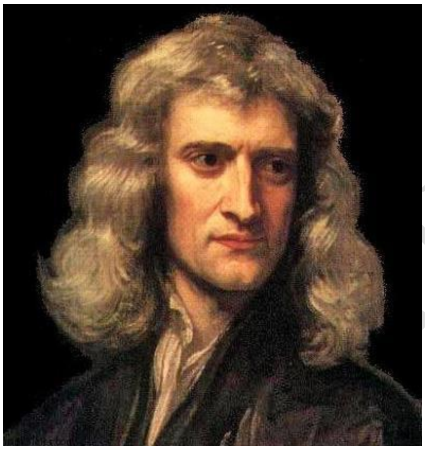
3. BÖLÜM
BELİRSİZ İNTEGRAL



Sir Isaac Newton
(4 Ocak 1643, Grantham, İngiltere – 31 Mart 1727, Londra, İngiltere)

İlk defa integrali Newton 1684 yılında tanımlamıştır. 1686 yılında integrale ait bazı teoremleri geliştirmiştir. 1711 yılında "Diferensiyel ve İntegral Hesap" kitabını yayınlamıştır. Ama Leibniz de İntegrale ait ilk çalışmalarda önemli katkılarda bulunmuştur.

BELİRSİZ İNTEGRAL KAVRAMI

İntegral kavramının temel gayelerinden biri de, türevi veya diferansiyeli belli olan fonksiyonun kendisini (ilkelini) bulmaya çalışmaktır.

3.1. Tanım: $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Türevi $f(x)$ olan bir fonksiyonun kendisi (ilkeli) $F(x)$ ise, türevi $f(x)$ den $F(x)$ i bulma işlemine belirsiz integral denir. $\int f(x)\,dx = F(x) + c$ şeklinde gösterilir. Buradaki c'ye integrasyon sabiti denir.

Örnek: $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$F(x) = x^2 + c \text{ ise } F'(x) = f(x) = 2x$$

olduğundan $\int 2x\,dx = x^2 + c$ dir.

Örnek: $\int x\,f(x)\,dx = x^2 + 3x + c$ olduğuna göre, f(x) aşağıdakilerden hangisidir? (c sabittir)

Çözüm: $\int x\,f(x)\,dx = x^2 + 3x + c$ ifadesinin türevini alırsak,

$$x\,f(x) = 2x + 3$$

$$f(x) = \frac{2x+3}{x} = 2 + \frac{3}{x}$$

olur.

3.1. Teorem: Bir f fonksiyonu,

a) $\dfrac{d}{dx}\int f(x)\,dx = f(x)$

b) $\int d[f(x)]\,dx = f(x)$

şeklindedir.

İspat: a) Genel olarak $\int f'(x)\,dx = f(x)$ yazılabilir. Bu eşitlikte her iki yanın diferansiyeli alındığında,

$$\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx = f(x)$$

bulunur.

b) Yine diferansiyelin tanımından,

$$d[f(x)]dx = f'(x)\,dx$$

yazılabilir. Buna göre,

$$\int d[f(x)]\,dx = f(x)$$

bulunur.

Örnek:

1. $\dfrac{d}{dx}\int (x^2 + 4x - 8)\,dx = x^2 + 4x - 8$

2. $\int d(\cos x - \ln 4x)\,dx = \cos x - \ln 4x + c$

3.2. Teorem: $\int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c, (n \neq -1)$

İspat: $f(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ fonksiyonunun türevini alalım.

$$f'(x) = x^n$$

olarak bulunur. $\int f'(x)\,dx = f(x)$ olduğuna göre,

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

olarak bulunur. //

Bu kısımdaki bundan sonraki teoremlerin ve sonuçların ispatları yine bu yöntemle yapıldığından ispatları yapılmayacaktır.

Örnek: $\int x^5\,dx = \frac{x^6}{6} + c$

Örnek: $\int \sqrt{x}\,dx = \frac{x^{3/2}}{3/2} + c = \frac{2}{3}x^{3/2} + c$

Örnek: $\int 3\,dx = \int 3x^0\,dx = 3x + c$

3.3. Teorem: $\int a\,u(x)\,dx = a\int u(x)dx, \quad (a \in \mathbb{R})$

İspat: $U(x) = a\int u(x)dx$ olsun. Her iki tarafın türevini alınırsa,

$$U'(x) = a\,u(x) \tag{1}$$

bulunur. Ayrıca $V(x) = \int a\,u(x)\,dx$ olsun. Her iki tarafın türevini alınırsa,

$$V'(x) = a\,u(x) \tag{2}$$

olur. (1) ve (2) eşitliğinden

$$U'(x) = V'(x)$$
$$\int a\,u(x)\,dx = a\int u(x)dx$$

bulunur.

Örnek: $\int 4x^3\,dx = 4\int x^3\,dx = 4\frac{x^4}{4} + c = x^4 + c$

3.4. Teorem: $\int (u(x) \pm v(x))\,dx = \int u(x)\,dx \pm \int v(x)\,dx$

Bu teoremin ispatı 3.3. teoremin ispatına benzer yöntemle yapıldığından okuyucuya bırakılmıştır.

Örnek: $\int (3x^2 - 2x)\,dx = 3\int x^2\,dx - 2\int x\,dx$

$$= 3\frac{x^3}{3} - 2\frac{x^2}{2}$$
$$= x^3 - x^2 + c$$

Örnek: $\int \frac{x^5+2}{x^2}\,dx$ integralini bulunuz.

Çözüm: $\int \frac{x^5+2}{x^2}\,dx = \int \frac{x^5}{x^2} + \frac{2}{x^2}\,dx$

$$= \int x^3 + 2x^{-2}\,dx$$
$$= \int x^3\,dx + 2\int x^{-2}\,dx$$
$$= \frac{x^4}{4} + 2\frac{x^{-1}}{-1} + c$$
$$= \frac{x^4}{4} + \frac{2}{x} + c$$

Örnek: $\int \frac{dx}{\left(\frac{2}{5}\right)^x}$ integralini bulunuz.

Çözüm: $\int \frac{dx}{\left(\frac{2}{5}\right)^x} = \int \left(\frac{5}{2}\right)^x dx = \frac{\left(\frac{5}{2}\right)^x}{\ln\frac{5}{2}} + c$

Örnek: $f'(x) = \frac{dy}{dx} = 3x^2 + 2x + 5$ ve $f(1) = 6$ ise $f(2)$ in değeri nedir?

Çözüm: $dy = (3x^2 + 2x + 5)dx$

$$y = \int (3x^2 + 2x + 5)dx = x^3 + x^2 + 5x + c$$
$$f(1) = 1^3 + 1^2 + 5 \cdot 1 + c = 6$$

olduğundan $c = -1$ dir. Buna göre,

$$f(x) = x^3 + x^2 + 5x - 1$$
$$f(2) = 2^3 + 2^2 + 5 \cdot 2 - 1 = 21$$

dir.

Örnek: $\int x \cdot f'(x)\,dx = \frac{x^4}{4} - 4x^3$ ise f(x) fonksiyonu nedir?

Çözüm: $\int x \cdot f'(x)\,dx = \frac{x^4}{4} - 4x^3$ eşitliğinin her iki tarafının x'e göre türevini alırsak,

$$\frac{d}{dx}\int x \cdot f'(x)\,dx = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^4}{4} - 4x^3\right)$$
$$x \cdot f'(x) = x^3 - 12x^2$$
$$f'(x) = x^2 - 12x$$
$$f(x) = \int (x^2 - 12x)dx$$
$$f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{12x^2}{2} + c = \frac{x^3}{3} - 6x^2 + c$$

olarak bulunur.

Örnek: $f''(x) = x^2 - 1$ eğrisi $x + 12y - 13 = 0$ doğrusuna $A(1,1)$ noktasında teğet olduğuna göre f(x) i bulunuz.

Çözüm: Her iki tarafın integralini alırsak,

$$f'(x) = \int (x^2 - 1)dx$$
$$f'(x) = \frac{x^3}{3} - x + c_1$$

bulunur. Eğri $x + 12y - 13 = 0$ doğrusuna teğet olduğundan doğrunun eğimi $m = \frac{1}{3}$ dir. O halde $m = f'(x) = \frac{1^3}{3} - 1 + c_1 = \frac{1}{3}$ olup $c_1 = 1$ dir. Buna göre,

$$f'(x) = \frac{x^3}{3} - x + 1$$

dir. Tekrar iki tarafın integralini alırsak,

$$\int f'(x)\,dx = \int \left(\frac{x^3}{3} - x + 1\right) dx$$
$$f(x) = \frac{x^4}{12} - \frac{x^2}{2} + x + c_2$$

bulunur. Eğer $A(1,1)$ noktasından geçtiğine göre $f(1) = 1$ dir.

$$f(1) = \frac{1^4}{12} - \frac{1^2}{2} + 1 + c_2 = 1 \text{ ise } c_2 = \frac{5}{12}$$
$$f(x) = \frac{x^4}{12} - \frac{x^2}{2} + x + \frac{5}{12}$$

elde edilir.

Örnek: $y = f(x)$ fonksiyonunun herhangi bir $A(x,y)$ noktasındaki teğetinin eğimi $m = 2x$ ve $f(1) = 5$ olduğuna göre f(x) fonksiyonunu bulunuz?

Çözüm: $A(x,y)$ noktasındaki teğetinin eğimi $m = 2x$ ise $f'(x) = 2x$ dir.

$$\int f'(x)\,dx = f(x) + c$$
$$f(x) = \int 2x\,dx = x^2 + c$$
$$f(1) = 1^2 + c = 5$$
$$c = 4$$
$$f(x) = x^2 + 4$$

bulunur.

3.1. Sonuç: Belirsiz integralin türevin tersi olmasından aşağıdaki sonuçlar ortaya çıkar:

1) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$

2) $\int e^x\,dx = e^x + c$

3) $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$

4) $\int \sin x\,dx = -\cos x + c$

5) $\int \cos x\,dx = \sin x + c$

6) $\int (1 + \tan^2 x)\,dx = \tan x + c$

7) $\int (1 + \cot^2 x)\,dx = -\cot x + c$

8) $\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + c$

9) $\int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + c$

10) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c = -\arccos x + c$

11) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + c = -\operatorname{arccot} x + c$

12) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arcsec} x + c = -\operatorname{arccsc} x + c$

Örnek: $\int \cos x\,dx - \int \sin x\,dx = \sin x + \cos x + c$

Örnek: $\int \tan^2 x\,dx = \int (1 + \tan^2 x) - 1\,dx$
$$= \int (1 + \tan^2 x)\,dx - \int dx$$
$$= \tan x - x + c$$

Örnek: $\int 5^x\,dx = \frac{5^x}{\ln 5} + c$

DEĞİŞKEN DEĞİŞTİRME YÖNTEMİ

İntegral alabilmek türev gibi toplama, çıkarma, çarpma, bölme gibi yöntemlerle yapılmamaktadır. Ancak türevi bilinen bir ifadenin integralini almak yukarıdaki denklemlerde olduğu gibi yapabiliriz. Ama diğerlerinde çeşitli integral alma yöntemlerini kullanırız. Bunlardan biri değişken değiştirme yöntemidir.

3.5. Teorem: f, u'nun bir fonksiyonu, u, x'in bir fonksiyonu ve f ve u türevlenebilen iki fonksiyon olmak üzere,

$$\int f(u(x))\, u'(x)\, dx = F(u(x)) + c$$

dir.

İspat: $\int f(u(x))\, u'(x)\, dx$ şeklindeki integralde $t = u(x)$ seçilirse $dt = u'(x)$ olur. Buna göre,

$$\int f(u(x))\, u'(x)\, dx = \int f(t)\, dt = F(t) + c = F(u(x)) + c$$

yazılabilir.

Örnek: $\int (2x+3)^5\, dx$ integralini bulunuz.

Çözüm: $u = 2x + 3$ seçilirse $\frac{du}{dx} = 2$ için $du = 2\, dx$ olur ki,

$$\int (2x+3)^5\, dx = \int u^5\, \frac{du}{2} = \frac{1}{2}\frac{u^6}{6} + c = \frac{1}{12}u^6 + c = \frac{1}{12}(2x+3)^6 + c$$

bulunur.

Örnek: $\int (x^3 - 2x)^5 (3x^2 - 2)\, dx$ integralini bulunuz.

Çözüm: $u = x^3 - 2x$ seçilirse $du = (3x^2 - 2)dx$ olur ki,

$$\int (x^3 - 2x)^5 (3x^2 - 2)\, dx = \int u^5\, du = \frac{1}{6}u^6 + c = \frac{1}{12}(x^3 - 2x)^6 + c$$

dir.

Örnek: $\int e^{5x}\, dx$ integralini bulunuz.

Çözüm: $u = 5x$ seçilirse $du = 5\, dx$ için $\frac{du}{5} = dx$ bulunur. Şu halde

$$\int e^{5x}\, dx = \int e^u\, \frac{du}{5} = \frac{1}{5}\int e^u\, du = \frac{1}{5}e^u + c = \frac{1}{5}e^{5x} + c$$

dir.

Örnek: $\int e^{\sin x} \cos x \; dx$ integralini bulunuz.

