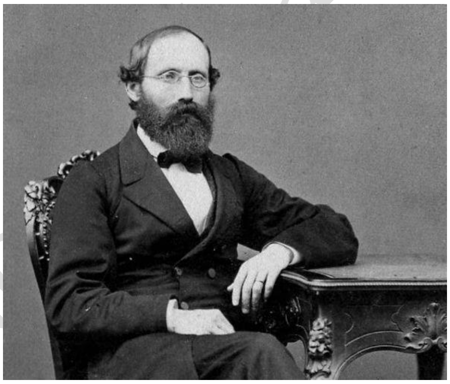
4. BÖLÜM
BELİRLİ İNTEGRAL

Bonaventura Francesco Cavalieri
1598, Milano, İtalya- 30 Kasım 1647, Bologna, İtalya



Louis Cauchy
17 Eylül 1826 Jameln, Almanya – 20 Temmuz 1866, Verbania, İtalya

Bir eğrinin bir bölgesinin x ekseni ile arasında kalan alanı bulma ilk defa Bonaventura Francesco Cavalieri tarafından ortaya atılmış ve tam ispatı yapamamıştır. Belirli integral üzerine ilk çalışma tam anlamıyla limit ve süreklili̇ği ilk tanımlayan Fransız matematikçi Louis Cauchy (1789 - 1857) tarafından yapılmıştır ve ispatlamıştır. Bugün ki anlamda belirli integral ve Reamann anlamında integrallenebilmeyi Georg Friedrich Bernhard Riemann, Cauchy’nin ispatını geliştirerek 1854 yılında yayınlamıştır.

BELİRLİ İNTEGRAL KAVRAMI

Belirsiz integralde, integralin türev alma işleminin tersi olarak işlem yapılmaktadır. Hâlbuki integral hesabının birçok uygulamalarında integrasyon bir toplama işlemi olarak tanımlanır. Bir eğrinin fonksiyonun sınırlı alanı hesaplanırken istenilen alan sonsuz sayıda alana bölünerek hesaplanır. Ama bu işlemler integralin uygulaması kısmında anlatılacaktır. Biz öncelikle integralin uygulamasına temel teşkil edecek belirli integalden bahsedeceğiz. Belirli integrali belirsiz integralden ayıran iki önemli nokta vardır. Biri, belirli integraldeki fonksiyonlar sınırlıdır, diğeri belirsiz integral deki c sabiti yoktur.

4.1. Tanım: f, $[a, b]$ aralığında tanımlı ve integrallenebilen bir fonksiyon $x \in [a, b]$ için $F'(x) = f(x)$ olacak şekilde sürekli bir $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu varsa;

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

şeklindedir. Bu yazıma belirli integral denir. (Bu yazımın gerçekleşmesi Riemann anlamında integral kısmında izah edilecektir.)

Örnek: $\int_1^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{7}{3}$

Örnek: $\int_0^1 2x + 3dx = \frac{2x^2}{2} + 3x\Big|_0^1 = 4$

Örnek: $\int_1^{e^5} d(\ln x^2)dx = \ln x^2\Big|_1^{e^5} = \ln e^{10} - \ln 1 = 10$

Örnek: $\int_{\ln 4}^{\ln 7} e^x dx = e^x\Big|_{\ln 4}^{\ln 7} = e^{\ln 7} - e^{\ln 4} = 3$

Örnek: $\int_1^2 (3x^2 + 4x - 5)$ integralini hesaplayınız.

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

Çözüm: $\int_1^2 (3x^2+4x-5) = x^3+2x^2-5x\Big|_1^2$

$$= (2^3+2\cdot 2^2-5\cdot 2)-(1^3+2\cdot 1^2-5\cdot 1)$$
$$= 8$$

Örnek: $\int\limits_0^1 (e^{2x}+3x^2)dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm: $\int\limits_0^1 (e^{2x}+3x^2)dx = \left(\frac{1}{2}e^{2x}+x^3\right)\Big|_0^1$

$$= \left(\frac{1}{2}e^{2\cdot 1}+1^3\right)-\left(\frac{1}{2}e^{2\cdot 0}+0^3\right)$$
$$= \frac{1}{2}(e^2+1)$$

Örnek: $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^2 x\, dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm: $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^2 x\, dx = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{1-\cos 2x}{2} dx$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2} dx - \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2} \cos 2x\, dx$$
$$= \frac{1}{2}x\Big|_0^{\pi/2} - \frac{1}{4}\sin x\Big|_0^{\pi/2}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-0\right)-\frac{1}{4}(\sin\pi-\sin 0)$$
$$= \frac{\pi}{4}$$

Örnek: $\int\limits_{\sqrt{3}/3}^{1} \frac{dx}{1+x^2}$ integralini hesaplayınız.

Çözüm: $\int\limits_{\sqrt{3}/3}^{1} \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x\Big|_{\sqrt{3}/3}^{1}$

$$= \arctan 1 - \arctan\frac{\sqrt{3}}{3}$$
$$= \frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}$$

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

$$= \frac{\pi}{12}$$

Örnek: $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{4-x}}$ integralini hesaplayınız.

Çözüm: $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{4-x}} = \int_0^4 (4-x)^{-1/2}dx$

$$= \left.\frac{(4-x)^{1/2}}{1/2}\right|_0^4$$

$$= 2\sqrt{4-x}\Big|_0^4$$

$$= 4$$

Örnek: $\int\limits_0^1 \frac{k-1}{\sqrt{k}-1}dk$ integralini hesaplayınız.

