2. BÖLÜM
TÜREVİN UYGULAMALARI

1–L'HOPITAL YÖNTEMİ

Guillaume François Antoine
1661 Paris, Fransa - 2 Şubat 1704 Paris, Fransa

Bir limitte $\frac{0}{0}$ veya $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği varsa aşağıdaki L'hopital yöntemi dediğimiz teorem uygulanır. Önce $\frac{0}{0}$ için geçerli olan teoremi verelim.

2.1. Teorem: p(x) ve q(x), $A-\{a\} \subset \mathbb{R}$ kümesinde tanınmış türevlenebilen iki fonksiyon ve $q(x) \neq 0$ olsun.

$$\lim_{x\to a}\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{0}{0} \text{ ise } \lim_{x\to a}\frac{p(x)}{q(x)}=\lim_{x\to a}\frac{p'(x)}{q'(x)}$$

biçimindedir.

İspat: p(x) ve q(x) fonksiyonları a noktasında tanımlı iseler,

$$p(a)=\lim_{x\to a}p(x)=0,\ q(a)=\lim_{x\to a}q(x)=0$$

dır. p ve q fonksiyonları $x = a$ noktasında tanımlı değil iseler bu fonksiyonları $p(a) = q(a) = 0$ olarak tanımlayalım. O halde,

$$\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{p(x)-p(a)}{q(x)-q(a)}$$

yazılabilir. Şu halde,

$$\lim_{x\to a}\frac{p(x)}{q(x)}=\lim_{x\to a}\frac{p(x)-p(a)}{q(x)-q(a)}=\lim_{x\to a}\frac{\dfrac{p(x)-p(a)}{x-a}}{\dfrac{q(x)-q(a)}{x-a}}=\lim_{x\to a}\frac{p'(x)}{q'(x)}$$

dır. //

Bir $\frac{0}{0}$ belirsizliğinde L'hopital teoremi uygulandığında sonuç çıkmazsa 2. defa L'hopital teoremi uygulanır. Eğer yine sonuç çıkmazsa 3. defa uygulanır. Bu işlem sonuç çıkana kadar devam eder.

Örnek: $\lim_{x\to 1}\frac{x^4-1}{x-1}$ limitini bulunuz.

Çözüm: $\frac{0}{0}$ belirsizliği vardır. L'hopital yöntemini uygularsak

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^4-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{4x^3}{1}=4$$

elde edilir.

Örnek: $\lim_{x\to 5}\frac{\sin x-\sin 5}{x-5}$ limitini bulunuz.

Çözüm: $\frac{0}{0}$ belirsizliği vardır. L'hopital yöntemini uygularsak

$$\lim_{x\to 5}\frac{\sin x-\sin 5}{x-5}=\lim_{x\to 5}\frac{\cos x}{1}=\cos 5$$

elde edilir.

Örnek: $\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos x}$ limitini bulunuz.

Çözüm: $\frac{0}{0}$ belirsizliği vardır. L'hopital yöntemini uygularsak

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{\cos x}=2$$

elde edilir.

Örnek: $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{\sin(2x-10)}$ limitini bulunuz.

Çözüm: $\dfrac{0}{0}$ belirsizliği vardır. L'hopital yöntemini uygularsak

$$\lim_{x\to 5}\frac{x^2-25}{\sin(2x-10)}=\lim_{x\to 5}\frac{2x}{2\cos(2x-10)}=5$$

elde edilir.

Örnek: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x.\ln x}{x^2-1}$ limitini bulunuz.

Çözüm: $\dfrac{0}{0}$ belirsizliği vardır. L'hopital yöntemini uygularsak

$$\lim_{x\to 1}\frac{x.\ln x}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{1.\ln x+\frac{1}{x}.x}{2x}=\frac{1}{2}$$

elde edilir.

Örnek: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{\sin x}$ limitini bulunuz.

Çözüm: $\dfrac{0}{0}$ belirsizliği vardır. L'hopital yöntemini uygularsak

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{\cos x}=\frac{e^0}{\cos 0}=1$$

elde edilir.

Örnek: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5x^3+2x^2-8x+1}{x^2-1}$ limitini bulunuz.

Çözüm: $\dfrac{0}{0}$ belirsizliği vardır. L'hopital yöntemini uygularsak

$$\lim_{x\to 1}\frac{5x^3+2x^2-8x+1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{10x^2+4x-8}{2x}=3$$

elde edilir.//

Şimdi de $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği için geçerli olan L'hopital yöntemini verelim.

2.2. Teorem: $p(x)$ ve $q(x)$, $A \subset \mathbb{R}$ kümesinde tanınmış türevlenebilen iki fonksiyon ve $q(x) \neq 0$ olsun.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{\infty}{\infty} \text{ ise } \lim_{x\to\infty}\frac{p(x)}{q(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{p'(x)}{q'(x)}$$

biçimindedir.

İspat: $p\left(\frac{1}{t}\right)=P(t)$ ve $q\left(\frac{1}{t}\right)=Q(t)$ olsun. $t\to 0^+$ için $\frac{p(t)}{q(t)}$ ifadesi $\frac{0}{0}$ formundadır. Buna göre,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{p(x)}{q(x)}=\lim_{t\to 0^+}\frac{P(t)}{Q(t)}=\lim_{t\to 0^+}\frac{P'(t)}{Q'(t)}=\lim_{t\to 0^+}\frac{p'\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)}{q'\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)}=\lim_{t\to 0^+}\frac{p'\left(\frac{1}{t}\right)}{q'\left(\frac{1}{t}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{p'(x)}{q'(x)}$$

olur.

Örnek: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+2x}{2x^2+1}$ limitini bulunuz.

Çözüm: $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği vardır. L'hopital yöntemini uygularsak

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x}{2x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x+2}{4x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

elde edilir.

2.1. Not: $\lim p(x)q(x)=0\cdot\infty$ veya $\lim p(x)q(x)=\infty\cdot 0$ ise $\lim\frac{p(x)}{\frac{1}{q(x)}}$ şekline dönüştürülerek $\frac{0}{0}$ veya $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği elde edilir. Bundan sonra L'hopital yöntemine müracaat edilir.

Örnek: $\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln x$ limitini bulunuz.

Çözüm: $0\cdot\infty$ belirsizliği vardır. Bu belirsizliği $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliğine çevirelim.

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1/x} = \frac{\infty}{\infty}$$

bulunur. Şimdi L'hopital yöntemini uygularsak

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-x^{-2}} = \lim_{x\to 0^+}(-x) = 0$$

elde edilir.

Örnek: $\lim\limits_{x\to\infty} x^2.e^{-x}$ limitini bulunuz.

Çözüm: $0\cdot\infty$ belirsizliği vardır. Bu belirsizliği $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliğine çevirelim.

$$\lim_{x\to\infty} x^2.e^{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} = \frac{\infty}{\infty}$$

bulunur. Şimdi L'hopital yöntemini uygularsak

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{e^x} = \frac{\infty}{\infty}$$

olup belirsizlik gitmemiştir. Yine L'hopital yöntemini uygularsak

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = 0$$

bulunur.

Örnek: $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\left(\frac{x}{2}\right).\ln\frac{1}{x}\right]$ limitini bulunuz.

Çözüm: $0\cdot\infty$ belirsizliği vardır. Bu belirsizliği $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliğine çevirelim.

$$\lim_{x\to 0^+}\left[\left(\frac{x}{2}\right).\ln\frac{1}{x}\right] = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x^{-1}}{x^{-1}} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{-x^{-2}}{x^{-1}}}{-x^{-2}} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0^+} x = 0$$

2.2. Not: $\lim\limits_{x\to a}\left[p(x)-q(x)\right] = \infty-\infty$ ise

$$\lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{q(x)}-\frac{1}{p(x)}}{\frac{1}{p(x).q(x)}}$$

şekline dönüştürülerek $\frac{0}{0}$ veya $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği elde edilir. Bundan sonra L'hopital yöntemine müracaat edilir.

Örnek: $\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{4}{x^2-4}\right)$ limitini bulunuz.

Çözüm: $\infty - \infty$ belirsizliği vardır. Bu belirsizliğin paydaları eşitlenirse $\frac{0}{0}$ belirsizliğine döner. Şimdi L'hopital yöntemini uygularsak

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{x+2}{x^2-4}-\frac{4}{x^2-4}\right)=\lim_{x\to 2}\left(\frac{x+2-4}{x^2-4}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{2x}=\frac{1}{4}$$

elde edilir.

Örnek: $\lim_{x\to 2}(\tan x-\sec)$ limitini bulunuz.

Çözüm: $\infty - \infty$ belirsizliği vardır. Burada belirsizliğin paydaları eşitlenirse $\frac{0}{0}$ belirsizliğine döner.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\tan x-\sec x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin x}{\cos x}-\frac{1}{\cos x}\right)=\lim_{x\to 2}\left(\frac{-1+\sin x}{\cos x}\right)=\frac{0}{0}$$

Şimdi L'hopital yöntemini uygularsak

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{-1+\sin x}{\cos x}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)=\frac{0}{1}=0$$

bulunur.

Örnek: $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$ limitini bulunuz.

Çözüm: $\infty - \infty$ belirsizliği vardır. Burada belirsizliğin paydaları eşitlenirse $\frac{0}{0}$ belirsizliğine döner.

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=\lim_{x\to1}\left(\frac{1-x+\ln x}{(x-1)\ln x}\right)=\frac{0}{0}$$

Şimdi L'hopital yöntemini uygularsak

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{1-x+\ln x}{(x-1)\ln x}\right)=\lim_{x\to1}\left(\frac{-1+\frac{1}{x}}{\frac{x-1}{x}.\ln x}\right)=\frac{0}{0}$$

olduğundan bir kez daha L'hopital yöntemini uygularsak

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{-1+\frac{1}{x}}{\frac{x-1}{x}.\ln x}\right)=\lim_{x\to1}\left(\frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}}\right)=-\frac{1}{2}$$

bulunur.

2.3. Not: $0^0, 0^\infty, \infty^0, 1^\infty$, belirsizliği varsa, Logaritmik ve üstel fonksiyonların türevi uygulanarak $\frac{0}{0}$ veya $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliğine dönüştürülür. Bundan sonra L'hopital yöntemine müracaat edilir. Şöyle ki $\lim p(x)^{q(x)}=1^\infty$ biçimindeki limit $y=p(x)^{q(x)}$ yazılarak her iki tarafın e tabanında logaritması alınır.

$$\ln y = \ln p(x)^{q(x)}$$
$$\ln y = q(x)\ln p(x)$$
$$y = e^{q(x)\ln p(x)}$$
$$\lim y = e^{\lim q(x)\,\lim \ln p(x)}$$

şekline dönüştürülerek $\frac{0}{0}$ veya $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği elde edilir. Bundan sonra L'hopital yöntemine müracaat edilir.

Örnek: $\lim\limits_{x\to0^+} x^{\sin x}$ limitini bulunuz.

Çözüm: 0^0 belirsizliği vardır. 2.3. notta izah edilen ln yöntemi uygulanırsa,

$$y = x^{\sin x}$$
$$\ln y = \ln x^{\sin x}$$
$$\ln y = \sin x \ln x$$
$$y = e^{\sin x\,\ln x}$$

bulunur. Buna göre,

$$\lim_{x\to0^+} x^{\sin x} = e^{\lim\limits_{x\to0^+}\sin x\ln x}$$

dir. Burada öncelikle $\lim\limits_{x\to 0^+} \sin x \ln x$ i bulmalıyız. Burada $0\cdot\infty$ belirsizliği vardır. Bu belirsizliği $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliğine çevirelim.

$$\lim_{x\to 0^+} \sin x \ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}} = -\frac{\infty}{\infty}$$

olduğundan L'hopital yöntemini kullanırsak,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-\cos x}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{\sin^2 x}{\cos x}.\frac{1}{x} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{\sin x}{\cos x}.\frac{\sin x}{x} = 0$$

olduğundan

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\sin x} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} \sin x \ln x} = e^0 = 1$$

dir.

Örnek: $\lim\limits_{x\to 0^+} (e^x + 2x)^{\frac{1}{x}}$ limitini bulunuz.

Çözüm: 1^∞ belirsizliği vardır. 2.3. notta izah edilen ln yöntemi uygulanırsa,

$$y = (e^x + 2x)^{\frac{1}{x}}$$
$$\ln y = \ln(e^x + 2x)^{\frac{1}{x}}$$
$$\ln y = \frac{1}{x}\ln(e^x + 2x)$$
$$y = e^{\frac{1}{x}\ln(e^x+2x)}$$

olduğundan $e^{\frac{0}{0}}$ belirsizliği olup L'hopital yöntemini kullanılır,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}.\ln(e^x + 2x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{e^x+2}{e^x+2x}}{1} = \frac{3}{1} = 3$$

bulunur ki bu bize

$$\lim_{x\to 0^+} (e^x + 2x)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x}.\ln(e^x+2x)} = e^3$$

olduğunu gösterir.

2–TÜREVİN POLİNOMLARA UYGULANMASI

2.3. Teorem: $A \subset \mathbb{R}, f : A \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$$

polinom fonksiyonu verilsin. $f(x) = 0$ denkleminin n katlı bir kökü $x = 0$ ise,

$$f'(a) = f''(a) = f'''(a) = \cdots = f^{(n)}(a) = 0$$

dir.

İspat: Verilen polinom fonksiyonunun n katlı kökü $x = a$ ise

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0 = (x-a)^n = 0$$

şeklinde yazılabilir. Bu durumda,

$f'(x) = n(x-a)^{n-1}$ ise $f'(a) = n(a-a)^{n-1} = 0$

$f''(x) = n(n-1)(x-a)^{n-2}$ ise $f''(a) = n(n-1)(a-a)^{n-2} = 0$

...

