5. BÖLÜM
İNTEGRALİN UYGULAMALARI

RIEMANN ANLAMINDA İNTEGRALLENEBİLME

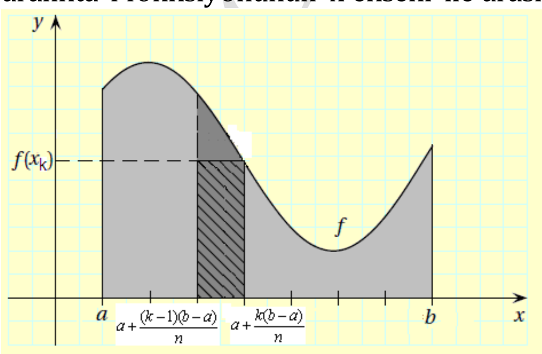
Georg Friedrich Bernhard Riemann
(17 Eylül 1826, Hannover Krallığı, 20 Temmuz 1866, Verbania, İtalya)

5.1. Teorem: f , $[a,b]$ aralığında sürekli bir fonksiyon olsun. Bu aralıkta f fonksiyonunun x ekseni ile arasında kalan alanı $R(f,P)$ ile gösterirsek,

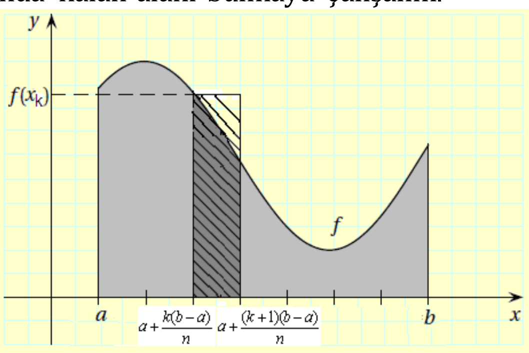
$$R(f,P)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{b-a}{n}\right)\sum_{k=0}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)$$

şeklindedir.

İspat: $[a,b]$ aralığında herhangi bir f fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu aralıkta f fonksiyonunun x ekseni ile arasında kalan alanı bulmaya çalışalım.



Şekil 1



Şekil 2

Önce bu f fonksiyonun altında kalan $[a,b]$ aralığında bölgeyi n eşit parçaya şekil 1 deki gibi bölelim. Sonra şekil 2 deki gibi bölelim. Bu takdirde $[a,b]$ aralığı,

$$P=\left\{a\,,a+\frac{b-a}{n}\,,a+\frac{2(b-a)}{n}\,,a+\frac{3(b-a)}{n}\,,\ldots,a+\frac{(n-1)(b-a)}{n}\,,b\right\}$$

şeklinde parçalanabilir. f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sınırlı olduğundan $[a,b]$ nin P parçalanmasıyla elde edilen

$$\left[a\,,a+\frac{b-a}{n}\right],\ \left[a+\frac{b-a}{n}\,,a+\frac{2(b-a)}{n}\right],\ \ldots,\ \left[a+\frac{(n-1)(b-a)}{n}\,,b\right]$$

alt aralıkların her birinde sınırlı şekilde tanımlayalım. Burada iki parça arasındaki fark herhangi bir k için,

$$\left[a+\frac{k(b-a)}{n}\right]-\left[a+\frac{(k-1)(b-a)}{n}\right]=\frac{b-a}{n}$$

olarak bulunur. Şimdi her bir parçasının alanını bulmaya çalışalım. Önce şekil 1'de taralı bölgenin alanı,

$$\text{Her } k\in[a,b] \text{ için } f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\left(\frac{b-a}{n}\right)$$

şeklindedir. Bütün fonksiyonun her parçasına bu durum uygulanırsa,

$$A(f,P)=\left(\frac{b-a}{n}\right)\sum_{k=0}^{n}f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)$$

bulunur. Buna P parçalanmasına göre f nin **alt Darboux toplamı** denir. Benzer şekilde şekil 2'de taralı bölgenin alanı,

$$\text{Her } k\in[a,b] \text{ için } f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\left(\frac{b-a}{n}\right)$$

şeklindedir. Bütün fonksiyonun her parçasına bu durum uygulanırsa,

$$Ü(f,P)=\left(\frac{b-a}{n}\right)\sum_{k=0}^{n}f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)$$

elde edilir. Buna P parçalanmasına göre f nin **üst Darboux toplamı** denir.

Şimdi $[a,b]$ aralığı sonsuz parçaya ayrıldığını düşünelim. Bu takdirde $n\to\infty$ olup alt Darboux toplam ve üst Darboux toplamları,

$$\lim_{n\to\infty}A(f,P)=\lim_{n\to\infty}Ü(f,P)$$

şekline dönüşür. Bu duruma P parçalanmasına göre f fonksiyonunu **Riemann toplamı** denir. Riemann toplamı $R(f,p)$ ile gösterirsek,

$$R(f,P)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{b-a}{n}\right)\sum_{k=0}^{n}f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)$$

elde edilir.

1. Örnek: $f:[0,2]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x$ şeklinde sürekli bir fonksiyonun x ekseni ile arasında kalan alanı bulunuz.

Çözüm: Burada sınırlar seçilerek $a=0$ ve $b=2$ olduğundan,

$$\frac{b-a}{n}=\frac{2}{n}\ ,\ f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)=f\left(\frac{2k}{n}\right)=\frac{2k}{n}$$

dir. Buna göre bu bölgenin alanı,

$$R(f,P)=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n}\frac{2k}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{n^2}\sum_{k=0}^{n}k=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{n^2}\frac{n(n+1)}{2}=2\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)}{n}=2$$

olarak elde edilir.

2. Örnek: $f:[0,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2$ şeklinde sürekli bir fonksiyonun x ekseni ile arasında kalan alanı bulunuz.

Çözüm: Burada sınırlar seçilerek $a=0$ ve $b=1$ olduğundan,

$$\frac{b-a}{n}=\frac{1}{n}\ ,\ f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)=f\left(\frac{k}{n}\right)=\left(\frac{k}{n}\right)^2$$

dir. Buna göre bu bölgenin alanı,

$$\begin{aligned}R(f,P)&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{k=0}^{n}k^2\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3+3n^2+n}{6n^3}\\&=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

3. Örnek: $f:\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R},\ f(x)=\sin x$ şeklinde sürekli bir fonksiyonun x ekseni ile arasında kalan alanı bulunuz.

Çözüm: Burada sınırlar seçilerek $a=0$ ve $b=\frac{\pi}{2}$ olduğundan,

$$\frac{b-a}{n}=\frac{\pi}{2n}\ ,\ f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)=f\left(\frac{k\pi}{2n}\right)=\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$$

dir. Tümevarımda ispat edilmiştir ki,

$$\sum_{k=0}^{n}\sin kx=\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\right)x.\sin\frac{n}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}$$

şeklindedir. Buna göre bu bölgenin alanı,

$$R(f,P)=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2n}\sum_{k=0}^{n}\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2n}\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2n}\right)\sin\frac{n}{2}\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{4n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\pi}{2n}\sin\frac{\pi}{4}\left(\frac{n+1}{n}\right)\sin\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{4n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\sqrt{2}\pi}{4n}}{\sin\frac{\pi}{4n}}\lim_{n\to\infty}\left(\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4n}+\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{4n}\right)$$

, ($n=\frac{1}{m}$ seçilip, $n\to\infty$ için $m\to 0$)

$$=\lim_{m\to 0}\frac{\frac{\sqrt{2}\pi m}{4}}{\sin\frac{\pi m}{4}}\frac{\sqrt{2}}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{\pi}{4n}+\sin\frac{\pi}{4n}\right)$$

$$=\lim_{m\to 0}\frac{\frac{\pi m}{4}}{\sin\frac{\pi m}{4}}$$

$$= 1$$

olarak elde edilir.

