(\cos x \ln x + \frac{1}{x} \sin x\right)$$

$$y' = x^{\sin x}\left(\cos x \ln x + \frac{1}{x} \sin x\right)$$

elde edilir.

SAĞDAN ve SOLDAN TÜREV

1.2. Tanım: $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. $a \in A$ olmak üzere,

1. $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ limiti varsa, bu limite f 'nin $x = a$ da ki sağdan türevi denir. $f'(a^+)$ ile gösterilir.

2. $\lim\limits_{x \to a^-} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ limiti varsa, bu limite f 'nin $x = a$ da ki soldan türevi denir. $f'(a^-)$ ile gösterilir.

3. $f'(a^+) = f'(a^-)$ ise, f fonksiyonu $x = a$ da türevlidir denir.

4. $f'(a^+) \neq f'(a^-)$ ise veya $x = a$ da ki sağdan veya soldan türevlerden biri yok ise f 'nin $x = a$ da türevi yoktur denir.

Örnek: $f(x) = \begin{cases} x + 2, & x \geq 2 \\ x^2, & x < 2 \end{cases}$ fonksiyonunun $x = 2$ noktasındaki sağdan ve soldan türevlerini bulunuz.

Çözüm: $\lim\limits_{x \to 2^+} x + 2 = \lim\limits_{x \to 2^-} x^2 = f(2) = 4$ olduğundan f, $x = 2$ de süreklidir.

Sağdan türev: $f'(2^+) = \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{(x+2)-(2+2)}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x-2}{x-2} = 1$

Soldan türev: $f'(2^-) = \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x^2 - 2^2}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{(x-2)(x+2)}{x-2} = 4$

bulunur. Buna göre $f'(2^+) \neq f'(2^-)$ olduğundan $x = 2$ de türev yoktur.

PARÇALI FONKSİYONLARIN TÜREVLERİ

Sağdan ve soldan türev parçalı fonksiyonların kritik noktaları için geçerlidir. Ama parçalı fonksiyonların kritik noktası dışında da değerleri vardır. Şimdi bu durumu inceleyelim.

1.1. Aksiyom: $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin.

$f(x) = \begin{cases} u(x), & x \geq a \\ v(x), & x < a \end{cases}$ ise $f'(x) = \begin{cases} u'(x), & x \geq a \\ v'(x), & x < a \end{cases}$

şeklindedir. //

$x = a$ kritik noktasında türev alınırken önce bu noktalarda fonksiyonunu sürekli olup olmadığına bakılır. Fonksiyon sürekli, sağdan ve soldan türevleri eşit ise türev vardır. Bunun dışındaki durumlarda türev yoktur.

Örnek: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 + x, & x < 1 \\ 3x^2, & x \geq 1 \end{cases}$

biçiminde tanımlanan f için $x = 1$ de türevini inceleyiniz.

Çözüm: $x = 1$ noktası fonksiyonun kritik noktası olduğundan fonksiyon öncelikle sürekli olduğuna bakmalıyız.

$\lim_{x \to 1^+} 3x^2 = \lim_{x \to 1^-} x^2 + 2x = 3$ olduğundan f, $x = 1$ de süreklidir.

Şimdi fonksiyonların 1 noktasındaki sağdan ve soldan türevlerinin değerine bakalım.

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 2, & x < 1 \\ 6x, & x \geq 1 \end{cases}$$

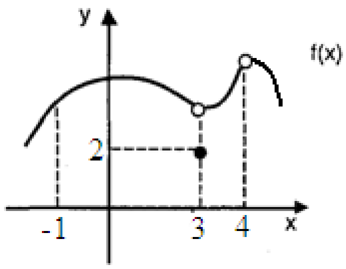
Sağdan türev: $f'(1^+) = 6 \cdot 1 = 6$

Soldan türev: $f'(1^-) = 2 \cdot 1 + 2 = 4$

bulunur. Buna göre $f'(1^+) \neq f'(1^-)$ olduğundan $x = 1$ de türev yoktur.

O halde $x = 1$ noktasında fonksiyon sürekli olmasına rağmen türevi yoktur.

Örnek:



Grafiği verilen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f fonksiyonunun $x = -1, x = 3, x = 4$ deki türevlerini inceleyiniz.

Çözüm: f fonksiyonu;

$x = -1$ da tanımlı ve süreklidir. $x = -1$, fonksiyonunun kritik bir noktası değildir. Soldan ve sağdan türevleri aynıdır. Bu yüzden $x = -1$ da türevlidir.

$x = 3$ de $f(3) = 2$ olduğundan tanımlıdır, fakat sürekli değildir. O halde, bu noktada türevsizdir.

$x = 4$ de tanımsızdır. Bu yüzden hem süreksiz hem de türevsizdir.

Örnek: $f(x) = \begin{cases} x^2 + 8, & x < 2 \\ 10, & x = 2 \\ 2x + 6, & x > 2 \end{cases}$ biçiminde tanımlanan f fonksiyonu $x = 2$ de türevli midir?

Çözüm: f 'nin $x = 2$ de sürekli olup olmadığını araştıralım.

$$\lim_{x\to 2^+} x^2+8 = 12\,,\ \lim_{x\to 2^-} 2x+6 = 10\,,\ f(2) = 10$$

olduğundan $x = 2$ de sürekli değildir, bu yüzden $x = 2$ de türevi yoktur.