$f^{(n)}(x) = n!\,(x-a)$ ise $f^{(n)}(a) = n!\,(a-a) = 0$

olacağından

$$f'(a) = f''(a) = f'''(a) = \cdots = f^{(n)}(a) = 0$$

dir.

Örnek: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ verilsin. $f(x)$ fonksiyonu $(x-1)^3$ ne tam bölünüyorsa, a ve b aralarındaki ilişki nedir?

Çözüm: $f(x)$ fonksiyonu $(x-1)^3$ 'ne tam bölünüyorsa, $x = 1$ için $f(x)$ in 3 katlı bir köküdür. Bu durumda

$f'(1) = f''(1) = 0$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$f''(x) = 6ax + 2b$

$0 = 6a \cdot 1 + 2b$

$b = -3a$

olarak bulunur.

Örnek: $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$ fonksiyonunun 2.3. teoremi gerçekleştirdiğini gösteriniz.

Çözüm: $f(x) = x^3 - 2x^2 + x = x(x-1)^2$

$x = 1$ denkleminin iki katlı bir köküdür.

$x = 1$ iki katlı kök iken teorem gereği $f'(1) = 0$ dır.

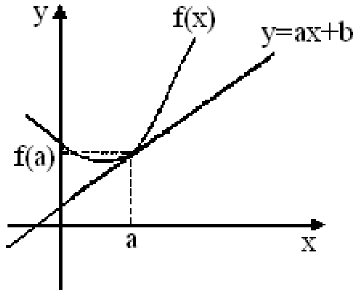
$f'(x) = 1(x-1)^2 + 2(x-1)x$ ise $f'(1) = 1(1-1)^2 + 2(1-1)1 = 0$

$f''(x) = 2(x-1) + 2x$ ise $f''(1) = 2(1-1) + 2 \cdot 1 = 2 \neq 0$

yukarıdaki teoremi gerçekleşmez.

3–TEĞET ve NORMALİN DENKLEMLERİ

2.1. Tanım: Bir fonksiyonun herhangi bir ve birkaç noktasına değen doğrulara teğet denir.

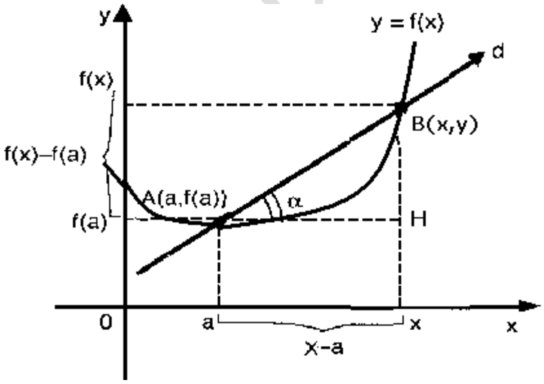


f(x) fonksiyonunun teğeti $y = ax + b$ doğrusudur. Bu f(x) fonksiyonu $x = a$ noktasında $y = ax + b$ doğrusuna teğettir.

Teğetler doğrular olduğundan doğrusal fonksiyonlar kısmı yeniden hatırlanmalıdır.

2.4. Teorem: Bir fonksiyonun herhangi bir noktadaki teğetin eğimi o noktadaki türevine eşittir.

İspat:



Şekildeki gibi bir $y = f(x)$ fonksiyonunu ele alalım. Bu fonksiyonda $x = a$ noktasının teğetinin eğimini bulmaya çalışalım. d doğrusu üzerinde bir $B(x, y)$ noktasını alalım. $A(a, f(a))$ noktası ile $B(x, y)$ noktası bilinen doğrunun eğimi,

$$m_T = \tan\alpha = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

biçimindedir. Fakat bu durum tam anlamıyla $x = a$ noktasının teğetinin eğimini vermez. Çünkü x noktası ile a noktası arasında küçük dahi olsa mesafe vardır. Bu mesafe 0'a indirilirse,

$$m_T = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

bulunur.

Örnek: $f(x) = 3x^2 + 4$ fonksiyonunun 3 noktasından geçen teğetin eğimini bulunuz.

Çözüm: Türevi $f'(x) = 6x$ dir. Buna göre eğim
$$m_T = f'(3) = 6 \cdot 3 = 18 = \tan\theta$$
dir.

Örnek: $f(x) = e^x + 5$ fonksiyonunun 0 noktasından geçen teğetin eğimini bulunuz.

Çözüm: Türevi $f'(x) = e^x$ dir. Buna göre eğim
$$m_T = f'(0) = e^0 = 1$$
dir.

Örnek: $y = x^3 - 3x + 4$ eğrisi üzerinde hangi noktada teğet x eksenine paralel ise paralel olduğu nokta ne olmalıdır?

Çözüm: Türevi $y' = 3x^2 - 3 = 0$dir.
$$3x^2 = 3$$
$$x^2 = 1$$
$$x = \pm 1$$
bulunur.

Örnek: $f(x) = x + \ln\cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$ fonksiyonunun $x = 0$ daki teğetinin eğimi m kaçtır?

Çözüm: $f'(x) = 1 + \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right)} = 1 + \tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$
$$f'(0) = 1 + \tan\left(\frac{\pi}{4} + 0\right) = 1 + 1 = 2$$
$$m_T = 2$$

Örnek: $y = x^2$ fonksiyonunun hangi noktasında çizilen teğet $y = \frac{1}{2}x + 1$ doğrusuna diktir.

Çözüm: $y = \frac{1}{2}x + 1$ doğrusunun eğimi $m_1 = \frac{1}{2}$ dir. Bu doğruya dik olan doğrunun eğimi,

$$m_1 m_2 = -1$$
$$\frac{1}{2} m_2 = -1$$
$$m_2 = -2$$

olup $y = x^2$ fonksiyonuna çizilen doğrunun eğimi $m_2 = -2$ dir. Fonksiyonun türevi o noktadaki teğetin eğimine eşit olduğundan

$$y' = 2x = -2$$
$$x = -1$$

olarak bulunur.

2.5. Teorem: Eğimi $m_T = f'(x_1)$ ve bir noktası $A(x_1, y_1)$ olan teğetin denklemi

$$y - y_1 = f'(x_1)(x - x_1)$$

şeklindedir.

İspat: Doğrusal fonksiyonlar bölümünden hatırlayacak olursak, eğimi m ve bir noktası $A(x_1, y_1)$ olan doğrunun denklemi $y - y_1 = m(x - x_1)$ olduğunu biliyoruz. Burada eğim $m_T = f'(x_1)$ olduğuna göre teğetin (doğrunun) denklemi

$$y - y_1 = f'(x_1)(x - x_1)$$

şeklindedir.

Örnek: $f(x) = x^2 + 4$ ün $x = 1$ noktasından geçen teğetin denklemini bulunuz.

Çözüm: Fonksiyonun türevi $f'(x) = 2x$ olup teğetin eğimi $m_T = f'(1) = 2 \cdot 1 = 2$ dir. Ayrıca $x = 1$ için $f(1) = 1^2 + 4 = 5$ olur. Buna göre eğimi $m_T = 2$ ve $A(1, 5)$ noktasından geçen doğrunun denklemi,

$$y - 5 = 2x - 2 \text{ ise } y = 2x + 3$$

şeklinde olur.

Örnek: $y^2 = 2x^2 - x^3$ eğrisinin $A(1, 1)$ noktasından geçen teğetin denklemini bulunuz.

Çözüm: Fonksiyon $y^2 - 2x^2 + x^3 = 0$ şeklindedir. Buna göre türevi

$$y' = \frac{-4x+3x^2}{2y}$$
$$-= \frac{-4\cdot 1+3\cdot 1^2}{2\cdot 1} = -\frac{1}{2}$$

olur. Eğimi ve bir noktası bilinen doğrunun denklemi

$$y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 1)$$
$$2y - 2 = -x + 1$$
$$2y + x - 3 = 0$$

bulunur.

Örnek: $y = e^{2x} + e^{-2x}$ fonksiyonunun $x = 0$ noktasından geçen teğetin denklemini bulunuz.

Çözüm: Verilen fonksiyonun türevi $y' = 2e^{2x} - 2e^{-2x}$ dir. Buna göre eğim, $y' = 2e^0 - 2e^0 = 0$ ise $m_T = 0$ elde edilir. $x = 0$ için

$$y = e^0 + e^0 = 2$$

bulunur. Şu halde, eğimi $m_T = 0$ ve $A(0, 2)$ noktasından geçen doğrunun denklemi

$$y - 2 = 0(x - 0)$$
$$y = 2$$

şeklinde bulunur.

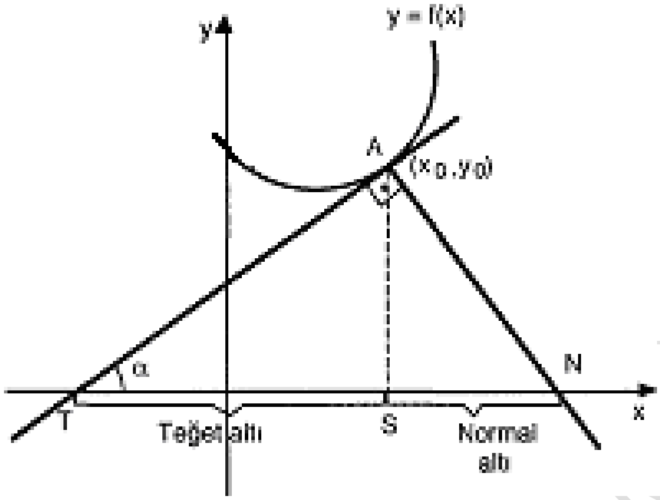
Örnek: $x^2y^2 = \cos(2x + y)$ kapalı fonksiyon üzerindeki $A\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$ noktasındaki teğetinin eğimi kaçtır?

Çözüm: $F(x, y) = x^2y^2 - \cos(2x + y) = 0$

$$y' = -\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)} = -\frac{2xy^2+2\sin(2x+y)}{2x^2y+\sin(2x+y)}$$

$$m_T = -\frac{2\cdot\frac{\pi}{4}\cdot 0^2+2\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{4}+0\right)}{2\cdot\left(\frac{\pi}{4}\right)^2\cdot 0^2+\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{4}+0\right)} = 2$$

2.2. Tanım: $y = f(x)$ fonksiyonun üzerinde alınan bir noktadan teğete değme noktasında dik olan doğruya bu fonksiyonun bu noktadaki normali denir.



Şekilde |AT| doğrusuna teğet, |AN| doğrusuna normalidir. |TS| uzunluğuna teğet altı uzunluğu, |SN| uzunluğuna normalaltı uzunluğu denir.

2.6. Teorem: Eğimi $m = f'(x_1)$ ve bir noktası $A(x_1, y_1)$ olan normalin denklemi

$$y - y_1 = -\frac{1}{f'(x_1)}(x - x_1)$$

şeklindedir.

İspat: Eğimi m ve bir noktası $A(x_1, y_1)$ olan doğrunun (teğetin) denklemi $y - y_1 = m(x - x_1)$ olduğunu doğrusal fonksiyonlar konusundan biliyoruz. Teğetin eğimi m_T normalin eğimi m_N olsun. Normal ise teğete dik olduğunu göre

$$m_N\, m_T = -1$$

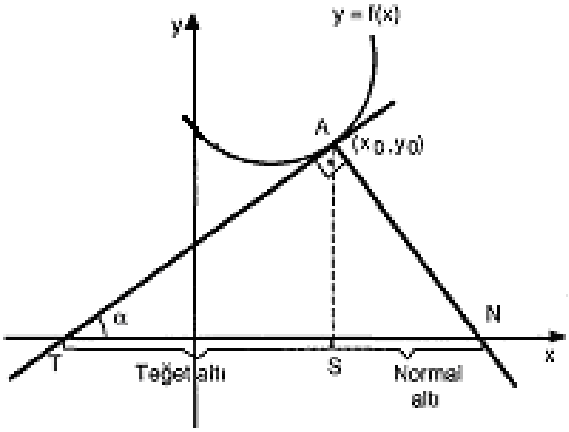
$$m_N\, m_T - \frac{1}{m_T} = -\frac{1}{f'(x_1)}$$

bulunur. Buna göre eğimi $m = f'(x_1)$ ve bir noktası $A(x_1, y_1)$ ise normalin denklemi

$$y - y_1 = -\frac{1}{f'(x_1)}(x - x_1)$$

şeklindedir.

2.7. Teorem: Şekildeki gibi



$|AT| = x$ teğet, $|AN| = y$ normali, $|TS| = t_A$ teğet altı uzunluğu, $|SN| = n_A$ normalaltı uzunluğu olmak üzere,

Teğet altı uzunluğu $t_A = \left|\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}\right|$

Normal altı uzunluğu $n_A = |f(x_0)f'(x_0)|$

dir.

İspat: ATS dik üçgeninden

$\sin\alpha = \frac{|f(x_0)|}{x}$ ve $\tan\alpha = \frac{|f(x_0)|}{t_A}$

$x = \frac{|f(x_0)|}{\sin\alpha}$ ve $t_A = \frac{|f(x_0)|}{\tan\alpha}$

olur. ATN dik üçgeninden

$\tan\alpha = \frac{n_A}{|f(x_0)|}$

$n_A = |\tan\alpha| = |f(x_0)|$

$n_A = |f(x_0)f'(x_0)|$

bulunur.