5. 2. Teorem (İntegralin temel teoremi): f , $[a,b]$ aralığında sürekli bir fonksiyonunu ve her $x\in(a,b)$ için $F'(x)=f(x)$ olacak şekilde sürekli bir $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyon olsun. Bu takdirde,

$$F(b)-F(a)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{b-a}{n}\right)\sum_{k=0}^{n}f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)$$

dır.

İspat: $[a,b]$ aralığının herhangi bir parçalanması,

$$P=\left\{a\,,a+\frac{b-a}{n}\,,a+\frac{2(b-a)}{n}\,,a+\frac{3(b-a)}{n}\,,\dots,a+\frac{(n-1)(b-a)}{n}\,,b\right\}$$

olsun. Diferansiyel hesabın ortalama değer teoremi gereğince,

$$F(x_k)-F(x_{k-1})=\frac{dF(s_k)}{dx}(x_k-x_{k-1})$$

olacak şekilde en az bir $s_k \in (x_k - x_{k-1})$ noktaları vardır. Hipotezde $F'(x)=f(x)$ olması göz önüne alırsak ve $x_k = a+\frac{k(b-a)}{n}$ seçilirse,

$$F\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right)-F\left(a+\frac{(k-1)(b-a)}{n}\right)=f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right)\left(\frac{b-a}{n}\right)$$

yazılabilir. Buradan,

$$\sum_{k=0}^{n}\left[F\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right)-F\left(a+\frac{(k-1)(b-a)}{n}\right)\right]=\sum_{k=0}^{n}\left[f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right)\left(\frac{b-a}{n}\right)\right]$$

bulunur. 1. taraf gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$F(a)-F(b)=\left(\frac{b-a}{n}\right)\sum_{k=0}^{n}f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right)$$

ifadesi karşımıza çıkar. Burada $n\to\infty$ alınırsa,

$$F(a)-F(b)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{b-a}{n}\right)\sum_{k=0}^{n}f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right)$$

bulunur. //

Diğer taraftan bir f , $[a,b]$ aralığında sürekli bir fonksiyonunu ve her $x\in(a,b)$ için $F'(x)=f(x)$ olacak şekilde sürekli bir $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyon olması belirsiz integralin tanımına göre f fonksiyonun integralinin F fonksiyonu olduğunu göstermektedir. Yani,

$$F(x)=\int f(x)dx$$

dir. Ayrıca 5.2. teoreme göre, $[a,b]$ sınırlarında F fonksiyonu aşikârdır ki,

$$\int_a^b f(x)dx=F(a)-F(b)$$

yazılabilir. Bütün bu yazıma göre,

$$\int_a^b f(x)dx=F(a)-F(b)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{b-a}{n}\right)\sum_{k=0}^{n}f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right)=R(f,P)$$

eşitliği elde edilir. //

Elde ettiğimiz bu eşitliğe **Riemann anlamında integrallenme** adı verilir.

4. Örnek: 1. örnekte tanımladığımız, $f:[0,2]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x$ şeklinde sürekli bir fonksiyonun x ekseni ile arasında kalan alanı integralin temel teoremi ile bulunuz.

Çözüm: $\int_0^2 x\,dx=\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^2=\frac{2^2}{2}-\frac{0^2}{2}=2$

olarak bulunur ki, bu bize 1. örnekteki sonucun aynı olduğunu gösterir.

5. Örnek: 2. örnekte tanımladığımız, $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$ şeklinde sürekli bir fonksiyonun x ekseni ile arasında kalan alanı integralin temel teoremi ile bulunuz.

Çözüm: $\int_0^1 x^2dx=\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1=\frac{1^3}{3}-\frac{0^3}{3}=\frac{1}{3}$

olarak bulunur ki, bu bize 2. örnekteki sonucun aynı olduğunu gösterir.

6. Örnek: 3. örnekte tanımladığımız, $f:\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sin x$ şeklinde sürekli bir fonksiyonun x ekseni ile arasında kalan alanı integralin temel teoremi ile bulunuz.

Çözüm: $\int_0^{\pi/2}\sin x dx=-\cos x\Big|_0^{\pi/2}=-\left(\cos\frac{\pi}{2}-\cos 0\right)=1$

olarak bulunur ki, bu bize 3. örnekteki sonucun aynı olduğunu gösterir.

1 – İNTEGRAL İLE LİMİT HESAPLARI

Riemann anlamında integrallenmeden şu sonucu çıkarırız:

5.1. Sonuç: $y=f(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli ise

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{b-a}{n}\right)\sum_{k=0}^{n}f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right)=\int_a^b f(x)dx$$

dir.

Örnek: $\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n^3}\left(1^2+2^2+3^2+...+n^2\right)$ limitinin sonucu nedir?

Çözüm:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n^3}\left(1^2+2^2+3^2+...+n^2\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n^3}\sum_{k=0}^{n}k^2$$

$$=3\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2$$

olur. 5.1. Sonuçta $a=0$, $b=1$, $f(x)=x^2$ alınırsa $x=\frac{k}{n}$ olacaktır. Buna göre,

$$3\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2=3\int_0^1 x^2\,dx$$

$$\begin{aligned} &= x^3\Big|_0^1 \\ &= 1^3 - 0^3 \\ &= 1 \end{aligned}$$

bulunur.

Örnek: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin 0+\sin\frac{1}{n}+\sin\frac{2}{n}+...+\sin\frac{n}{n}\right)$ limitinin sonucu nedir?

Çözüm: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin 0+\sin\frac{1}{n}+\sin\frac{2}{n}+...+\sin\frac{n}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n}\sin\frac{k}{n}$

olur. 5.1. Sonuçta $a=0$, $b=1$, $f(x)=\sin x$ alınırsa $x=\frac{k}{n}$ olacaktır. Buna göre,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\sin\frac{k}{n} &= \int_0^1 \sin x\,dx \\ &= -\cos x\Big|_0^1 \\ &= -(\cos 1-\cos 0) \\ &= 1-\cos 1 \end{aligned}$$

bulunur.

Örnek: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\left(e^{\frac{1}{n}}+2e^{\frac{2}{n}}+3e^{\frac{3}{n}}+...+ne^{\frac{n}{n}}\right)$ limitinin sonucu nedir?

Çözüm:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\left(e^{\frac{1}{n}}+2e^{\frac{2}{n}}+3e^{\frac{3}{n}}+...+ne^{\frac{n}{n}}\right) &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n}k.e^{\frac{k}{n}} \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}\right).e^{\frac{k}{n}} \end{aligned}$$

olur. 5.1. Sonuçta $a=0$, $b=1$, $f(x)=x.e^x$ alınırsa $x=\frac{k}{n}$ olacaktır. Buna göre,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}\right).e^{\frac{k}{n}} &= \int_0^1 x.e^x\,dx \\ &= e^x(x-1)\Big|_0^1 \\ &= e^1(1-1)-e^0(0-1) \\ &= 1 \end{aligned}$$

bulunur.