Çözüm: $\int\limits_0^1 \frac{k-1}{\sqrt{k}-1}dk = \int\limits_0^1 \frac{(\sqrt{k}-1)(\sqrt{k}+1)}{\sqrt{k}-1}dk$

$$= \int\limits_0^1 (k^{1/2}+1)dk$$

$$= \left.\frac{k^{3/2}}{3/2} + k\right|_0^1$$

$$= \frac{2}{3} + 1$$

$$= \frac{5}{3}$$

4.1. Teorem (Homojenlik Özelliği): f, $[a,b]$ aralığında tanımlı ve integrallenebilen bir fonksiyon $x \in [a,b]$ olsun. Bu takdirde,

$$\int\limits_a^b k \cdot f(x)dx = k \cdot \int\limits_a^b f(x)dx$$

dir.

İspat: $k \cdot \int\limits_a^b f(x)dx = k\,(F(x)|_a^b)$

$$= k\,F(b) - k\,F(a)$$

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

$$= (k\,F(x))\Big|_a^b$$

$$= \int_a^b k \cdot f(x)dx$$

4.2. Teorem (Toplanabilme Özelliği): f, $[a, b]$ aralığında tanımlı ve integrallenebilen bir fonksiyon $x \in [a, b]$ olsun. Bu takdirde,

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

dir.

İspat: $\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b (f+g)(x)dx$

$$= (F+G)(x)\Big|_a^b$$

$$= (F+G)(b) - (F+G)(a)$$

$$= (F(b) - F(a)) + (G(b) - G(a))$$

$$= F(x)\Big|_a^b + G(x)\Big|_a^b$$

$$= \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

bulunur.

4.3. Teorem (İntegral aralığına göre toplanabilme özelliğine): f, $[a, b]$ aralığında tanımlı ve integrallenebilen bir fonksiyon $x \in [a, b]$ olsun. $a < c < b$ olmak üzere,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

dir.

İspat: $a < c < b$ olduğundan

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b$$

$$= F(b) - F(c) + F(c) - F(a)$$

$$= F(x)\Big|_a^c + F(x)\Big|_c^b$$

$$= \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

bulunur.

4.4. Teorem: f, $[a, b]$ aralığında tanımlı ve integrallenebilen bir fonksiyon $x \in [a, b]$ olsun. Bu takdirde,

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

dir.

İspat: $\int_a^a f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^a = F(a) - F(a) = 0$

4.5. Teorem: f, $[a, b]$ aralığında tanımlı ve integrallenebilen bir fonksiyon $x \in [a, b]$ olsun. Bu takdirde,

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

dir.

İspat:
$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= F(x)\Big|_a^b \\ &= F(b) - F(a) \\ &= -(F(a) - F(b)) \\ &= -F(x)\Big|_b^a \\ &= -\int_b^a f(x)dx\end{aligned}$$

4.6. Teorem: h ve g, tanımlı olduğu aralıkta sürekli ve x'in türevlenebilen fonksiyonları olmak üzere;

$$K(x) = \int_{h(x)}^{g(x)} f(t)dt$$

ise,

$$K'(x) = f(g(x))\,g'(x) - f(h(x))\,h'(x)$$

biçimindedir.

İspat: Belirli integralin tanımından,

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

$$K(x)=\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)dt = F(x)\Big|_{h(x)}^{g(x)} = F\big(g(x)\big) - F\big(h(x)\big)$$

yazılabilir. Bu takdirde her iki tarafın türevini alırsak türevde zincir kuralı gereği,

$$K'(x) = f(g(x))\, g'(x) - f(h(x))\, h'(x)$$

elde edilir.

4.1. Sonuç:

a) $K(x)=\int_a^x f(t)dt$ ise $K'(x) = f(x)$

b) $K(x)=\int_a^{g(x)} f(t)dt$ ise $K'(x) = f(g(x))g'(x)$

Örnek: $K(x)=\int_{x^2}^{2x+3} 2^t dt$ ise $K'(x)$ i bulunuz.

Çözüm: 4.6. teoremi gereği $f(t) = 2^t$ olduğundan

$K'(x) = f(g(x))\, g'(x) - f(h(x))\, h'(x)$

$K'(x) = 2^{x^2}(2x) - 2^{2x+3}(2) = 2x\, 2^{x^2} - 2^{2x+4}$

elde edilir.

Örnek: $K(x)=\int_2^{3x} (t^2+2t+1)dt$ ise $K'(-1)$ nedir?

Çözüm: 4.6. teoremi gereği $f(t) = t^2 + 2t + 1$ olduğundan

$K'(x) = f(g(x))\, g'(x) - f(h(x))\, h'(x)$

$K'(x) = ((3x)^2 + 2(3x) + 1) \cdot 3 - (2^2 + 2 \cdot 2 + 1) \cdot 0$

$K'(x) = 27x^2 + 18x + 3$

$K'(-1) = 27(-1)^2 + 18(-1) + 3 = 12$

Örnek: $\dfrac{d}{dx}\int_2^{4x} \sqrt{t^2-2t}\,dt$ ifadesinin eşitini bulunuz.

Çözüm: 4.6. teoremi gereği $f(t) = \sqrt{t^2 - 2t}$ olduğundan

$$\frac{d}{dx}\int_2^{4x} \sqrt{t^2-2t}\,dt = \sqrt{16x^2 - 8x} \cdot 4 - \sqrt{2^2 - 2 \cdot 2} \cdot 0 = 8\sqrt{4x^2 - 2x}$$

bulunur.

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

Örnek: $f(x)=\int_{-2}^{x^2}\frac{dt}{t^2+1}$ biçimindeki f fonksiyonunun grafiğinin $x=1$ deki teğetinin eğimini bulunuz?

Çözüm: $f'(x)=\frac{1}{x^4+1}2x-\frac{1}{4+1}\cdot 0=\frac{2x}{x^4+1}$

Teğetin eğimi $m=f'(1)=\frac{2\cdot 1}{1^4+1}=1$

Örnek: $\frac{d}{dx}\int\limits_{\cos x}^{\sin x} t^2 df$, $x=\frac{\pi}{4}$ için neye eşittir?