Örnek: $f(x) = 2x^3 - 2x^2 - 1$ denklemi ile verilen eğrinin üzerindeki $A(1, -1)$ noktasından çizilen

a) Teğetin denklemini,
b) Normalin denklemini,
c) Teğet altı uzunluğunu,
d) Normal altı uzunluğunu,

Çözüm: $f'(x) = 6x^2 - 4x$

$m_T = f'(x) = 6 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 = 2$

$m_N\, m_T = -1$ ise $m_N = -\frac{1}{2}$

a) Teğetin denklemi,

$$y-(-1)=2(x-1)$$
$$y=2x-3$$

b) Normalin denklemi,

$$y-(-1)=-\frac{1}{2}(x-1)$$
$$2y+x+1=0$$

c) Teğet altı uzunluğu,

$$t_A=\left|\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}\right|=\frac{1}{2}$$

d) Normal altı uzunluğu,

$$\begin{aligned} n_A &= |f(x_0)f'(x_0)| \\ &= |(2x^3-2x^2-1)(6x^2-4x)| \\ &= |(2\cdot 1^3-2\cdot 1^2-1)(6\cdot 1^2-4\cdot 1)| \\ &= 2 \end{aligned}$$

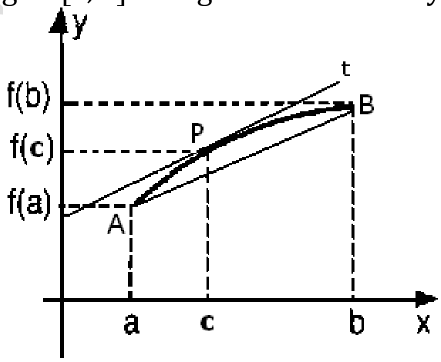
olur.

2.8. Teorem (Ortalama Değer Teoremi): $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli (a,b) de türevli olsun. $a<c<b$ olacak biçimde en az bir tane c için

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

dir.

İspat: Şekildeki gibi $[a,b]$ aralığında bir f fonksiyonu verilsin.



Bu fonksiyonda $A(a,f(a))$ ve $B(b,f(b))$ noktalarını alalım. Bu iki noktayı birleştiren şekildeki gibi bir kiriş bulunabilir. Yine bu kirişe paralel t teğeti çizilebilir. Bu teğetin değme noktası $P(c,f(c))$ olsun. Biz biliyoruz ki t teğeti ile $|AB|$ doğrusunun eğimleri aynı ve

$|AB|$ doğrusunun eğimi $m_{AB} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

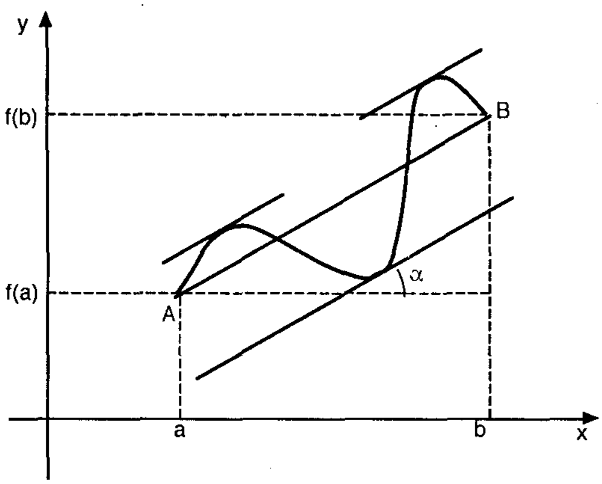
Teğetinin eğimi $m_T = f'(c)$

dir. Buna göre

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

olur. //

Ortalama Değer teoreminden şu geometrik yorumu çıkarırız: Bir $[a,b]$ aralığındaki f fonksiyonda bulunan $A(a,f(a))$ ve $B(b,f(b))$ noktalarından geçen doğruya paralel olacak biçimde (a,b) aralığında $f(x)$ in en az bir teğeti vardır.



Örnek: $f:\left[\frac{1}{2},2\right]\rightarrow\mathbb{R}, f(x)=x+\frac{1}{x}$ fonksiyonuna ortalama değer teoremini uygulayıp, ortalama değer teoremini sağlayan x sayısını bulunuz.

Çözüm: $a=\frac{1}{2}$ için $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\frac{1}{2}}=\frac{5}{2}$

$b=2$ için $f(2)=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$

olduğundan Ortalama değer teoremi

$$f'(c)=\frac{\frac{5}{2}-\frac{5}{2}}{2-\frac{1}{2}}=0 \qquad (1)$$

dir. Buna göre

$$f'(x)=1-\frac{1}{x^2} \qquad (2)$$

dir. (1) ve (2) eşitliklerinden,

$$1-\frac{1}{x^2}=0$$

$$x = \pm 1 = c$$

bulunur. $1 \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$ olduğundan $x = 1$ ortalama değer teoremini sağlar.

Örnek: $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}, f(x) = \sin x$, fonksiyonuna ortalama değer teoremini uygulayıp, ortalama değer teoremini sağlayan x sayısını bulunuz.

Çözüm: $a = 0$ ise $f(0) = \sin 0 = 0$
$b = \pi$ ise $f(\pi) = \sin \pi = 0$

olduğundan Ortalama değer teoremi,

$$f'(c) = \frac{0-0}{\pi - a} = 0 \qquad (1)$$

dir. Buna göre,

$$f'(x) = \cos x \qquad (2)$$

dir. (1) ve (2) eşitliklerinden,

$$\cos x = 0$$
$$x = \frac{\pi}{2} = c$$

bulunur. $\frac{\pi}{2} \in [0, \pi]$ ortalama değer teoremini sağlar.

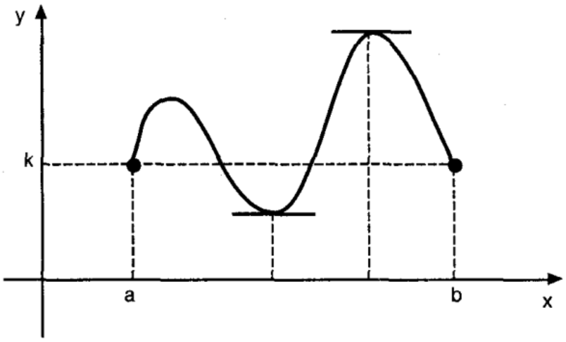
2.9. Teorem (Rolle (Rol) Teoremi): $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli (a, b) de türevli olsun. $f(a) = f(b)$ ise $f'(c) = 0$ olacak şekilde (a, b) de en az bir tane $x = c$ noktası vardır.

İspat: $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $a < c < b$ olacak şekilde Ortalama Değer Teoremi,

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

olduğunu biliyoruz. Burada eğer $f(a) = f(b)$ alınırsa $f'(c) = 0$ bulunur. //

Rolle teoreminden şu geometrik yorumu çıkarırız: Bir $[a, b]$ aralığındaki f fonksiyonunda $f(a) = f(b)$ ise bu aralıkta en az bir tanesinden x eksenine paralel teğetler çizilebilir.



Örnek: $f:[0,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=x^3-3x^2+2x$ fonksiyonunun Rolle teoremine uygulayınız.

Çözüm: $a=0$ için $f(0)=0^3-3\cdot 0^2+2\cdot 0=0$
$b=1$ için $f(1)=1^3-3\cdot 1^2+2\cdot 1=0$
olduğundan $f(0)=f(1)$ dir. Polinom fonksiyonlar $\mathbb{R}$ de sürekli olduğundan f fonksiyonu $[0,1]$ aralığında süreklidir.

$f'(x)=3x^2-6x+2$ ise $x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{3}}{3}$

$x=\frac{3\pm\sqrt{3}}{3}\in[0,1]$

o halde en az bir noktada fonksiyonun türevinin sıfır olduğu söylenebilir. f Rolle teoremini gerçekler.

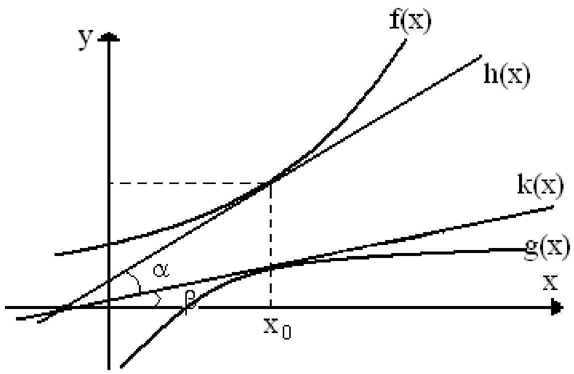
4–İKİ EĞRİ ARASINDAKİ AÇI

2.8. Teorem: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ve $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ iki fonksiyon ve bu iki fonksiyonun x_0 noktasından geçen teğetler sırasıyla m_1 ve m_2 olsun. Bu iki teğet arasındaki açı α ise,

$$\tan\alpha=\frac{f'(x)-g'(a)}{1+f'(x)\cdot g'(x)}$$

dir.

İspat: Verilere göre aşağıdaki grafiği çizelim.



Burada f fonksiyonunun x_0 noktasında teğeti h, g fonksiyonunun x_0 noktasında teğeti k olsun. Bu takdirde, h doğrusunun eğimi $\tan(\alpha+\beta)$ ve k doğrusunun eğimi $\tan\beta$ olduğuna göre bu iki doğru arasındaki açı,

$$\tan\alpha = \frac{\tan(\alpha+\beta)-\tan\beta}{1+\tan(\alpha+\beta)\cdot\tan\beta} = \frac{f'(x)-g'(a)}{1+f'(x)\cdot g'(x)}$$

olarak bulunur.

Örnek: $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+,\ f(x)=x^2,\ g:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+,\ g(x)=x^3$ fonksiyonların $x=1$ noktasından geçen doğruların arasındaki açının tanjantını bulunuz.

Çözüm: $f'(x)=2x$ ise $m_1=f'(1)=1^2=2\cdot 1=2$
$g(x)=3x^2$ ise $m_2=g(x)=3\cdot 1^2=3$

olduğundan

$$\tan\alpha = \frac{f'(x)-g'(a)}{1+f'(x)\cdot g'(x)} = \frac{2-3}{1+2\cdot 3} = -\frac{1}{7}$$

bulunur.

Örnek: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x<1 \\ -x+3, & x\geq 1 \end{cases}$

biçiminde verilen f nin $x=1$'e doğru sağdan ve soldan yaklaştığımızda elde edilen teğetlerin çakışık olup olmadığını araştırınız.

Çözüm: Soldan ve sağdan türevlerinin eşit olup olmadığını araştıralım.

$$f'(x)=\begin{cases} 2x, & x<1 \\ -1, & x\geq 1 \end{cases}$$

Sağdan türev $f'(1^+)=-1$ dir. Bu bize $x=1$ sağdan yaklaşarak çizdiğimiz teğetin eğiminin -1 olduğunu gösterir.

Soldan türev $f'(1^-)=2$ dir. Bu bize $x=1$ sağdan yaklaşarak çizdiğimiz teğetin eğiminin 2 olduğunu gösterir.

Bu durum; sağdan ve soldan teğetlerin farklı olması fonksiyonun bu noktada türevsiz olduğunu gösterir.

5– FONKSİYONLARIN ARTAN ve AZALAN ARALIKLARI

2.9. Teorem: $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli ve türevlenebilen bir fonksiyon olsun. Her $x\in(a,b)$ için

(i) $f'(x)>0$ ise fonksiyon bu noktalarda artandır.
(ii) $f'(x)<0$ ise fonksiyon bu noktalarda azalandır.
(iii) $f'(x)=0$ ise fonksiyon bu noktalarda sabittir.

İspat: (i) $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ fonksiyonu (a,b) aralığında artan olsun. Bu takdirde,

$x_1<x_2$ ise $\Delta x=x_2-x_1>0$

$f(x_1)<f(x_2)$ ise $\Delta y=f(x_2)-f(x_1)>0$

yazılabilir. Her iki eşitsizlikten

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}>0$$

bulunur. Bu eşitsizlikten

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)>0$$

elde edilir. Bu ise istenendir.

Karşıt olarak, $f'(x)>0$ iken f fonksiyonu (a,b) aralığında artan olduğunu gösterelim.

Her $x\in(a,b)$ için $f'(x)>0$ ise $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)>0$ olacağından $\frac{\Delta y}{\Delta x}>0$ olur. Buradan Δy ile Δx aynı işaretli olduklarını gösterir. Bu durumda

$\Delta x=x_2-x_1>0$ ise $\Delta y=f(x_2)-f(x_1)>0$

veya

$\Delta x=x_2-x_1<0$ ise $\Delta y=f(x_2)-f(x_1)>0$

dir. Bu eşitsizlikler, $x_1<x_2$ iken $f(x_1)<f(x_2)$ olduğunu gösterir. Öyleyse f fonksiyonu (a,b) aralığında artandır.

(i) ve (i) benzer yolla ispatlanır.

Örnek: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-3x^2+5$ fonksiyonunu artan azalanlığını analiz ediniz.

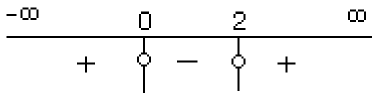
Çözüm: Fonksiyonun türevini alalım ve sıfıra eşitleyelim.

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 0$$

Şimdi buradan x'i bulalım

$$3x(x - 2) = 0$$
$$x = 0 \wedge x = 2$$

bulunur. Elde edilen bu değerleri sayı düzleminde çözümleyelim:



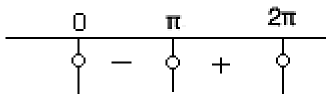
Bulunan bu değerlere göre fonksiyon $(-\infty, 0)$ aralığında bu artan, $(0, 2)$ aralığında azalan, $(2, +\infty)$ aralığında tekrar artandır.