Örnek: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\pi}{2n} \sum\limits_{k=0}^{n} \cos\frac{k\pi}{2n}$ limitinin sonucu nedir?

Çözüm: 5.1. Sonuçta $a=0$, $b=\frac{\pi}{2}$, $f(x)=\cos x$ alınırsa $x=\frac{k\pi}{2n}$ olacaktır. Buna göre,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{2n} \sum_{k=0}^{n} \cos\frac{k\pi}{2n} = \int_0^{\pi/2} \cos x \, dx$$
$$= \sin x \Big|_0^{\pi/2}$$
$$= \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0$$
$$= 1$$

bulunur.

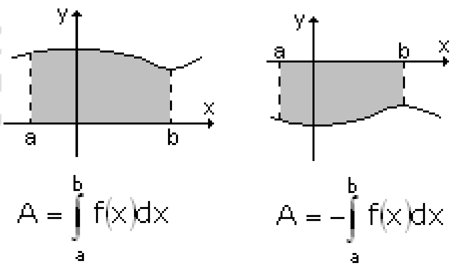
2 – İNTEGRAL İLE ALAN HESAPLARI

Riemann anlamında integrallenmeden şu sonucu çıkarırız:

5.2. Sonuç: $y=f(x)$ f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli, $x=a$, $x=b$ doğruları ile sınırlanan ve x ekseni arasında kalan alan

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

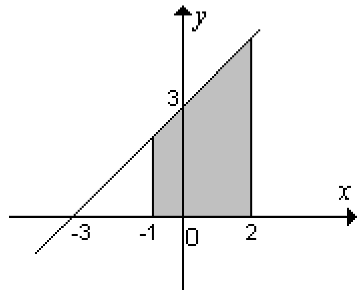
dir. Bu durum,



grafiği ile izah edilir.

Örnek: $y=x+3$ fonksiyonunun $x=-1$ ve $x=2$ doğrularını ile x ekseni arasında kalan alanı bulunuz.

Çözüm: Önce $y=x+3$ fonksiyonun grafiğini çizelim: $x=0$ ise $y=3$ ve $y=0$ ise $x=-3$ bulunur. Buna göre doğrunun grafiği:



şeklindedir. Buna göre,

$$A=\int_{-1}^{2}(x+3)dx=\left.\frac{x^2}{2}+3x\right|_{-1}^{2}$$

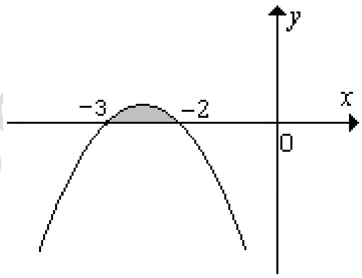
$$=\left(\frac{2^2}{2}+3-2\right)-\left(\frac{(-1)^2}{2}+3(-1)\right)$$

$$=11-\frac{1}{2}=\frac{21}{2}br^2$$

bulunur.

Örnek: $y=-(x^2+5x+6)$ fonksiyonun x ekseniyle arasında kalan alanı bulunuz.

Çözüm: Önce $y=-(x^2+5x+6)$ fonksiyonun grafiğini çizelim: $x=0$ ise $y=6$ ve $y=0$ ise $x_1=-2$, $x_2=-3$ bulunur. Buna göre parabolün grafiği:



şeklindedir. Buna göre,

$$A=\int_{-3}^{-2}-\left(x^2+5x+6\right)dx$$

$$=-\left.\left(\frac{x^3}{3}+\frac{5x^2}{2}+6x\right)\right|_{-3}^{-2}$$

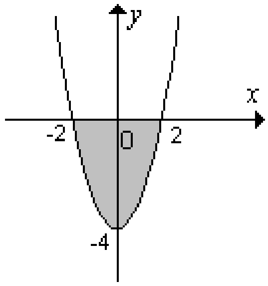
$$=-\left(\frac{(-2)^3}{3}+\frac{5(-2)^2}{2}+6-(-2)\right)+\left(\frac{(-3)^3}{3}+\frac{5(-3)^2}{2}+6(-3)\right)$$

$$=\frac{1}{6}br^2$$

bulunur.

Örnek: $f(x)=x^2-4$ fonksiyonunu x ekseni ile sınırladığı bölgenin alanını bulunuz.

Çözüm: Önce $f(x)=x^2-4$ fonksiyonun grafiğini çizelim: $x=0$ ise $y=-4$ ve $y=0$ ise $x_1=-2$, $x_2=2$ bulunur. Buna göre parabolün grafiği:



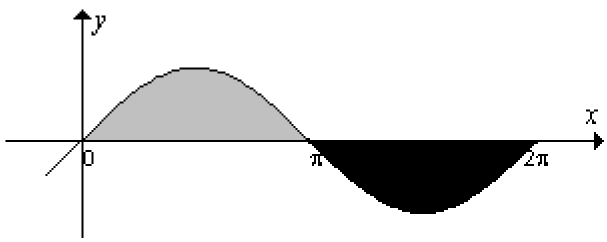
şeklindedir. Buna göre,

$$\begin{aligned} A &= -\int_{-2}^{2}(x^2-4)dx \\ &= -\left(\frac{x^3}{3}-4x\right)\Bigg|_{-2}^{2} \\ &= -\left(\frac{2^3}{3}-4-2\right)+\left(\frac{(-2)^3}{3}-4(-2)\right) \\ &= \frac{32}{3}br^2 \end{aligned}$$

bulunur.

Örnek: $[0,2\pi]$ aralığında $y=\sin x$ fonksiyonunun x ekseni ile kapladığı alanı bulunuz.

Çözüm: Önce $y=\sin x$ fonksiyonun grafiğini çizmeyi daha önceden görmüştük.



Buna göre,

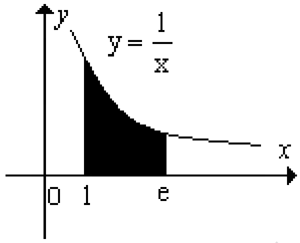
$$A=\int_{0}^{\pi}\sin x dx-\int_{\Pi}^{2\pi}\sin x dx=-\cos x\Big|_{0}^{\pi}+\cos x\Big|_{\pi}^{2\pi}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\cos x\Big|_0^{\pi} + \cos x\Big|_{\pi}^{2\pi} \\
&= (\cos\pi - \cos 0) + (\cos 2\pi - \cos\pi) \\
&= 4
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Örnek: $y = \dfrac{1}{x}$ fonksiyonun $x = 1$ ve $x = e$ doğrularını ile x ekseni arasında kalan alanı bulunuz.

Çözüm: Bu fonksiyonun grafiğini çizersek



bulunur. Buna göre,

$$A = \int_1^e \frac{1}{x}dx = \ln x\Big|_1^e = \ln e - \ln 1 = 1$$

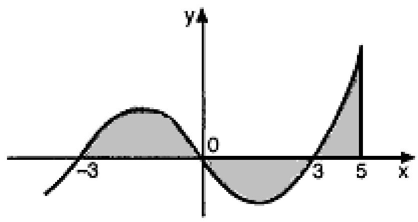
elde edilir.