Çözüm:
$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\int\limits_{\cos x}^{\sin x} t^2 dt &= \sin^2 x\cos x-\cos^2 x\,(-\sin x)\\ &= \sin^2\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}+\cos^2\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{4}\\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\frac{\sqrt{2}}{2}+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\frac{\sqrt{2}}{2}\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

BELİRLİ İNTEGRALDE DEĞİŞKEN DEĞİŞTİRME

4.7. Teorem: $u:[a,b]\to\mathbb{R}$ sürekli ve türeve sahip bir fonksiyon ve f ve u'nun görünmesi üzerinde sürekli ise,
$$\int\limits_a^b f(u(x))u'(x)dx=\int\limits_{u(a)}^{u(b)} f(t)dt$$
dir.

İspat: f'nin belirsiz integrali F olsun. Şu halde
$$F'(x)=f(x)$$
dir. Ayrıca $G(x)=F(u(x))$ denilirse
$$G'(x)=F'(u(x))u'(x)=f(u(x))u'(x)$$
bulunur. Buradan

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

$$\int_a^b f(u(x))u'(x)dt = \int_a^b G'(x)dx = G(b) - G(a) \qquad (1)$$

ve

$$\int_{u(a)}^{u(b)} f(t)dt = \int_{u(a)}^{u(b)} F'(t)dt = F'(u(a)) - F'(u(b)) = G(b) - G(a) \qquad (2)$$

olacağından (1) ve (2) den

$$\int_a^b f(u(x))u'(x)dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t)dt$$

elde edilir.

Örnek: $\int_0^{\pi} \cos\frac{x}{2}dx$ integralin sonucunu bulunuz.

Çözüm: $u = \frac{x}{2}$ seçilirse $du = \frac{1}{2}dx$ yani $2du = dx$ olur. Sınırlar ise,

$x = 0$ için $u = \frac{0}{2} = 0$

$x = \pi$ için $u = \frac{\pi}{2}$

olur. Buna göre

$$\int_0^{\pi} \cos\frac{x}{2}dx = 2\int_0^{\pi/2} \cos u\, du = 2\sin u\Big|_0^{\pi/2} = 2\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right) = 2$$

elde edilir.

Örnek: $\int_1^{e} \frac{\ln x}{x}dx$ integralin sonucunu bulunuz.

Çözüm: $u = \ln x$ seçilirse $du = \frac{1}{x}dx$ dir. Sınırlar ise,

$x = 1$ için $u = \ln 1 = 0$

$x = e$ için $u = \ln e = 1$

olur. Buna göre

$$\int_1^{e} \frac{\ln x}{x}dx = \int_0^{1} u\, du = \frac{u^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}[1 - 0] = \frac{1}{2}$$

elde edilir.

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

Örnek: $\int_0^{\pi/2} \sin^4 x.\cos x.dx$ integralin sonucunu bulunuz.

Çözüm: $u = \sin x$ seçilirse $du = \cos x\ dx$ dır. Sınırlar ise,

$x = 0$ için $u = \sin 0 = 0$

$x = \frac{\pi}{2}$ için $u = \sin\frac{\pi}{2} = 1$

olur. Buna göre

$$\int_0^{\pi/2} \sin^4 x.\cos x.dx = \int_0^1 u^4 du = \left.\frac{u^5}{5}\right|_0^1 = \frac{1}{5}$$

elde edilir.

Örnek: $\int_0^{\pi/4} \tan x dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm: $\int_0^{\pi/4} \tan x dx = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\cos x} dx$

$u = \cos x$ seçilirse $du = -\sin x\ dx$

alınırsa sınırlar,

$x = 0$ için $u = \cos 0 = 1$

$x = \frac{\pi}{4}$ için $u = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

olur. Buna göre

$$\int_0^{\pi/4} \tan x dx = -\int_1^{\sqrt{2}/2} \frac{du}{u}$$

$$= \int_{\sqrt{2}/2}^1 \frac{du}{u}$$

$$= \ln|u|\Big|_{\sqrt{2}/2}^1$$

$$= \ln|1| - \ln\left|\frac{\sqrt{2}}{2}\right|$$

$$= \ln\sqrt{2}$$

bulunur.

Örnek: $\int_1^{e^3} \frac{dx}{2x\sqrt{1+\ln x}}$ integralini hesaplayınız.

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

Çözüm: $u = 1 + \ln x$ seçilirse $du = \frac{1}{x}dx$ olur. Sınırlar ise,

$x = 1$ için $u = 1 + \ln 1 = 1 + 0 = 1$

$x = e^3$ için $u = 1 + \ln e^3 = 1 + 3 = 4$

dır. Buna göre,

$$\begin{aligned}\int_1^{e^3} \frac{dx}{2x\sqrt{1+\ln x}} &= \int_1^4 \frac{dt}{2\sqrt{t}} \\ &= \int_1^4 d(\sqrt{t}) \\ &= \sqrt{t}\Big|_1^4 \\ &= \sqrt{4} - \sqrt{1} \\ &= 1\end{aligned}$$

bulunur.

Örnek: $\int_0^1 (x^2\sqrt{1-x^2})dx$ integrali için $x = \sin t$ dönüşümü yapılırsa integralin son hali ne olur?

Çözüm: $x = \sin t$ alınırsa $dx = \cos t\ dt$ olur. Sınırlar ise,

$x = 0$ için $t = \arcsin 0 = 0$

$x = 1$ için $t = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$

olur. Buna göre,

$$\begin{aligned}\int_0^1 (x^2\sqrt{1-x^2})dx &= \int_0^{\pi/2} (\sin^2 t)\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,dt \\ &= \int_0^{\pi/2} (\sin^2 t)(\cos^2 t)dt \\ &= \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2} (2\sin t\cos t)^2 dt \\ &= \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2} \sin^2 2t\,dt\end{aligned}$$

dir.