Çözüm: $u = \sin x$ seçilirse $\dfrac{du}{dx} = \cos x$ için $du = \cos x \; dx$ bulunur. Şu halde

$$\int e^{\sin x} \cos x \; dx = \int e^k \, dk = e^k + c = e^{\sin x} + c$$

olur.

Örnek: $\int 10^{3x} \, dx$ integralini bulunuz.

Çözüm: $u = 3x$ seçilirse $du = 3 \, dx$ bulunur. Buna göre,

$$\int 10^{3x} \, dx = \int 10^u \, \frac{du}{3} = \frac{10^u}{3 \cdot \ln 10} + c = \frac{10^{3x}}{3 \cdot \ln 10} + c$$

elde edilir.

Örnek: $\int \sin(3x + 4) \; dx$ integralini bulunuz.

Çözüm: $u = 3x + 4$ seçilirse $du = 3 \, dx$ için $\dfrac{du}{3} = dx$ dir.

$$\begin{aligned} \int \sin(3x+4) \; dx &= \int \sin u \; \frac{du}{3} \\ &= \frac{1}{3} \int \sin u \; du \\ &= -\frac{1}{3} \cos u + c \\ &= -\frac{1}{3} \cos(3x+4) + c \end{aligned}$$

Örnek: $\int (x^2 + 2x + 20)^{10} (x+1) \, dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$u = x^2 + 2x + 20$ seçilirse $du = (2x+2)dx$ olup $\dfrac{du}{2} = (x+1) \, dx$ dir. Şu halde

$$\begin{aligned} \int (x^2 + 2x + 20)^{10} (x+1) \, dx &= \int u^{10} \; \frac{du}{2} \\ &= \frac{1}{2} \int u^{10} \; du \\ &= \frac{1}{2} \frac{u^{11}}{11} + c \\ &= \frac{1}{22} u^{11} + c \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{22}(x^2 + 2x + 20)^{11} + c$$

Örnek : $\int (e^x + 1)^3 e^x \, dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm: $u = e^x + 1$ seçilirse $du = e^x \, dx$ dir.

$$\int (e^x + 1)^3 e^x \, dx = \int u^3 \, du$$
$$= \frac{u^4}{4} + c$$
$$= \frac{1}{4}(e^x + 1)^4 + c$$

Örnek: $\int 8x\sqrt{4x^2 + 7} \, dx$ integralini bulunuz.

Çözüm: $u = 4x^2 + 7$ seçilirse $du = 8x \, dx$ dir.

$$\int 8x\sqrt{4x^2 + 7} \, dx = \int \sqrt{u} \, du$$
$$= \int u^{1/2} \, du$$
$$= \frac{u^{3/2}}{3/2} + c$$
$$= \frac{2}{3}(4x^2 + 7)^{3/2} + c$$

Örnek: $\int \frac{dx}{\sqrt{5-x}}$ integralini bulunuz.

Çözüm: $u = 5 - x$ seçilirse $du = -dx$ dir.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5-x}} = \int \frac{-du}{\sqrt{u}}$$
$$= -\int u^{-1/2} du$$
$$= -\frac{u^{1/2}}{1/2} + c$$
$$= -2\sqrt{5 - x} + c$$

Örnek : $\int \frac{dx}{3x-7}$ integralini hesaplayınız.

Çözüm: $u = 3x - 7$ seçilirse $du = 3 \, dx$ yani $\frac{du}{3} = dx$ dir.

$$\int \frac{dx}{3x-7} = \int \frac{\frac{du}{3}}{u}$$
$$= \frac{1}{3}\int \frac{du}{u}$$
$$= \frac{1}{3}\ln|u| + c$$
$$= \frac{1}{3}\ln|3x-7| + c$$

Örnek: $\int \frac{dx}{x^2+2}$ integralini hesaplayınız.

Çözüm: $u = x^2 + 2$ seçilirse $du = 2x\,dx$ için $\frac{du}{2} = x\,dx$ dir.

$$\int \frac{dx}{x^2+2} = \int \frac{\frac{du}{2}}{u}$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{du}{u}$$
$$= \frac{1}{2}\ln|u| + c$$
$$= \frac{1}{2}\ln|x^2+2| + c$$

Örnek: $\int \frac{3x}{x^2+1}dx$ integralini bulunuz.

Çözüm: $u = x^2 + 1$ seçilirse $du = 2x\,dx$ için $\frac{du}{2} = x\,dx$ dir.

$$\int \frac{3x}{x^2+1}dx = \int \frac{\frac{3}{2}du}{u}$$
$$= \frac{3}{2}\int \frac{du}{u}$$
$$= \frac{3}{2}\ln|u| + c$$
$$= \frac{3}{2}\ln|x^2+1| + c$$

Örnek: $\int \sin^3 x \cos x \; dx$ integralini bulunuz.

Çözüm: $u = \sin x$ seçilirse $du = \cos x \; dx$ dir.

$$\int \sin^3 x \cos x \, dx = \int u^2 du$$
$$= \frac{u^4}{4} + c$$
$$= \frac{1}{4}\sin^4 x + c$$

Örnek: $\int \frac{\sin x}{4+\cos x} dx$ integralini bulunuz.

Çözüm: $u = 4 + \cos x$ seçilirse $du = -\sin x \; dx$ dir.

$$\int \frac{\sin x}{4+\cos x} dx = \int \frac{-du}{u}$$
$$= -\ln|u| + c$$
$$= -\ln|4 + \cos x| + c$$

Örnek: $\int \frac{\sin 2x}{3+\sin^2 x} dx$ integralini bulunuz.

Çözüm: $u = 3 + \sin^2 x$ seçilirse $du = 2\sin x \cos x \; dx = \sin 2x \; dx$ dir.

$$\int \frac{\sin 2x}{3+\sin^2 x} dx = \int \frac{du}{u}$$
$$= \ln|u| + c$$
$$= \ln|3 + \sin^2 x| + c$$

Örnek: $\int \frac{e^{1/x^2}}{x^3} dx$ integralini bulunuz.

Çözüm: $u = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$ seçilirse $du = -\frac{2}{x^3} dx$ ise $-\frac{du}{2} = \frac{1}{x^3} dx$

$$\int \frac{e^{1/x^2}}{x^3} dx = \int e^u \left(\frac{du}{2}\right) = -\frac{1}{2}\int e^u dt = -\frac{1}{2}e^u + c = -\frac{1}{2}e^{1/x^2} + c$$

Örnek: $\int \cot x \; dx$ integralini bulunuz.

Çözüm: $\int \cot x \; dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx$ olduğunu biliyoruz. $u = \sin x$ seçilirse $du = \cos x \; dx$ bulunur. Buna göre,

$$\int \cot x \; dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| = \ln|\sin x| + c$$

olur.

3.2. Sonuç:

1) $\int \frac{u'(x)dx}{u(x)} = \ln|u(x)| + c$

2) $\int e^{u(x)}\, dx = \frac{e^{u(x)}}{u'(x)} + c$

3) $\int a^{u(x)}\, dx = \frac{a^{u(x)}}{u'(x)\, \ln a} + c$

4) $\int \sin u(x)\, dx = -\frac{1}{u'(x)} \cos u(x) + c$

5) $\int \cos u(x)\, dx = \frac{1}{u'(x)} \sin x + c$

6) $\int (1 + \tan^2 u(x))\, dx = \frac{1}{u'(x)} \tan u(x) + c$

7) $\int (1 + \cot^2 u(x))\, dx = -\frac{1}{u'(x)} \cot u(x) + c$

8) $\int \sec u(x) \tan u(x)\, dx = \frac{1}{u'(x)} \sec u(x) + c$

9) $\int \csc u(x) \cot u(x)\, dx = -\frac{1}{u'(x)} \csc u(x) + c$

10) $\int \frac{du(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}} = \arcsin u(x) + c = -\arccos u(x) + c$

11) $\int \frac{dx}{1+u^2(x)} = \arctan u(x) + c = -\operatorname{arccot} u(x) + c$

12) $\int \frac{dx}{u(x)\sqrt{u^2(x)-1}} = \operatorname{arcsec} u(x) + c = -\operatorname{arccsc} u(x) + c$

Örnek: $\int \frac{dx}{\sqrt{20+8x-x^2}}$ integralini bulunuz.

Çözüm: $20 + 8x + x^2 = 36 - (x^2 - 8x + 16) = 36 - (x-4)^2$

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{20+8x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{36-(x-4)^2}}$$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{36\left[1-\frac{(x-4)^2}{36}\right]}}$$

$$= \frac{1}{6}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x-4}{6}\right)^2}}$$

bulunur. Burada $u = \frac{x-4}{6}$ seçilirse $du = \frac{dx}{6}$ ise $6du = dx$ dir. 3.2. Sonuç 10. özellik gereği,

$$I = \frac{1}{6}\int \frac{6\,du}{\sqrt{1-u^2}} = \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u + c = \arcsin\left(\frac{x-4}{6}\right) + c$$

elde edilir.

Örnek: $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^6}}$ integralini bulunuz.

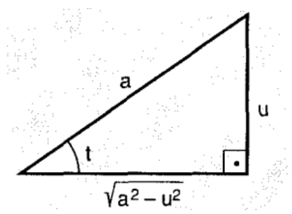
Çözüm: $u = x^3$ seçilirse $du = 3x^2\,dx$ ise $x^2\,dx = \frac{du}{3}$ dir. 3.2. Sonuç 10. özellik gereği,

$$I = \int \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^6}} = \int \frac{x^2dx}{\sqrt{1-(x^3)^2}}$$
$$= \int \frac{\frac{du}{3}}{\sqrt{1-u^2}}$$
$$= \frac{1}{3}\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$$
$$= \frac{1}{3}\arcsin u + c$$
$$= \frac{1}{3}\arcsin x^3 + c$$

elde edilir.

ÖZEL DEĞİŞKEN DEĞİŞTİRME YÖNTEMLERİ

1. $\sqrt{a^2-x^2}$ den başka köklü ifade içermeyen fonksiyonların integralini hesaplamak için $x = a\sin t$ değişken değiştirme yapılır. (Burada $t = \arcsin\frac{x}{a}$ dır.)



Örnek: $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$ integralini bulalım.

Çözüm: Burada $x = 2\sin t$ değişken değiştirmesini uygularsak,
$dx = 2\cos t\ dt$ ve $t = \arcsin\frac{x}{2}$
olur. Buna göre,

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} &= \int \frac{2\cos t\, dx}{\sqrt{4-4\sin^2 t}} \\
&= \int \frac{2\cos t\, dx}{2\sqrt{1-\sin^2 t}} \\
&= \int \frac{\cos t\, dx}{\sqrt{\cos^2 t}} \\
&= \int dt \\
&= t + c \\
&= \arcsin\frac{x}{2} + c
\end{aligned}$$

elde edilir.

Örnek: $\int \frac{x+1}{\sqrt{9-x^2}}dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm: Burada $x = 3\sin t$ değişken değiştirmesini uygularsak,
$dx = 3\sin t\ dt$ ve $t = \arcsin\frac{x}{3}$
olur. Buna göre

$$\begin{aligned}
\int \frac{x+1}{\sqrt{9-x^2}}dx &= \int \frac{3\sin t+1}{\sqrt{9-9\sin^2 t}} 3\cos t\ dt \\
&= \int \frac{3\sin t+1}{3\sqrt{1-\sin^2 t}} 3\cos t\ dt \\
&= \int \frac{3\sin t+1}{3\sqrt{\cos^2 t}} 3\cos t\ dt \\
&= \int (3\sin t + 1)\, dt \\
&= 3\ \cos t + t + c \\
&= 3\ \cos\left(\arcsin\frac{x}{3}\right) + \arcsin\frac{x}{3} + c
\end{aligned}$$

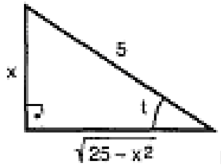
bulunur.

Örnek: $\int \sqrt{25-x^2}\,dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm: Burada $x = 5\sin t$ değişken değiştirmesini uygularsak, $dx = 5\cos t\ dt$ olur. Buna göre,

$$\begin{aligned}
I = \int \sqrt{25-x^2}\,dx &= \int \sqrt{25-25\sin^2 t}\ 5\cos t\ dt \\
&= \int \sqrt{25(1-\sin^2 t)}\ 5\cos t\ dt \\
&= 25\int \sqrt{\cos^2 t}\ \cos t\ dt \\
&= 25\int \cos^2 t\ dt, \qquad \left(\cos^2 t = \frac{1+\cos 2x}{2}\right) \\
&= 25\int \frac{1+\cos 2x}{2}\ dt \\
&= \frac{25}{2}\left[t+\frac{1}{2}\sin 2t\right]+c
\end{aligned}$$

dir. Burada $x = 5\sin t$ ise $\sin t = \frac{x}{5}$ olduğundan



üçgeni çizilir. Ayrıca

$$x = 5\sin t \text{ ise } t = \arcsin\frac{x}{5}$$

$$\sin 2t = 2\sin t\cos t = 2\cdot\frac{x}{5}\cdot\frac{\sqrt{25-x^2}}{5} = \frac{2x\sqrt{25-x^2}}{25}$$

denklemleri yazılır. Buna göre

$$\begin{aligned}
I = \int \sqrt{25-x^2}\,dx &= \frac{25}{2}\left(\arcsin\frac{x}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2x\sqrt{25-x^2}}{25}\right)+c \\
&= \frac{25}{2}\left(\arcsin\frac{x}{5}+\frac{1}{2}x\sqrt{25-x^2}\right)+c
\end{aligned}$$

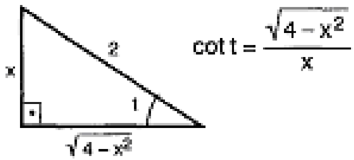
Örnek: $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$ integralini hesaplayınız.