Örnek: $y = x^3 - 9x$ fonksiyonunun grafiği, x ekseni ve $x = 5$ doğrusu ile sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

Çözüm: $x^3 - 9x = 0$

$x(x^2 - 9) = 0$

$x = 0 \vee x = \pm 3$



$$A_1 = \int_{-3}^{0} (x^3 - 9x)dx = \frac{x^4}{4} - 9\frac{x^2}{2}\Bigg|_{-3}^{0} = 0 - \left(\frac{(-3)^4}{4} - 9\frac{(-3)^2}{2}\right) = \frac{81}{4}$$

$$A_2 = \int_{0}^{3} (x^3 - 9x)dx = \frac{x^4}{4} - 9\frac{x^2}{2}\Bigg|_{0}^{3} = \left(\frac{3^4}{4} - 9\frac{3^2}{2}\right) - 0 = \frac{81}{4}$$

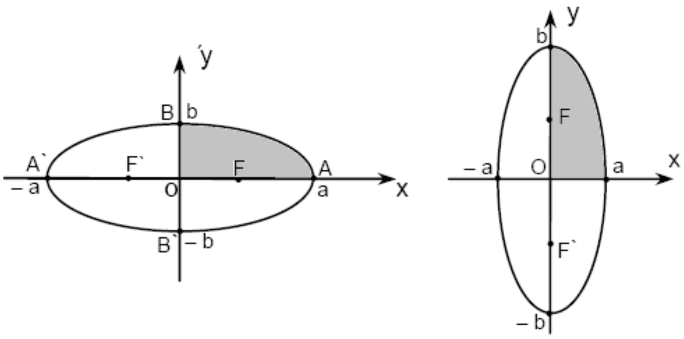
$$A_3 = \int_{3}^{5} (x^3 - 9x)dx = \frac{x^4}{4} - 9\frac{x^2}{2}\Bigg|_{0}^{3} = \left(\frac{5^4}{4} - 9\frac{5^2}{2}\right) - \left(\frac{3^4}{4} - 9\frac{3^2}{2}\right) = \frac{256}{4}$$

$$A=\frac{81}{4}+\frac{81}{4}+\frac{256}{4}=\frac{209}{2}br^2$$

bulunur.

Örnek: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ elipsin alanını bulunuz.

Çözüm: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ise $y=\pm\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ dir.



$$A=4\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

bulunmalıdır. Burada $x=a\sin t$ değişken değiştirmesini yaparsak,

$dx=a\cos t dt$

$x=0$ için $t=0$

$x=a$ için $t=\dfrac{\pi}{2}$

olur. Buna göre;

$$A=\frac{4b}{a}\int_0^{\pi/2}\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}.a.\cos t\,dt$$

$$=4b\int_0^{\pi/2}\sqrt{a^2(1-\sin^2 t)}\cos t\,dt$$

$$=4ab\int_0^{\pi/2}\sqrt{\cos^2 t}.\cos t\,dt$$

$$=4ab\int_0^{\pi/2}\cos^2 t\,dt$$

$$=4ab\int_0^{\pi/2}\frac{1+\cos 2t}{2}dt$$

$$=2ab\left[t+\frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\pi/2}$$

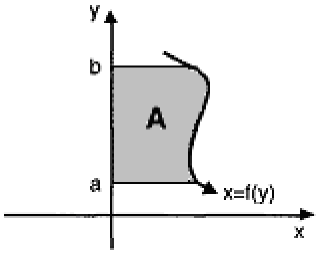
$$=2ab\left[\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\sin\left(2.\frac{\pi}{2}\right)\right]-2ab\left[0+\frac{1}{2}\sin(2.0)\right]$$

$$=2ab\left[\frac{\pi}{2}\right]$$

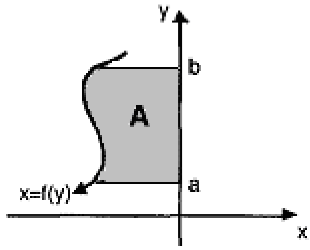
$$=\pi ab\ br^2$$

olur.

Açıklama: $x=f(y)$ olarak verilen bir f fonksiyon, $y=a$, $y=b$ doğruları ve y ekseni ile sınırlanan düzlemsel bölgenin alanı;



$$A=\int_a^b f(y)dy$$

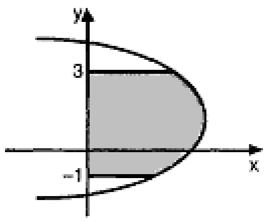


$$A=-\int_a^b f(y)dy$$

biçimindedir. $x=f(y)$ fonksiyonunun grafiği ve y ekseni ile sınırlanan alan bulunurken $f(y)=0$ denkleminin kökleri (eğrinin y eksenini kestiği noktaların ordinatları) bulunur. Bu sınırlar altında integral alınır.

Örnek: $x=-(y^2-2y-8)$ parabolü, y ekseni, $y=-1$ ve $y=3$ doğruları arasındaki alanı bulunuz.

Çözüm: Fonksiyon $x=f(y)$ şeklinde tanımlandığından integral y değişkenine göre alınacaktır.



$x=0$ ise $y^2-2y-8=0$ olup $y_1=4$, $y_2=-2$

olur. Bu durumda;

$$A=\int_{-1}^{3}(-y^2+2y+8)dx$$

$$= -\frac{y^3}{3} + y^2 + 8y \Big|_{-1}^{3}$$

$$= \left(-\frac{3^3}{3} + 3^2 + 8.2\right) - \left(-\frac{(-1)^3}{3} + (-1)^2 + 8(-1)\right)$$

$$= \frac{46}{3} br^2$$

olur.

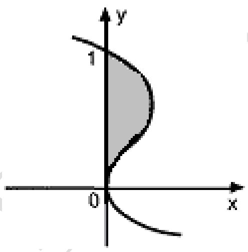
Örnek: $x = y^2 - y^3$ eğrisi ve y ekseniyle sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

Çözüm: Fonksiyon $x = f(y)$ biçiminde verildiğinde integral y değişkenine göre alınacaktır. Şimdi eğrinin y eksenini kestiği noktaları bulalım ve grafiğini çizelim.

$$y^2 - y^3 = 0$$

$$y^2(y-1) = 0$$

$$y = 0 \wedge y = q$$



$$A = \int_0^1 (y^2 - y^3)dy$$

$$= \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} \Big|_0^1$$

$$= \frac{1^3}{3} - \frac{1^4}{4}$$

$$= \frac{1}{12} \text{ br}^2$$

olur.

5.3. Teorem: $y = f(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli, $x = a$, $x = b$ doğruları ile sınırlanan bölgenin alanı;

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(y)dy$$

dir.

İspat: $y=f(x)$ fonksiyonu $x=a$, $x=b$ doğruları ile sınırlanan alanı;

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b ydx,\ x=f^{-1}(y)$$

şekline dönüştürülüp;

$x=a$ için $f^{-1}(y)=a$ ise $y=f(a)$

$x=b$ için $f^{-1}(y)=b$ ise $y=f(b)$

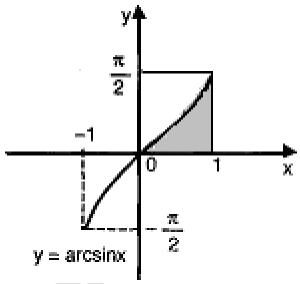
bulunur. Buna göre,

$$\int_{f(a)}^{f(b)} xdy=\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(y)dy=\int_a^b f(x)dx$$

elde edilir.

Örnek: $y=\arcsin x$ fonksiyonunu x ekseni $x=0$ ve $x=1$ doğruları arasındaki alanı ters fonksiyon kullanarak bulunuz.