Örnek: $f(x) = \begin{cases} ax^2 + 1, & x \geq 1 \\ 2x + b, & x < 1 \end{cases}$ biçiminde tanımlanan fonksiyonun $x = 1$ de türevli olması için $a - b$ kaç olmalıdır?

Çözüm: $x = 1$ de türevli olması için fonksiyon $x = 1$ noktasında sürekli olmalıdır.

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x)$$
$$a \cdot 1^2 + 1 = 2 \cdot 1 + b$$
$$a - b = 2$$

SİGNUM (İŞARET) FONKSİYONUNUN TÜREVİ

1.2. Aksiyom: $A \subset \mathbb{R}$, $u : A \to \mathbb{R}$ olmak üzere $f : A \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için;

$$f(x) = \begin{cases} -1, & u(x) < 0 \\ 0, & u(x) = 0 \\ 1, & u(x) > 0 \end{cases} \text{ ise } f'(x) = \begin{cases} 0, & u(x) < 0 \\ \text{yok}, & u(x) = 0 \\ 0, & u(x) > 0 \end{cases}$$

şeklindedir. Çünkü f fonksiyonu 0 noktasında sürekli olmadığından 0 noktasında türevi yoktur.

Örnek: $f : A \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 \operatorname{sgn}(x - 4)$ fonksiyonunun türevli olduğu aralığı bulunuz.

Çözüm: Önce verilen fonksiyonu parçalı fonksiyona çevirelim:

$$f(x)=\begin{cases}-x^2, & u(x)<4\\ 0, & u(x)=4\\ x^2, & u(x)>4\end{cases}$$

$x=4$ noktasında sürekli olmadığından 4 noktasında türevi yoktur. Buna göre,

$$f'(x)=\begin{cases}-2x, & u(x)<4\\ \text{yok}, & u(x)=4\\ 2x, & u(x)>4\end{cases}$$

şeklindedir. Türevsiz olduğu tek nokta $x=4$ dür. Öyleyse verilen fonksiyon $\mathbb{R}-\{4\}$ de türevlidir.

MUTLAK DEĞER FONKSİYONUNUN TÜREVİ

1.3. Aksiyom: $A\subset\mathbb{R}$, $f: A\to\mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. $f(x)=|u(x)|$ şeklinde ise

$$f'(x)=\begin{cases}u'(x), & u(x)\geq 0\\ -u(x), & u(x)<0\end{cases}$$

dir. Burada $u(x)=0$ denkleminin kökleri için türev alınırken sağdan ve soldan türevlerine bakılır. $x=a$, $u(x)=0$ denkleminin bir kökü ise,

1. $f'(a^+)=f'(a^-)$ ise, f fonksiyonu $x=a$ da türevi vardır.

2. $f'(a^+)\neq f'(a^-)$ ise veya $x=a$ türevi yoktur.

Örnek: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x|x^2|+10x$ fonksiyonu veriliyor, $f'(0)$ in değeri nedir?

Çözüm: $f(x)$ i tanımlarken x^2 iki katlı kök olduğundan

$$f'(x)=\begin{cases}x\cdot x^2+10x, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

bulunur. Buna göre türev alırsak,

$$f'(x)=\begin{cases}3x^2+10, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

$$f'(0^+)=3\cdot 0^2+10=10 \text{ ve } f'(0^-)=3\cdot 0^2+10=10$$

olduğundan $f'(0)=10$ dir.

Örnek: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=|x^3-2x^2+x|$ fonksiyonun $x=1$ ve $x=0$ daki türevlerini bulunuz.

Çözüm: Önce mutlak değer fonksiyonunu parçalı fonksiyona çevirelim.

$$x^3 - 2x^2 + x = x(x+1)^2$$

olduğundan

x	$-\infty$		0		1		∞
$x^3 - 2x^2 + x$		$-$	0	$+$	0	$+$	

tablosu çizilir. Bu tabloya göre mutlak değer fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 2x^2 + x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -x^3 + 2x^2 - x, & x < 0 \end{cases}$$

parçalı fonksiyona çevrilir. Bu parçalı fonksiyonun türevini alırsak

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 4x + 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -3x^2 + 4x - 1, & x < 0 \end{cases}$$

bulunur. Buna göre $x = 1$ için

$$f'(1) = 3 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 + 1 = 0$$

dir. Ama $x = 0$ için

$$f'(0^+) = 3 \cdot 0^2 - 4 \cdot 0 + 1 = 1 \text{ ve } f'(0^-) = -3 \cdot 0^2 + 4 \cdot 0 + 1 = -1$$

olup sağdan ve soldan türevler eşit değildir. Şu halde 0 noktasında türevi yoktur. //

Bu iki örneği şu teorem verilerek tekrar yeni yöntemle çözülecektir.

1.17. Teorem: $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. $f(x) = |u(x)|$ şeklinde ise

$$f'(x) = u'(x) \cdot \operatorname{sgn} u(x)$$

dir. Ama $u(x) = 0$ olan a noktasında;

1. a noktasında çift kat kök ise türevi vardır.
2. a noktasında tek kat kök ise türevi yoktur.