Çözüm: Burada $x = 2\sin t$ değişken değiştirmesini uygularsak, $x = dx = 2\cos t\ dt$ olur. Buna göre,

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}} &= \int \frac{2\cos t\,dt}{4\sin^2 t\sqrt{4-4\sin^2 t}} \\
&= \int \frac{2\cos t\,dt}{4\sin^2 t\sqrt{4(1-\sin^2 t)}}
\end{aligned}$$

$$= \int \frac{2\cos t\, dt}{4\sin^2 t\sqrt{4\cos^2 t}}$$
$$= \int \frac{2\cos t\, dt}{4\sin^2 t\, 2\cos t}$$
$$= \frac{1}{4}\int \frac{dt}{\sin^2 t}$$
$$= \frac{1}{4}\int \csc^2 t\, dt$$
$$= -\frac{1}{4}\cot t + c$$

dir. Burada

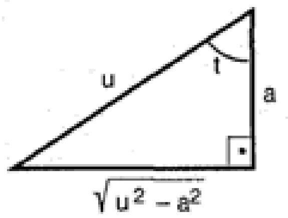


yazılabileceğinden

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}} = -\frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{4-x^2}}{x} + c = -\frac{\sqrt{4-x^2}}{4x} + c$$

bulunur.

2. $\sqrt{x^2 - a^2}$ den başka köklü ifade içermeyen fonksiyonların integralini hesaplamak için $x = a\sec t = \frac{a}{\cos t}$ değişken değiştirme yapılır. (Burada $t = \arccos\frac{a}{x}$ dir.)



Örnek: $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}}$ integralini hesaplayınız.

Çözüm: $x = 2\sec t$ dönüşümü yapalım. Burada $\sec t = \frac{1}{\cos t}$ olduğunu unutmayalım. Buna göre,

$$dx = 2\sec t \cdot \tan t\, dt = \arccos\frac{2}{x}$$

olur. Buna göre,

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}} = \int \frac{2\sec t \tan t\, dt}{2\sec t\sqrt{4\sec^2 t-4}}$$
$$= \int \frac{\tan t\, dt}{2\sqrt{\sec^2 t-1}}$$
$$= \int \frac{dt}{2}$$
$$= \frac{1}{2}t + c$$
$$= \frac{1}{2}\arccos\frac{2}{x} + c$$

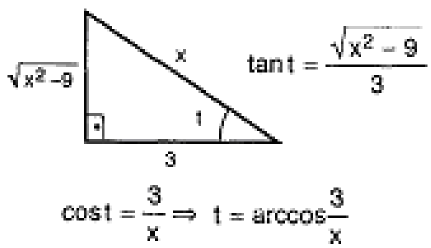
bulunur.

Örnek: $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}\, dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm: Burada $x = \frac{3}{\cos t}$ değişken değiştirmesini uygularsak, $dx = \frac{3\sin t}{\cos^2 t}dt$ olur. Buna göre,

$$\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}dx = \int \frac{\sqrt{\frac{9}{\cos^2 t}-9}}{\frac{3}{\cos t}}\frac{3\sin t}{\cos^2 t}dt$$
$$= 3\int \sqrt{\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}}\frac{\sin t}{\cos t}dt$$
$$= 3\int \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}dt$$
$$= 3\int \tan^2 t\, dt$$
$$= 3\int (-1+1+\tan^2 t)dt$$
$$= 3(-t+\tan t) + c$$

dir. Burada

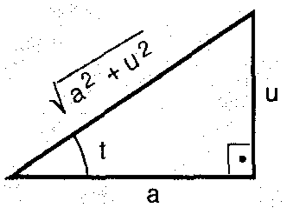


yazılabileceğinden

$$\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}dx = 3\left(\frac{\sqrt{x^2-9}}{x} - \arccos\frac{3}{x} + c\right)$$

bulunur.

3. $\sqrt{a^2+x^2}$ den başka köklü ifade içermeyen fonksiyonların integralini hesaplamak için $x = a\tan t$ değişken değiştirme yapılır. Burada $t = \arctan\frac{x}{x}$ dır.)



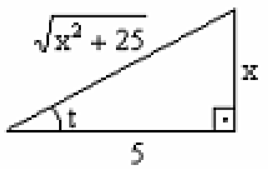
Örnek: $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+25}}$ integralini bulunuz.

Çözüm: $x = 5\tan t$ seçilirse $dx = 5\,(1+\tan^2 t)\,dt$ olur. Buna göre,

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+25}} &= \int \frac{5(1+\tan^2 t)dt}{25\tan^2 t\sqrt{25\tan^2 t+25}} \\
&= \int \frac{5(1+\tan^2 t)dt}{25\tan^2 t\sqrt{25(\tan^2 t+1)}} \\
&= \frac{1}{25}\int \frac{\sec^2 t\,dt}{\tan^2 t\sqrt{\sec^2 t}} \\
&= \frac{1}{25}\int \frac{\sec t\,dt}{\tan^2 t} \\
&= \frac{1}{25}\int \frac{\frac{1}{\cos t}dt}{\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}} \\
&= \frac{1}{25}\int \frac{\frac{1}{\cos t}dt}{\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}} \\
&= \frac{1}{25}\int \frac{\cos t\,dt}{\sin^2 t} \quad , \quad (\sin t = u \text{ seçilirse } \cos t\,dt = du) \\
&= \frac{1}{25}\int \frac{1}{u^2}du \\
&= \frac{1}{25}\int u^{-2}\,du \\
&= \frac{1}{25}\frac{u^{-1}}{(-1)} + c \\
&= -\frac{1}{25}\frac{1}{u} + c
\end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{25\sin t} + c$$

dir. Burada $x = 5\tan t$ olduğundan



$$\sin t = \frac{x}{\sqrt{x^2+25}}$$

yazılabilir. Şu halde,

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+25}} = -\frac{1}{25}\frac{\sqrt{x^2+25}}{x} + c$$

bulunur.

Örnek: $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}(1+x^2)}$ integralini bulunuz.

Çözüm: $x = \tan t$ seçilirse $dx = (1 + \tan^2 t)\, dt$ dir. Buna göre,

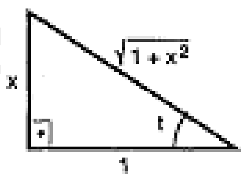
$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}\,(1+x^2)} = \int \frac{(1+\tan^2 t)\, dt}{\sqrt{1+\tan^2 t}\,(1+\tan^2 t)}$$

$$= \int \frac{dt}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}}}$$

$$= \int \cos t\, dt$$

$$= \sin t + c$$

dir. Burada $x = \tan t$ olduğundan



$$\sin t = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

yazılabilir. Şu halde,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}(1+x^2)} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + c$$

olur.

Örnek: $\int \frac{dx}{\sqrt{4+9x^2}}$ integralini bulunuz.

Çözüm: $x=\frac{2}{3}\tan t$ olsun $dx=\frac{2}{3}(1+\tan^2 t)\,dt$ dir. Buna göre,

$$\int\frac{dx}{\sqrt{4+9x^2}}=\int\frac{\frac{2}{3}(1+\tan^2 t)\,dt}{\sqrt{4+9\frac{4}{9}\tan^2 t}}$$

$$=\frac{2}{3}\int\frac{(1+\tan^2 t)\,dt}{2\sqrt{1+\tan^2 t}}\quad,\qquad\left(1+\tan^2 t=\frac{1}{\cos^2 t}\right)$$

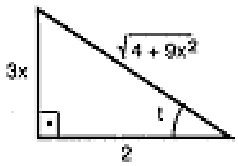
$$=\frac{1}{3}\int\frac{\frac{1}{\cos^2 t}\,dt}{\frac{1}{\cos t}}$$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{1}{\cos t}\,dt$$

$$=\frac{1}{3}\int\sec t\,dt$$

$$=\frac{1}{3}\ln|\sec t+\tan t|+c$$

dir. Burada $x=\frac{2}{3}\tan t$ olduğundan



$$\tan t=\frac{3x}{2}\qquad \sec t=\frac{\sqrt{4+9x^2}}{2}$$

yazılabilir. Şu halde,

$$\int\frac{dx}{\sqrt{4+9x^2}}=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{4+9x^2}+3x}{2x}\right|+c$$

olur.

3.6. Teorem: x^2+bx+c olan ikinci dereceden denkleminde $u^2(x)+k^2$ dönüşümü yaparsak, $\Delta<0$ için

$$\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}=\int\frac{du}{u^2(x)+k^2}=\frac{1}{k}\arctan\left(\frac{u(x)}{k}\right)+c$$

dir. (Burada $u(x)=x+\frac{b}{2a}$, $k=\sqrt{\frac{4c-b^2}{4a}}$ dır.)

Bu teorem 3.2. Sonuç 11. özellik kullanılarak yapılır.

Örnek: $\int\frac{dx}{x^2+16}$ integralini bulunuz.

Çözüm: $\Delta = b^2 - 4ac = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16 = -64 < 0$ olduğundan 3.2. Sonuç 10. özellik gereği

$$\int \frac{dx}{x^2+16} = \int \frac{dx}{4^2+x^2} = \frac{1}{4}\arctan\left(\frac{x}{4}\right) + c$$

elde edilir.

Örnek: $\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$ integralini bulunuz.

Çözüm: $\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -20 < 0$ olduğundan 3.2. Sonuç 10. özellik gereği

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+5} = \int \frac{dx}{x^2+2x+1-1+5} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+2^2} = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right) + c$$

elde edilir.

Örnek: $\int \frac{dx}{x^2+6x+10}$ integralini bulunuz.

Çözüm: $\Delta = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10 = -4 < 0$ olduğundan 3.2. Sonuç 10. özellik gereği

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^2+6x+10} &= \int \frac{dx}{x^2+6x+9-9+10} \\ &= \int \frac{dx}{(x+3)^2+1^2} \\ &= \frac{1}{1}\arctan\left(\frac{x+3}{1}\right) + c \\ &= \arctan(x+3) + c\end{aligned}$$

elde edilir.

Örnek: $\int \frac{dx}{x^2+8x+20}$ integralini bulunuz.

Çözüm: $\Delta = 8^2 - 4 \cdot 1 \cdot 20 = -16 < 0$ olduğundan 3.2. Sonuç 10. özellik gereği

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^2+8x+20} &= \int \frac{dx}{x^2+8x+16-16+20} \\ &= \int \frac{dx}{(x+4)^2+2^2} \\ &= \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x+4}{2}\right) + c\end{aligned}$$

elde edilir.

3.7. Teorem: $\sqrt{ax^2+bx+c}$ olan ikinci dereceden denkleminde,

i) $a<0$ için $ax^2+bx+c=k^2-u^2(x)$ dönüşümü yaparsak,

$$\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\int\frac{du}{\sqrt{k^2-u^2(x)}}=\arcsin\left(\frac{u(x)}{k}\right)+c$$

ii) $\Delta<0, a>0$ için $ax^2+bx+c=u^2(x)+k^2$ dönüşümü yaparsak,

$$\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\int\frac{du}{\sqrt{u^2(x)+k^2}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left(u(x)+\sqrt{u^2(x)+k^2}\right)+c$$

iii) $\Delta>0, a>0$ için $ax^2+bx+c=u^2(x)-k^2$ dönüşümü yaparsak,

$$\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\int\frac{du}{\sqrt{u^2(x)-k^2}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left(u(x)+\sqrt{u^2(x)-k^2}\right)+c$$

iv) $\Delta=0$ ve $a>0$ ise $ax^2+bx+c=0$ bir tam kare olup, kök dışında çıkar. (Burada $u(x)=x+\frac{b}{2a}$, $k=\sqrt{\frac{4c-b^2}{4a}}$ dır.)

İspat: i) 3.2. Sonuç 10. özellik kullanılarak (i) nin ispatı yapılır. Okuyucuya bırakılmıştır.

ii) Burada $\ln\left(u(x)+\sqrt{u^2(x)+k^2}\right)+c$ nin türevinin $\int\frac{du}{\sqrt{u^2(x)+k^2}}$ olduğunu göstererek ispatı tamamlayacağız. $u(x)=x+\frac{b}{2a}$ olduğundan $u'(x)=1$ dir.

$$\left[\ln\left(u(x)+\sqrt{u^2(x)+k^2}\right)+c\right]'=\frac{u'(x)+\frac{2u(x)}{2\sqrt{u^2(x)+k^2}}}{u(x)+\sqrt{u^2(x)+k^2}}$$

$$=\frac{1+\frac{u(x)}{\sqrt{u^2(x)+k^2}}}{u(x)+\sqrt{u^2(x)+k^2}}$$

$$= \frac{\frac{u(x)+\sqrt{u^2(x)+k^2}}{\sqrt{u^2(x)+k^2}}}{u(x)+\sqrt{u^2(x)+k^2}}$$

$$= \frac{u(x)+\sqrt{u^2(x)+k^2}}{\sqrt{u^2(x)+k^2}} \frac{1}{u(x)+\sqrt{u^2(x)+k^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{u^2(x)+k^2}}$$

olur.

iii) ii özelliğine benzer yolla çözülür.

iv) Okuyucuya bırakılmıştır.