Örnek: $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x$ fonksiyonunun artan ve azalan olduğu bölgeleri bulunuz.

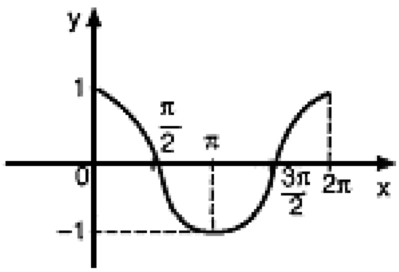
Çözüm: f'nin türevini alıp ve sıfıra eşitleyelim.

$$f'(x) = -\sin x = 0$$
$$x_1 = 0 \wedge x_2 = \pi \wedge x_3 = 2\pi$$

bulunur. Elde edilen bu değerleri sayı düzleminde çözümleyelim:



Bulunan bu değerlere göre fonksiyon $(0, \pi)$ aralığında azalan, $(\pi, 2\pi)$ aralığında artandır. Bu fonksiyonun grafiği



şeklindedir.

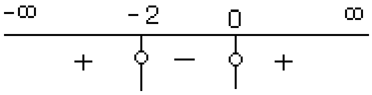
Örnek: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2e^x$ fonksiyonunu artan azalanlığını analiz ediniz.

Çözüm: Fonksiyonun türevini alalım ve sıfıra eşitleyelim.

$$f'(x) = 2xe^x + x^2e^x = 0$$
$$e^x \neq 0, 2x + x^2 = 0$$
$$x(2 + x) = 0$$

$$x = 0 \wedge x = -2$$

bulunur. Elde edilen bu değerleri sayı düzleminde çözümleyelim:



Bulunan bu değerlere göre fonksiyon $(-\infty,-2)$ aralığında bu artan, $(-2,0)$ aralığında azalan, $(0,+\infty)$ aralığında artandır.

Örnek: $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{ax+5}{x-1}$ fonksiyonunun monoton artan bir fonksiyon olması için a hangi aralıkta olmalıdır?

Çözüm: Fonksiyonun türevi alınıp sıfıra eşit ve sıfırdan büyük olmalıdır.

$$f'(x) = \frac{a(x-1)-(ax+5)}{(x-1)^2} \geq 0$$

$$\frac{-a-5}{(x-1)^2} \geq 0$$

$$a \leq -5$$

6– EKSTREMUM (MAXIMUM ve MİNUMUM) NOKTALAR

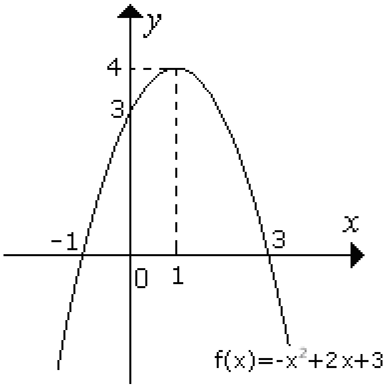
2.3. Tanım (Mutlak Maksimum): $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $c \in A$ noktası verilmiş olsun. Her $x \in A$ için $f(x) \leq f(c)$ oluyorsa, f fonksiyonun c noktasında mutlak maksimuma sahiptir denir. Mutlak maksimum noktası $T(c, f(c))$ dir.

Örnek: $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ fonksiyonun mutlak maksimum noktasını bulunuz.

Çözüm: Bu fonksiyonun tepe noktaların değerleri

$$r = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2(-1)} = 1,\ k = f(1) = 4$$

olup $T(1,4)$ şeklindedir. Bu fonksiyonun grafiği



biçimindedir. O halde her $x \in \mathbb{R}$ için $f(x) \leq 4$ olacağından mutlak maksimum değeri 4 olarak bulunur.

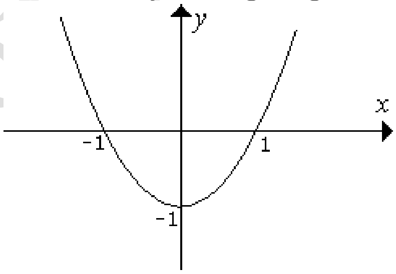
2.4. Tanım (Mutlak Minimum): $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $c \in A$ noktası verilmiş olsun. Her $x \in A$ için $f(x) \geq f(c)$ oluyorsa, f fonksiyonun c noktasında mutlak minimuma sahiptir denir. Mutlak minimum noktası $T(c, f(c))$ dir.

Örnek: $f(x) = x^2 - 1$ fonksiyonun mutlak minimum noktasını bulunuz.

Çözüm: Bu fonksiyonun tepe noktaların değerleri

$$r = -\frac{b}{2a} = -\frac{0}{2 \cdot 0} = 0, k = f(01) = -1$$

olup $T(0, -1)$ şeklindedir. Bu fonksiyonun grafiği,



biçimindedir. O halde her $x \in \mathbb{R}$ için $f(x) \geq -1$ olacağından mutlak minimum değeri –1 olarak bulunur.

2.5. Tanım (Yerel Maksimum): $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $c \in A$ noktası verilmiş olsun. Eğer A kümesinde c noktasına yeterince yakın her $x \in A$ için (yani her $x \in (c - \varepsilon, c + \varepsilon) \cap A$ için) $f(x) \leq f(c)$ oluyorsa, f fonksiyonun c noktasında yerel maksimuma sahiptir denir.

2.6. Tanım (Yerel Minimum): $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $c \in A$ noktası verilmiş olsun. Eğer A kümesinde c noktasına yeterince yakın her $x \in A$ için (yani her $x \in (c-\varepsilon, c+\varepsilon) \cap A$ için) $f(x) \geq f(c)$ oluyorsa, f fonksiyonun c noktasında yerel maksimuma sahiptir denir.

2.4. Not: Yukarıdaki tanımlara göre mutlak maksimum (minimum) aynı zamanda yerel maksimumdur (minimumdur). Buna göre yukarıdaki iki örnekte yerel maksimum ve yerel minimumlardır.

2.10. Teorem (Fermat Teoremi): $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli ve (a,b) türevlenebilir bir fonksiyon olsun, $c \in (a,b)$ noktasında yerel maksimum veya yerel minimum varsa, $f'(c) = 0$ dır.

İspat: f fonksiyonunun c noktasında yerel minimum olduğunu kabul ederek ispat edelim. Benzer şekilde yerel maksimum içinde yapılır.

Her $x \in [a,b]$ için, $f(x) \geq f(c)$ dir. Şu halde, $f(x) - f(c) \geq 0$ dir.

$$x > c \text{ için } \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0 \text{ olup } \lim_{x\to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = f'(c) \geq 0 \qquad (1)$$

$$x < c \text{ için } \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0 \text{ olup } \lim_{x\to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = f'(c) \leq 0 \qquad (2)$$

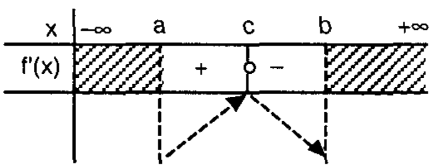
dir. (1) ve (2) denklemlerinden $f'(c) = 0$ elde edilir.

2.11. Teorem: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon $a < b < c$ ve $f'(c) = 0$ olsun. Bu durumda,

(i) $a < x < c$ için $f'(x) > 0$ ve $c < x < b$ için $f'(x) = 0$ şartlarını sağlıyorsa c noktası yerel maksimumdur.

(ii) $a < x < c$ için $f'(x) < 0$ ve $c < x < b$ için $f'(x) > 0$ şartlarını sağlıyorsa c noktası yerel minimumdur.

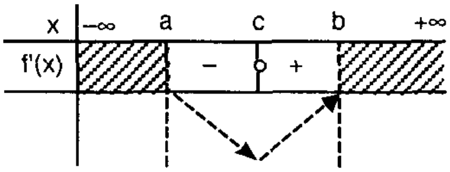
İspat: (i) Teoremde verilenlere göre $f'(x)$ in işaret tablosu,



biçimindedir. $a < x < c$ için $f'(x) > 0$ olduğundan f fonksiyonu bu aralıkta artandır. $c < x < b$ için $f'(x) < 0$ olduğundan f fonksiyonu bu azalandır. Şu halde

Her $x \in (a, b)$ için $f(x) \geq f(c)$ olacağından f fonksiyonu c noktasında yerel maksimuma sahiptir.

(ii) Teoremde verilenlere göre $f'(x)$ in işaret tablosu



biçimindedir. $a < x < c$ için $f'(x) < 0$ olduğundan f fonksiyonu bu aralıkta azalandır. $c < x < b$ için $f'(x) > 0$ olduğundan f fonksiyonu bu artandır. Şu halde

Her $x \in (a, b)$ için $f(x) \geq f(c)$ olacağından f fonksiyonu c noktasında yerel minimuma sahiptir.

Örnek: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x - 1$ fonksiyonunun yerel maksimum yerel minimum değerlerini bulunuz.

Çözüm: Fonksiyonun türevini alalım ve sıfıra eşitleyelim.

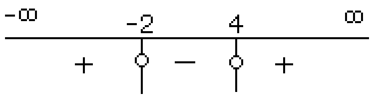
$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 24 = 0$$

Şimdi elde edilen denklemin köklerini bulalım.

$$3(x^2 - 2x - 8) = 0$$

$$x = -2 \text{ ve } x = 4$$

elde edilir. Elde edilen bu değerleri sayı düzleminde çözümleyelim:



Bulunan bu değerlere göre fonksiyon $(-\infty, -2)$ aralığında bu artan, $(-2,4)$ aralığında azalan, $(4, +\infty)$ aralığında artandır. Şu halde –2 noktası yerel maksimum, 4 noktası yerel minimum noktadır.

Örnek: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 6x^2 + 12x$ fonksiyonunun yerel maksimum ve yerel minimum değerlerini bulunuz.

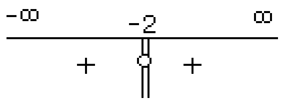
Çözüm: Fonksiyonun türevini alalım ve sıfıra eşitleyelim.

$$f'(x) = 3x^2 + 12x + 12 = 0$$

Şimdi elde edilen denklemin köklerini bulalım.

$$3(x^2+4x+4)=0$$
$$x_{1,2}=-2$$

elde edilir. Elde edilen bu değerleri sayı düzleminde çözümleyelim:



elde edilir ki, bu bize her yerde maksimumolduğunu gösterir.

Örnek: Toplamları 11 olan iki sayının çarpımlarının maksimum değeri nedir?

Çözüm: Sayılarımız x ve y olsun. Bu takdirde $x+y=11$ yani, $y=11-x$ dir. Bizden istenen bu iki sayının toplamıdır. Çarpımlarını S ile gösterirsek,

$$S(x)=x\cdot y$$
$$S(x)=x(11-x)$$
$$S(x)=11x-x^2$$
$$S'(x)=11-2x=0$$
$$x=\frac{11}{2}\text{ ve } y=11-\frac{11}{2}=\frac{11}{2}$$
$$S(x)=\frac{11}{2}\cdot\frac{11}{2}=\frac{121}{4}=30{,}25$$

bulunur.

Örnek: $A=3-x,\ B=x+9$ ise $A\cdot B$ nin en büyük değeri nedir?

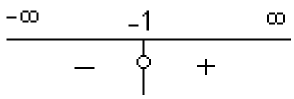
Çözüm: $A\cdot B=-x^2-6x+27$ olur ki, türevi;
$(A\cdot B)'=-2x-6=0$ dir. Şu halde $x=-3$ olur. Buna göre
$A=3-(-3)=6$ ve $B=(-3)+9=6$
olup $A\cdot B=6\cdot 6=36$ olarak bulunur.

Örnek: x reel sayı olmak üzere 3^{x^2+2x} ifadesinin en küçük değeri nedir?

Çözüm: $y=x^2+2x$ alalım.

$$y'=2x+2=0$$
$$x=-1$$

elde edilir. Elde edilen bu değerleri sayı düzleminde çözümleyelim:

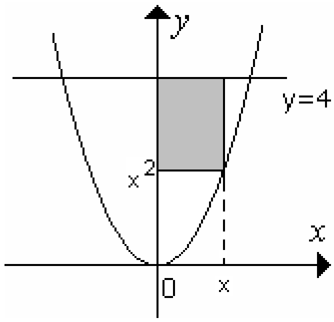


Bulunan bu değerlere göre fonksiyon $(-\infty,-1)$ aralığında bu azalan, $(-1,+\infty)$ aralığında artandır. Şu halde –1 noktası yerel minimum noktadır. Buna göre

$$x=-1 \text{ alınırsa, } 3^{(-1)^2+2(-1)}=\frac{1}{3}$$

değeri minimum olur.

Örnek:



$y=x^2$ eğrisi üzerinde bir kenarı $y=4$ de diğer kenarı $x=0$ da olan dikdörtgenin alanının maksimum olabilmesi için boyutları ne olmalıdır?

Çözüm: Verilen fonksiyonların grafiğini yandaki şekildekidir. Bizden bu kısmın alanı istenmektedir. Şu halde,

$$A(x)=x(4-x^2)=4x-x^3$$

fonksiyonunu elde ederiz. Bu fonksiyonun türevini alıp sıfıra eşitlersek,

$$A'^{(x)}=4-3x^2=0$$

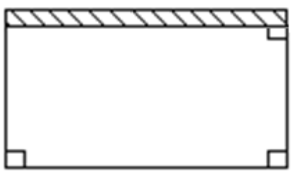
$$4=3x^2$$

$$x=\mp\sqrt{\frac{4}{3}}=\mp\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$A(x)=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(4-\frac{4}{3}\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{8}{3}=\frac{16}{3\sqrt{3}}$$

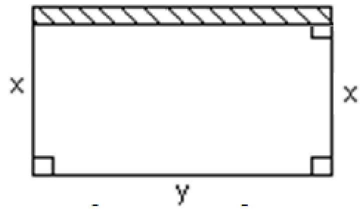
bulunur.