Örnek: $\int_{-2}^6 e^{-\frac{x}{2}}dx$ integrali için $x = -2t$ dönüşümü yapılırsa integralin son hali ne olur?

Çözüm: $x = -2t$ alınırsa $dx = -2\ dt$ olur. Sınırlar ise,

$x = -2$ ise $t = 1$

$x = 6$ ise $t = -3$

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

olur. Buna göre,

$$\int_{-2}^{6} e^{-\frac{x}{2}}dx = -2\int_{1}^{-3} e^{t}dt = 2\int_{-3}^{1} e^{t}dt$$

elde edilir.

MUTLAK DEĞER FONKSİYONUN BELİRLİ İNTEGRALİ

4.8. Teorem: f, $[a,b]$ aralığında tanımlı ve integrallenebilen bir fonksiyon $x \in [a,b]$ olsun.

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x), & a \le x < c \\ -f(x), & c \le x \le b \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan mutlak değer fonksiyonun integrali,

$$\int_a^b |f(x)|dx = \int_a^c f(x)dx - \int_c^b f(x)dx$$

biçimindedir.

Bu teoremin ispatı okuyucuya bırakılmıştır.

Örnek: $\int\limits_1^4 |x-3|dx$ integralinin sonucunu bulunuz.

Çözüm: Mutlak değer fonksiyonu özel tanımlı bir parçalı fonksiyondur. Parçalı fonksiyonların kritik noktaları vardır. Bu noktanın önce pozitiflik ve negatiflik durumunu inceleyelim:

$x < 3$ için $|x-3| = -(x-3)$

$x \ge 3$ için $|x-3| = (x-3)$

olur. $x = 3$ kritik nokta olduğu aşikardır. Bu durumu şu şekilde yazabiliriz:

$$\int\limits_1^4 |x-3|dx = \int_1^3 -(x-3)dx + \int_3^4 (x-3)dx$$

$$= -\frac{x^2}{2} + 3x\Big|_1^3 + \frac{x^2}{2} - 3x\Big|_3^4$$

$$= \left[-\frac{9}{2} + 9 + \frac{1}{2} - 3\right] + \left[8 - 12 - \frac{9}{2} + 9\right]$$

$$= \frac{5}{2}$$

Örnek: $\int\limits_{-1}^5 \frac{|x|}{x}dx$ integralinin sonucunu bulunuz.

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

Çözüm: Bu integralin kritik noktası 0’dır. Buna göre,

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{5}\frac{|x|}{x}dx &= \int_{-1}^{0}\frac{|x|}{x}dx+\int_{0}^{5}\frac{|x|}{x}dx\\ &= \int_{-1}^{0}\frac{-x}{x}dx+\int_{0}^{5}\frac{x}{x}dx\\ &= \int_{-1}^{0}-dx+\int_{0}^{5}dx\\ &= -x\Big|_{-1}^{0}+x\Big|_{0}^{5}\\ &= -\big(0-(-1)\big)+(5-0)\\ &= 4\end{aligned}$$

dir.

4.1. Not: İntegralin ilkeli olan belirsiz integral konusunda kısmi integrasyon, rasyonel kesirlere ayırma yöntemi, indirgeme formülleri gibi yöntemler verilmişti, bu yöntemlerde belirli integralde değişken değiştirme yönteminin metodu uygulanır.

SİGNUM (İŞARET) FONKSİYONUN BELİRLİ İNTEGRALİ

4.9. Teorem: f, $[a,b]$ aralığında tanımlı ve integrallenebilen bir fonksiyon $x \in [a,b]$ olsun.

$$\operatorname{sgn} f(x) = \begin{cases}-1, & a \le x < c\\ 1, & c \le x \le b\end{cases}$$

şeklinde tanımlanan mutlak değer fonksiyonun integrali,

$$\int_a^b \operatorname{sgn} f(x)\,dx = \int_a^c -dx + \int_c^b dx$$

biçimindedir.

Bu teoremin ispatı okuyucuya bırakılmıştır

Örnek: $\int_1^4 2x\operatorname{sgn}(6-3x)dx$ integralini hesaplayınız.

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

Çözüm: $\operatorname{sgn}(6-3x)=\begin{cases}1, & x<2\\ 0, & x=2\\ -1, & x>2\end{cases}$

$$\int_1^4 2x\operatorname{sgn}(6-3x)dx=\int_1^2 2x\cdot 1dx+\int_2^4 2x\cdot(-1)dx$$
$$=x^2\Big|_1^2-x^2\Big|_2^4$$
$$=(2^2-1^2)-(4^2-2^2)$$
$$=-9$$

Örnek: $\int_{-3}^{4}\operatorname{sgn}(x^2-x-2)dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm: $x^2-x-2=0$ denkleminin kökleri olan $x=-1$ ve $x=2$ kritik noktalardır.

x		-1		2	
x^2-x-2	+	0	−	0	+

$$\operatorname{sgn}(x^2-x-2)=\begin{cases}1, & x<-1 \wedge x>2\\ 0, & x=-1 \wedge x=2\\ -1, & -1<x<2\end{cases}$$

$$\int_{-3}^{4}\operatorname{sgn}(x^2-x-2)dx=\int_{-3}^{-1}1\cdot dx+\int_{-1}^{2}(-1)dx+\int_{2}^{4}1\cdot dx$$
$$=x\Big|_{-3}^{-1}-x\Big|_{-1}^{2}+x\Big|_{2}^{4}$$
$$=(-1-(-3))-(2-(-1))+(4-2)$$
$$=1$$

TEK ve ÇİFT FONKSİYONUNUN BELİRLİ İNTEGRALİ

4.8. Teorem: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ sürekli ve türeve sahip bir fonksiyon olmak üzere,

i) f bir çift fonksiyon ise,

$$\int_{-a}^{a}f(x)\,dx=2\int_{0}^{a}f(x)\,dx$$

Öğr. Gör. Saba YILMAZ

ii) f bir tek fonksiyon ise,

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$$

dır.