İspat: $f(x) = |u(x)| = \sqrt{u^2(x)}$ yazılacağından, karekökün türevini alırsak

$$f'(x) = \frac{2u(x) \cdot u'(x)}{2\sqrt{u^2(x)}} = \frac{u(x) \cdot u'(x)}{|u(x)|} = u'(x) \cdot \operatorname{sgn} u(x)$$

olarak bulunur. Burada;

1. $x = 0$ noktasında çift kat kök ise, sağdan ve soldan değerler aynı işaretli olacağından sürekli ve

$$f'(a^+) = f'(a^-)$$

dır. f fonksiyonu $x = a$ da türevlidir.

2. $x = 0$ noktasında tek kat kök ise, sağdan ve soldan değerler farklı işaretli olacağından

$$f'(a^+) \neq f'(a^-)$$

dır. f fonksiyonu $x = a$ da türevi yoktur.

Örnek: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x^2 - 3x|$ fonksiyonu için

$$f'(x) = (2x - 3)\ \mathrm{sgn}\ (x^2 - 3x)$$

dir. Ayrıca $x = 0$ ve $x = 3$ noktasında türevi yoktur. Çünkü 0 ve 3 noktaları tek kat köktür.

Örnek: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |e^{-x}|$ fonksiyonu için

$$f'(x) = -e^{-x} \cdot \mathrm{sgn}\ (e^{-x}) = \frac{|e^{-x}|}{e^{-x}}(e^{-x}) = -|e^{-x}|$$

dir. Ayrıca x'in hiçbir noktada kritik nokta olmadığından her noktada türevlenebilirdir.

Örnek: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x^3 - 2x^2 + x|$ fonksiyonu için $x = 0$ ve $x = 1$ noktalarındaki türevlerini bulunuz.

Çözüm: $f'(x) = (3x^2 - 4x + 1)\ \mathrm{sgn}(x^3 - 2x^2 + x)$
olarak bulunur. $x^3 - 2x^2 + x = 0$ denkleminde

x	$-\infty$		0		1		∞
$x^3 - 2x^2 + x$		-	0	+	0	+	

tablosu çizilebilir. Bu tabloya göre, $f'(0)$ noktasında türev yoktur. Ama $f'(1) = 0$ dır.

1.2. Not: Bir fonksiyon bir noktada sürekli ise türevi vardır. Ama bunun tersi doğru olmadığını türev ve süreklilik teoreminde ispat ettik. Bu kısımdaki her 3 örnekte her noktada sürekli fonksiyonlar ama görüldüğü gibi bazı noktalarda türevleri yoktur.

Örnek: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x|x^2|+10x$ fonksiyonu için $x=0$ noktalarındaki türevlerini bulunuz.

Çözüm: $f'(x)=|x^2|+2x^2\operatorname{sgn}(x^2)+10$ olarak bulunur. $x^2=0$ denkleminde, $x=0$ çift kat kök olacağından türevi $f'(0)=10$ dir.

TEK ve ÇİFT FONKSİYONLARIN TÜREVLERİ

1.18. Teorem: $A\subset\mathbb{R}$, $f:A\to\mathbb{R}$, $f(x)=y$ fonksiyonu verilsin. Her $x\in A$ için,

i) $f(x)=y$ fonksiyonu tek fonksiyon ise $f'(x)$ fonksiyonu çift fonksiyondur.

ii) $f(x)=y$ fonksiyonu çift fonksiyon ise $f'(x)$ fonksiyonu tek fonksiyondur.

İspat: $A\subset\mathbb{R}$, $f:A\to\mathbb{R}$, $f(x)=y$ fonksiyonu verilsin. Her $x\in A$ için;

i) f çift fonksiyon ise $f(-x)=f(x)$ ve $f(-a)=f(a)$ ise

$$f'(-a)=\lim_{x\to a}\frac{f(-x)-f(-a)}{(-x)-(-a)}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{-x+a}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{-(x-a)}=-f'(a)$$

olur ki bu bize $f'(x)$ fonksiyonu tek fonksiyon olduğunu gösterir.

ii) f tek fonksiyon ise $f(-x)=-f(x)$ ve $f(-a)=-f(a)$ ise

$$f'(-a)=\lim_{x\to a}\frac{f(-x)-f(-a)}{(-x)-(-a)}=\lim_{x\to a}\frac{-f(x)+f(a)}{-x+a}=\lim_{x\to a}\frac{-(f(x)-f(a))}{-(x-a)}=f'(a)$$

olur ki bu bize $f'(x)$ fonksiyonu çift fonksiyon olduğunu gösterir.

Örnek: $f(x)=\cos 2x$ in çift fonksiyon ve türevinin tek fonksiyon olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Her $x\in\mathbb{R}$ için $\cos(-2x)=\cos 2x$ olduğunu trigonometri konusundan biliyoruz. Buna göre,

$$f(-x)=\cos(-2x)=\cos 2x=f(x)$$

olup fonksiyonun kendisi çift fonksiyondur. Türevi ise,

$$f'(x)=-2\sin 2x$$

dir. Yine her $x\in\mathbb{R}$ için $\sin(-2x)=-\sin 2x$ olduğunu trigonometri konusundan biliyoruz. O halde

$$f(-x)=-\sin(-2x)=-(-2\sin 2x)=-f(x)$$

olup fonksiyonun türevi tek fonksiyondur.

Örnek: $f(x) = x^3$ in tek fonksiyon ve türevinin çift fonksiyon olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$
olduğundan fonksiyonun kendisi tek fonksiyondur. Fonksiyonun türevi ise $f'(x) = 3x^2$ olup,
$$f'(-x) = 3(-x)^2 = 3x^2 = f'(x)$$
dir. Şu halde türevi çift fonksiyondur.