Çözüm:



$$A=\int_0^1 \arcsin x\,dx$$

dir. İstenen alanı 5.3. teoreme göre hesaplayalım.

$y=\arcsin x$ ise $f^{-1}(y)=x=\sin y$ ve $dx=\cos y\,dy$

Sınırlar ise $x=0$ ise $y=\arcsin 0=0$

$x=1$ ise $y=\arcsin 1=\dfrac{\pi}{2}$

dir. Buna göre,

$$\int_0^1 \arcsin x dx=\int_0^{\pi/2} y\cos y\,dy$$

integrali elde edilir. Burada kısmi integrasyon uygularsak,

$u=y$, $dv=\cos y\,dy$

$du=dy$, $v=\sin y$

alınırsa,

$$\int y\cos y\,dy=y\sin y-\int \sin y\,dy$$

$$= y\sin y + \cos y$$

bulunur. O halde,

$$\int_0^1 \arcsin x dx = \int_0^{\pi/2} y\cos y\, dy$$

$$= y\sin y + \cos y \Big|_0^{\pi/2}$$

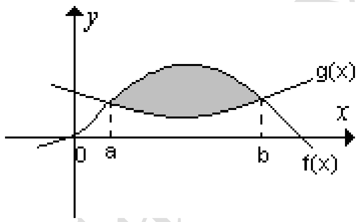
$$= \left(\frac{\pi}{2}.\sin\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2}\right) - (0\sin 0 + \cos 0)$$

$$= \frac{\pi}{2} - 1$$

elde edilir.

3 – İKİ EĞRİ ARASINDA KALAN ALAN

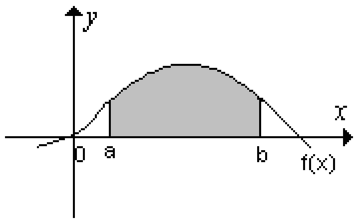
5.4. Teorem: f ve g fonksiyonları $[a,b]$ aralığı ile x ekseni arasında kalan alan,



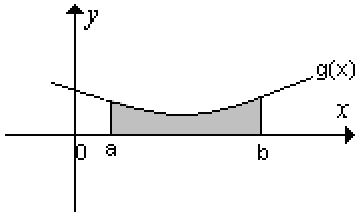
$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)dx]$$

dir.

İspat: $[a,b]$ aralığında f fonksiyonun alanı $A_1 = \int_a^b f(x)dx$



şeklindedir. Yine $[a,b]$ aralığında g fonksiyonun alanı $A_2 = \int_a^b g(x)dx$



şeklindedir. Buna göre istene bölge,

$$A=A_1-A_2=\int_a^b\left[f(x)-g(x)dx\right]$$

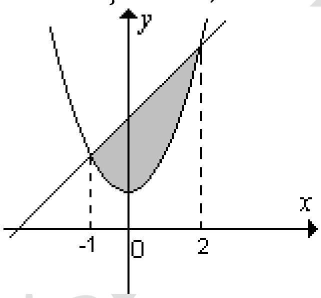
biçimindedir.

Örnek: $y=x^2+1$ ve $y=x+3$ fonksiyonları arasında kalan alanı bulunuz.

Çözüm: Önce bu iki fonksiyonun çakışma noktalarını bulalım:

$x^2+1=x+3$ ise $x=-1$ ve $x=2$

dir. Şimdi fonksiyonların grafiklerini çizersek,



bulunur. Buna göre;

$$A=\int_{-1}^{2}(x+3)-\left(x^2-1\right)dx=\int_{-1}^{2}(x+2-x^2)dx=\frac{x^2}{2}+2x-\frac{x^3}{3}\Bigg|_{-1}^{2}=\frac{9}{2}\,br^2$$

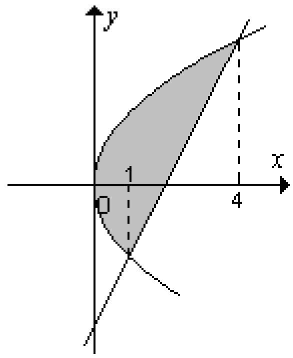
elde edilir.

Örnek: $y^2=4x$ ve $y=2x-4$ fonksiyonları arasında kalan alanı bulunuz.

Çözüm: Önce bu iki fonksiyonun çakışma noktalarını bulalım:

$y=2\sqrt{x}$ ve $y=2x-4$ ise $2\sqrt{x}=2x-4$ olup $x=1$ ve $x=4$

dir. Şimdi fonksiyonların grafiklerini çizersek,



bulunur. Buna göre;

$$A=\int_1^4 (2\sqrt{x})-(2x-4)\,dx$$

$$=\int_1^4 (2x^{\frac{1}{2}}-2x+4)\,dx$$

$$=\left.\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3/2}-\frac{2x^2}{2}+4x\right|_1^4$$

$$=\left(\frac{4}{3}4^{\frac{3}{2}}-16+16\right)-\left(\frac{4}{3}-1+4\right)$$

$$=\frac{19}{3}\text{br}^2$$

4 – İNTEGRALLE HACİM HESAPLARI

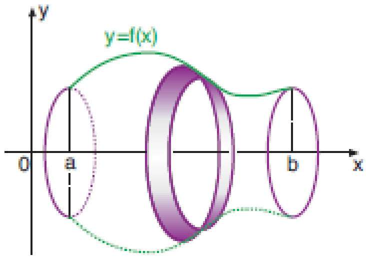
Bu kısımda, $[a,b]$ aralığında integrallene bilen bir f fonksiyonunun grafiğinin x (ya da y) ekseni etrafında 360^0 döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmini bulacağız.

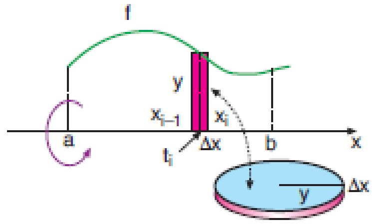
5.5. Teorem: Bir f fonksiyonunda [a; b] aralığında sürekli, $x=a$, $x=b$ doğruları x ekseni ile sınırlanan düzlemsel bölgenin x ekseni etrafında 360^0 döndürülünce oluşan cismin hacmi;

$$H=\pi\int_a^b f^2(x)dx$$

şeklindedir.

İspat:





$[a,b]$ aralığının bir düzgün parçası P, bu parçalara ait bir alt aralık $[x_{i-1},x_i]$ olsun. $t_i \in [x_{i-1},x_i]$ için bir kenarı $\Delta x = x_i - x_{i-1}$ ve diğer kenarı da $y = f(t_i)$ olan dikdörtgensel bölgenin x ekseni etrafında döndürüldüğünü düşünelim. Yarıçapı y ve yüksekliği Δx olan ince bir silindir tabaka oluşur. Bu silindir tabakanın hacmi

$$\Delta H = \pi[f(t_i)]^2.\Delta x = \pi y^2.\Delta x$$

olur.

P parçası ile elde edilen silindir tabakasının x ekseni etrafında döndürülmesiyle bulunan bütün silindir tabakaların hacimleri toplamı,

$$H = \sum_{i=0}^{n} \Delta H_i = \sum_{i=0}^{n} \pi.y^2.\Delta x$$

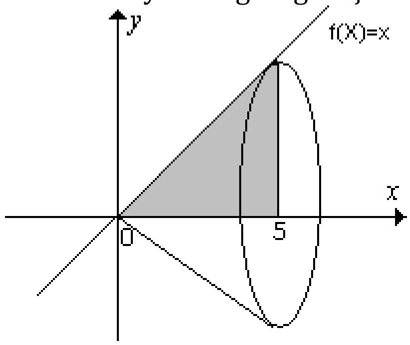
olur. Buna göre,

$$H = \lim_{\Delta x \to \infty} \sum_{i=0}^{n} \pi.y^2.\Delta x = \pi \int_a^b y^2 dx$$

elde edilir.