Örnek:



Şekildeki gibi dikdörtgen biçiminde ve bir kenarın duvar bulunan bir bahçenin diğer kenarına bir sıra tel çekilmiştir. Kullanılan telin uzunluğu 300 m olduğuna göre, bahçenin alanı en fazla kaç m^2 olabilir?

Çözüm:



Bahçenin çevresini şekildeki gibi adlandıralım. Bahçeye döşenen telin uzunluğu 300 m olduğundan

$$2x + y = 300$$
$$y = 300 - 2x$$

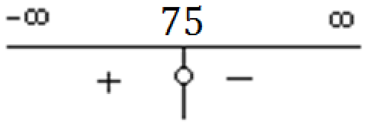
bulunur. Bizden bahçenin alanı istendiğinden

$$A(x) = xy$$

şeklindedir. Yukarıdaki y'nin değerini A(x) de yazarsak ve türevini alırsak,

$$A(x) = x(300 - 2x) = 300x - 2x^2$$
$$A'^{(x)} = 300 - 4x = 0$$

olur. Burada $x = 75$ dir. Buna göre $y = 150$ olur. Şuhalde



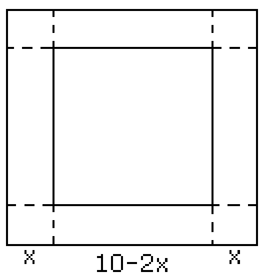
bulunur. O halde maksimum alan

$$A(x) = 75 \cdot 150 = 11\,250 \text{ m}^2$$

olarak bulunur.

Örnek: Bir kenarı 10 cm olan kare şeklindeki kartondan üstü açık bir kibrit kutusu yapılacaktır. Bu kibrit kutusunun maksimum hacimli olması için ebatları ne olmalıdır.

Çözüm: Kartonumuzu şekildeki gibi x kadar dört köşesinden kesersek istediğimizi elde ederiz.



Buna maksimum hacim:

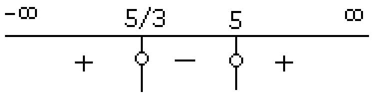
$$H(x) = x(10 - 2x)(10 - 2x)$$
$$H(x) = 100x - 40x^2 + 4x^3$$
$$H'(x) = 100 - 80x^2 + 12x^2 = 0$$
$$25 - 20x^2 + 3x^3 = 0$$

Bu ikinci dereceden denklemi çözersek

$$\Delta = 20^2 - 4 \cdot 25 \cdot 3 = 100$$

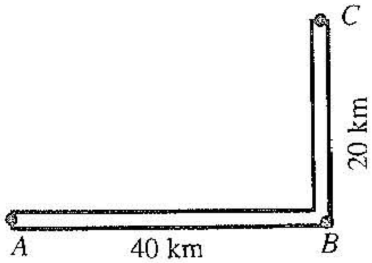
$$x_1 = \frac{20+10}{2 \cdot 3} = 5 \text{ ve } x_2 = \frac{20-10}{2 \cdot 3} = \frac{5}{3}$$

bulunur. Elde edilen bu değerleri tabloda gösterirsek



bulunur. Buna göre, $x = \frac{5}{3}$ seçerse maksimum hacmiverir.

Örnek:

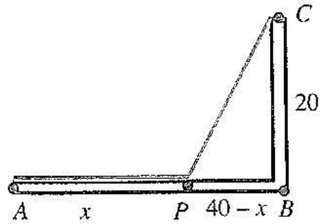


Şekildeki gibi $|AB| = 40$ km ve $|BC| = 20$ km stabilize yol bulunmaktadır. $|AC|$ arasına asfalt yol yapımına karar verilmiştir. Stabilize yolun her kilometresi 100 000 ₺, yeni açılan yolun kilometresi 150 000 ₺ ye mal olduğu bilindiğine göre $|AC|$ arası yol en az masrafla nasıl yapılmalıdır.

Çözüm: Aşağıdaki şekildeki gibi

$|AP| = x$ km ve $|PB| = 40 - x$ km, $(0 \leq x \leq 40)$

alalım.



$|AP| + |PC|$ uzunluğunun masrafı;

$$m(x) = 100\,000x + 150\,000\sqrt{(40-x)^2 + 20^2}$$

$$m(x) = 50\,000(2x + 3\sqrt{(40-x)^2 + 20^2})$$

biçiminde yazılabilir. Bu yazımın türevini alırsak;

$$m'(x) = 50\,000\left[2 + 3\frac{2(40-x)(-1)}{2\sqrt{(40-x)^2+400}}\right] = 0$$

$$2 = 3\frac{40-x}{\sqrt{(40-x)^2+400}}$$

$$2\sqrt{(40-x)^2+400} = 3(40-x)$$

$$4(40-x)^2 + 400 = 9(40-x)^2$$

$$5(40-x)^2 = 400$$

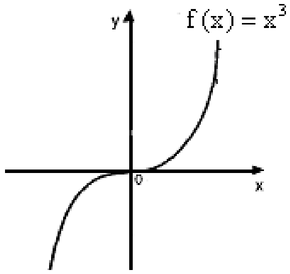
$$x = 40 - 4\sqrt{5} \cong 31{,}056 \text{ km}$$

$$m\left(40-4\sqrt{5}\right) = 50\,000\left(2(40-4\sqrt{5}) + 3\sqrt{\left(40-(40-4\sqrt{5})\right)^2 + 400}\right)$$
$$\cong 4\,447\,213{,}60 \text{ ₺}$$

2.5. Not: 2.11 teoremin tersi doğru değildir. Yani, $x = c$ noktasında $f'(c) = 0$ ise $x = c$ noktasında yerel maksimum veya yerel minimum olmayabilir.

Örnek: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ fonksiyonunda $f'(x) = 0$ olduğu bilinmektedir. $x = 0$ noktasında yerel maksimum veya yerel minimuma sahip değildir.

Çözüm: Verilen fonksiyonun grafiği



biçimindedir. Fonksiyonun türevi ise

$$f'(x) = 3x^2 = 0$$
$$x = 0$$

dir. Grafikten de açıkça görüldüğü gibi $x = 0$ noktası yerel maksimum veya yerel minimuma sahip değildir.

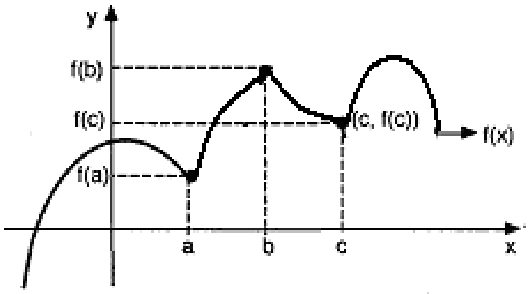
2.12. Teorem: $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon $a < c < b$ için c mutlak maksimum veya mutlak minimum olsun. Bu takdirde $f'(c) = 0$ veya $f'(c)$ yoktur.

İspat: Her mutlak maksimum (minimum) aynı zamanda yerel maksimum (minimum) olmasından dolayı $f'(c) = 0$ sağlanabilir. Ama, “bir fonksiyonun süreksiz olduğu noktalarda türevi yoktur” teoremi gereğince $c = a$ noktasında f fonksiyonu mutlak maksimuma sahipse türevi yoktur. Yine $c = a$ noktasında f fonksiyonu mutlak minimuma sahipse türevi yoktur.

7– EĞRİLERİN BÜKÜY (DÖNÜM) NOKTALARI

2.7. Tanım: $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyonda bükeyliğin yön değiştirdiği (yani konvekslikten, konkavlığa veya konkavlıktan konveksliğe değiştiği) ve sürekli olduğu noktaya büküm (dönüm) noktası denir.

Örnek: Şekilde verilen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu



$(a, f(a))$, $(b, f(b))$, $(c, f(c))$ dönüm noktalarıdır.

2.13. Teorem: f fonksiyonu $x = c$ da birinci ve ikinci türevleri var ve ikinci türev fonksiyonu $x = c$ da sürekli olsun. f fonksiyonunun belirttiği eğrinin çukurluğu a noktasında yön değiştiriyorsa $f''(c) = 0$ dır.

İspat: f fonksiyonu $(c - \varepsilon, c)$ aralığında konkav, $(c, c + \varepsilon)$ aralığında konveks olsun. Bu takdirde,

$x \in (c - \varepsilon, c)$ için $f''(c) < 0$

$x \in (c, c + \varepsilon)$ için $f''(c) > 0$

dir. $f''(c)$ fonksiyonu $x = c$ noktasında sürekli olduğundan $f''(c) = 0$ olacağı açıktır.

Örnek: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 6x^2 + 15$ fonksiyonunun dönüm noktasını bulunuz.

Çözüm: $f'(x) = 3x^2 - 12x$

$f''(x) = 6x - 12 = 0$

$$x = 2$$

olup $x = 2$ noktası büküm noktasıdır.

Örnek: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 e^x$ fonksiyonunun dönüm noktasını bulunuz.

Çözüm: $f'(x) = 2xe^x + x^2e^x$

$$f''(x) = 2e^x + 2xe^x + 2xe^x + x^2e^x$$

$$2e^x + 4xe^x + x^2e^x = 0$$

$$e^x(2 + 4x + x^2) = 0$$

$e^x \neq 0$ ve $2 + 4x + x^2 = 0$ in kökleri $x_1 = -2 + \sqrt{2}$ ve $x_2 = -2 - \sqrt{2}$ olup dönüm noktalarıdır.

Örnek: $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 + \sin 2x$ fonksiyonunun dönüm noktasını bulunuz.

Çözüm: $f'(x) = 2x + 2\cos 2x$

$$f''(x) = 2 - 4\sin 2x$$

$$2 - 4\sin 2x = 0$$

$$\sin 2x = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{12} \wedge x = \frac{5\pi}{12} \wedge x = \frac{13\pi}{12} \wedge x = \frac{17\pi}{12}$$

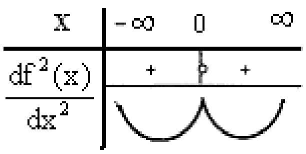
dönüm noktalarıdır.

Örnek: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^4 + 1$ fonksiyonunun dönüm noktasını bulunuz.

Çözüm: $f'(x) = 4x^3$

$$f''(x) = 12x^2$$

olduğudan $x = 0$ çift kat kökdür.



tabloya göre işaret değişmediğinden dönüm noktası yoktur.

2.6. Not: 2.13. teoremin tersi doğru değildir.

8– HIZ ve İVMENİN TÜREVLE BULUNUŞU

2.8. Tanım: Bir hareketlinin birim zamanda aldığı yolun zamana oranına hız denir. Yol S (bağımlı değişken) ile zaman t (bağımsız değişken) ile ve hız V ile gösterirsek, $V = \frac{S}{t}$ dir. Burada S(t) şeklinde yazılan fonksiyona bir hareketlinin konum–zaman fonksiyonu denir. Bir hareketlinin $t = t_0$ anındaki hızına bir anlık hız veya ani hız denir.

2.14. Teorem: Bir hareketlinin ortalama hızı $V_{ort} = \frac{dS}{dt}$ dir.

İspat: Bir hareketlinin t_1 anında aldığı yol $S(t_1)$ ve t_2 anında aldığı yol $S(t_2)$ olsun. $t_1 < t_2$ ise ortalama hız,

$$V_{ort} = \frac{S(t_1) - S(t_2)}{t_1 - t_2} = S'(t)$$

biçimindedir.

Örnek: $S(x) = t^2 + 3t + 2$ denklemiyle hareket eden bir cismin ortalama hızını ve 3 saniye sonraki ani hızını bulunuz.

Çözüm: 1) $S(x) = t^2 + 3t + 2$ denklemiyle hareket eden bir cismin ortalama hızı

$$V_{ort} = S'(x) = 2t + 3$$

şeklindedir.

2) 3 saniye sonraki ani hızı $V_{ort} = S'(3) = 2 \cdot 3 + 3 = 9$ dur.

Örnek: $S(x) = t^3 - 9t^2 + 24t$ denklemiyle bir doğru üzerinde hareket eden bir cismin hızı hangi zaman aralığında azalır?

Çözüm: $V(t) = S'(x) = 3t^2 - 18t + 24$

$$3t^2 - 18t + 24 = 0$$

$$(t - 2)(t - 24) = 0$$

dir. Elde edilen değerlerin tablosu

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
V(t)		+	0	−	0	+	

şeklindedir. Tablodan görüldüğü gibi cismin hızı (2, 4) aralığında azalır.

Örnek: Hareket denklemleri $S_1 = t^3 + 5$ ve $S_2 = 3t + k$ olan iki cisim buluştukları anda hızları aynıdır. S_1 ve S_2 cisimlerin yerden yüksekliğini gösterdiğine göre, k'nın değeri nedir?

Çözüm: S_1 ve S_2 cisimlerin türevleri hızlarını verecektir. Cisimlerin hız fonksiyonları,

$$V_1(t) = 3t^2 \text{ ve } V_2(t) = 3$$

dür. Hızlar eşit olacağından

$$3t^2 = 3 \text{ ise } t = 1$$

olur. Buluştukları anda iki cisim de yerden aynı yükseklikte olacağından $S_1 = S_2$ olmalıdır. O zaman $t = 1$ için

$$S_1 = 1^3 + 5 = 6, S_2 = 3 \cdot 1 + k$$
$$k = 3$$

bulunur.