PERYODİK FONKSİYONLARIN TÜREVLERİ

1.19. Teorem: $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ ve f fonksiyonun peryodu T olsun. Bu takdirde, f fonksiyonun türevi de peryodik ve peridoyu da T dir.

İspat: f fonksiyonun peryodu T ise,
$$f(x) = f(x+T)$$
dir. Şimdi her iki tarafın türevini alırsak,
$$f'(x) = (x+T)'\, f'(x+T) = 1 \cdot f'(x+T) = f'(x+T)$$
elde edilir. Bu durum, f fonksiyonun türevi de peryodik ve peridoyu da T olduğunu gösterir.

YÜKSEK MERTEBEDEN TÜREV

1.3. Tanım: Bir $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$, $x \to y = f(x)$ fonksiyonunun tanımlı olduğu aralıkta türevleri de tanımlı ise bir kez daha türevi alınabilir. Bu alınan türeve 2. mertebeden türev denir. 2. mertebeden türevinin tanımlı olduğu aralıkta türevi yine tanımlı ise bir kez daha türevi alınabilir. Bu alınan türeve 3. mertebeden türev denir. Benzer şekilde diğer mertebeden türevler tanımlanabilir.

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} \text{ ile 1. mertebeden türev}$$
$$y'' = f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2f(x)}{dx^2} \text{ ile 2. mertebeden türev}$$
$$y''' = f'''(x) = \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d^3f(x)}{dx^3} \text{ ile 3. mertebeden türev}$$

$y^{(4)} = f^{(4)}(x) = \dfrac{d^4y}{dx^4} = \dfrac{d^4f(x)}{dx^4}$ ile 4. mertebeden türev gösterilir. Benzer şekilde diğer türev mertebeden türevler sembollerle gösterilir.

Örnek: $y = x^3 - 4x^2 + 5x - 7$ ise

$y' = 3x^2 - 8x + 5$

$y'' = 6x - 8$

$y'' = 6$

Örnek: $y = e^{2x}$ ise

$y' = 2e^{2x}$

$y'' = 2^2e^{2x}$

$y''' = 2^3e^{2x}$

Örnek: $y = \sin x \cos x$ ise $\dfrac{d^3y}{dx^3}$ yi bulunuz.

Çözüm: $\dfrac{dy}{dx} = \cos x \cos x - \sin x \sin x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos 2x$

$\dfrac{d^2y}{dx^2} = -2\sin 2x$

$\dfrac{d^3y}{dx^3} = -4\sin 2x$

Örnek: $y = e^{ax}$ fonksiyonu $y'' - 4y' + 3y = 0$ denklemini sağladığına göre a'nın alabileceğinden değerleri bulunuz.

Çözüm: $y' = ae^{ax}$

$y'' = a^2e^{ax}$

olduğuna göre,

$$y'' - 4y' + 3y = 0$$

$$a^2e^{ax} - 4ae^{ax} + 3e^{ax} = 0$$

$$(a^2 - 4a + 3)e^{ax} = 0$$

$$a_1 = 3 \text{ ve } a_2 = 1$$

olur.

1.1. Sonuç: Her $a, b \in \mathbb{R}$, her $n \in \mathbb{N}^+$ olmak üzere,

i) $f(x) = (ax+b)^n$ ise $f^{(n)}(x) = n!\,a^n$
ii) $f(x) = e^{ax}$ ise $f^{(n)}(x) = a^n e^{ax}$
iii) $f(x) = \sin(ax+b)$ ise $f^{(n)}(x) = a^n \sin\left(ax + b + n\frac{\pi}{2}\right)$
iv) $f(x) = \cos(ax+b)$ ise $f^{(n)}(x) = a^n \cos\left(ax + b + n\frac{\pi}{2}\right)$

dir.

Örnek: $f(x) = (8x+3)^5$ ise $f^{(5)}(x)$ i bulunuz.

Çözüm: $f'(x) = 5(8x+3)^4 \cdot 8$
$f''(x) = 5 \cdot 4(8x+3)^3 \cdot 8^2$
$f'''(x) = 5 \cdot 4 \cdot 3(8x+3)^2 \cdot 8^3$
$f^{(4)}(x) = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2(8x+3) \cdot 8^4$
$f^{(5)}(x) = 5!\,8^5$

Örnek: $f(x) = \sin(3x+5)$ ise $f^{(10)}(x)$ in değeri nedir?

Çözüm: 1.1. Sonuç (ii) ye göre,
$$f^{(10)}(x) = 3^{10} \sin\left(3x + 5 + 10\frac{\pi}{2}\right) = 3^{10}\sin(3x + 5 + 5\pi)$$
dir. Trigonometride 3. bölgede,
$$\sin(x+\pi) = -\sin x$$
olduğundan
$$\sin(5\pi + \pi) = -\sin x$$
olur. Buna göre,
$$f^{(10)}(x) = 3^{10}\sin(3x+5+5\pi) = -3^{10}\sin(3x+5)$$
dir.

Örnek: $y = \cos 8x$ ise $y^{(20)}$ yi bulunuz?