Örnek: $y = x$ fonksiyonun $x = 5$ ve $y = 0$ doğruları ile sınırlanan düzlemsel bölgeyi x ekseni etrafında 360^0 döndürülmesiyle oluşan cismin hacmini bulunuz.

Çözüm: Önce verilen fonksiyonun grafiğini çizelim:



elde edilen bu şekle göre,

$$H = \pi \int_0^5 x^2 dx$$

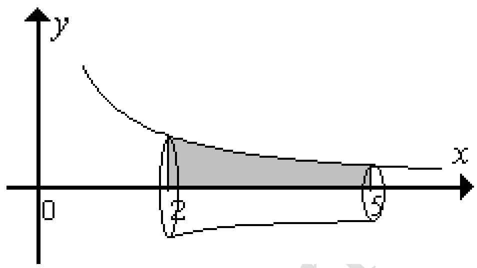
$$= \pi \frac{x^3}{3}\Big|_0^5$$

$$= \frac{125}{3}\pi$$

bulunur.

Örnek: $y = \frac{1}{x}$ eğrisini $x = 2$, $x = 5$ ve $y = 0$ doğruları ile sınırlanan düzlemsel bölgenin x ekseni etrafında 360^0 döndürülmesiyle oluşan cismin hacmini bulunuz.

Çözüm:



$$H = \pi \int_2^5 \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx$$

$$= \pi \int_2^5 x^{-2} dx$$

$$= -\pi x^{-1}\Big|_2^5$$

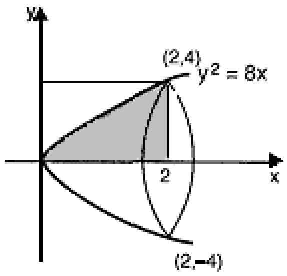
$$= -\pi \frac{1}{x}\Big|_2^5$$

$$= -\pi\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{3\pi}{10} \text{ br}^3$$

Örnek: $y^2 = 8x$ parabolünün $x = 2$ doğrusu ile sınırlanan birinci bölgedeki düzlemsel bölgeyi x ekseni etrafında 360^0 döndürülmesiyle oluşan cismin hacmini bulunuz.

Çözüm:

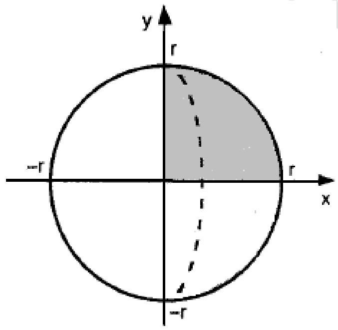


$$H = \pi \int_{2}^{5} 8x\,dx$$

$$= 8\pi \left. \frac{x^2}{2} \right|_{0}^{2}$$

$$= 16\pi \text{ br}^3$$

Örnek: $x^2 + y^2 = r^2$ çemberini x ekseni etrafında 360^0 döndürülerek oluşan kürenin hacmini bulunuz.



Çözüm: Yarıçapı r olan bir çember kendi ekseni etrafında döndürülünce bir küre elde edilir. 1. bölgeyi x ekseni etrafında döndürüp 2 ile çarparsak istenen elde edilir. Buna göre,

$$H = 2\pi \int_{0}^{r} r^2 - x^2 dx$$

$$= 2\pi \left. \left(r^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \right|_{0}^{r}$$

$$= 2\pi \left(r^3 - \frac{r^3}{3} \right)$$

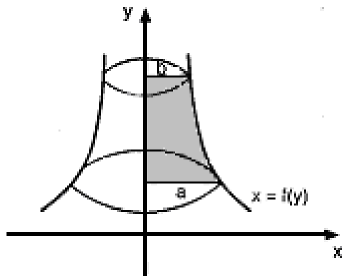
$$= \frac{4}{3}\pi r^3 \text{ br}^3$$

elde edilir.

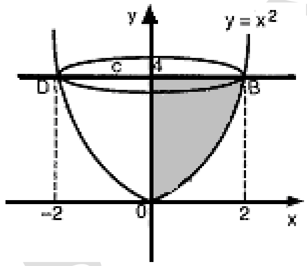
Açıklama: $x = f(y)$ olarak verilen bir f fonksiyon, $y = a$, $y = b$ doğruları ve y ekseni ile sınırlanan düzlemsel bölgenin y ekseni etrafında 360^0 döndürülmesiyle ile cismin hacmi,

$$H = \pi \int_a^b f(y)^2.dy = \pi \int_a^b x^2.dy$$

biçimindedir.



Örnek: $y = x^2$ parabolü, $y = 4$ ve $y = 0$ doğrusu ile sınırlı bölgenin y ekseni etrafında 360^0 dönmesinden elde edilen cismin hacmini bulunuz.



Çözüm: Dönme y ekseni etrafında yapıldığından

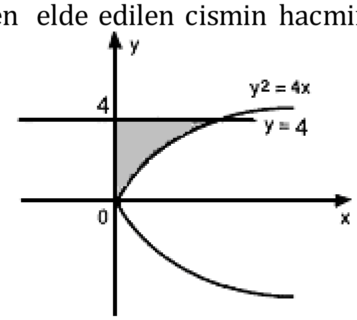
$$y = x^2 \text{ ise } x = \pm\sqrt{y}$$

olur. Buna göre,

$$H = \pi \int_0^4 (\sqrt{y})^2.dy = \pi \int_0^4 y.dy = \pi \left.\frac{y^2}{2}\right|_0^4 = 8\pi\, br^3$$

olur.

Örnek: $y^2 = 4x$ eğrisi, $y = 0$ ve $y = 4$ doğrusu ile sınırlı bölgenin y ekseni etrafında 360^0 dönmesinden elde edilen cismin hacmini bulunuz.



Çözüm: Dönme y ekseni etrafında yapıldığından

$$y^2 = 4x \text{ ise } x = \frac{y^2}{4}$$

olur. Buna göre,

$$H = \pi\int_0^4 \left(\frac{y^2}{4}\right)^2 .dy = \pi\int_0^4 \frac{y^4}{16} dy = \pi \frac{y^5}{80}\Big|_0^4 = \frac{64}{5}\pi \, br^3$$

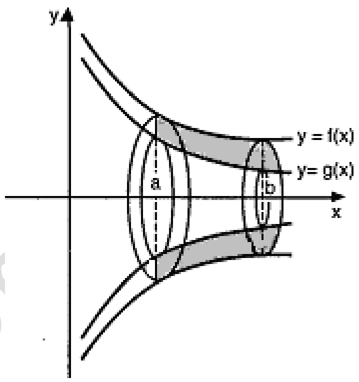
olur.

5 – İKİ EĞRİ ARASINDA KALAN HACİM

5.6. Teorem: $y = f(x)$ ve $y = g(x)$ eğrileri, $x = a$, $x = b$ doğruları ile sınırlanan düzlemsek bölgenin x ekseni etrafında 360^0 döndürülünce oluşan cismin hacmi;

Her $x \in [a,b]$ için $f(x) \geq g(x)$ olmak üzere $H = \pi\int_a^b [f^2(x) - g^2(x)]dx$

şeklindedir.