Örnek: $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+2x+3}}$ integralini hesaplayınız.

Çözüm:
$-x^2 + 2x + 3 = 3 - (x^2 - 2x) = 4 - (x^2 - 2x + 1) = 2^2 - (x-1)^2$
Olduğundan

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+2x+3}} = \int \frac{dx}{\sqrt{2^2-(x-1)^2}} = \arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right) + c$$

Örnek: $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-3x+1}}$ integralini hesaplayınız.

Çözüm: $2x^2 - 3x + 1 = 2\left(x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}\right)$

$$= 2\left(x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{16} - \frac{9}{16} + \frac{1}{2}\right)$$

$$= 2\left\{\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{16}\right\}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-3x+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{du}{\sqrt{(x-\frac{3}{4})^2 - \frac{1}{16}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left(\left(x - \frac{3}{4}\right) + \sqrt{\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{16}}\right) + c$$

3.8. Teorem: $m, n \in \mathbb{R}$, $ax^2 + bx + c$ ikinci dereceden denklemi olmak üzere,

$$\int \frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx = \frac{m}{a}\sqrt{ax^2+bx+c} + \left(n - \frac{mb}{2a}\right)\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

dir.

İspat:

$$\int \frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx = \frac{m}{2a}\int \frac{2ax+2a\frac{n}{m}}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$$

$$= \frac{m}{2a}\int \frac{2ax+2a\frac{n}{m}+b-b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$$

$$= \frac{m}{2a}\int \frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx + \frac{m}{2a}\int \frac{2a\frac{n}{m}-b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$$

$$= \frac{m}{2a}\int \frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx + \left(n - \frac{mb}{2a}\right)\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

$$= \frac{m}{a}\sqrt{ax^2+bx+c} + \left(n - \frac{mb}{2a}\right)\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \quad \text{(3.7. teo.)}$$

Örnek: $\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm: 3.8. teoremden

$$\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx = \frac{2}{1}\sqrt{x^2+2x+2} + \left(6 - \frac{2\cdot 2}{2\cdot 1}\right)\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$$

$$= 2\sqrt{x^2+2x+2} + 4\ln\left((x+1)\sqrt{x^2+2x+2}\right) + c$$

KISMİ İNTEGRASYON YÖNTEMİ

3.9. Teorem: u ve v, x değişkenli birer fonksiyon olsunlar. Bu takdirde,

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

dir.

İspat: u ve v, x değişkeninin birer fonksiyonu olsunlar. 3.1. b ve 3.4. teorem ile çarpımın diferansiyelinden

$$d(u \cdot v) = du \cdot v + u \cdot dv$$
$$u\,dv = d(uv) - v\,du$$
$$\int u\,dv = \int d(uv) - \int v\,du$$
$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

bulunur.

Örnek: $\int 2x\,e^x\,dx$ integralini kısmi integrasyon yöntemiyle yapınız.

Çözüm: $u = 2x$ ve $dv = e^x\,dx$ seçilirse $du = 2\,dx$ ve $v = e^x$ olur. Buna göre,

$$\int 2x\,e^x\,dx = 2xe^x - \int 2e^x\,dx = 2xe^x - 2e^x + c$$

elde edilir.

Örnek: $\int x\,(x+2)^2\,dx$ integralini bulunuz.

Çözüm: $u = x$ ve $dv = (x+2)^2\,dx$ seçilirse $du = dx$ ve

$$v = \int (x+2)^2 dx = \frac{1}{3}\,(x+2)^3$$

olur. Buna göre,

$$\int x\,(x+2)^2\,dx = x\frac{1}{3}\,(x+2)^3 - \int \frac{1}{3}\,(x+2)^3 dx$$
$$= \frac{x}{3}\,(x+2)^3 - \frac{1}{12}\,(x+2)^4 + c$$

elde edilir.

Örnek: $\int x\cos x\,dx$ integralini kısmi integrasyon yöntemiyle yapınız.

Çözüm: $u = x$ ve $dv = \cos x\,dx$ seçilirse $du = dx$ ve $v = \sin x$ olur.

$$\int x\cos x\,dx = x\,\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x + c$$

Örnek: $\int \ln x\,dx$ integralini kısmi integrasyon yöntemiyle yapınız.

Çözüm: $u = \ln x$ ve $dv = dx$ seçilirse $du = \frac{1}{x}dx$ ve $v = x$ olur.

$$\int \ln x \; dx \; = x \; \ln x - \int x \frac{1}{x} dx = x \ln x - x + c$$

Örnek: $\int \arcsin x \; dx$ integralini bulunuz.

Çözüm: $u = \arcsin x$ ve $dv = dx$ seçilirse $du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ ve $v = x$ olur.

$$\begin{aligned} \int \arcsin x \; dx \; &= \arcsin x \cdot x - \int x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= x \cdot \arcsin x + \int -\frac{2xdx}{2\sqrt{1-x^2}} \\ &= x \cdot \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + c \end{aligned}$$

Örnek: $\int \arctan x \; dx$ integralini kısmi integrasyon yöntemiyle yapınız.

Çözüm: $u = \arctan x$ ve $dv = dx$ seçilirse $du = \frac{dx}{1+x^2}$ ve $v = x$ olur. Buna göre,

$$\int \arctan x \; dx \; = x \cdot \arctan x \cdot x - \int \frac{x \, dx}{1+x^2} \qquad (1)$$

bulunur. Burada karşımıza $\int \frac{x \, dx}{1+x^2}$ integrali çıkar. Bunu basit değişken değiştirme metodu ile çözeceğiz. $t = 1 + x^2$ seçilirse $dt = 2x \, dx$ olur. Buna göre, $\frac{dt}{2} = x \, dx$ dir. Şu halde,

$$\int \frac{x \, dx}{1+x^2} = \int \frac{\frac{dt}{2}}{t} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \ln t = \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) \qquad (2)$$

dir. Bulduğumuz bu (2) ifadesini (1) de yerine yazarsak,

$$\int \arctan x \; dx \; = x \cdot \arctan x \cdot x - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + c$$

elde edilir.

Örnek: $\int x^2 \sin x \; dx$ integralini kısmi integrasyon yöntemiyle yapınız.

Çözüm: $u = x^2$ ve $dv = \sin x \, dx$ seçilirse $du = 2x \, dx$ ve $v = -\cos x$ olur. Buna göre,

$$\begin{aligned}\int x^2 \sin x \; dx &= x^2(-\cos x) - \int -2x \cos x \; dx \\ &= -x^2 \cos x + 2\int x \cos x \; dx\end{aligned}$$

dir. Burada karşımıza $\int x \cos x \; dx$ integrali çıkar. Şimdi bunun integrali için yine kısmi integrasyon uygulamalıyız. Burada $u_1 = x$ ve $dv_1 = \cos x \, dx$ seçilirse $du_1 = dx$ ve $v_1 = \sin x$ olur. Öyleyse,

$$\begin{aligned}\int x^2 \sin x \; dx &= -x^2 \cos x + 2[x \; \sin x + \int \sin x \; dx] \\ &= -x^2 \cos x + 2x \; \sin x + 2 \cos x + c\end{aligned}$$

olarak bulunur.

Örnek: $\int e^x \sin x \; dx$ integralini kısmi integrasyon yöntemiyle yapınız.

Çözüm: $u = e^x$ ve $dv = \sin x \, dx$ seçilirse $du = e^x \, dx$ ve $v = -\cos x$ olur. Buna göre,

$$\begin{aligned}\int e^x \sin x \; dx &= e^x(-\cos x) - \int -\cos x \; e^x \, dx \\ &= -e^x \cos x + \int e^x \cos x \; dx \qquad (1)\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\int e^x \cos x \; dx$ integrali karşımıza çıkar. Şimdi bu integrali çözmek için tekrar kısmi integrasyon uygulayalım.

$u_1 = e^x$ ve $dv_1 = \cos x \, dx$ seçilirse $du_1 = e^x \, dx$ ve $v_1 = \sin x$ bulunur. Şu halde

$$\int e^x \cos x \; dx = e^x \sin x - \int \sin x \; e^x \, dx \qquad (2)$$

elde edilir. (2) ifadesini (1) denkleminde yerine yazarsak,

$$\begin{aligned}\int e^x \sin x \; dx &= -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \; \sin x \; dx \\ 2\int e^x \sin x \; dx &= e^x(\sin x - \cos x) \\ \int e^x \sin x \; dx &= \frac{1}{2} e^x(\sin x - \cos x) + c\end{aligned}$$

bulunur.

Örnek: $\int x^3 \ln 2x \; dx$ integralini bulunuz.

Çözüm: $u = \ln 2x$ ve $dv = x^3 dx$ seçilirse $du = \frac{2}{2x} dx = \frac{dx}{x}$ ve $v = \frac{x^4}{4}$ olur.

$$\begin{aligned}\int x^3 \ln 2x \; dx &= \ln 2x \cdot \frac{x^4}{4} - \int \frac{x^4}{4} \cdot \frac{dx}{x} \\ &= \frac{x^4}{4} \ln 2x - \frac{1}{4}\int x^3 dx \\ &= \frac{x^4}{4} \ln 2x - \frac{1}{16} x^4 + c\end{aligned}$$

3.1. Not: P(x) bir polinom olmak üzere,

1. $\int P(x)\, e^x\, dx = e^x(P(x) - P'(x) + P''(x) - P'''(x) + \cdots) + c$ sabit sayıya ulaşıncaya kadar türev alma işlemi sürdürülür.

2. $\int P(x)\, e^{ax+b}\, dx = e^{ax+b}\left(\frac{P(a)}{a} - \frac{P'(a)}{a^2} + \frac{P''(a)}{a^3} - \frac{P'''(a)}{a^4} + \cdots\right) + c$

3. $\int x^n \ln x\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + c \quad , \quad (n \in \mathbb{N}^+)$

Örnek: $\int (x^2 + 3x)\, e^x\, dx$ integralini bulunuz.

Çözüm:

$$\int (x^2 + 3x)\, e^x\, dx = e^x[(x^2 + 3x) - (x^2 + 3x)' + (x^2 + 3x)''] + c$$
$$= e^x[(x^2 + 3x) - (2x + 3) + (2)] + c$$
$$= e^x[x^2 + x - 1] + c$$

Örnek: $\int x^3\, e^{2x}\, dx$ integralini bulunuz.

Çözüm: $\int x^3\, e^{2x}\, dx = e^{2x}\left[\frac{x^3}{2} - \frac{3x^2}{2^2} + \frac{6x}{2^3} - \frac{6}{2^4}\right] + c$

$$= e^{2x}\left[\frac{x^3}{2} - \frac{3x^2}{4} + \frac{3x}{4} - \frac{3}{8}\right] + c$$

Örnek: $\int x \ln x\, dx$ integralini bulunuz.

Çözüm: 3. özellikte $n = 1$ alınmalıdır.

$$\int x \ln x\, dx = \frac{x^{1+1}}{1+1}\ln x - \frac{x^{1+1}}{(1+1)^2} + c = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + c$$

Örnek: $\int x^4 \ln x\, dx$ integralini bulunuz.

Çözüm: 3. özellikte $n = 4$ alınmalıdır.

$$\int x^4 \ln x\, dx = \frac{x^{4+1}}{4+1}\ln x - \frac{x^{4+1}}{(4+1)^2} + c = \frac{x^5}{5}\ln x - \frac{x^5}{25} + c$$

Örnek: $\int \sin(\ln x)\ dx$ integralini bulunuz.

Çözüm: $u = \sin(\ln x)$ ve $dv = dx$ seçilirse $du = \frac{1}{x}\cos(\ln x)\,dx$ ve $v = x$ bulunur. Buna göre,

$$\int \sin(\ln x)\ dx = \sin(\ln x)\cdot x - \int x\cdot\frac{1}{x}\cos(\ln x)\,dx$$
$$= x\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)\,dx \qquad (1)$$

elde edilir. Burada $\int \cos(\ln x)\,dx$ integrali karşımıza çıkar. Şimdi bu integrali çözmek için tekrar kısmi integrasyon uygulayalım.