Çözüm: Sonuç (iv) şıkkında $a = 8$ ve $b = 0$ olacağından,
$$\begin{aligned} f^{(20)}(x) &= 8^{20}\cos\left(8x + 20\frac{\pi}{2}\right) \\ &= 8^{20}\cos(8x + 10\pi) \\ &= 8^{20}\cos(8x + 2\pi) \\ &= 8^{20}[\cos 8x\ \cos 2\pi - \sin 8x\ \sin 2\pi] \end{aligned}$$

$$= 8^{20}[\cos 8x \cdot 0 - \sin 8x \cdot 1]$$
$$= -8^{20} \sin 8x$$

bulunur. //

Gottfried Wilhelm Leibniz
01 Temmuz 1646, Leipzig, Almanya - 14 Kasım 1716 Honnever, Almanya

1.2. Sonuç (Leibnitz Kuralı): $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$, $f(x) = u(x)\, v(x)$ şeklinde tanımlansın. Bu takdirde,

$$f^{(n)}(x) = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} u^{(r)}(x).v^{(n-r)}(x)$$

biçimindedir. (Burada $u(x)$ in x'e göre r–inci türevi $u^{(r)}(x)$, $v(x)$ in x'e göre $n-r$ –inci türevi $v^{(n-r)}(x)$ dir. Ayrıca $u^{(0)}(x) = u(x)$ ve $v^{(0)}(x) = v(x)$ olduğunu unutmamak gerekir.)

KAPALI FONKSİYONLARIN TÜREVİ

1.4. Tanım: $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$ fonksiyonu $F(x, y) = 0$ şeklinde yazılmasına kapalı fonksiyon denir.

Örnek: $y = f(x) = -2x + 5$ fonksiyonunun kapalı denklemi $y + 2x = 5$ biçimindedir.

Örnek: $F(x, y) = x^2 + y^2 - 16 = 0$ bir kapalı fonksiyondur.

Örnek: $xy + y^3 - x^2 = 0$ bir kapalı fonksiyondur.

Örnek: $e^{xy} - x + y = 10$ bir kapalı fonksiyondur.

1.20. Teorem: Bir kapalı $F(x, y)$ fonksiyonunda, $F(x, y)$ fonksiyonun x'e göre türevini $F_x(x, y)$ ile y'ye göre türevini $F_y(x, y)$ ile göstermek üzere

$$y' = -\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}$$

şeklindedir.

İspat: $F(x, y) = 0$ kapalı fonksiyonunun y sabit kabul edilip x'e göre türevi $F_x(x, y)$ ve x sabit kabul edilip y'ye göre türevi $F_y(x, y)$ ise, $F(x, y) = 0$ fonksiyonunda her iki tarafın x'e göre türevi alınırsa,

$$F_x(x, y) + F_y(x, y)\, y' = 0$$

$$y' = -\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}$$

bulunur.

Örnek: $F(x, y) = 3x^2y + 4xy - 5 = 0$ fonksiyonun türevini bulunuz.

Çözüm: $y' = -\frac{6xy+4y}{3x^2+4x}$

Örnek: $F(x, y) = x \sin y + y \sin x = 0$ fonksiyonun türevini bulunuz.

Çözüm: $y' = -\frac{\sin y + y\cos x}{x\cos y + \sin x}$

Örnek: $F(x, y) = 5x^3y + 6xy^2 - 10y - 2 = 0$ bağıntı ile verilen fonksiyonun $A(1, 1)$ noktasındaki türevini bulunuz.

Çözüm: Önce $y' = -\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}$ yi bulalım.

$$y' = -\frac{15x^2+6y^2}{5x^3+12xy-10} = -\frac{15\cdot1^2+6\cdot1^2}{5\cdot1^3+12\cdot1\cdot1-10} = \frac{21}{7} = 3$$

DİFERANSİYEL KAVRAMI ve HATA TESPİTİ

1.5. Tanım: $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$ fonksiyonu A'da türevlenebilen bir fonksiyon olsun. Her $x \in A$ için $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ olduğundan,

$$dy = f'(x)\, dx$$

ifadesine f fonksiyonunun $x \in A$ noktasında diferansiyeli denir.

Örnek: $y = x^3 + 4x + 8$ ise dy nedir?

Çözüm: $\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 4$

$dy = (3x^2 + 4)\, dx$

Örnek: $y = \cos^3 x$ ise dy nedir?

Çözüm: $\frac{dy}{dx} = 2 \cos x \sin x$

$dy = (2 \cos x \sin x) dx$ //

Diferansiyel yardımıyla bazı sayıların yaklaşık değerleri küçük hatalarla hesaplanabilir. Şöyle ki;

$A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$ fonksiyonu A da türevlenebilir olsun. $\lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon = 0$ olmak üzere

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x) + \varepsilon \cong f'(x)$$

şeklinde yazılabilir. Bu durumdan yararlanarak,

$$f(x + \Delta x) - f(x) \cong \Delta x \cdot f'(x)$$
$$f(x + \Delta x) \cong f(x) + \Delta x \cdot f'(x)$$

bulunur.

Örnek: $\sqrt{5}$ sayısının yaklaşık değeri nedir?