İspat okuyucuya bırakılmıştır.

Örnek: $f(x) = \sqrt{x}$ ve $g(x) = x^2$ fonksiyonların sınırladığı düzlemsel bölgenin x ekseni etrafında 360^0 döndürülünce oluşan cismin hacmini bulunuz.

Çözüm: Önce iki fonksiyonun kesim noktalarını bulalım. İki fonksiyonun kesim noktaları çözüm noktalarının olduğu yerdir.

$x^2 = \sqrt{x}$

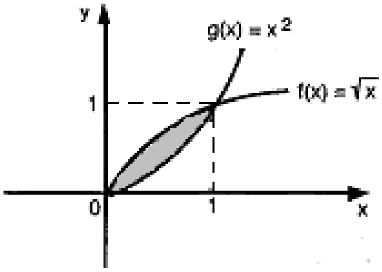
$x^4 = x$

$x^4 - x = 0$

$x(x^3 - 1) = 0$

$x = 0 \wedge x = 1$

olur. Kesim noktaları $O(0,0)$ ve $A(1,1,)$ dır. Her $x \in [0,1]$ için $f(x) \geq g(x)$ olduğundan



x ekseni etrafında döndürülünce oluşan cismin hacmi

$$H = \pi \int_0^1 [(\sqrt{x})^2 - (x^2)^2]\,dx$$

$$= \pi \int_0^1 (x - x^4)\,dx$$

$$= \pi \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5} \right) \Bigg|_0^1$$

$$= \frac{3\pi}{10}\,br^3$$

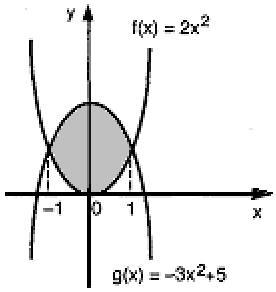
olur.

Örnek: $f(x) = 2x^2$, $g(x) = -3x^2 + 5$ fonksiyonların kesiştiği düzlemsel bölgenin x ekseni etrafında 360^0 döndürülünce oluşan cismin hacmini bulunuz.

Çözüm: Önce iki fonksiyonun kesim noktalarını bulalım.

$$2x^2 = -3x^2 + 5 \text{ ise } x = \pm 1$$

bulunur. Her $x \in [-1,1]$ için $f(x) \geq g(x)$ olduğundan



$$H = \pi \int_{-1}^{1} [(-3x^2 + 5)^2 - (2x^2)^2]\,dx$$

$$= \pi \int_{-1}^{1} \left(5x^4 - 30x^2 + 25\right) dx$$

$$= \pi (x^5 - 10x^3 + 25x) \Big|_{-1}^{1}$$

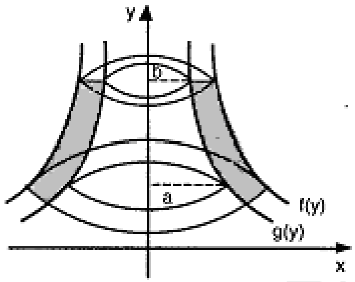
$=32\pi\,br^3$

olur.

Açıklama: $x=f(y)$, $x=g(y)$ olarak verilen bir f fonksiyon, $y=a$, $y=b$ doğruları ve y ekseni ile sınırlanan düzlemsel bölgenin y ekseni etrafında 360^0 döndürülmesiyle ile cismin hacmi,

Her $x\in[a,b]$ için $f(y)\geq g(y)$ olmak üzere $H=\pi\int_a^b [f^2(y)-g^2(y)]dy$

biçimindedir.

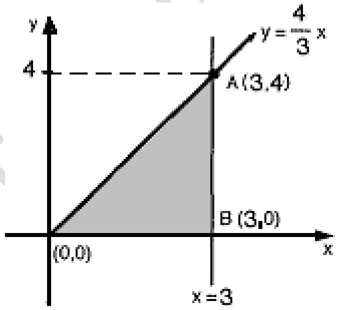


Örnek: $O(0,0)$, $A(3,4)$ ve $B(3,0)$ noktalarından oluşan üçgenin

a) x ekseni etrafında,

b) y ekseni etrafında,

360^0 dönmesinden elde edilen cismin hacmini bulunuz.



Çözüm: $|OA|$ doğrusunun eğimi $m=\frac{4}{3}$ ve denklemi $y=\frac{4}{3}x$ olur.

a) x ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmi,

$$H=\pi\int_0^3\left(\frac{4}{3}x\right)^2.dx=\pi\frac{16}{9}\int_0^3 x^2dx=\pi\frac{16x^3}{27}\Bigg|_0^3=16\pi\,br^3$$

olur.

b) y ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmi,

$$H=\pi\int_0^4\left[3^2-\left(\frac{3}{4}y\right)^2\right]dy$$
$$=\pi\int_0^4\left[9-\frac{9}{16}y^2\right]dy$$
$$=\pi\left(9y-\frac{9}{16}\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^4$$
$$=24\pi\ br^3$$

olur.

Örnek: $y=x^2$ ve $y=x$ doğruları arasında kalan alanın

a) x ekseni etrafında,

b) y ekseni etrafında,

360^0 dönmesinden elde edilen cismin hacmini bulunuz.

Çözüm: Önce iki fonksiyonun kesim noktalarını bulalım.

$x^2=x$

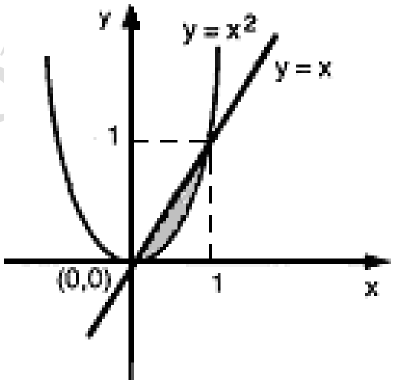
$x^2=x$

$x^2-x=0$

$x(x-1)=0$

$x=0 \wedge x=1$

olur. Kesim noktaları $O(0,0)$ ve $A(1,1)$ dır. Her $x\in[0,1]$ için $f(x)\geq g(x)$ olduğundan



a) x ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmi,

$$H=\pi\int_0^1[x^2-(x^2)^2].dx=\pi\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right]\Bigg|_0^1=\pi\left[\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right]=\frac{2}{15}\pi\ br^3$$

olur.

b) y ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmi,

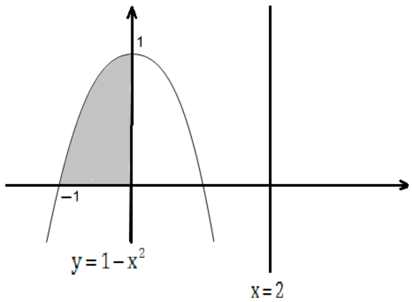
$$y = x^2 \text{ ise } x = \pm\sqrt{y}$$

$$H = \pi\int_0^1 \left[(\sqrt{y})^2 - y^2\right]dy = \pi\left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 = \pi\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{6}\,\text{br}^3$$

elde edilir.

Örnek: $y = 1 - x^2$ parabolü $[-1, 0]$ aralığında $y = 0$ doğrusu arasında kalan bölgenin $x = 2$ etrafında dönmesiyle oluşan cismin hacmini bulunuz.