2.9. Tanım: Birim zamanda hızın değişme miktarına ivme denir. $a(t)$ ile gösterilir. Bu tanıma göre

$$a(t) = V'(t) = S''(t)$$

dir.

Örnek: Hareket denklemi $S(t) = t^3 + 1$ olan hareketlinin $t = 2$ nci saniyedeki ivmesi kaç m/sn^2 dir?

Çözüm: $V(t) = S'(t) = 3t^2$

$a(t) = V'(t) = S''(t) = 6t = 6 \cdot 2 = 12\ m/sn^2$

bulunur.

Örnek: V_0 cisme uygulanan ilk hızı olmak üzere, bir hareketlinin durma denklemi $S(t) = V_0 \cdot t - \frac{1}{2} a \cdot t^2$ şeklindedir. 108 km hızla giden bir arabada şoför dur levhasını gördükten sonra 0,6 saniye algılamakta ve firene basmaktadır. Otomobilin ivmesi $2\ m/sn^2$ dir. Buna göre otomobil kaç metre sonra durur.

Çözüm: Önce km/sa hızı m/sn hıza çevirelim:

$$V_0 = 108\ km/sa = \frac{108\ 000}{3\ 600} = 30\ m/sn$$

dir. Ayrıca 0,6 sn sonra şoför algıladığından firene basıncaya kadar geçen süre,

$$S_1(t) = 30 \cdot 0{,}6 = 18\ m$$

olur. Diğer taraftan otomobilin durması demek hızının 0 olması demektir. Şu halde

$$V = \frac{dS(t)}{dt} = V_0 - a(t) \cdot t$$
$$0 = 30 - 2 \cdot t$$
$$t = 15 \text{ sn}$$

dir. Bu halde

$$S_2(15) = 30 \cdot 15 - \frac{1}{2} 2 \cdot 15^2 = 225\ m$$

olur. Ayrıca otomobilin algılama süresince gittiği mesafe ve otomobilin durma mesafesi toplanınca

$$S = S_1 + S_2 = 18 + 225 = 243\ m$$

olarak bulunur.

Örnek: Yer çekim ivmesi g ile gösterilmek üzere, $g = 9{,}8\ \text{m/sn}^2$ olmak üzere 490 m yükseklikten bırakılan bir cisim $S(t) = \frac{1}{2} g \cdot t^2$ denklemiyle hareket ettiğine göre

1. Cismin ortalama düşme hızı nedir?
2. Cisim bırakıldıktan 3 saniye sonraki hızı nedir?
3. Cismin yere varma süresi nedir?
4. Vardığında hızı kaçtır?

Çözüm: 1. Cismin ani düşme hızı $V_{ani} = S'(t) = g \cdot t$ dir.

2. t = 3 ise $S'(3) = 9{,}8.3 = 29{,}4$ m/sn

3. Cisim yere çarptığı zaman 490 m yol almış olacağından

$$\frac{1}{2} 9{,}8 t^2 = 490$$
$$t = 10 \text{ sn}$$

elde edilir. 10 saniye sonra cisim yere çarpmış olacaktır.

4. Buna göre cismin çarpma hızı,

$$V_{ani} = S'(t) = g \cdot t = 9{,}8 \cdot 10 = 98\ \text{m/sn}^2$$

olur.

ÇÖZÜMLÜ ALIŞTIRMALAR

L'hospital Yöntemi

1. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 8x + 8}{x^4 - 8x}$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

Cevap: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8x+8}{x^4-8x}=\dfrac{0}{0}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-8}{4x^3-8}=\dfrac{4}{24}=\dfrac{1}{6}$

2. $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{\cos 10-\cos x}{10-x}$ limiti nedir?

Çözüm: $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{\cos 10-\cos x}{10-x}=\dfrac{0}{0}$ olduğundan L'hopital Yöntemini kullanabiliriz.

$$\lim_{x\to 10}\frac{\cos 10-\cos x}{10-x}=\lim_{x\to 10}\frac{\sin x}{1}=\cos 10$$

3. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^5-32}{x^2-4}$ işleminin sonucu nedir?

Çözüm: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^5-32}{x^2-2}=\dfrac{0}{0}$ belirsizliği var. L'hopital yöntemi uygularsak,

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^5-32}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{5x^4}{2x}=\lim_{x\to 2}\frac{5x^3}{2}=20$$

olur.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{\sin x}$ limiti nedir?

Çözüm: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{\sin x}=\dfrac{0}{0}$ olduğundan L'hopital yöntemini kullanalım.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{1+\tan^2 x-1}{\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}=0$$

elde edilir.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{x^2+x\sin 4x}$ ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

Çözüm: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{x^2+\sin 4x}=\dfrac{0}{0}$ belirsizliği var. L'hopital teoremini uygularsak,

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{x^2+x\sin 4x}=\lim_{x\to 0}\frac{4\sin 4x}{2x+(\sin 4x+4x\cos 4x)}=\frac{0}{0}$$

bulunur. Tekrar L'hopital teoremini uygularsak

$$\lim_{x\to 0}\frac{4\sin 4x}{2x+(\sin 4x+4x\cos 4x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{16\cos 4x}{2+4\cos 4x+4\cos 4x-16x\sin 4x}$$

$$=\frac{8}{5}$$

elde edilir.

6. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x-\tan x}{\cos\frac{x}{2}}$ nin değeri nedir?

Çözüm: $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x-\tan x}{\cos\frac{x}{2}}=\dfrac{0}{0}$ olduğundan L'hopital teoremi uygulanırsa pay ve paydanın türevi alınırsa,

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\cos x-1-\tan^2 x}{\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}}=\frac{-2}{\frac{1}{2}}=-4$$

bulunur.

7. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin\pi x}{x^2-1}$ ifadesinin değeri nedir?

Çözüm: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin\pi x}{x^2-1}=\dfrac{\sin\pi}{1^2-1}=\dfrac{0}{0}$ belirsizliği mevcuttur. L'hopital teoremi uygulanırsa,

$$\lim_{x\to 1}\frac{\pi\cos\pi x}{-2x}=\frac{\pi\cos\pi}{-2}=\frac{\pi(-1)}{-2}=\frac{\pi}{2}$$

bulunur.

8. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin\pi x}{\cos\pi x/2}$ değeri kaçtır?

Çözüm:

$$\lim_{x\to1}\frac{\sin\pi x}{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to1}\frac{\pi\cos\pi x}{-\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)}=\frac{-\pi}{-\frac{\pi}{2}}=2$$

9. $\lim\limits_{x\to16}\dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$ değeri nedir?

Çözüm: $\lim\limits_{x\to16}\dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}=\dfrac{0}{0}$

$x=t^4$ alınırsa $x=64$ iken $t^4=16$ olup $t=2$ dir.

$$\lim_{t\to2}\frac{t-2}{t^2-4}=\lim_{t\to2}\frac{1}{2t}=\frac{1}{4}$$

Polinom Uygulamaları

10. $P(x)=x^2+bx+c$ polinomunda $P(0)=P'(1)=1$ ise b ve c'nin değeri nedir?

Çözüm: $P(0)=0^2+b\cdot0+c=1$ ise $c=1$
$P'(x)=2x+b$ ve $P'(1)=2\cdot1+b=1$ ise $b=-1$

11. $P(x)=x^3+ax^2+bx+c$ polinomunun $(x-1)^2$ ile bölündüğüne göre, $a-c$ nin değeri nedir?

Çözüm: Bir polinomun $(x+1)^2$ ile bölünebilmesi için

$$P(1)=P'(1)=0$$

olmalıdır.

$P(x)=x^3+ax^2+bx+c$ ise $P(1)=1^3+a\cdot1^2+b\cdot1+c=a+b+c=-1$
$P'(x)=3x^2+2ax+b$ ise $P'^{(1)}=3\cdot1^2+2a\cdot1+b=2a+b=-3$

$a-c=-2$

12. $P(x) = ax^4 + x^3 - x^2 + x + c$ nin iki katlı bir kökü $x = 1$ olduğuna göre, a'nın değeri nedir?

Çözüm: $(x-2)^2 = 0$ denklemi $x = 2$ yi 1. türevde sağlar.

$$P'(x) = 4ax^3 + 3x^2 - 2x + 1$$
$$P'(2) = 4a1^3 + 3 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 + 1 = 0$$
$$a = -\frac{1}{2}$$

13. Baş katsayısı 1 olan, 3. dereceden bir P(x) polinomun köklerinden ikisi 4 ve 3'dür. P(x) in $x = 1$ noktasında bir yerel ekstremumu (maksimum veya minimuma) sahip ise, üçüncü kökün değeri nedir?

Çözüm:
$$P(x) = a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$$
$$P(x) = (x-4)(x-3)(x-k)$$
$$P(x) = (x^2 - 7x + 12)(x-k)$$
bulunur. P(x) in $x = 1$ noktasında bir yerel ekstremumu sahip olduğundan,
$$P(x) = (2x-7)(x-k) + (x^2 - 7x + 12)$$
$$P(1) = (2 \cdot 1 - 7)(1-k) + (1^2 - 7 \cdot 1 + 12) = 0$$
$$P(1) = (2 \cdot 1 - 7)(1-k) + (1^2 - 7 \cdot 1 + 12) = 0$$
$$k = 0$$
dir.

14. $P(x) = x^4 + 4x^3 - 3x^2 - kx + 8$ polinomunun iki katlı bir kökü $x = 1$ olduğuna göre k'nın değeri nedir?

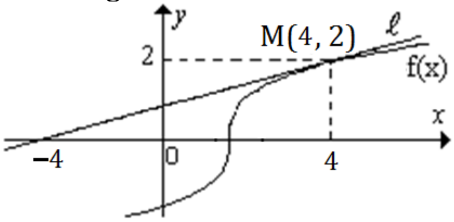
Çözüm: $(x-2)^2 = 0$ denklemi $x = 2$ yi 1. türevde sağlar.
$$P'(x) = 4x^3 + 12x^2 - 6x - k$$
$$P'(1) = 4 \cdot 1^3 + 12 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 - k = 0$$
$$k = 10$$

Teğet ve Normal Denklemleri

15. $y = x^3(2-x)$ hangi noktasının teğeti 0 olur.

Çözüm: $y' = 3x^2(2-x) - x^3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$

16. Aşağıdaki şekildeki verilen ℓ doğrusu, $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğinin $M(4, 2)$ noktasındaki teğetidir.



$g(x) = f(x) + f'(x)$ fonksiyonunun için $g(4)$ ün değeri nedir?

Çözüm: $f(x)$ fonksiyonuna göre $f(4) = 2$ dir. Yine “Bir fonksiyonun türevi verilen noktadaki teğetin eğimine eşittir” teoremine göre,

$$f'(4) = \tan\alpha = \frac{2}{4-(-4)} = \frac{1}{4}$$

olur. Şu halde

$$g(4) = f(4) + f'(4) = 2 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$$

olarak bulunur.

17. $y = x^2 - 3x + 4$ eğrisinin hangi noktadaki teğetinin eğimi $m = 3$ olur?

Çözüm: $y' = 2x - 3 = 3$ ise $x = 3$ noktasında teğetin apsisteki değeridir. Bulunan değeri fonksiyonda yerine yazılırsa,

$$y = 2^2 - 3 \cdot 2 + 4 = 2$$

bulunur.

18. $y = x^2 - 1$ eğrisine teğet ve $y = 6x - 10$ doğrusuna paralel olan doğrunun denklemi nedir?

Çözüm: “Bir fonksiyonun türevinin bir noktadaki değeri o noktadaki teğetin eğimini verir.” Buna göre, teğetin eğimi 6 olduğundan

$$y' = 2x = 6$$
$$x = 3$$
$$A(3, 8)$$

bulunur. Buna göre,

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - 8 = 6(x - 3)$$
$$y = 6x - 10$$

elde edilir.

19. $f(x) = x^2 + ax + 8$ eğrisinin $x = 1$ ve $x = 0$ noktalarındaki teğetleri arasında kalan açının tanjantının $-\frac{2}{3}$ olabilmesi için, a'nın değeri ne olmalıdır?

Çözüm: "Bir fonksiyonun türevi o noktadaki teğetin eğimine eşittir." teoremine göre,

$$f'(x) = 2x + a$$

dir. Şu halde,

$x = 2$ noktasındaki teğetin eğimi; $m_1 = 2 \cdot 1 + a = 2 + a$

$x = 0$ noktasındaki teğetin eğimi; $m_2 = 2 \cdot 0 + a = a$

dir. Bu iki doğru arasındaki açının tanjantı;

$$\tan\alpha = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

$$-\frac{2}{3} = \frac{2 + a - a}{1 + (4 + a)a}$$

$$1 + 4a + a^2 = -3$$

$$a^2 + 4a + 4 = 0$$

$$(a + 2)^2 = 0$$

$$a = -2$$

dir.

20. $x^3y^2 + 5xy^3 + 6x^2 + 10 = 0$ fonksiyonun $A(1, 2)$ noktasındaki teğetinin denkle nedir?

Çözüm:

$$F(x, y) = x^3y^2 + 5xy^3 + 6x^2 - 3y + 10 = 0$$

$$y' = -\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)} = -\frac{3x^2y^2 + 5y^3 + 12x}{2x^3y + 15xy^2}$$

$A(1, 2)$ noktası için

$$m = -\frac{3 \cdot 1^2 2^2 + 5 \cdot 2^3 + 12 \cdot 1}{2 \cdot 1^3 2 + 15 \cdot 1 \cdot 2^2} = -1$$

bulunur. Buna göre $A(1, 2)$ noktasından geçen ve eğimi $m = -1$ olan teğet denklemi,

$$y - 2 = -1(x - 1)$$

$$y + x - 1 = 0$$

dir.