Çözüm: $f(x) = \sqrt{x}$ biçiminde tanımlanan f fonksiyonu için

$$f(x + \Delta x) \cong f(x) + \Delta x \cdot f'(x)$$
$$\sqrt{x + \Delta x} \cong \sqrt{x} + \Delta x \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

yazılabilir. $x = 4$ ve $\Delta x = 1$ alınırsa

$$\sqrt{5} = \sqrt{4+1} \cong \sqrt{4} + 1 \cdot \frac{1}{2\sqrt{4}} = 2 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4} = 2{,}25$$

bulunur. Biraz daha yaklaşmak için $x = 2{,}2^2 = 4{,}84$ ve $\Delta x = 0{,}16$ alınırsa

$$\sqrt{5} = \sqrt{4{,}84 + 0{,}16} \cong \sqrt{4{,}84} + 0{,}16 \cdot \frac{1}{2\sqrt{4{,}84}} = 2{,}2 + \frac{0{,}16}{4{,}4} = 2{,}236$$

olur.

Örnek: Bir küpün bir ayrıtının uzunluğunu kumpasla ölçen kimse, kumpasın 0,01 cm hata ile ölçtüğünü bilinmektedir. Küpün bir kenarı 30 cm olduğuna göre, küpün hacminde yapılan hata ne kadar olur?

Çözüm: Küpün bir kenarının uzunluğu x cm olursa hacmi $f(x) = x^3 \text{ cm}^3$ olur.

$$f(x+\Delta x) \cong f(x) + \Delta x \cdot f'(x)$$

$$\begin{aligned}(x+\Delta x)^3 &\cong x^3 + \Delta x\, 3x^2 \\ &\cong 29{,}99^3 + 0{,}01 \cdot 3 \cdot 29{,}99^2 \\ &= 26\,999{,}991002\end{aligned}$$

Hacimde yapılan hata;

$$30^3 - 26\,999{,}991002 = 0{,}008998 \text{ cm}^3$$

olur.

Örnek: ABC üçgeninin $c = 24$ cm, $b = 30$ cm ve $m(A) = 60^0$ dir. c ve b kenarlarının hatasız ölçüldüğü, A açısının ölçüsünde $\frac{1}{2}$ derecelik bir hata yapıldığı tespit ediliyor. Bu üçgenin alanında yapılan hatanın yaklaşık değeri cm^2 türünden bulunuz.

Çözüm: ABC üçgeninin alanı $S = \frac{1}{2} b\, c \sin A$ dır. $c = 24$ cm, $b = 30$ cm olduğuna göre, S'nin A cinsinden değeri, $S = 360 \sin A$ olur. $\Delta A = \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{\pi}{360}$

$$f(x+\Delta x) \cong f(x) + \Delta x \cdot f'(x)$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} b\, c \sin(A + \Delta A) &\cong \frac{1}{2} b\, c \sin A + \Delta A \cdot \frac{1}{2} b\, c \cos A \\ &= \frac{1}{2} 24 \cdot 30 \sin 60 + \frac{\pi}{360} \cdot \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 30 \cos 60 \\ &= 180\sqrt{3} + \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

Hacimde yapılan hata;

$$\frac{1}{2} 24 \cdot 30 \cdot \sin 60 - 180\sqrt{3} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \text{ cm}^2$$

olur.

ÇÖZÜMLÜ ALIŞTIRMALAR

1. $y = \frac{6x^2-9x+5}{4x^2-6x+2}$ fonksiyonun türevi aşağıdakilerden hangisidir?

Çözüm:

$$y' = \frac{(12x-9)(4x^2-6x+2)-(8x-6)(6x^2-9x+5)}{(4x^2-6x+2)^2} = \frac{-16x+12}{(4x^2-6x+2)^2}$$

2. $f(x) = \ln(x^2 - 3x + 8)$ fonksiyonunun türevi hangisidir?

Çözüm: $u = x^2 - 2x + 8$ seçilirse,

$$f'(x) = \frac{2x-3}{x^2-3x+8}$$

dir.

3. $f(x) = |3x - 6|$ fonksiyonunun $x_0 = 2$ apsisli noktasında, türevinin değerini, varsa bulunuz?

Çözüm: Türevin tanımı $f(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ olduğuna göre sağdan ve soldan türevleri hesap edersek,

$$f(2^-) = \lim_{x \to 2^-} \frac{|3x-6|-|3\cdot 2-6|}{x-2} = \lim_{x \to 2^-} \frac{-(3x-6)}{x-2} = -3$$

$$f(2^+) = \lim_{x \to 2^+} \frac{|3x-6|-|3\cdot 2-2|}{x-2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{(3x-6)}{x-2} = 3$$

olarak bulunur. Bu bize sağdan ve soldan limitlerin eşit olmadığını yani,

$$f'(2^+) = f'(2^-)$$

olduğunu gösterir. Bu durum 2 noktasında türevin olmadığını gösterir.

4. $f(x) = \tan\left(\frac{\pi}{2}\cos x\right)$ ise, $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$ ün değeri nedir?

Çözüm: $f'(x) = \left[1 + \tan^2\left(\frac{\pi}{2}\cos x\right)\right]\left(-\frac{\pi}{2}\sin x\right)$

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left[1 + \tan^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{3}\right)\right]\left(-\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left[1 + \tan^2\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)\right]\left(-\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\pi\frac{\sqrt{3}}{2}$$

5. $a, b, c \in \mathbb{R}$, $f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$
fonksiyonunun x değişkenine göre $f''(c)$ işleminin sonucu nedir?