$u = \cos(\ln x)$ ve $dv = dx$ seçilirse $du = -\frac{1}{x}\sin(\ln x)\,dx$ ve $v = x$ bulunur. Buna göre,

$$\int \cos(\ln x)\ dx = \cos(\ln x)\cdot x - \int x\left(-\frac{1}{x}\sin(\ln x)\right)dx$$
$$= x\cos(\ln x) + \int \sin(\ln x)\,dx \qquad (2)$$

elde edilir. (2) ifadesini (1) denkleminde yerine yazarsak,

$$\int \sin(\ln x)\ dx = x\sin(\ln x) - [x\cos(\ln x) + \int \sin(\ln x)\,dx]$$

$$\int \sin(\ln x)\ dx = x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x) - \int \sin(\ln x)\,dx$$

$$2\int \sin(\ln x)\ dx = x[\sin(\ln x) - x\cos(\ln x)]$$

$$\int \sin(\ln x)\ dx = \frac{x}{2}[\sin(\ln x) - x\cos(\ln x)] + c$$

3.2. Not: Hangi durumlarda kısmi integrasyon yöntemi uygulanacağı konusunda kesin bir kural yoktur. Ancak aşağıdaki kural birçok durumda integralin kolaylıkla hesaplanmasını sağlar.

L A P T Ü

1. L: Logaritmik fonksiyonlar (logx, lnx, ln(x+5), ... v.b.)
2. A: Ters trigonometrik fonksiyonlar (arcsinx, arccosx, arctanx, ... v.b.)
3. P: Polinom fonksiyonlar (x, x^2, 3x+1, x^3+4, ... v.b.)
4. T: Trigonometrik fonksiyonlar (sinx, tanx, secx, ... v.b.)
5. Ü: Üstel fonksiyonlar (e^x, a^x, 2^{x+1}, ... v.b.)

Mesela:
1. $\int x\sin x\ dx$ integralinde $u = x$, $dv = \sin x\ dx$
2. $\int x\ln x\ dx$ integralinde $u = \ln x$, $dv = x\,dx$

3. $\int e^x \sin x \, dx$ integralinde $u = \sin x$, $dv = e^x dx$
4. $\int e^x \ln x \, dx$ integralinde $u = \ln x$, $dv = e^x dx$
5. $\int x^2 \arcsin x \, dx$ integralinde $u = \arcsin x$, $dv = x^2 dx$
6. $\int x\,(x+3)^5 \, dx$ integralinde $u = x$, $dv = (x+3)^5 dx$
biçiminde olur.

İNDİRGEME FORMÜLLERİ

İndirgeme formüllerine geçmeden önce, trigonometriye ait bir hatırlatma yapacağız. Arkasından dört örnek vereceğiz. Ondan sonra indirgeme teoremlerine geçeceğiz.

Hatırlatma: $\cos^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ ve $\cos^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$

Örnek: $\int \sin^2 x \, dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right) + c$

Örnek: $\int \cos^2 x \, dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\sin 2x\right) + c$

Örnek: $\int \sin^3 x \, dx$ integralini bulunuz.

Çözüm:
$$\begin{aligned}\int \sin^3 x \, dx &= \int \sin^2 x \sin x \, dx \\ &= \int (1-\cos^2 x) \sin x \, dx \\ &= \int \sin x \, dx - \int \cos^2 x \sin x \, dx \\ &= \cos x - \int \cos^2 x \sin x \, dx \qquad (1)\end{aligned}$$
bulunur. Burada $\int \cos^2 x \sin x \, dx$ integralini $u = \cos x$ değişken değiştirmesi uygularsak $dx = -\sin x \, dx$ olacağından
$$\int \cos^2 x \sin x \, dx = -\int u^2 \, du = -\frac{u^3}{3} = -\frac{1}{3}\cos^3 x$$
bulunur. Bulduğumuz bu eşitliği (1) de yerine yazarsak
$$\int \sin^3 x \, dx = \cos x - \left[-\frac{1}{3}\cos^3 x\right] + c = \cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + c$$
olur.

Örnek: $\int \sin^4 x \, dx$ integralini bulunuz.

Çözüm: $\int \sin^4 x\,dx = \int (\sin^2 x)^2\,dx$

$$= \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx$$
$$= \frac{1}{4}\int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x)\,dx$$
$$= \frac{1}{4}\left[\int dx + 2\int \cos 2x\,dx + \int (\cos^2 2x)\,dx\right]$$
$$= \frac{1}{4}\left[x + \sin 2x + \frac{1}{2}\int (1 + \cos 4x)\,dx\right]$$
$$= \frac{1}{4}\left[x + \sin 2x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}\sin 4x\right] + c$$
$$= \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + c \; //$$

Kısmı integrasyon metodu yardımıyla, yüksek dereceden bazı ifadelerin integrali daha küçük dereceden bir ifadenin integraline dönüştürülebilir. Bu yolla yüksek dereceli ifadelerin integrali kolayca hesaplanabilir. Şimdi bu indirgeme formüllerinden bazılarını verelim.

3.10. Teorem: Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\int \sin^n x\,dx = -\frac{1}{n}\sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x\,dx$$

dir.

İspat: $\int \sin^n x\,dx = \int \sin^{n-1} x \sin x\,dx$

yazılabilir. Burada $u = \sin^{n-1} x$ ve $dv = \sin x\,dx$ alınırsa

$du = (n-1)\sin^{n-2} x \cos x\,dx$ ve $v = -\cos x$

olacağından kısmi integrasyon gereği,

$$\int \sin^n x\,dx = \sin^{n-1} x\,(-\cos x) - \int -\cos x\,(n-1)\sin^{n-2} x \cos x\,dx$$
$$= -\sin^{n-1} x\,\cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x\,(1 - \sin^2 x)\,dx$$
$$= -\sin^{n-1} x\,\cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x\,dx - (n-1)\int \sin^n x\,dx$$

$$\int \sin^n x\,dx + (n-1)\int \sin^n x\,dx = -\sin^{n-1} x\,\cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x\,dx$$
$$n\int \sin^n x\,dx = -\sin^{n-1} x\,\cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x\,dx$$
$$\int \sin^n x\,dx = -\frac{1}{n}\sin^{n-1} x\,\cos x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x\,dx$$

bulunur.

Örnek: $\int \sin^5 x\,dx$ integralini bulunuz.

Çözüm: $\int \sin^5 x\,dx = -\frac{1}{5}\sin^4 x\,\cos x + \frac{4}{5}\int \sin^3 x\,dx$

$$\int \sin^3 x\,dx = -\frac{1}{3}\sin^2 x\,\cos x + \frac{2}{3}\int \sin x\,dx$$

$$\int \sin^5 x\,dx = -\frac{1}{5}\sin^4 x\ \cos x + \frac{4}{5}\left(-\frac{1}{3}\sin^2 x\ \cos x + \frac{2}{3}\int \sin x\ dx\right)$$
$$= -\frac{1}{5}\sin^4 x\ \cos x - \frac{4}{15}\sin^2 x\ \cos x - \frac{8}{15}\cos x + c$$

3.11. Teorem: Her $n \in \mathbb{N}$ için,
$$\int \cos^n x\,dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\,dx$$
dir.

Bu teoremin ispatı 3.10. teoreme benzer yöntemle yapılır.

Örnek: $\int \cos^4 x\,dx$ integralini bulunuz.

Çözüm: $\int \cos^4 x\,dx = -\frac{1}{4}\cos^3 x\ \sin x + \frac{3}{4}\int \cos^2 x\ dx$
$$\int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

$$\int \cos^4 x\,dx = \frac{1}{4}\cos^3 x\ \sin x + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}(1 + \cos 2x)\right) + c$$
$$= \frac{1}{4}\cos^3 x\ \sin x + \frac{3}{8}(1 + \cos 2x) + c$$

3.12. Teorem: Her $n \in \mathbb{N}$ için,
$$\int \frac{dx}{\sin^n x} = -\frac{1}{n-1}\frac{\cos x}{\sin^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\sin^{n-2} x}$$
dir.

İspat: $\int \frac{dx}{\sin^n x} = \int \frac{dx}{\sin^{n-2} x\ \sin^2 x}$
yazılabilir. Burada,
$$u = \frac{1}{\sin^{n-2} x} \text{ ve } dv = \frac{dx}{\sin^2 x}$$
$$du = -(n-2)\frac{\cos x\,dx}{\sin^{n-1} x} \text{ ve } v = -\cot x$$
olacağından kısmi integrasyon gereği,
$$\int \frac{dx}{\sin^n x} = \frac{1}{\sin^{n-2} x}(-\cot x) - \int(-\cot x)\left(-(n-2)\frac{\cos x\,dx}{\sin^{n-1} x}\right)$$
$$= -\frac{\cos x}{\sin^{n-1} x} - (n-2)\int \frac{\cos^2 x\,dx}{\sin^n x}$$

$$= -\frac{\cos x}{\sin^{n-1} x} - (n-2)\int \frac{1-\sin^2 x\, dx}{\sin^n x}$$
$$= -\frac{\cos x}{\sin^{n-1} x} - (n-2)\int \frac{dx}{\sin^n x} + (n-2)\int \frac{dx}{\sin^{n-2} x}$$

$$(n-1)\int \frac{dx}{\sin^n x} = -\frac{\cos x}{\sin^{n-1} x} + (n-2)\int \frac{dx}{\sin^{n-2} x}$$
$$\int \frac{dx}{\sin^n x} = -\frac{1}{n-1}\frac{\cos x}{\sin^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\sin^{n-2} x}$$

Örnek: $\int \frac{dx}{\sin^6 x}$ integralini bulunuz.

Çözüm: $$\int \frac{dx}{\sin^6 x} = -\frac{1}{5}\frac{\cos x}{\sin^5 x} + \frac{4}{5}\int \frac{dx}{\sin^4 x} \quad (1)$$
$$\int \frac{dx}{\sin^4 x} = -\frac{1}{3}\frac{\cos x}{\sin^3 x} + \frac{2}{3}\int \frac{dx}{\sin^2 x} \quad (2)$$
$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x \quad (3)$$
olur. (3) eşitliğini (2) de (2) eşitliğini (1) de yazarsak,
$$\int \frac{dx}{\sin^6 x} = -\frac{1}{5}\frac{\cos x}{\sin^5 x} + \frac{4}{5}\left(-\frac{1}{3}\frac{\cos x}{\sin^3 x} + \frac{2}{3}(-\cot x)\right) + c$$
$$= -\frac{\cos x}{5\sin^5 x} - \frac{4\cos x}{15\sin^3 x} - \frac{8}{15}\cot x + c$$
bulunur.

3.13. Teorem: Her $n \in \mathbb{N}$ için,
$$\int \frac{dx}{\cos^n x} = \frac{1}{n-1}\frac{\sin x}{\cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\cos^{n-2} x}$$
dir.

Bu teoremin ispatı 3.12. teoreme benzer yöntemle yapılır.

Örnek: $\int \frac{dx}{\cos^3 x}$ integralini bulunuz.

Çözüm: $$\int \frac{dx}{\cos^3 x} = \frac{1}{2}\frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\cos x} \quad (1)$$
bulunur. Şimdi burada $\int \frac{dx}{\cos x}$ integralini bulalım.

$$\frac{1}{\cos x}=\frac{\frac{1}{\cos x}\left(\frac{1+\sin x}{\cos x}\right)}{\frac{1+\sin x}{\cos x}}=\frac{\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{\sin x}{\cos^2 x}}{\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{1}{\cos x}}=\frac{\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{\tan x}{\cos x}}{\tan x+\frac{1}{\cos x}}$$

yazılabileceğinden

$$\int \frac{1}{\cos x}dx=\int \frac{\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{\tan x}{\cos x}}{\tan x+\frac{1}{\cos x}}dx$$

olur. $u=\tan x+\frac{1}{\cos x}$ seçilirse $du=\left(\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{\tan x}{\cos x}\right)dx$ olacağından

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\cos x}dx &= \int \frac{du}{u}\\ &= \ln|u|+c\\ &= \ln\left|\tan x+\frac{1}{\cos x}\right|\\ &= \ln\left|\frac{1+\sin x}{\cos x}\right| \qquad (2)\end{aligned}$$

olur. (2) denklemi (1) de yerine yazılırsa,

$$\int \frac{dx}{\cos^3 x}=\frac{1}{2}\frac{\sin x}{\cos^2 x}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{\cos x}\right|+c$$

elde edilir.

3.14. Teorem: Her $n\in\mathbb{N}$ için,

$$\int \sin^n x\,\cos^m x\,dx=-\frac{1}{m+n}\sin^{n-1}x\cos^{m+1}x+\frac{n-1}{m+n}\int \sin^{n-2}x\,\cos^m x\,dx$$

dir.