21. $f(x) = x^2 + ax + 5$ fonksiyonunun gösterdiği eğrinin, apsisi $x = -2$ olan noktasındaki teğetinin $y = x + 9$ doğrusuna paralel olması için a'nın alacağı değer, aşağıdaki sayılardan hangisidir?

Çözüm: Verilen fonksiyonun türevi,

$f'(x) = 2x + a$

şeklindedir. $x = 4$ verildiğine göre,

$f'(4) = 2 \cdot (-2) + a = 1$

$a = 5$

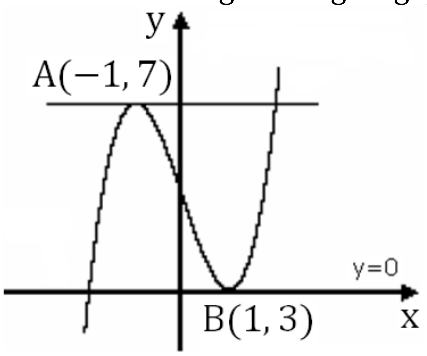
dir. "İki doğru birbirine paralel ise eğimleri eşittir." hükmü gereğince,

$a = 5$

dir.

22. $y = x^3 - 3x + 5$ eğrisi üzerinde hangi noktadaki teğet x eksenine paraleldir?

Çözüm: Verilen $y = x^3 - 3x + 5$ eğrisinin grafiği aşağıdaki gibidir.



Teğetin eğiminin x eksenindeki değeri,

$y' = 3x^2 - 3 = 0$

$x = \pm 1$

dir. Bulunan bu değerleri fonksiyonda yerine yazılırsa,

$A(-1, 7)$ ve $B(1, 3)$

olur.

23. $f(x) = x^2 + 4x + 5, g(x) = ax^2 + bx + 6$ fonksiyonları veriliyor. Bu iki fonksiyonun grafiklerinde aynı apsisli noktalardaki teğetlerin birbirine paralel olması için a ve b'nin değeri ne olmalıdır?

Çözüm: "Bir fonksiyonun türevi verilen noktadaki teğetine eşittir" teoremine göre,

$f'(x) = 2x + 4, g'(x) = 2ax + b,$

bulunur. Bu iki fonksiyonların teğetleri birbirine paralel olduğundan,

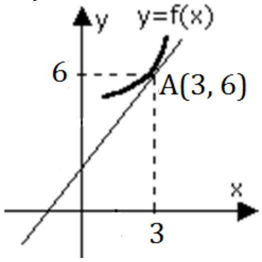
$f'(x) = g'(x)$

$2x + 4 = 2ax + b$

$a = 1, b = 4$

elde edilir.

24. Aşağıdaki şekilde $y = f(x)$ eğrisinin bir parçası ile bu eğrinin $A(3, 6)$ noktasından geçen teğet verilmiştir.



$g(x) = (x^2 - 3)f(x)$ ise $g'(3)$ ün değeri nedir?

Çözüm: $f(3) = 6$ dür. Diğer taraftan "Bir fonksiyonun türevi o noktadaki teğetin eğitimine eşittir." teoremine göre,

$$f'(x) = 1 \text{ ise } m = f'(3) = 1$$

$$g'(x) = 2xf(x) + f'(x)(x^2 - 3)$$
$$g'(3) = 2 \cdot 3 \cdot f(3) + f'(3)(3^2 - 3)$$
$$g'(3) = 2 \cdot 3 \cdot 6 + 1 \cdot (3^2 - 3) = 42$$

olur.

25. $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$ fonksiyonu veriliyor. Bu fonksiyonun eğrisi $A(-1, 2)$ ile $B(1, -2)$ noktalarından geçmekte ve x eksenini a, b, c noktalarda kesmektedir. $a < b < c$ olduğuna göre, $a \cdot b \cdot c$ nin pozitif ve negatifliği hakkında ne söylenebilir?

Çözüm: Verilen fonksiyon $A(-1, 2)$ ile $B(1, -2)$ noktalarından geçtiğinden,

$$f(-1) = (-1)^3 + a(-1)^2 + b(-1) + 1 = 2 \Leftrightarrow a - b = 2$$
$$f(1) = 1^3 + a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + 1 = -2 \Leftrightarrow a + b = -4$$

olacağından $a = -1, b = -3$ bulunur. Şu halde,

$$f(x) = x^3 - x^2 - 3x + 1$$

dir. Rolle teoremine göre,

1. $(-\infty, 0)$ arasında bir kök vardır, bu a'dır
2. $(0, 1)$ arasında bir kök vardır, bu b'dir
3. $(1, \infty)$ arasında bir kök vardır, bu c'dir

Öyleyse $a \cdot b \cdot c < 0$ olur.

26. $y^2 = 6x$ parabolünün hangi noktasındaki teğeti y–eksenini A(0, 3) noktasında keser?

Çözüm: Verilen fonksiyonun y'ye göre türevini alalım.

$$2yy' = 6 \text{ ise } y' = \frac{3}{y}$$

dir. Ayrıca bir noktası ve eğimi bilinen doğru denklemi $m = \frac{y-y_0}{x-x_0}$ olduğuna göre bu doğru için,

$$\frac{y-3}{x-0} = \frac{3}{y}$$
$$y^2 - 2y = 2x$$
$$4x - 2y = 2x$$
$$y = x$$

olarak bulunur. Buna göre (0, 0) veya (4, 4) noktasından teğet çizilir.

27. $a > 0$ olmak üzere, $y = |x|x^3$ fonksiyonun $x = a$ ve $x = -a$ noktalarındaki teğetleri için ne denebilir?

Çözüm: Bir fonksiyonun bir noktadaki teğetin eğimi, türevinin bu noktadaki değeridir.

$x = a$ daki teğetinin eğimi $y = x^4$ ise $y' = 4x^3$ olup eğim $m = 4a^3$ dır.
$x = -a$ daki teğetinin eğimi $y = -x^4$ ise $y' = -4x^3$ olup eğim $m = (-4)(-a)^3 = 4a$ dır.

Eğimleri eşit olan doğrular birbirlerine paralel olacağından, verilen teğetler için "Birbirine paralel" olurlar.

28. $x^2 + y^2 = 16$ çemberinin $x = 2$ noktalarındaki teğetinin eğimi kaçtır?

Çözüm: $x^2 + y^2 = 16$ ise $x = 2$ için $y = 2\sqrt{3}$ dir.

$F(x, y) = x^2 + y^2 - 16 = 0$ türevini alalım.

$$F'(x, y) = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}$$

$$m = -\frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

29. Denklemi $f(x) = \sin 5x$ olan eğrinin $x = \frac{\pi}{5}$ noktasındaki normalinin eğimi kaçtır?

Çözüm: $f'(x) = 5\cos 5x$ ise teğetin eğimi,

$$m_T = 5\cos\left(5 \cdot \frac{\pi}{5}\right) = -5$$

dir. Normalin eğimi ile teğetin eğimleri birbirine dik olduğundan eğimler çarpımı –1 dir.

$$m_T \cdot m_N = -1$$
$$-5 \cdot m_N = -1$$
$$m_N = \frac{1}{5}$$

30. $y = 5x - k$ doğrusu $y = x^3 - x + 4$ fonksiyonunun grafiğine teğet olduğuna göre, k kaçtır?

Çözüm: $y = 5x - k$ doğrusunun teğetinin eğimi $m = 5$ dir. Ayrıca $y = x^3 - 7x + 4$ fonksiyonunun türevi teğetin eğimine eşit olduğuna göre,

$$y' = 3x^2 - 1$$
$$3x^2 - 7 = 5$$
$$3x^2 - 7 = 5$$
$$x = 2$$

dir. $x = 2$ noktasının görüntüsü $y = 2^3 - 7 \cdot 2 + 4 = 4$dür. Elde edilen $(2,\ 4)$ noktası hem doğrunun, hem de eğrinin kesiştiği nokta olduğundan,

$$4 = 5 \cdot 2 - k$$
$$k = 6$$

bulunur.

Artan ve Azalan Aralıklar

31. $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ fonksiyonunun artan-azalanlığını inceleyiniz.

Çözüm: Bir fonksiyonun artan olması için tanımlı olduğu aralıkta $f(x) > 0$ ve azalan olduğu aralıkta $f(x) < 0$ olmalıdır. Buna göre her $x \in \mathbb{R}$ için

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x-1) - 1 \cdot (x+1)}{(x-1)^2} = -\frac{2}{(x-1)^2} < 0$$

olup azalandır.

32. $f(x),\ 0 < x < \infty$ için azalan bir fonksiyon ise $x - f(x)$ hakkında ne söylenebilir?

Çözüm: Fonksiyon tanımlı aralıkta azalan ise $f'(x) < 0$ dır. Buna göre,

$$1 - f'(x) > 0$$

olup artandır.

33. $0 < a < b$ ve $\forall\, x \in [a, b]$ için $f'(x) > 0$ olduğuna göre $\forall\, x \in (a, b)$ için $f(0), f(a), f(x), f(b)$ değerlerinin sıralamaları nasıl olur?

Çözüm: $\forall\, x \in [a, b]$ için $f'(x) > 0$ olduğuna göre $f(x)$ fonksiyonu artandır. O halde $0 < a < b$ için $f(0) < f(a) < f(x) < f(b)$ olmalıdır.

33. $f(x) = \frac{kx+4}{x+k}$ fonksiyonu daima azalan ise k hangi aralıkta bulunur?

Çözüm: Azalan olması için türevinin 0'dan küçük olması gerekir.

$$f'(x) = \frac{k\cdot(x+k) - 1\cdot(kx+2)}{(x-1)^2} = \frac{k^2-4}{(x-1)^2} < 0$$

$$k^2 - 4 < 0$$
$$k^2 < 4$$
$$-2 < k < 2$$

35. $f(x) = 2x^3 - 2x^2 + 9$ fonksiyonun azalan olduğu aralığı bulunuz.

Çözüm: $f'(x) = 6x^2 - 2x = 0$

$$2x(3x - 1) = 0$$
$$x = 0 \text{ ve } x = \frac{1}{3}$$

x		0		1/3	
x(3x-1)	+		−		+

$f(x) = 2x^3 - 2x^2 + 9$ fonksiyonunun azalan aralığı $\left(0, \frac{1}{3}\right)$ dir.

Ekstremim (Maksimum - Minimum)

36. Aşağıda verilen f(x) fonksiyonu ile bunun türevlerinin bilgilerinden hangisi yanlıştır.

A) $f'(x) = 0$ ise f(x) nin maksimumu veya minimumu vardır.
B) $f''(x) = 0$ olduğu bir noktalarda $f'(x)$ nin minimumu veya maksimumu vardır.
C) $f''(x) > 0$ olduğu bölgelerde $f'(x)$ artandır.
D) $f'''(x) < 0$ olduğu bölgelerde $f''(x)$ eksilendir.
E) f(x) in maksimum ve minimum noktalarında $f''(x) = 0$ dır.

Çözüm: E seçeneğinde "f (x) nin maksimum ve minimum noktalarında $f''(x) = 0$ olması gerektiğini" söylemiş, halbuki "f (x) nin minimum, maksimum noktalarında $f'(x) = 0$ olması ile mümkündür".

37. $y = (1 - x)(x + 3)^2$ fonksiyonun maksimum ve mimimum değerlerini bulunuz?

Çözüm: Öncelikle bir fonksiyonun maksimum minimum değerlerini bulalım.

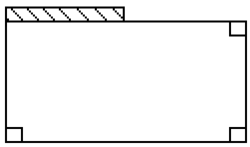
$$y' = (-1)(x + 3)^2 + 2(1 - x)(x + 3) = 0$$
$$(x + 3)(-3x + 1) = 0$$

olacağından $x = -3$ ve $x = \frac{1}{3}$ bulunur. Buna göre şu tablo çizilir.

x	-∞	-3		1/3		+∞
f(x)	−	|	+	|	−	

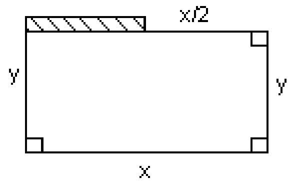
Bu tabloya göre $x = \frac{1}{3}$ de maksimum ve $x = -3$ minimum olur.

38.



Şekildeki gibi dikdörtgen biçiminde ve bir kenarının yarısında duvar bulunan bir bahçenin diğer kenarına bir sıra tel çekilmiştir. Kullanılan telin uzunluğu 240 m olduğuna göre, bahçenin alanı en fazla kaç m^2 olabilir?

Çözüm:



Bahçenin çevresini şekildeki gibi adlandıralım. Bahçeye döşenen telin uzunluğu 240 m olduğundan

$$\frac{3}{2}x + 2y = 240 \text{ ise } y = 120 - \frac{3x}{4}$$

bulunur. Bizden bahçenin alanı istendiğinden

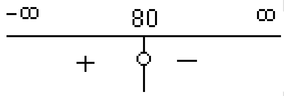
$$A(x) = x \cdot y$$

şeklindedir. Yukarıdaki y nin değerini A(x) de yazarsak,

$$A(x) = x\left(120 - \frac{3}{4}x\right) = 120x - \frac{3}{4}x^2$$

$$A'(x) = 120 - \frac{3}{2}x = 0$$

olur. Burada $x = 80$ dir. Buna göre $y = 60$ olur. Şu halde



bulunur. O halde maksimum alan

$$A(x) = 60 \cdot 80 = 2\,400$$

olarak bulunur.