Çözüm:
$$f'(x) = (x-b)(x-c) + (x-a)(x-c) + (x-a)(x-b)$$
$$f''(x) = (x-c) + (x-b) + (x-c) + (x-a) + (x-b) + (x-a)$$
$$f''(x) = 2[(x-a) + (x-b) + (x-c)]$$
$$f''(c) = 2[(c-a) + (c-b) + (c-c)] = 4c - 2a - 2b$$

6. $f(x) = |x^3 - 2| - x^2$ olduğuna göre $f''(-2)$ in değeri nedir?

Çözüm: $x = -2$ için $x^3 - 2 = (-2)^3 - 2 = -10 < 0$ olacağından $f(x) = -x^3 - x^2 + 2$ fonksiyonu elde edilir. Buna göre,
$$f'(x) = -3x^2 - 2x$$
$$f''(x) = -6x - 2$$
$$f''(-2) = -6(-2) - 2 = 10$$
olur.

7. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2$ doğrusal fonksiyonun da $f'(0)$ değeri kaçtır?

Çözüm: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2$
$$\frac{1}{y} = 2 - \frac{1}{x} = \frac{2x-1}{x}$$
$$y = f(x) = \frac{x}{2x-1}$$
$$f(x) = \frac{1\cdot(2x-1)-2x}{(2x-1)^2} = \frac{-1}{(2x-1)^2}$$
$$f(0) = \frac{-1}{(2\cdot 0-1)^2} = -1$$

8. $e^{-x}\frac{d^2}{dx^2}(x^3e^x)$ in sonucu nedir?

Çözüm: $e^{-x}\frac{d^2}{dx^2}(x^3e^x) = e^{-x}\frac{d}{dx}(3x^2e^x + x^3e^x)$
$= e^{-x}(6xe^x + 3x^2e^x + 3x^2e^x + x^3e^x)$
$= 6x + 6x^2 + x^3$

9. $f(x) = 3x^2 + 4$ olduğuna göre $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$ değeri kaçtır?

Çözüm: $f'(2)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$ olduğundan,
$f'(x) = 6x$
$f'(2) = 6 \cdot 2 = 12$
olarak bulunur.

10. $f(x) = [(x^2 + x)^3 + 2]^4$ olduğuna göre, $f'(1)$ in değerini asal çarpanlara ayırarak çözünüz.

Çözüm: $f'(x) = 4[(x^2 + x)^3 + 2]^3\, 3(x^2 + x)^2(2x + 1)$
$f'(1) = 4[(1^2 + 1)^3 + 2]^3\, 3(1^2 + 1)^2(2 \cdot 1 + 1) = 2^7 3^2 5^3$

11. $f(4x - 7) = x^3 - x^2 + 5$ olduğuna göre $f'(1)$ kaçtır?

Çözüm: $f'(4x - 7)(4x - 7)' = (x^3 - x^2 + 5)'$
$f'(4x - 7) \cdot 4 = 3x^2 - 2x$
olur. $x = 2$ alınırsa
$f'(4 \cdot 2 - 7) \cdot 4 = 3 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2$
$f'(1) = 2$
bulunur.

12. $f(x) = \ln(3x + 4)$ olduğuna göre, $(f^{-1})'(0)$ kaçtır?

Çözüm: $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{(\ln(3x+4))'} = \frac{3x+4}{3}$
olarak bulunur. Burada $y = 0$ için
$f(x) = \ln(3x + 4) \Leftrightarrow e^0 = 3x + 4 \Leftrightarrow x = -1$

olduğundan

$$(f^{-1})'(0) = \frac{3(-1)+4}{3} = \frac{1}{3}$$

elde edilir.

13. $f(x) = e^x \sin x$ fonksiyonunun 12. mertebeden türevi olan $f^{(12)}(x)$ ifadesinin değeri nedir?

Çözüm:

$f'(x) = e^x \sin x + e^x \cos x = e^x(\sin x + \cos x)$

$f''(x) = e^x(\sin x + \cos x) + e^x(\cos x - \sin x) = 2e^x \cos x$

$f'''(x) = 2e^x \cos x - 2e^x \sin x = 2e^x(\cos x - \sin x)$

$f^{(4)}(x) = 2e^x(\cos x - \sin x) + 2e^x(-\sin x - \cos x) = -4e^x \sin x$

bulunur. Buna göre;

$f^{(4)}(x) = -4e^x \sin x = -4\, f(x)$

$f^{(8)}(x) = (-4)^2\, f(x)$

$f^{(12)}(x) = (-4)^3\, f(x)$

$f^{(12)}(x) = -64\, e^x \sin x$

dir.

14. $f(x) = (x-3)^2(x-t)$, $f'(0) = -15$ olduğuna göre, t kaçtır?

Çözüm: $f'(x) = 2(x-3)(x-t) + (x-3)^2(-t)$

$f'(x) = 2(0-3)(0-t) + (0-3)^2(-t)$

$-15 = -3t$

$t = 5$

15. $\frac{d^2}{dx^2}(\sin^2 2x)$ işleminin sonucu nedir?

Çözüm:

$$\frac{d^2}{dx^2}(\sin^2 2x) = \frac{d}{dx}(2 \sin 2x \cos 2x) = \frac{d}{dx}(\sin 4x) = 4 \cos 4x$$

16. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{e^{\tan x} - e}{x - \frac{\pi}{4}}$ limitinin sonucu nedir?