İspat: $\int \sin^n x\,\cos^m x\,dx=\int \sin^{n-1}x\,\cos^m x\,\sin x\,dx$

yazılabilir. Burada,

$$u=\sin^{n-1}x \text{ ve } dv=\cos^m x\,\sin x\,dx$$

$$du=(n-1)\sin^{n-2}x\cos x\,dx \text{ ve } v=-\frac{1}{m+1}\cos^{m+1}x$$

olacağından kısmi integrasyon gereği,

$$\begin{aligned}&\int \sin^n x\,\cos^m x\,dx=\\ &=-\frac{1}{m+1}\sin^{n-1}x\cos^{m+1}x+\int \frac{n-1}{m+1}\cos^{m+1}x\,\sin^{n-2}x\cos x\,dx\\ &=-\frac{1}{m+1}\sin^{n-1}x\cos^{m+1}x+\frac{n-1}{m+1}\int \sin^{n-2}x\cos^{m+2}x\,dx\\ &=-\frac{1}{m+1}\sin^{n-1}x\cos^{m+1}x+\frac{n-1}{m+1}\int \sin^{n-2}x\cos^m x\cos^2 x\,dx\\ &=-\frac{1}{m+1}\sin^{n-1}x\cos^{m+1}x+\frac{n-1}{m+1}\int \sin^{n-2}x\cos^m x\,(1-\cos^2 x)\,dx\end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{m+1}\sin^{n-1}x\cos^{m+1}x+\frac{n-1}{m+1}\left[\int \sin^{n-2}x\cos^{m}x\ dx+\int \sin^{n-2}x\cos^{m+2}x\,dx\right]$$

$$\left(1+\frac{n-1}{m+1}\right)\int \sin^{n}x\ \cos^{m}x\,dx = -\frac{1}{m+1}\sin^{n-1}x\cos^{m+1}x+\frac{n-1}{m+1}\int \sin^{n-2}x\cos^{m}x\ dx$$

$$\int \sin^{n}x\ \cos^{m}x\,dx = -\frac{1}{m+1}\frac{m+1}{m+n}\sin^{n-1}x\cos^{m+1}x+\frac{n-1}{m+1}\frac{m+1}{m+n}\int \sin^{n-2}x\cos^{m}x\ dx$$

$$\int \sin^{n}x\ \cos^{m}x\,dx = -\frac{1}{m+n}\sin^{n-1}x\cos^{m+1}x+\frac{n-1}{m+n}\int \sin^{n-2}x\cos^{m}x\ dx$$

elde edilir.

Örnek: $\int \sin^3 x\ \cos^2 x\,dx$ integralini bulunuz.

Çözüm:

$$\int \sin^3 x\ \cos^2 x\,dx = -\frac{1}{5}\sin^2 x\cos^3 x+\frac{2}{5}\int \sin x\ \cos^2 x\,dx \qquad (1)$$

olur. Burada $\int \cos^2 x \sin x\ dx$ integralini değişken değiştirme ile çözelim.

$u=\cos x$ seçilirse $du=-\sin x\ dx$

$$\int \cos^2 x\sin x\ dx = -\int u^2 du = -\frac{u^3}{3} = -\frac{1}{3}\cos^3 x \qquad (2)$$

bulunur. (2) eşitliğini (1) de yerine yazarsak,

$$\int \sin^3 x\ \cos^2 x\,dx = -\frac{1}{5}\sin^2 x\cos^3 x+\frac{2}{5}\left(-\frac{1}{3}\cos^3 x\right)$$
$$= -\frac{1}{5}\sin^2 x\cos^3 x-\frac{2}{15}\cos^3 x+c$$

3.15. Teorem: Her $n\in\mathbb{N}$ ve $n>1$ için,

$$\int \tan^n x\ dx = \frac{1}{n-1}\tan^{n-1}x-\int \tan^{n-2}x\ dx$$

dir.

İspat: $\int \tan^n x\ dx = \int \tan^{n-2}x\ \tan^2 x\ dx$

$$= \int \tan^{n-2}x\ (1+\tan^2 x-1)\ dx$$
$$= \int \tan^{n-2}x\ (1+\tan^2 x)\ dx-\int \tan^{n-2}x\ dx \quad (1)$$

olur. Burada $u=\tan x$ seçilirse $du=(1+\tan^2 x)dx$ olacağından,

$$\int \tan^{n-2}x\ (1+\tan^2 x-1)\ dx = \int u^{n-2}\ du$$

$$= \frac{u^{n-1}}{n-1} + c$$
$$= \frac{1}{n-1} \tan^{n-1} x + c \qquad (2)$$

bulunur. (2) eşitliğini (1) de yerine yazarsak,

$$\int \tan^n x \, dx = \frac{1}{n-1} \tan^{n-1} x - \int \tan^{n-2} x \, dx$$

elde edilir.

Örnek: $\int \tan^5 x \, dx$ integralini bulunuz.

Çözüm: $\int \tan^5 x \, dx = \frac{1}{4} \tan^4 x - \int \tan^3 x \, dx \qquad (1)$

$$\int \tan^3 x \, dx = \frac{1}{2} \tan^2 x - \int \tan x \, dx \qquad (2)$$

olur. Burada $\int \tan x \, dx$ i bulalım.

$$\int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x \, dx}{\cos x}$$

integralinde de değişken değiştirme uygulamak için $u = \cos x$ seçilirse $du = -\sin x \, dx$ olacağından,

$$\int \tan x \, dx = -\int \frac{du}{u} = -\ln|u| + c = -\ln|\sin x| \qquad (3)$$

bulunur. (3) eşitliğini (2) de, (2) eşitliğini (1) de yazarsak,

$$\int \tan^5 x \, dx = \frac{1}{4} \tan^4 x - \left[\frac{1}{2} \tan^2 x + \ln|\sin x|\right] + c$$
$$= \frac{1}{4} \tan^4 x - \frac{1}{2} \tan^2 x - \ln|\sin x| + c$$

elde edilir.

3.16. Teorem: Her $n \in \mathbb{N}$ ve $n > 1$ için,

$$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^n} = \frac{x}{(2n-2)a^2(a^2+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{(2n-2)a^2} \int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{n-1}}$$

dir.

İspat: Burada $\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{n-1}}$ integralininde,

$$u = \frac{1}{(a^2+x^2)^{n-1}}, \; dv = dx$$

$$du = \frac{2(-n+1)x}{(a^2+x^2)^n} dx, \; v = x$$

alınarak kısmi integrasyon alınırsa,

$$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{n-1}} = \frac{x}{(a^2+x^2)^{n-1}} - \int \frac{2(-n+1)x^2}{(a^2+x^2)^n} dx$$

$$= \frac{x}{\left(a^2+x^2\right)^{n-1}} + (2n-2)\int \frac{a^2+x^2-a^2}{\left(a^2+x^2\right)^n}dx$$

$$= \frac{x}{\left(a^2+x^2\right)^{n-1}} + (2n-2)\int \frac{a^2+x^2}{\left(a^2+x^2\right)^n}dx + (2n-2)\int \frac{-a^2}{\left(a^2+x^2\right)^n}dx$$

$$= \frac{x}{\left(a^2+x^2\right)^{n-1}} + (2n-2)\int \frac{1}{\left(a^2+x^2\right)^{n-1}}dx - (2n-2)a^2\int \frac{1}{\left(a^2+x^2\right)^n}dx$$

bulunur. Burada şu düzenleme yapılırsa

$$(2n-2)a^2\int \frac{1}{\left(a^2+x^2\right)^n}dx = \frac{x}{\left(a^2+x^2\right)^{n-1}} + (2n-3)\int \frac{1}{\left(a^2+x^2\right)^{n-1}}dx$$

$$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^n} = \frac{x}{(2n-2)a^2(a^2+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{(2n-2)a^2}\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{n-1}}$$

elde edilir.

Örnek: $\int \frac{dx}{(4+x^2)^3}$ integralini bulunuz.

Çözüm:

$$\int \frac{dx}{(2^2+x^2)^3} = \frac{x}{(2\cdot 3-2)2^2(2^2+x^2)^2} + \frac{2\cdot 3-3}{(2\cdot 3-2)2^2}\int \frac{dx}{(2^2+x^2)^2}$$

$$= \frac{x}{16\left(4+x^2\right)^2} + \frac{3}{16}\int \frac{dx}{\left(4+x^2\right)^2} \qquad (1)$$

$$\int \frac{dx}{(2^2+x^2)^2} = \frac{x}{(2\cdot 3-2)2^2(2^2+x^2)} + \frac{2\cdot 2-3}{(2\cdot 2-2)2^2}\int \frac{dx}{(2^2+x^2)}$$

$$= \frac{x}{8(4+x^2)} + \frac{1}{8}\int \frac{dx}{(4+x^2)} \qquad (2)$$

$$\int \frac{dx}{(4+x^2)} = \frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2} \qquad (3)$$

bulunur. (3) eşitliğini (2) de, (2) eşitliğini (1) de yazarsak,

$$\int \frac{dx}{(2^2+x^2)^3} = \frac{x}{16(4+x^2)^2} + \frac{3}{16}\left[\frac{x}{8(4+x^2)} + \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2}\right] + c$$

$$= \frac{x}{16\left(4+x^2\right)^2} + \frac{3x}{128(4+x^2)} + \frac{3}{256}\arctan\frac{x}{2} + c$$

elde edilir.

3.17. Teorem: $b^2 - ac < 0$, her $n \in \mathbb{N}$ ve $n > 1$ için,

$$\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}$$

$$= \frac{2ax+b}{(n-1)(4ac-b^2)(ax^2+bx+c)^{n-1}} + \frac{2a(2n-3)}{(n-1)(4ac-b^2)}\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{n-1}}$$

dir.

İspat: $b^2 - ac < 0$, her $n \in \mathbb{N}$ ve $n > 1$ için,

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right)\right]$$

olacağından

$$u = x + \frac{b}{2a}, \quad b^2 = \frac{4ac-b^2}{4a^2}$$

dersek

$$\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{(u^2+k^2)^n}$$

elde edilir. 3.16. teoreminden,

$$\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n} = \frac{1}{a^n}\left[\frac{u}{(2n-2)k^2(u^2+k^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{(2n-2)k^2}\int \frac{dx}{(u^2+k^2)^{n-1}}\right]$$

bulunur. u'nun ve k'nın değerleri yerine konur ve gerekli işlemler yapılırsa,

$$\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}$$

$$= \frac{2ax+b}{(n-1)(4ac-b^2)(ax^2+bx+c)^{n-1}} + \frac{2a(2n-3)}{(n-1)(4ac-b^2)}\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{n-1}}$$

elde edilir.

Örnek: $\int \frac{dx}{(x^2-2x+2)^2}$ integralini bulunuz.

Çözüm:

$$\int \frac{dx}{(x^2-2x+2)^2}$$

$$= \frac{2\cdot 1\cdot x-2}{(2-1)(4\cdot 1\cdot 2-2^2)(x^2-2x+2)^{2-1}} + \frac{2\cdot 1(2\cdot 2-3)}{(2-1)(4\cdot 1\cdot 2-2^2)}\int \frac{dx}{(x^2-2x+2)^{2-1}}$$

$$= \frac{x-1}{2(x^2-2x+2)} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x-1)^2+1}$$

$$= \frac{x-1}{2(x^2-2x+2)} + \frac{1}{2}\arctan(x-1) + c$$

3.18. Teorem: $b^2 - ac < 0$, her $n \in \mathbb{N}$ ve $n > 1$ için,

$$\int \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}dx$$

$$=\frac{A}{2a(n-1)\left(ax^2+bx+c\right)^{n-1}}+\frac{(2AB-Ab)(2ax+b)}{2a(n-1)\left(4ac-b^2\right)\left(ax^2+bx+c\right)^{n-1}}+$$

$$+\frac{(2n-3)(2aB-Ab)}{(n-1)(4ac-b^2)}\int\frac{dx}{\left(ax^2+bx+c\right)^{n-1}}$$

dir.

İspat:

$$\int\frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}\,dx$$

$$=\frac{A}{2a}\int\frac{2ax+b}{\left(ax^2+bx+c\right)^n}dx+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int\frac{dx}{\left(ax^2+bx+c\right)^n}+$$

$$+\frac{A}{2a(n-1)(ax^2+bx+c)^{n-1}}+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int\frac{dx}{\left(ax^2+bx+c\right)^n}$$

yazılabilir. 3.17. teoreminden

$$\int\frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}\,dx$$

$$=\frac{A}{2a(n-1)\left(ax^2+bx+c\right)^{n-1}}+\frac{(2AB-Ab)(2ax+b)}{2a(n-1)\left(4ac-b^2\right)\left(ax^2+bx+c\right)^{n-1}}+$$

$$+\frac{(2n-3)(2aB-Ab)}{(n-1)(4ac-b^2)}\int\frac{dx}{\left(ax^2+bx+c\right)^{n-1}}$$

elde edilir.

RASYONEL KESİRLERE AYIRMA YÖNTEMİ

Bir rasyonel kesirde payın derecesi, paydanın derecesinden küçük olan ve paydası çarpanlara ayrılabilen bir rasyonel kesrin, önceden hangi rasyonel kesirlerin toplamı olduğunu bulunması işlemine, rasyonel kesirlere ayırma işlemi dendiğini Polinom Fonksiyonları konusunda görmüştük. Rasyonel kesirlerin integralini almaya da rasyonel kesirlere ayırma yöntemi denir.

Örnek: $\int\frac{2x}{x^2-1}dx$ rasyonel kesirlere ayırma yöntemiyle yapınız.

Çözüm: Önce verilen rasyonel kesirleri rasyonel kesirlere ayıralım.

$$\frac{2x}{x^2-1}=\frac{2x}{(x-1)(x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}=\frac{Ax+A+Bx-B}{(x-1)(x+1)} \qquad (1)$$

bulunur. Polinomların eşitliği tanımı gereğince

$$2x+0=(A+B)x+(A-B)$$

yazılabilir. Bu yazılıştan

$A + B = 2\,, A - B = 0$

iki bilinmeyenli denklemi elde edilir. Bu denklem çözülürse $A = 1$ ve $B = 1$ elde edilir. Elde edilen bu değerleri (1) denkleminde yerine yazarsak,

$$\frac{2x}{x^2-1} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} \qquad (2)$$

bulunur. Şimdi (6) eşitliğinin integralini alabiliriz.

$$\int \frac{2x}{x^2-1}\,dx = \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{dx}{x+1}$$
$$= \ln|x-1| + \ln|x+1| + c$$
$$= \ln|x^2-1| + c$$

Örnek: $\int \frac{x}{x^2-3x-4}\,dx$ rasyonel kesirlere ayırma yöntemiyle yapınız.