İspat: i) f bir çift fonksiyon ise 4.8. teorem gereği f ’nin integrali olan F fonksiyonu tek fonksiyondur. Buna göre $F(-a) = -F(a)$ dır.

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = F(x)\Big|_{-a}^{a} = F(a) - F(-a) = 2F(a) \qquad (1)$$

$$2\int_{0}^{a} f(x)\,dx = 2F(x)\Big|_{0}^{a} = 2F(a) - 2F(0) = 2F(a) \qquad (2)$$

olur. (1) ve (2) eşitliğinden,

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$$

elde edilir.

ii) f bir tek fonksiyon ise 4.8. teorem gereği f ’nin integrali olan F fonksiyonu çift fonksiyondur. Buna göre $F(-a) = F(a)$ dır.

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = F(x)\Big|_{-a}^{a} = F(a) - F(a) = 0$$

elde edilir.

Örnek: $\int_{-4}^{4} x^5 dx$ integralini bulunuz.

Çözüm: $f(x) = x^5$ tek fonksiyon olduğundan

$$\int_{-4}^{4} x^5 dx = 0$$

dır.

Örnek: $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x\,dx$ integralini bulunuz.

Çözüm: $f(x) = \cos x$ çift fonksiyon olduğundan

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x\,dx = 2\int_{0}^{\pi/2} \cos x\,dx$$
$$= 2\sin x\Big|_0^{\pi/2}$$
$$= 2\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right)$$
$$= 2$$

Örnek: $\displaystyle\int_{-5}^{5} \frac{\sin 3x}{x^4}dx$ integralini bulunuz.

Çözüm: $\sin 3x$ tek fonksiyon x^4 çift fonksiyon olduğundan $\dfrac{\sin 3x}{x^4}$ tek fonksiyondur.

$$\int_{-5}^{5} \frac{\sin 3x}{x^4}dx = 0$$

PERYODİK FONKSİYONLARIN BELİRLİ İNTEGRALİ

4.9. Teorem: $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sürekli ve türeve sahip bir peryodikfonksiyon ve periyod T ise,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{a+kT}^{b+kT} f(x)dx, \quad (k \in \mathbb{N})$$

dir.

İspat: $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b$

$$= F(b) - F(a)$$
$$= F(b + kT) - F(a + kT)$$
$$= F(x + kT)\Big|_a^b$$
$$= \int_{a+kT}^{b+kT} f(x)dx$$

ÇÖZÜMLÜ ALIŞTIRMALAR

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

1. $\int_0^{\pi/2} \cos^2 x\,dx$ integralinin değeri nedir?

Çözüm: $\int_0^{\pi/2} \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(1+\cos 2x)dx$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_0^{\pi/2} dx + \int_0^{\pi/2}\cos 2x dx\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[x\Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{2}\sin 2x\Big|_0^{\pi/2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) - \frac{1}{2}(\sin\pi - \sin 0)\right]$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

2. $\int_0^{\pi/3} \tan^2 x\,dx$ integralinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

Çözüm:

$$\int_0^{\pi/3} \tan^2 x\,dx = \int_0^{\pi/3} -1 + 1 + \tan^2 x\,dx$$

$$= -x + \tan x\Big|_0^{\pi/3}$$

$$= \left[-\frac{\pi}{3} + \tan\frac{\pi}{3}\right] - [0 + \tan 0]$$

$$= \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$$

3. $\int_0^1 e^{5x}dx$ in değeri aşağıdakilerden hangisidir?

Çözüm: $\int_0^1 e^{5x}dx = \frac{1}{5}e^{5x}\Big|_0^1 = \frac{1}{5}(e^5 - e^0) = \frac{e^5-1}{5}$

4. $\int_1^5 xe^x dx$ integralinin sonucu nedir?

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

Çözüm: Bu integral için kısmı integral yöntemini kullanacağız. $u = x$, $dv = e^x\,dx$ seçilirse $du = dx$, $v = e^x$ dir.

$$\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + c$$

bulunur. Bulunan bu integralin sınırlarını yazalım.

$$\int_1^5 xe^x dx = xe^x - e^x\Big|_1^5 = (5e^5 - e^5) - (1\cdot e^1 - e^1) = 4e^5$$

5. $f(x) = \int\limits_1^{\ln x} e^{t^2}\,dt$ ise $f'(e)$ nin değeri ne olur?

Çözüm: $f(x) = \int\limits_{h(x)}^{g(x)} f(t)\,dt$ olsun. Bu takdirde,

$$K'(x) = f(g(x))\,g'(x) - f(h(x))\,h'(x) \qquad (1)$$

dir. Verilere göre,

$$g(x) = \ln x,\ h(x) = 1,\ f(t) = e^{t^2}$$

olacağından,

$$g'^{(x)} = \frac{1}{x},\ h'^{(x)} = 0,\ f\big(g(x)\big) = f(\ln x) = e^{(\ln x)^2} \qquad (2)$$

(2) denklemi (1) denkleminde yerine yazılırsa,

$$f'(x) = f(\ln x)\frac{1}{x} - f(1)\cdot 0 = e^{(\ln x)^2}\frac{1}{x}$$

$$f'(e) = e^{(\ln x)^2}\frac{1}{e} = 1$$

elde edilir.

6. $\int\limits_{-1}^{2} |2x-1|\,dx$ integralinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

Çözüm: $2x - 1 = 0$ ise $x = \frac{1}{2}$ olup

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		∞
2x-1		-	0	+	

bulunur. Tablodan,

$$|2x-1| = \begin{cases} 2x-1, & x \geq 1/2 \\ -2x+1, & x \leq 1/2 \end{cases}$$

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

olacağından,

$$\int_{-1}^{2}|2x-1|dx=\int_{-1}^{1/2}(-2x+1)dx+\int_{1/2}^{2}(-2x+1)dx$$

$$=(-x^2+x)\Big|_{-1}^{\frac{1}{2}}+(-x^2+x)\Big|_{\frac{1}{2}}^{2}$$

$$=\left[-\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\right]+[-(-1)^2+(-1)]-[-2^2+2]+\left[-\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\right]$$

$$=\frac{3}{2}$$

olur.