39. $y = (\cos x + 3)(5 - \cos x)$ ifadesinin en büyük değeri nedir?

Çözüm:

$y' = \sin x\,(5 - \cos x) + (-\sin x)(\cos x + 3)$

$\sin x(5 - \cos x - \cos x - 3) = 0$

$2\sin x = 2\sin x\ \cos x$

$\cos x = 1$

$x = 0^0$

olur. Buna göre,

$$y = (\cos 0 + 3)(5 - \cos 0) = (1 + 3)(5 - 1) = 16$$

elde edilir.

40. $x^2 + (m-2)x - (m+2) = 0$ denkleminde köklerin karelerinin toplamı minimum olması için m ne olmalıdır?

Çözüm: Verilere göre, $x_1 + x_2 = m - 2$ ve $x_1x_2 = m + 3$ dir. Buna göre,

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$$
$$= (m-2)^2 - 2(-(m+2))$$

$$= m^2 - 4m + 4 + 2m + 4$$
$$= m^2 - 2m + 8$$

bulunur. Bulunan bu ifadenin minimum değerini bulmak için elde edilen değerin türevini alalım,

$$2m - 2 = 0$$
$$m = 1$$

elde edilir.

41. $y = x^3 + 2x^2 - mx + 10$ fonksiyonun, $x = 1$ için bir maksimum olduğuna göre m'nin değeri alır?

Çözüm: Maksimum–minimum değerlerin bulunması için türevi alınıp sıfıra eşitlenmelidir. Öyleyse,

$$y' = 3x^2 + 4x - m = 0$$

dir. Verilere göre x = 1 olacağından,

$$2 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 - m = 0$$
$$m = 6$$

olarak bulunur.

42. $y = x^2 - |x^2 - x|$ in $[-1, 4]$ aralığındaki en küçük değeri nedir?

Çözüm: $x^2 - x = 0$

$$x(x - 1) = 0$$
$$x_1 = 0, x_2 = 1$$

x	-∞		-1		1		∞
x(x-1)		+	o	-	o	+	

$[-1, 1]$ aralığında $y = x^2 - |x^2 - x| = 2x^2 - x$

$[1, 4]$ aralığında $y = x^2 - |x^2 - x| = x$

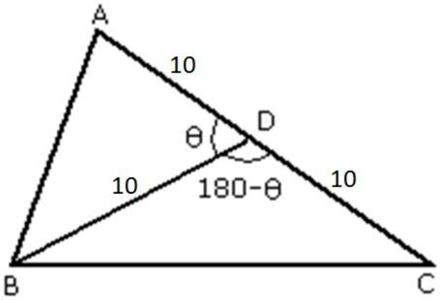
Şimdi türevlerine bakalım.

$[0, 1]$ aralığında $y' = 4x - 1 = 0$ ise $x = \frac{1}{4}$ ve $y = \frac{1}{8}$

$[1, 4]$ aralığında $y' = 1$ ise $y = 1$

$$\min\left(-\frac{1}{8}, 1\right) = -\frac{1}{8}$$

43. $|AD| = |DC| = |BD| = 10$ cm dir.



Bu üçgenin alanının en büyük değeri nedir?

Çözüm: $\sin(180-\theta)=\sin\theta$ olmak üzere,

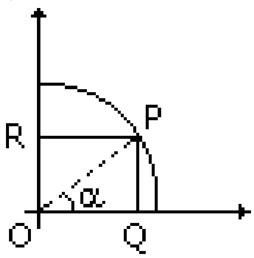
$$\begin{aligned}A(ABC) &= A(ABD)+A(DBC)\\ &=\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 10\cdot\sin\theta+\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 10\cdot\sin(180-\theta)\\ &=50\sin\theta+50\cdot\sin\theta\\ &=100\sin\theta\end{aligned}$$

bulunur. Elde edilen bu alanın en büyük bulmak için türevinin sıfır olması gerekir.

$$A'(ABC)=100\cos\theta=0$$
$$\theta=90^0$$
$$A(ABC)=100\sin 90=100\ \text{cm}^2$$

dir.

44.



$x^2+y^2=64$ çemberinin üzerinde alınan bir P noktasından ($x>0, y>0$ bölgesinde) eksenlere paralel çizilerek elde edilen PQOR dikdörtgeninin alanının maksimum olması için $|OQ|$ uzunluğu ne olmalıdır.

Çözüm: $|OQ|=x$ olsun. $|RO|=\sqrt{64-x^2}$ dir. Bu durumda

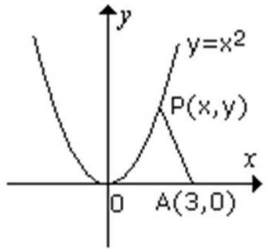
$$A(OQPR)=x\sqrt{64-x^2}$$

yazılabilir. Bu alanın maksimum olması için türevini alıp sıfıra eşitlemeliyiz.

$$A'(OQPR)=\sqrt{64-x^2}+\frac{-2x}{2\sqrt{64-x^2}}x=0$$

$$x = 4\sqrt{2}$$
maksimum değeri olarak bulunur.

45.

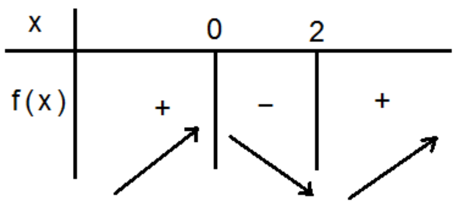


$y = x^2$ fonksiyonu ve x ekseni üzerinde $A(3, 0)$ noktası verilmiştir. A noktasına en yakın noktası P noktası olarak alınırsa $|AP|$ uzaklığı kaç birim olur?

Çözüm: $P(x, x^2)$ olsun. Bu takdirde $|AP|$ doğrusu,
$$|AP| = \sqrt{(x-3)^2 + (x^2-0)^2} = \sqrt{x^4 + x^2 - 6x + 9}$$
şeklindedir. Bu fonksiyonun türevini alıp sıfıra eşitlersek,
$$|AP|' = \frac{4x^3+2x-6}{2\sqrt{x^4+x^2-6x+9}} = 0$$
$$x = 1$$
bulunur. Şu halde P(1,1) olacağından $|AP| = \sqrt{1^4 + 1^2 - 6 \cdot 1 + 9} = \sqrt{5}$ olarak olur.

46. $0 \le x \le 6$ olmak üzere, $x^3 - 3x^2$ değişkeninin değeri en fazla kaç olur?

Çözüm: $y = x^3 - 3x^2$fonksiyonunun türevini alıp maksimum-minimum değerlerini bulalım.
$$y' = 3x^2 - 6x = 0$$
$$3x(x-2) = 0$$



Bu fonksiyon 0 noktasında yerel maksimuma, 2 noktasında yerel minimuma ulaşır. Ama $0 \le x \le$ olacağından en büyük $x = 6$ ile mümkündür.
$$x^3 - 3x^2 = 6^3 - 3 \cdot 6^2 = 108$$

47. $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$|4x - 10| + |2x + 5|$$

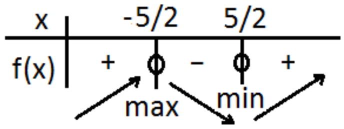
ifadesinin alabileceği en büyük ve en küçük değerini veren değerler nedir?

Çözüm: $f(x) = |4x - 10| + |2x + 5|$ olsun.

$$f'(x) = 4\mathrm{sgn}\,(4x - 10) + 2\,\mathrm{sgn}\,(2x + 5) = 0$$

$$\mathrm{sgn}\,(4x - 10) = 0 \text{ ve } \mathrm{sgn}\,(2x + 5) = 0$$

$$x = \frac{5}{2} \text{ ve } x = -\frac{5}{2}$$



$$f(x) = \left|4 \cdot \frac{5}{2} - 10\right| + \left|2 \cdot \frac{5}{2} + 5\right| = 10 \text{ (minimum)}$$

$$f(x) = \left|4\left(-\frac{5}{2}\right) - 10\right| + \left|2\left(-\frac{5}{2}\right) + 5\right| = 20 \text{ (maksimum)}$$

48. Bir şirket, düzenleyeceği bir gezi için kişi başı ₺ 500 ücret talep etmektedir. Kayıt yaptıranların sayısının 100'den fazla olması halinde, 100'in üzerindeki her bir kişi için tüm katılımcılara ₺0,50 geri ödeme yapılacaktır. Buna göre, geziye kaç kişi katılırsa şirketin katılımcılardan elde edeceği gelir en fazla olur?

Çözüm: Geziye x kişi katılsın ve gelir ₺ y olsun.

$$y = x\left[500 - \frac{x-80}{2}\right] = 450x - \frac{x^2}{2}$$

$$y' = 450 - x = 0$$

$$x = 450$$

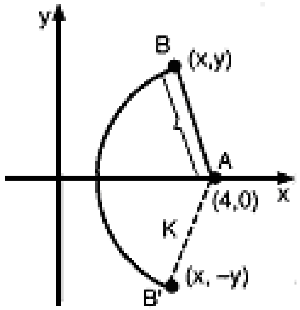
katılımcı olması gerekir.

49. $x^2 - y^2 = 1$ hiperbolu üzerinde bulunan noktalardan A(4,0) noktasına en yakın olan noktasının koordinatlarını bulunuz.

Çözüm: $x^2 - y^2 = 1$

$$y^2 = x^2 - 1 \qquad (1)$$

dir. Ayrıca verilen hiperbol



şekildedir. $A(4,0)$ noktasına en iki nokta B ve B' olsun. İki nokta arasındaki uzaklık

$$|AB| = \sqrt{(x-4)^2 + y^2} \qquad (2)$$

dir. (1) ifadesini (2) de yerine yazarsak,

$$|AB| = \sqrt{(x-4)^2 + x^2 - 1}$$
$$= \sqrt{2x^2 - 8x + 15}$$

bulunur. Uzunluğu minimumu bulmak için türevi incelenmelidir.

$$(|AB|)' = \frac{4x-8}{2\sqrt{2x^2-8x+15}} = 0 \text{ ise } x = 2$$

dir. Şimdi $x = 2$ i hiperbol denkleminde yerine yazarsak

$$y^2 = 2^2 - 1 = 3$$
$$y = \pm\sqrt{3}$$

bulunur. Buna göre

$$B(2, \sqrt{3}) \text{ ve } B'(2, -\sqrt{3})$$

dir.

Bükey (Dönüm) Noktaları

50. Denklemi $y = x^3 + ax^2 + 4x - 1$ olan eğrinin dönüm (büküm) noktasının apsisi 1 ise ordinatı nedir?

Çözüm: Eğrinin dönüm (büküm) noktası 2. türevi sıfır olmalıdır.

$$y' = 3x^2 + 2ax + 4$$
$$y'' = 6x + 2a$$
$$0 = 6 \cdot 1 + 2a$$
$$a = -3$$

Buna göre fonksiyon,

$$y = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$$

olduğundan $x = 1$ için

$$y = 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 - 1 = 1$$

olur.

51. $a \neq 0$ olmak üzere, $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ fonksiyonu daima büküm (dönüm) noktası vardır?

Çözüm: $y' = 3ax^2 + 2bx + c$

$$y'' = 6ax + 2b = 0$$

$$x = -\frac{b}{3a}$$

Buna göre daima reel bir kök olacağından, büküm (dönüm) noktası her zaman vardır.

52. $f(x) = x^3 + kx^2 - 6x + 4$ fonksiyonunu $x = -\frac{1}{3}$ de dönüm (büküm) noktası olduğuna göre, a'nın değeri kaçtır?

Çözüm: $f'(x) = 3x^2 + 2kx - 6$

$$f''(x) = 6x + 2k$$

2. türev dönüm(büküm) noktası olduğundan $f''\left(-\frac{1}{3}\right) = 0$ dır.

$$f''\left(-\frac{1}{3}\right) = 6 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + 2k = 0$$

$$a = 1$$

olur.

KAYNAKÇA

1. Prof. Ahmet KARADENİZ, Yüksek Matematik 2, Çaylayan Kitapevi, Beyoğlu, İstanbul, 1992.
2. Prof. Dr. Mustafa BALCI, Matematik Analiz II, Bilim Kitap Kırtasiye Ltd. Şti., Ankara, 1997.
3. George B. Thomas Jr., Thomas Calcalus, Çev. Recep Korkmaz, Beta Yayınları, 11. Baskı, Ağustos 2009, İstanbul.
4. Murray R. Spiegel, İleri Matematik, Çev. Prof. Dr. H. Hilmi HACISALİHOĞLU, Schaum Yayınları, Nobel Yayın Dağıtım, 1997, Ankara.
5. H. Hilmi HACISALİHOĞLU, Lise Matematik 1, 2, 3, Serhat Yayınları A.Ş. İstanbul, 2001.
6. Ahmet HANÇERLİOĞLU, Faniye ALAN, Matematik Seti, Tümay Yayınları, 2006, ANKARA
7. Dr. Seyfettin AYDIN, Analize Giriş I, 1986, ANKARA.
8. M. Zeki DERMAN, Ökkeş ÖZKÖSELER, Serdar GÜLMEZ, Matematik Lise 1, 2, 3, Zafer Yayınları, 2006, ANKARA.

9. Prof. Dr. Mahmut KOÇAK, Reel Analiz Ders Notları, Eskişehir, 2015.
10. Louis Brand, Yüksek Matematik, Çeviren Mehmet CAN, Çinçiati Üniversitesi, ABD, 2004.