Çözüm: Önce verilen rasyonel kesirleri rasyonel kesirlere ayıralım.

$$\frac{x}{x^2-3x-4} = \frac{x}{(x-4)(x+1)}$$
$$= \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+1}$$
$$= \frac{Ax+A+Bx-4B}{(x-1)(x+1)}$$
$$= \frac{(A+B)x+(A-4B)}{(x-1)(x+1)} \qquad (1)$$

yazılabilir. Bu yazılıştan

$A + B = 1\,, A - 4B = 0$

iki bilinmeyenli denklemi elde edilir. Bu denklem çözülürse $A = \frac{4}{5}$ ve $B = \frac{1}{5}$ elde edilir. Elde edilen bu değerleri (1) denkleminde yerine yazarsak,

$$\frac{x}{x^2-3x-4} = \frac{4}{5(x-4)} + \frac{1}{5(x+1)}$$

$$\int \frac{x}{x^2-3x-4}\,dx = \frac{4}{5}\int \frac{dx}{x-4} + \frac{1}{5}\int \frac{dx}{x+1}$$
$$= \frac{4}{5}\ln|x-4| + \frac{1}{5}\ln|x+1| + c$$

Örnek: $\int \frac{x^2-2x-4}{x(x-1)(x+2)}\,dx$ rasyonel kesirlere ayırma yöntemiyle yapınız.

Çözüm: Önce verilen rasyonel kesirleri rasyonel kesirlere ayıralım.

$$\frac{x^2-2x-4}{x(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2}$$

$$= \frac{Ax^2+Ax-2A+Bx^2+2Bx+Cx^2-Cx}{x(x-1)(x+2)}$$

$$= \frac{(A+B+C)x^2+(A+2B-C)x-2A}{x(x-1)(x+2)} \qquad (1)$$

yazılabilir. Bu yazılıştan

$A+B+C=1\,, A+2B-C=0$ ve $-2A=4$

üç bilinmeyenli denklemi elde edilir. Bu denklem çözülürse $A=-2, B=1$ ve $C=2$ elde edilir. Elde edilen bu değerleri (1) denkleminde yerine yazarsak,

$$\frac{x^2-2x-4}{x(x-1)(x+2)} = \frac{-2}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+2}$$

$$\int \frac{x^2-2x-4}{x(x-1)(x+2)}dx = \int \frac{-2}{x}dx + \int \frac{1}{x-1}dx + \int \frac{2}{x+2}dx$$

$$= -2\ln|x| + \ln|x-1| + 2\ln|x+2| + c$$

$$= \ln x^{-2} + \ln|x-1| + \ln(x+2)^2 + c$$

$$= \ln|x-1|\frac{(x+2)^2}{x} + c$$

dir.

Örnek: $\int \frac{5x^2+3}{(2x+1)(x^2+4)}dx$ rasyonel kesirlere ayırma yöntemiyle yapınız.

Çözüm: Önce verilen rasyonel kesirleri rasyonel kesirlere ayıralım.

$$\frac{5x^2+3}{(2x+1)(x^2+4)} = \frac{A}{2x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+4}$$

$$= \frac{Ax^2+4A+2Bx^2+2Cx+Bx+C}{(2x+1)(x^2+4)}$$

$$= \frac{(A+2B)x^2+(B+2C)x+(4A+C)}{(2x+1)(x^2+4)} \qquad (1)$$

yazılabilir. Bu yazılıştan

$A+2B=5\,, B+2C=0$ ve $4A+C=3$

üç bilinmeyenli denklemi elde edilir. Bu denklem çözülürse $A=1, B=2$ ve $C=-1$ elde edilir. Elde edilen bu değerleri (1) denkleminde yerine yazarsak,

$$\frac{5x^2+3}{(2x+1)(x^2+4)} = \frac{1}{2x+1} + \frac{2x-1}{x^2+4}$$

$$\int \frac{5x^2+3}{(2x+1)(x^2+4)}dx = \int \frac{1}{2x+1}dx + \int \frac{2x-1}{x^2+4}dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln|2x+1| + \int \frac{2x}{x^2+4}dx - \int \frac{1}{x^2+4}dx$$
$$= \frac{1}{2}\ln|2x+1| + \ln(x^2+4) - \frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2} + c$$

BİNOM İNTEGRALLERİ

3.2. Tanım: a ve b herhangi reel sayılar, p, q ve r rasyonel olmak üzere

$$\int x^r (a+bx^p)^q\, dx$$

şeklindeki integrallere binom integrali denir. Binom integralleri üç farklı yöntemle çözülür.

1. $q \in \mathbb{Z}$, $\text{OKEK}\left(\frac{1}{r}, \frac{1}{p}\right) = \frac{1}{k}$ olmak üzere $x = t^k$ dönüşümü yardımıyla integral rasyonel bir fonksiyonun integraline dönüşür.

Örnek: $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt[3]{x})^2}$ integralini hesaplayınız.

Çözüm: $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt[3]{x})^2} = \int x^{-1/2}\left(1+x^{1/3}\right)^{-2}dx$

olduğuna göre $r = -\frac{1}{2}, p = \frac{1}{3}$ ve $q = -2 \in \mathbb{Z}$ dir. Buna göre $\text{OKEK}\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{6}$ olduğundan $x = t^6$ dönüşümü yapmak gerekir.

$x = t^6$ ise $dx = 6t^5\, dt$

olacağından

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt[3]{x})^2} = \int \frac{6t^5\, dt}{t^3\,(1+t^2)^2}$$
$$= 6\int \frac{t^2\, dt}{(1+t^2)^2}$$
$$= 6\int \frac{(t^2+1)-1\, dt}{(1+t^2)^2}$$
$$= 6\int \frac{(t^2+1)\, dt}{(1+t^2)^2} - 6\int \frac{dt}{(1+t^2)^2}$$
$$= 6\int \frac{dt}{1+t^2} - 6\int \frac{dt}{(1+t^2)^2}$$

$$= 6\arctan t - 6\int \frac{dt}{(1+t^2)^2} \qquad (1)$$

bulunur. Şimdi bu son integrali hesaplayalım. Ama biz $\int \frac{dt}{1+t^2}$ integralini alarak çözmeye çalışacağız. $\int \frac{dt}{1+t^2}$ integralinde $u = \frac{1}{1+t^2}$ ve $dv = dt$ seçilerek kısmi integrasyon metodu uygulanırsa

$$du = -\frac{2t}{(1+t^2)^2} \text{ ve } v = t$$

$$\int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{t}{1+t^2} + 2\int \frac{t^2\,dt}{(1+t^2)^2}$$

$$\arctan t = \frac{t}{1+t^2} + 2\int \frac{(t^2+1)-1\,dt}{(1+t^2)^2}$$

$$\arctan t = \frac{t}{1+t^2} + 2\int \frac{(t^2+1)\,dt}{(1+t^2)^2} - 2\int \frac{dt}{(1+t^2)^2}$$

$$\arctan t = \frac{t}{1+t^2} + 2\int \frac{dt}{1+t^2} - 2\int \frac{dt}{(1+t^2)^2}$$

$$\arctan t = \frac{t}{1+t^2} + 2\arctan t - 2\int \frac{dt}{(1+t^2)^2}$$

$$2\int \frac{dt}{(1+t^2)^2} = \frac{t}{1+t^2} + \arctan t - 2c$$

$$\int \frac{dt}{(1+t^2)^2} = \frac{t}{2(1+t^2)} + \frac{1}{2}\arctan t \qquad (2)$$

bulunur. $t = x^{1/6}$ ve (2) denklemini (1) de yerine yazarsak,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt[3]{x})^2} = 6\arctan t - 6\left[\frac{t}{2(1+t^2)} + \frac{1}{2}\arctan t\right] + c$$

$$= -\frac{\sqrt[6]{x}}{2\left(1+\sqrt[3]{x}\right)} + \frac{11}{2}\arctan \sqrt[6]{x} + c$$

elde edilir.

2. Bir binom integralinde $q \notin \mathbb{Z}$ ise $t = x^p$ dönüşümü yapılırsa

$$\int x^r\,(a+bx^p)^q\,dx = \int t^{\frac{r+1}{p}-1}\,(a+bt)^q\,dt$$

integrali elde edilir. $q \in \mathbb{Z}$, $\frac{r+1}{p} \in \mathbb{Z}$ ise $a + bx^p = u^n$ değişken değiştirmesi ile integral çözülür.

Örnek: $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm: $r = -\frac{1}{2}, p = \frac{1}{3}$ ve $q = \frac{1}{4}$ olup $\frac{r+1}{p} = 2 \in \mathbb{Z}$ dir.

$$1 + x^{1/4} = u^3 \text{ ise } x = (u^3 - 1)^4$$

değişken değiştirmesi yapılırsa,

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx = 12\int (u^6 - u^3)du$$

$$= \frac{12}{7}u^7 - 3u^4 + c$$

$$= \frac{12}{7}(1 + \sqrt[4]{x})^{7/3} - 3(1 + \sqrt[4]{x})^{4/3} + c$$

bulunur.

3. Binom integrali

$$\int x^r\,(a + bx^p)^q\,dx \;= \int t^{\frac{r+1}{p}+q-1}\left(\frac{a+bt}{t}\right)^q\,dt$$

formunda yazılabilir. $\frac{r+1}{p} \notin \mathbb{Z}$ fakat $\frac{r+1}{p} + q \in \mathbb{Z}$ ise q'nun paydası n olmak üzere

$$\frac{a+bt}{t} = u^n$$

dönüşümü ile integral bir rasyonel fonksiyonunun integraline dönüşür. Bu takdirde

$$ax^{-p} + b = u^n$$

dönüşümü ile rasyonel fonksiyon integrali elde edilir.

Örnek: $\int \frac{dx}{x^2\,\sqrt[3]{(1+x^3)^2}}$ integralini hesaplayınız.

Çözüm: Verilen integral $\int x^{-2}\,(1 + x^3)^{-2/3}\,dx$ şeklinde yazılabileceğinden

$$r = -2, p = 3 \text{ ve } q = -\frac{2}{3} \text{ olup } \frac{r+1}{p} + q = -1 \in \mathbb{Z}$$

olduğundan

$$\frac{1+x^3}{x^3} = u^3$$

değişken değiştirmesi yapmak gerekir.

$$\frac{1}{x^3} = u^3 - 1$$
$$x^3 = (u^3 - 1)^{-1}$$
$$x = (u^3 - 1)^{-1/3}$$

$$dx = -u^2(u^3 - 1)^{-4/3}du$$

değerleri integralede yerine konulduğunda

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt[3]{(1+x^3)^2}} = -\int \frac{-u^2(u^3-1)^{-4/3}\,du}{(u^3-1)^{-2/3}\left(\frac{u^3}{u^3-1}\right)^{2/3}}$$
$$= -\int du$$
$$= -u + c$$
$$= -\sqrt[3]{\frac{1+x^3}{x^3}} + c$$

bulunur.

ÇÖZÜMLÜ ALIŞTIRMALAR

İntegrale Giriş

1. $y' = -\frac{1}{x^2} + 2x - 1$ fonksiyonu neyin türevidir.

Çözüm: $y = \int\left(-\frac{1}{x^2} + 2x - 1\right)dx$
$$= \int(-x^{-2} + 2x - 1)\,dx$$
$$= -\frac{x^{-1}}{-1} + \frac{2x^2}{2} - x$$
$$= \frac{1}{x} + x^2 - x$$

2. $y = x^2 - 2x$ fonksiyonunun $x = 3$ için 5'e eşit olan ilkelinde c integral sabiti aşağıdakilerden hangisidir?

Çözüm: $f(x) = \int(x^2 - 2x)dx = \frac{x^3}{3} - x^2 + c$
$$f(3) = \frac{3^3}{3} - 3^2 + c = 5$$
$$c = 2$$

3. $x < 0$ için $\int(\sin x + |\cos x|)dx$ integralinin sonucu nedir?

Çözüm: $x < 0$ için $|\cos x| = -\cos x$ olacağından
$$\int (\sin x + |\cos x|)\, dx = \int (\sin x - \cos x)\, dx$$
$$= -\cos x - \sin x + c$$
bulunur.

4. $f'(x) = 3x^2 + 2x$ ve $f(0) = 5$ olduğuna göre $f(-1)$ in değeri nedir?

Çözüm: $f(x) = \int (3x^2 + 2x)\, dx = x^3 + x^2 + c$
$$f(1) = 0^3 + 0^2 + c = 5 \text{ ise } c = 5$$
$$f(x) = x^3 + x^2 + 5$$
$$f(-1) = (-1)^3 + (-1)^2 + 5 = 5$$

5. $\int x f(x)\, dx = x^4 + x^3 + x^2$ olduğuna göre, $f(x)$ fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm: $\int x f(x)\, dx = x^4 + x^3 + x^2$ denkleminde her iki tarafın türevini alırsak,
$$x f(x) = 4x^3 + 3x^2 + 2x$$
$$f(x) = \frac{4x^3+3x^2+2x}{x} = 4x^2 + 3x + 2$$
bulunur.