7. $\int_{-2}^{2}|x|dx$ integralinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

Çözüm: Mutlak değerde x = 0 noktası kritik nokta olduğundan,

x	$-\infty$	0	∞
$\lvert x\rvert$	-	o	+

bulunur. Şu halde,

$$\int_{-2}^{2}|x|dx=\int_{-2}^{0}-xdx+\int_{0}^{2}xdx=-\frac{x^2}{2}\Big|_{-2}^{0}+\frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{2}=\left[-\frac{0^2}{2}+\frac{(-2)^2}{2}\right]+\left[\frac{2^2}{2}-\frac{0^2}{2}\right]=4$$

dir.

8. $\int_0^{3/4}[|x+2|]\,dx$ in değeri kaçtır?

Çözüm: $\int_0^{3/4}[|x+2|]\,dx=\left[\left|\frac{x^2}{2}+2x\right|\right]\Big|_0^{3/4}$

$$=\left[\left|\frac{(3/4)^2}{2}+2\,\frac{3}{4}\right|\right]$$

$$=\left[\left|\frac{105}{32}\right|\right]$$

$$=3$$

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

9. f(x) in analitik düzlemdeki eğrisinin $x_1 = a, x_2 = b$ noktalarındaki teğetlerinin eğim açıları sıra ile 45^0 ve 30^0dir. $f''(x)$ sürekli bir fonksiyon olduğuna göre $\int_a^b f'(x)f''(x)dx$ in değeri nedir?

Çözüm: "Bir fonksiyonun herhangi bir noktadaki türevi, o noktadaki teğetinin eğimine eşittir." teoremine göre,

$$f'(x) = \tan 45 = 1, f'(x) = \tan 30 = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

olarak bulunur. İntegralde değişken değiştirme uygulamamız gerekir. Bunun için $f'(x) = t$ seçilirse $f''(x)\,dx = dt$ olacağından,

$$\int f'(x)\,f''(x)dx = \int t\,dt = \frac{t^2}{2} + c = \frac{1}{2}[f'(x)]^2 + c$$

$$\int_a^b f'(x)f''(x)dx = \frac{1}{2}f'(x)^2\Big|_a^b = \frac{1}{2}[f'(b)^2 - f'(a)^2] = \frac{1}{2}\left[(1)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2\right] = \frac{1}{3}$$

dir.

10. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^3 x \sin 2x\,dx$ ifadesinin değeri nedir?

Çözüm: Önce

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^3 x \sin 2x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^3 x.2\sin x \cos x dx$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^4 x.\cos x dx$$

düzenlemesi yapalım. Burada $u = \sin x$ değişken değiştirmesi yaparsak $du = \cos x\ dx$ olur.

$$x = 0 \text{ için } u = \sin 0 = 0$$

$$x = \frac{\pi}{6} \text{ için } u = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^3 x \sin 2x\,dx = 2\int_0^{\frac{1}{2}} u^4 du = \frac{2}{5}u^5\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{80}$$

11. $\int_0^1 x^a dx.\int_0^1 x^b dx = \int_0^1 x^a x^b dx$ olduğuna göre ab'nin değeri kaçtır?

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

Çözüm: $\int_0^1 x^a dx . \int_0^1 x^b dx = \int_0^1 x^a x^b dx$

$$\left.\frac{x^{a+1}}{a+1}\right|_0^1 . \left.\frac{x^{b+1}}{b+1}\right|_0^1 = \left.\frac{x^{a+b+1}}{a+b+1}\right|_0^1$$

$$\frac{1}{a+1} \cdot \frac{1}{b+1} = \frac{1}{a+b+1}$$

$(a+1)(b+1) = a+b+1$
$ab = 0$

12. $\int_1^a (2x+5)dx = 100$ olduğuna göre, a'nın değerleri nedir?

Çözüm: $\int_1^a (2x+5)dx = -12$

$\left. x^2+5x \right|_1^a = -12$
$(a^2+5a)-(1^2+5\cdot 1) = -12$
$a^2+5a+6 = 0$
$a = 2$ ve $a = 3$

13. $\int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\cos 2x}\, dx$ integralinin değeri nedir?

Çözüm: $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ olduğunu hatırlayalım.

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\cos 2x}\, dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-(1-2\sin^2 x)}dx$$
$$= \int_0^{\pi/2} \sqrt{2\sin^2 x}dx$$
$$= \sqrt{2}\int_0^{\pi/2} |\sin x| dx \quad , \quad \left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ aralığında } |\sin x| = \sin x\right)$$
$$= \sqrt{2}(-\cos x)\Big|_0^{\pi/2}$$
$$= \sqrt{2}\left(-\cos\frac{\pi}{2} + \cos 0\right)$$
$$= \sqrt{2}$$

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

14. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ olduğuna göre $\int_2^5 d(f^{-1}(x))$ kaçtır?

Çözüm: Ters fonksiyonu bulmak için $f(x)$ yerine x, x yerine $f^{-1}(x)$ yazılmalıdır.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$
$$x = \frac{1}{\sqrt{f^{-1}(x)}}$$
$$f^{-1}(x) = \frac{1}{x^2}$$
$$\int_2^5 d(f^{-1}(x)) = f^{-1}(x)\Big|_2^5 = \frac{1}{x^2}\Big|_2^5 = \frac{1}{5^2} - \frac{1}{2^2} = -\frac{21}{100}$$

15. $f(x) = \int_0^x \frac{2t^2}{t+6}dt$ olduğuna göre $f'(2)$ değeri kaçtır?