Çözüm: $f(x) = e^{\tan x}$ alınırsa $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = e^{\tan\frac{\pi}{4}} = e$ olur. Bu ise f(x) fonksiyonunun türevidir.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{e^{\tan x} - e}{x - \frac{\pi}{4}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x - \frac{\pi}{4}}$$

$f(x) = (1 + \tan^2 x)e^{\tan x}$

$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = (1 + \tan^2 \frac{\pi}{4})e^{\tan\frac{\pi}{4}} = 2e$

17. $2x - 3xy + 5y + 1 = 0$ fonksiyonunun için $F(3, 1)$ in değeri nedir?

Çözüm:

$y' = -\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)} = -\frac{2-3y}{-3x+5}$

$F(3, 1) = \frac{2-3y}{3x-5} = \frac{2-3\cdot1}{3\cdot3-5} = \frac{1}{4}$

18. $f(x) = u(x + x^2)$ ve $f(0) = f'(0) = 3$ ise $u(0) + u'(0)$ değeri nedir?

Çözüm: $f(x) = u(x + x^2)$ ise $f(0) = u(0 + 0^2) = 3$ olup $u(0) = 3$ ve
$f'(x) = u'(x + x^2)(1 + 2x)$ ise $f'(0) = u(0 + 0^2)(1 + 20) = 3$ olup $u(0) = 3$
$u(0) + u'(0) = 3 + 3 = 6$
olur.

19. $f(x + a) = x^2 + 3x - 5$ ve $f'(0) = 15$ ise a'nın değeri nedir?

Çözüm: $f'(x + a) = 2x + 3$ ve $x + a = 0$ olması için $x = -a$ alınmalıdır.

$f'(0) = 2(-a) + 3 = 15$ ise $a = 6$

20. Reel sayılar kümesi üzerinde tanımlı bir f fonksiyonu için

$$\lim_{x\to3^+} f(x) = 4 \text{ ve } \lim_{x\to4^-} f(x) = 2$$

olduğuna göre, $\lim_{x\to2^+} \frac{f(x+1)+f(x+2)}{f(x-1)}$ limitinin değeri kaçtır?

Çözüm:

$$\lim_{x\to 2^+} f(x+1) = \lim_{x\to 3^+} f(x) = 4$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(6-x) = \lim_{x\to 4^-} f(x) = 2$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(2x-1) = \lim_{x\to 3^+} f(x) = 4$$

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{f(x+1)+f(x+2)}{f(x-1)} = \frac{\lim\limits_{x\to 2^+} f(x+1) + \lim\limits_{x\to 2^+} f(6-x)}{\lim\limits_{x\to 2^+} f(2x-1)} = \frac{4+2}{4} = \frac{3}{2}$$

21. $f(x) = \sin x$ fonksiyonu $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ aralığı veriliyor. $f'(k) = \frac{f(\frac{\pi}{2}) - f(0)}{\frac{\pi}{2}}$ şartını sağlayan $\cos k$ sayısını bulunuz.

Çözüm: $f'(x) = \cos x$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$, $f(0) = \sin 0 = 0$ olduğundan türev tanımı gereği

$$\cos k = \frac{1-0}{\frac{\pi}{2}}$$

$$\cos k = \frac{2}{\pi}$$

olacaktır.

22. $f(x) = |x-1|$ fonksiyonunun $x = 1$ noktasında türevi hakkında ne söylenebilir?

Çözüm: f fonksiyonun sağdan $f(x) = x - 1$ olup $f'(x) = 1$ ve f fonksiyonun soldan $f(x) = -x + 1$ olup $f'(x) = -1$ olup bu noktada türevi yoktur.

23. $f(x) = (x-t)^3$, $f''(0) = 12$ olduğuna göre, t'nin değeri nedir?

Çözüm: $f(x) = (x-t)^3$

$f'(x) = 3(x-t)^2$

$f''(x) = 6(x-t)$

$12 = 6(0-t)$

$t = -2$

KAYNAKÇA

1. Prof. Ahmet KARADENİZ, Yüksek Matematik 2, Çaylayan Kitapevi, Beyoğlu, İstanbul, 1992.
2. Prof. Dr. Mustafa BALCI, Matematik Analiz II, Bilim Kitap Kırtasiye Ltd. Şti., Ankara, 1997.
3. George B. Thomas Jr., Thomas Calcalus, Çev. Recep Korkmaz, Beta Yayınları, 11. Baskı, Ağustos 2009, İstanbul.
4. Murray R. Spiegel, İleri Matematik, Çev. Prof. Dr. H. Hilmi HACISALİHOĞLU, Schaum Yayınları, Nobel Yayın Dağıtım, 1997, Ankara.
5. H. Hilmi HACISALİHOĞLU, Lise Matematik 1, 2, 3, Serhat Yayınları A.Ş. İstanbul, 2001.
6. Ahmet HANÇERLİOĞLU, Faniye ALAN, Matematik Seti, Tümay Yayınları, 2006, ANKARA
7. Dr. Seyfettin AYDIN, Analize Giriş I, 1986, ANKARA.
8. M. Zeki DERMAN, Ökkeş ÖZKÖSELER, Serdar GÜLMEZ, Matematik Lise 1, 2, 3, Zafer Yayınları, 2006, ANKARA.
9. Prof. Dr. Mahmut KOÇAK, Reel Analiz Ders Notları, Eskişehir, 2015.
10. Louis Brand, Yüksek Matematik, Çeviren Mehmet CAN, Çinçiati Üniversitesi, ABD, 2004.