6. Verilen $y = f(x)$ fonksiyonun $(1; 2)$ noktasındaki teğeti x ekseni ile 135^0 lik açı yapmaktadır. $f''(x) = 6x$ ise $f(x)$ fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm: $f(1) = 2$, eğim $m = \tan 135 = -1$ ise $f'(1) = -1$
$$\int f''(x)\, dx = \int 6x\, dx$$
$f'(x) = 3x^2 + c_1$ ise $f'(1) = 3 \cdot 1^2 + c_1 = -1$ olup $c_1 = -4$ dür.
$$\int f'(x)\, dx = \int (3x^2 - 4)\, dx$$
$f(x) = x^3 - 4x + c_2$ ise $f(1) = 1^3 - 4 \cdot 1 + c_2 = 2$ olup $c_2 = 5$ dir. Buna göre istenen fonksiyon
$$f(x) = x^3 - 4x + 5$$
olur.

7. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her noktada türevli ve
$$f'(x) = 2x + 2, \quad f(1) = 4$$
olduğuna göre, $f(0)$ kaçtır?

Çözüm: $\int f'(x)\,dx = \int (2x+2)\,dx$

$f(x) = x^2 + 2x + c$ ise $f(1) = 1^2 + 2\cdot 1 + c = 4$ olup $c = 1$ dir. Buna göre

$f(x) = x^2 + 2x + 1$

$f(0) = 0^2 + 2\cdot 0 + 1 = 1$

olur.

8. $f''(x) = 6x + 2$, $f'(0) = 4$, $f(0) = -5$ olarak verilen f fonksiyonu için $f(1)$ değeri kaçtır?

Çözüm:

$f'(x) = \int f''(x)\,dx = \int (6x+2)\,dx = 3x^2 + 2x + c_1$

$f'(0) = 3\cdot 0^2 + 2\cdot 0 + c_1 = 4$ olup $c_1 = 4$ dür.

$f(x) = \int f''(x)\,dx = \int (3x^2 + 2x + 4)\,dx = x^3 + x^2 + 4x + c_2$

$f(0) = 0^4 + 0^2 + 4\cdot 0 + c_2 = -5$ olup $c_2 = -5$ dür.

$f(x) = x^3 + x^2 + 4x - 5$

$f(1) = 1^3 + 1^2 + 4\cdot 1 - 5 = 1$

9. Türevi $f'(x) = 3x^2$ olan f fonksiyonunun $x = a, (a > 0)$ noktasındaki teğeti $y - 12x + 16 = 0$ doğrusu olduğuna göre, f fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm: $y - 12x + 16 = 0$ doğrusunun eğimi $m = 12$ dir. Bir fonksiyonun türevi teğetin eğimine eşit olduğundan,

$f'(x) = 3x^2 = 12$ ise $x = \pm 2$

$a > 0$ ise $x = 2$

$x = 2$ için $y - 12\cdot 2 + 16 = 0$ ise $y = 8$

dir. Teğet ile eğri $(2, 8)$ noktasında çakışmaktadır.

$f(x) = \int f'(x)\,dx = \int 3x^2 dx = x^3 + c$

$8 = 2^3 + c$

$c = 0$

$f(x) = x^3$

10. Reel sayılar kümesi üzerinde tanımlı ve türevlenebilir bir f fonksiyonunun türevi

$$f'(x) = \begin{cases} 1, & x \le 1 \\ 2x, & x > 1 \end{cases}$$

biçiminde veriliyor. $f(1) = 2$ olduğuna göre, $f(3) + f(-2)$ değeri kaçtır?

Çözüm: Bu fonksiyon her noktada türevli ise, 1 noktasında da türevlenebilir. O halde 1 noktasında süreklidir.

$$f(x) = \int f'(x)\,dx = \begin{cases} x + c_1, & x \leq 1 \\ x^2 + c_2, & x > 1 \end{cases}$$

$f(1) = 2$ olduğuna göre $1 + c_1 = 2$ ve $1^2 + c_2 = 2$ ise $c_1 = 1$ ve $c_2 = 1$ olur.

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & x \leq 1 \\ x^2 + 1, & x > 1 \end{cases}$$

$$f(3) + f(-2) = (3^2 + 1) + (1 + 1) = 12$$

Değişken Değiştirme Yöntemi

11. $\int 3(x^2 - 3x + 1)^2(2x - 3)\,dx$ integralinin sonucu nedir?

Çözüm: Bu integralde değişken değiştirme uygulayacağız.
$u = x^2 - 3x + 1$ seçilirse $du = (2x - 3)\,dx$
bulunur. Buna göre,

$$\begin{aligned}\int 3(x^2 - 3x + 1)^2(2x - 3)\,dx &= \int 3u^2\,du \\ &= u^3 + c \\ &= (x^2 - 3x + 1)^3 + c\end{aligned}$$

elde edilir.

12. $\int \sin^4 x \cos x\,dx$ integralinin sonucu nedir?

Çözüm: Bu integralde değişken değiştirme uygulayacağız.
$u = \sin x$ seçilirse $du = \cos x\,dx$
bulunur. Buna göre

$$\int \sin^4 x \cos x\,dx = \int u^4 du = \frac{1}{5}u^5 + c = \frac{1}{5}\sin^5 x + c$$

elde edilir.

13. $\int f(x)\, f'(x)\, dx$ integralinin sonucu nedir?

Çözüm: $u = f(x)$ alınırsa $du = f'(x)\, dx$ olacağından

$$\int f(x)\, f'(x)\, dx = \int u\, du = \frac{1}{2}u^2 + c = \frac{1}{2}f^2(x) + c$$

olur.

14. $\int \sin(\cos^2 x) \sin 2x \; dx$ integralinin sonucu nedir?

Çözüm: $u = \cos^2 x$ alalım. $du = 2\cos x\,(-\sin x)dx = -\sin 2x \; dx$ olur.

$$\int \sin(\cos^2 x) \sin 2x \; dx = \int \sin u\, du = -\cos u + c = -\cos(\cos^2 x) + c$$

15. $\int \frac{9x^2}{4\sqrt[4]{x^3+5}} dx$ integralinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

Çözüm: $u = x^3 + 5$ seçilim. Türevini alırsak $du = 3x^2\, dx$ olur.

$$\begin{aligned}
\int \frac{9x^2}{4\sqrt[4]{x^3+5}} dx &= \frac{3}{4}\int \frac{1}{\sqrt[4]{u}}\, du \\
&= \frac{3}{4}\int u^{-1/4}\, du \\
&= \frac{3}{4}\frac{u^{3/4}}{3/4} + c \\
&= (x^3+5)^{3/4} + c
\end{aligned}$$

16. $\int \frac{f'(x)}{[f(x)]^2} dx = -\int 2\, du$ eşitliği veriliyor. f(x) fonksiyonunu nedir?

Çözüm: $u = f(x)$ değişken değiştirmesini yapalım. $du = f'(x)\, dx$ olduğundan,

$$\int \frac{du}{u^2} = -\int 2\, du$$
$$\int u^{-2}\, du = -\int 2\, du$$
$$-u^{-1} = -2x + c$$

$$u = \frac{1}{2x+c}$$
$$f(x) = \frac{1}{2x+c}$$

dir.

17. $\int \arccos^2 x \, dx$ integralinde $u = \arcsin x$ dönüşümü yapılırsa integralin son hali nasıl olur?

Çözüm: $u = \arcsin x$ ise $x = \sin u$ dir. Türev alınırsa $dx = \cos u \, du$ bulunur. Buna göre,

$$\int \arccos^2 x \, dx = \int u^2 \cos u \, du$$

dir.

18. $\int \frac{1+\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} dx$ integralinde $u = \sqrt{x}$ dönüşümü yapılırsa integralin son hali nasıl olur?

Çözüm: $u = \sqrt{x}$ dönüşümünde $du = \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \frac{dx}{2u}$ için $2u \, du = dx$

$$\int \frac{1+\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} dx = \int \frac{1+u}{2u} 2u \, du = \int (1+u) \, dx$$

19. $\int \frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$ integralinde $u = \sqrt{x}$ dönüşümü yapılırsa integral nasıl olur?

Çözüm: Verilen integralinde $u = \sqrt{x}$ dönüşümü yapılırsa $du = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$ olacağından,

$$\int \frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = \int \ln\sqrt{x} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\int \ln u \, du$$

bulunur.

20. $\int \sqrt{1+e^x} \, dx$ integralinde $u = \sqrt{1+e^x}$ dönüşümü yapılırsa integralin son hali nasıl olur?

Çözüm: $u = \sqrt{1+e^x}$ ise $du = \frac{e^x}{2\sqrt{1+e^x}} dx$

$$u^2 = 1 + e^x \text{ ise } u^2 - 1 = e^x$$

$$du = \frac{u^2-1}{2u} dx \text{ yani } dx = \frac{2u}{u^2-1} du$$

$$\int \sqrt{1+e^x}\,dx = \int u \frac{2u}{u^2-1}\,du = \int \frac{2u^2}{u^2-1}\,du$$

Kısmi İntegrasyon Yöntemi

21. $\int g(x)f'(x)\,dx = \frac{f(x)}{x} - \int 4x^2\,dx$ eşitliğinde kısmi integrasyon uygulayarak f(x) fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm: $u = f(x)$ ve $v = g'(x)$ alınırsa,

$f(x)g(x) - \int g(x)f'(x) = f(x)\frac{1}{x} - \int 4\frac{1}{x}x^3\,dx$

bulunur. Burada $g(x) = \frac{1}{x}$ dir.

$g(x)f'(x) = 4\frac{1}{x}x^3$

$f'(x) = 4x^3$

$f(x) = x^3 + c$

olur.

Rasyonel Kesirlere Ayırma

22. $\int \frac{dx}{x^2-1}$ integralinin sonucunu nedir?

Çözüm: $\frac{1}{x^2-1}$ rasyonel ifadesini rasyonel kesirlere ayıralım.

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} = \frac{Ax+A+Bx-B}{x^2-1}$$

$$(A+B)x + (A-B) = 0\cdot x + 1$$

$$A+B = 0, A-B = 1$$

$$A = \frac{1}{2}, B = -\frac{1}{2}$$

elde edilir. Elde ettiğimiz bu değerleri denklemde yerine yazarsak,

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)}$$

$$\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1}$$
$$= \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1| + c$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + c$$

olur.

23. $\int \frac{x+1}{x^2-5x+10}dx$ integrali aşağıdakilerden hangisine eşittir?

Çözüm: Rasyonel kesirlere ayırma yöntemini kullanacağız.

$$\frac{x+1}{x^2-7x+10} = \frac{x+1}{(x-5)(x-2)} = \frac{A}{x-5} + \frac{B}{x-2} = \frac{Ax-2A+Bx-5B}{(x-5)(x-2)}$$

$$(A+B)x - (2A+5B) = 1 \cdot x + 1$$

$$A + B = 1, \quad 2A + 5B = -1$$

eşitlikleri çözülürse, $A = 2, \quad B = 1$ olur.

$$\int \frac{x+1}{x^2-5x+10}dx = \int \frac{dx}{x-5} - \int \frac{dx}{x-2}$$

$$= \ln|x-5| - \ln|x-2| + c$$

$$= \ln\left|\frac{x-5}{x-2}\right| + c$$

KAYNAKÇA

1. Prof. Dr. Mustafa BALCI, Matematik Analiz II, Bilim Kitap Kırtasiye Ltd. Şti., Ankara, 1997.
2. Prof. Dr. H. Hilmi HACISALİHOĞLU, Lise Matematik 1, 2, 3, Serhat Yayınları A.Ş. İstanbul, 2001.
3. Prof. Ahmet KARADENİZ, Yüksek Matematik 2, Çaylayan Kitapevi, Beyoğlu, İstanbul, 1992.
4. George B. Thomas Jr., Thomas Calcalus, Çev. Recep Korkmaz, Beta Yayınları, 11. Baskı, Ağustos 2009, İstanbul.
5. Murray R. Spiegel, İleri Matematik, Çev. Prof. Dr. H. Hilmi HACISALİHOĞLU, Schaum Yayınları, Nobel Yayın Dağıtım, 1997, Ankara.
6. Ahmet HANÇERLİOĞLU, Faniye ALAN, Matematik Seti, Tümay Yayınları, 2006, ANKARA
7. Dr. Seyfettin AYDIN, Analize Giriş I, 1986, ANKARA.
8. M. Zeki DERMAN, Ökkeş ÖZKÖSELER, Serdar GÜLMEZ, Matematik Lise 1, 2, 3, Zafer Yayınları, 2006, ANKARA.
9. Prof. Dr. Mahmut KOÇAK, Reel Analiz Ders Notları, Eskişehir, 2015.
10. Louis Brand, Yüksek Matematik, Çeviren Mehmet CAN, Çinçiati Üniversitesi, ABD, 2004.