Çözüm: $f(x) = \int_0^x \frac{2t^2}{t+6}dt$

$$f'(x) = \frac{2x^2}{x+6}$$
$$f'(2) = \frac{2 \cdot 2^2}{2+6} = 1$$

16. $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$ integralinin sonucu kaçtır?

Çözüm: $x = 2\sin t$ değişken değiştirmesi yapalım.

$x = 2\sin t$ ise $\sqrt{4-x^2} = \sqrt{4-(2\sin t)^2} = 2\sqrt{1-\sin^2 t} = 2\cos t$

$dx = 2\cos t\ dt$

dir. Sınırlar için,

$$x = 0 \text{ ise } 0 = 2\sin t \text{ olup } t = 0$$
$$x = 2 \text{ ise } 2 = 2\sin t \text{ olup } t = \frac{\pi}{2}$$

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

$$\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx = \int_0^{\pi/2} (2\cos t)(2\cos t)dt$$
$$= \int_0^{\pi/2} (4\cos^2 t)dt$$
$$= \int_0^{\pi/2} 4\left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)dt$$
$$= \int_0^{\pi/2} (2+2\cos 2t)\,dt$$
$$= 2t+\sin 2t\Big|_0^{\pi/2}$$
$$= 2\cdot\frac{\pi}{2}+\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$
$$= \pi$$

17. $\dfrac{d}{dx}\left(\displaystyle\int_1^{10}(4x^3+3x^2)dx\right)$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

Çözüm: Belirli bir integralin sonucu sabit bir saydır. Sabit bir sayının integrali daima sıfırdır.

18. $\displaystyle\int_0^{\ln 3}(e^{3x}-e^x)dx$ integralinde $e^x = t$ dönüşümü yapılarak çözünüz.

Çözüm: $e^x = t$ ise $e^x dx = dt$ olup $dx = \frac{1}{e^x}dt = \frac{dt}{t}$ dir. Sınırlar ise $x = 0$ iken $t = e^0 = 1$ ve $x = \ln 3$ iken $t = e^{\ln 3} = 3$ dür.

$$\int_0^{\ell n3}(e^{3x}-e^x)\,dx = \int_0^3 (t^3-t)\frac{dt}{t} = \int_0^3 (t^2-1)\,dt = \frac{t^3}{3}-t\Big|_0^3 = \frac{3^3}{3} - 3 = 6$$

19. $\left(\displaystyle\int_0^a x\,dx\right)^3 = \displaystyle\int_0^a x^4 dx$ integralinin sonucu nedir?

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

Çözüm: $\left(\int_0^a x\,dx\right)^3 = \int_0^a x^4 dx$

$$\left(\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^a\right)^3 = \left.\frac{x^5}{5}\right|_0^a$$

$$\left(\frac{a^2}{2}\right)^3 = \frac{a^5}{5}$$

$$\frac{a^6}{8} = \frac{a^5}{5}$$

$$a = \frac{8}{5}$$

20. $\int_0^{\pi/4} (\tan^4 x + \tan^2 x)\,dx$ integralinin sonucu nedir?

Çözüm:

$$\int_0^{\pi/4} (\tan^4 x + \tan^2 x)\,dx = \int_0^{\pi/4} \tan^2 x\,(1+\tan^2 x)\,dx$$

Değişken değiştirmesini uygulanırsa, $u = \tan x$, $du = 1 + \tan^2 x$ dir. Sınırlar ise,

$x = 0$ için $u = \tan 0 = 0$ ve $x = 0$ için $u = \tan 0 = 0$

$x = 0$ için $u = 0$ ve $x = \frac{\pi}{4}$ için $u = \tan\frac{\pi}{4} = 1$

olur.

$$\int_0^1 u^2\,du = \left.\frac{u^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3}$$

21. $\int_0^1 \left[\frac{d}{dt}\left(\int_0^t 3x^2 + 5\,dx\right)\right]dt$ değeri kaçtır?

Çözüm: $\int_0^1 \left[\frac{d}{dt}\left(\int_0^t 3x^2 + 5\,dx\right)\right]dt = \int_0^1 (3t^2+5)\,dt = (t^3+5t)\Big|_0^1 = 6$

22. $\int_0^{\pi} \sin x \, dx$ integralinde $t = \pi - x$ dönüşümü yapılırsa integralin son durumu nedir?

Çözüm: $t = \pi - x$ değişken değiştirme uygulanırsa, $dt = -dx$ ve $x = \pi - t$ dir.

$t = 0$ için $t = \pi - 0 = \pi$
$t = \pi$ için $t = \pi - \pi = 0$

$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx = \int_{\pi}^{0} \sin(\pi - t)(-dt)$$

$$= \int_0^{\pi} (\sin\pi \cos t - \cos\pi \sin t)\, dt$$

$$= -\int_0^{\pi} \sin t \, dt$$

İntegral işaret değiştirir.

23. $t > 0$ olduğuna göre, $\int_0^{t} (x^2 - 2x)dx$ integralinin alabileceği en büyük değer kaçtır?

Çözüm: $\int_0^{t} (x^2 - 2x)dx = \left. \frac{x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} \right|_0^t = \frac{t^3}{3} - t^2$

$\left(\frac{t^3}{3} - t^2\right)$ ifadesinin en büyük değeri türevinin sıfıra eşitleyerek elde edilir.

$$\left(\frac{t^3}{3} - t^2\right)' = t^2 - 2t = 0$$

$t = 0$ ve $t = 2$

	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$t^2 - 2t = 0$	$-$	$+$	$-$	
	↘	↗	↘	

$t = 2$ noktasında maksimuma ulaşır.

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

$$\int_0^2 (x^2-2x)dx = \frac{x^3}{3} - x^2 \Big|_0^2 = \frac{2^3}{3} - 3^2 = -\frac{19}{3}$$

24. $f(5) = 13, f(1) = 1$ olmak üzere f fonksiyonu için

$$\int_1^5 \frac{x.f'(x)-f(x)}{x^2}$$

integralinin değeri kaçtır?

Çözüm: $\left(\frac{f(x)}{x}\right)' = \frac{f(x)\cdot x - 1\cdot f(x)}{x^2}$ olduğunu hatırlayalım.

$$\int_1^5 \frac{x.f'(x)-f(x)}{x^2} = \int_1^5 \left(\frac{f(x)}{x}\right)' dx = \frac{f(x)}{x}\Big|_1^5 = \frac{f(3)}{3} - \frac{f(1)}{1} = \frac{13}{3} - \frac{1}{1} = \frac{10}{3}$$

25. $f(x) = \begin{cases} x-3, & x \geq 2 \\ 3-2x, & x < 2 \end{cases}$ için $\int_0^2 f(x+1)\,dx$ integralinin değeri kaçtır?

Çözüm: $f(x) = \begin{cases} x-3, & x \geq 2 \\ 3-2x, & x < 2 \end{cases}$

$$f(x+1) = \begin{cases} x-2, & x+1 \geq 1 \\ 1-2x, & x+1 < 1 \end{cases}$$

$$\int_0^2 f(x+1)\,dx = \int_0^1 (2x-1)\,dx + \int_1^2 (x-2)\,dx = x^2 - x\Big|_0^1 + x^2 - x\Big|_1^2 = 2$$

26. f, reel sayılar kümesi üzerinde türevlenebilir bir fonksiyon

$$\int_0^5 f(x)\,dx = 10 \;,\; \int_0^5 x f'(x)\,dx = 15$$

olduğuna göre, f(1) değeri kaçtır?

Çözüm: $\int_0^5 x f'(x)\,dx = 15$ integralinde kısmi istegrasyon yöntemini kullanalım.

$u = x$ ve $dv = f'(x)\,dx$ alalım $du = dx$ ve $v = f(x)\,dx$ olur.

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

$$\int_0^5 x f'(x)\,dx = x f(x) - \int_0^5 f(x)\,dx$$

$15 = x\,f(x) - 10$
$f(1) = 25$

27. $\displaystyle\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \tan^4 x\,dx$ integralinin değeri kaçtır?

Çözüm: İndirgeme formülü

$$\int \tan^n x\,dx = \frac{1}{n-1}\tan^{n-1} x - \int \tan^{n-2} x\,dx$$

olduğundan

$$\begin{aligned}\int \tan^4 x\,dx &= \frac{1}{3}\tan^3 x - \int \tan^2 x\,dx \\ &= \frac{1}{3}\tan^3 x - \int (1+\tan^2 x - 1)\,dx \\ &= \frac{1}{3}\tan^3 x - \tan x + x + c\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \tan^4 x\,dx &= \frac{1}{3}\tan^3 x - \tan x + x\Big|_{\pi/4}^{3\pi/4} \\ &= \left(\frac{1}{3}\tan^3\frac{3\pi}{4} - \tan\frac{3\pi}{4} + \frac{3\pi}{4}\right) - \left(\frac{1}{3}\tan^3\frac{\pi}{4} - \tan\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \frac{4}{3} + \frac{\pi}{12}\end{aligned}$$

28. $\displaystyle\int_1^4 \frac{2x-5}{x^2-5x+6}\,dx$ integralinin değeri kaçtır?

Çözüm: Önce $\dfrac{2x-5}{x^2-5x+6} = \dfrac{A}{x-3} + \dfrac{B}{x-2}$ denklemini rasyonel kesirlere ayıralım.

$$\frac{2x-5}{x^2-5x+6} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-2} = \frac{(A+B)x-(2A+3B)}{(x-3)(x-2)}$$

$A + B = 2, 2A + 3B = 5$
$A = B = 1$

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

$$\int_1^4 \frac{2x-5}{x^2-5x+6}dx = \int_1^4 \frac{1}{x-3}dx + \int_1^4 \frac{1}{x-2}dx$$
$$= \ln|x-3| + \ln|x-2| \Big|_1^4$$
$$= \ln 1 + \ln 2 - \ln 2 - \ln 1$$
$$= 0$$

KAYNAKÇA

1. Prof. Dr. Mustafa BALCI, Matematik Analiz II, Bilim Kitap Kırtasiye Ltd. Şti., Ankara, 1997.
2. Prof. Dr. H. Hilmi HACISALİHOĞLU, Lise Matematik 1, 2, 3, Serhat Yayınları A.Ş. İstanbul, 2001.
3. Prof. Ahmet KARADENİZ, Yüksek Matematik 2, Çaylayan Kitapevi, Beyoğlu, İstanbul, 1992.
4. George B. Thomas Jr., Thomas Calcalus, Çev. Recep Korkmaz, Beta Yayınları, 11. Baskı, Ağustos 2009, İstanbul.
5. Murray R. Spiegel, İleri Matematik, Çev. Prof. Dr. H. Hilmi HACISALİHOĞLU, Schaum Yayınları, Nobel Yayın Dağıtım, 1997, Ankara.
6. Ahmet HANÇERLİOĞLU, Faniye ALAN, Matematik Seti, Tümay Yayınları, 2006, ANKARA
7. Dr. Seyfettin AYDIN, Analize Giriş I, 1986, ANKARA.
8. M. Zeki DERMAN, Ökkeş ÖZKÖSELER, Serdar GÜLMEZ, Matematik Lise 1, 2, 3, Zafer Yayınları, 2006, ANKARA.
9. Prof. Dr. Mahmut KOÇAK, Reel Analiz Ders Notları, Eskişehir, 2015.
10. Louis Brand, Yüksek Matematik, Çeviren Mehmet CAN, Çinçiati Üniversitesi, ABD, 2004.

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