Çözüm:



y ekseni üzerinde incelersek,

$$H = \pi\int_0^1 [(2 + \sqrt{1-y})^2 - 2^2]\,dy = \pi\int_0^1 [4\sqrt{1-y} - y - 1)]\,dy$$

olur. Burada $I = \int\sqrt{1-y}\,dy$ intergalini çözmek için $u = 1 - y$ değişken değiştirmesini uygularsak, $du = -dy$ olacağından,

$$I = \int\sqrt{1-y}\,dy = -\int\sqrt{u}\,du = -\frac{u^{3/2}}{3/2} + c = -\frac{2}{3}\sqrt{1-y}^3 + c$$

bulunur. Buna göre;

$$H = \pi\left[-\frac{8}{3}\sqrt{1-y}^3 - \frac{y^2}{2} - y\right]\Bigg|_0^1 = \frac{7\pi}{6}\,\text{br}^2$$

elde edilir.

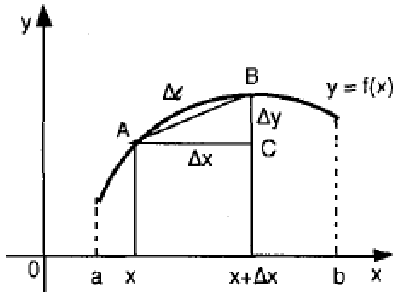
6 – İNTEGRALLE YAY UZUNLUĞUNUN HESAPLANMASI

5.7. Teorem: Bir f fonksiyonunun [a; b] aralığında sürekli ve bu aralıkta kalan yayın uzunluğu

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\,dx$$

şeklindedir.

İspat: $y=f(x)$ fonksiyonunun [a; b] aralığında sürekli olsun.



Δx çok küçük olduğundan Yay(AB) yayının uzunluğu $\Delta\ell$ uzunluğu ile AB doğru parçasının uzunluğu yaklaşık olarak birbirlerine yakındır. Buna göre,

$$\Delta\ell \cong \sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$$

$$=\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}.\Delta x$$

yazılabilir. $\Delta x \to 0$ için limiti alınırsa,

$$\ell' = \sqrt{1+(y')^2}$$

bulunur. Diferensiyel ve integral hesabının temel teoremi gereğince

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1+(y')^2}\, dx$$

elde edilir.

Örnek: $y=3x+5$ fonksiyonun [0; 10] aralığındaki uzunluğunu bulunuz.

Çözüm: $y'=3$ olacağından

$$\ell = \int_0^{10} \sqrt{1+3^2}\, dx = \sqrt{10}x\Big|_0^{10} = \sqrt{10}.10$$

elde edilir.

Örnek: $0 \le x \le 2$ aralığında $y=\frac{x^2}{4}-\frac{1}{2}\ln x$ yayının uzunluğunu bulunuz.

Çözüm: $y' = \frac{2x}{4}-\frac{1}{2}.\frac{1}{x}=\frac{x}{2}-\frac{1}{2X}$

$$\sqrt{1+(y')^2} = \sqrt{1+\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{2X}\right)^2}$$

$$=\sqrt{1+\frac{x^2}{4}-2.\frac{X}{2}\frac{1}{2X}+\frac{1}{4X^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{x^2}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4X^2}}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2X}\right)^2}$$

$$=\frac{x}{2}+\frac{1}{2X}$$

$$\ell=\int_1^2\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2X}\right)dx=\frac{x^2}{4}+\frac{1}{2}\ln x\Big|_1^2=\left(1+\frac{1}{2}\ln 2\right)-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\ln 1\right)=\frac{3}{4}\frac{1}{2}\ln 2\,br^2$$

Örnek: $y=\frac{1}{3}(x^2+2)^{\frac{3}{2}}$ denklemiyle verilen eğrinin [0;3] arasında kalan parçasının uzunluğu kaç birimdir?

Çözüm: $y'=\frac{1}{3}.\frac{3}{2}(x^2+2)^{\frac{1}{2}}.2x=x.(x^2+2)^{\frac{1}{2}}$

$$\ell=\int_0^3\sqrt{1+\left[x.(x^2+2)^{\frac{1}{2}}\right]^2}.dx$$

$$=\int_0^3\sqrt{1+x^2.(x^2+2)}.dx$$

$$=\int_0^3\sqrt{x^4+2x^2+1}.dx$$

$$=\int_0^3\sqrt{(x^2+1)^2}.dx$$

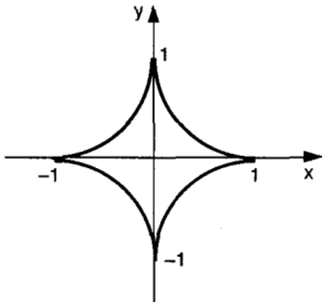
$$=\int_0^3(x^2+1).dx$$

$$=\frac{x^3}{3}+x\Big|_0^3$$

$$=12\ br$$

bulunur.

Örnek: $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$ eğrisinin çevre uzunluğunu bulunuz.



Çözüm: Verilen fonksiyonun kapalı fonksiyon olduğuna dikkat ederek türevini alırsak,

$$y' = \frac{-y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}$$

olur. Buna göre çevre uzunluğu,

$$\ell = 4\int_0^1 \sqrt{1+(y')^2}\,dx$$

$$= 4\int_0^1 \sqrt{1+\left(\frac{-y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}\right)^2}\,dx$$

$$= 4\int_0^1 \sqrt{1+\frac{y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}}\,dx$$

$$= 4\int_0^1 \sqrt{\frac{x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}}\,dx$$

$$= 4\int_0^1 \sqrt{\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}}\,dx$$

$$= 4\int_0^1 x^{-\frac{1}{3}}\,dx$$

$$= 4\left.\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}\right|_0^1$$

$$= 6 \text{ br}$$

bulunur.

7 – İNTEGRALLİN HIZ PROBLEMLERİNE UYGULANMASI

Bir hareketlinin t anında gittiği yolun uzunluğu $S(t)$ ise

1. Yolun zamana göre türevi hızı verdiğinden, hız $v=\frac{dS}{dt}$ olduğunu

2. Hızın zamana göre türevi ivmeyi ya da yolun zamana göre ikinci türevi ivmeyi verdiğinden, ivme $a=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2S}{dt^2}$ olduğunu türevin uygulamaları bölümünden biliyoruz. Buna göre,

$$a=\frac{dv}{dt} \text{ ise } a.dt=dv$$

olacağından t anında;

1. Hızın zamana göre integrali yolu verir $S=\int_0^t v(x)dx$

2. İvmenin zamana göre integrali hızı verir $v=\int_0^t a(x)dx$

Örnek: t zaman, S yol olmak üzere bir hareketlinin hızı

$$v(t)=\sin t\sqrt{2+2\cos t}$$

olduğuna göre, $0\le t\le \pi$ zaman aralığında, $t=\pi$ anında hareketlinin gittiği yolun uzunluğunu bulunuz.

Çözüm: $v(t)=\frac{dS}{dt}$

$$\sin t\sqrt{2+2\cos t}=\frac{dS}{dt}$$

$$dS=\sin t\sqrt{2+2\cos t}.dt$$

$$S=\int_0^\pi \sin t\sqrt{2+2\cos t}.dt$$

$u=2+2\cos t$ alırsak $du=-2\sin t.dt$

$t=0$ için $u=2+2\cos 0$ ise $u=4$

$t=\pi$ için $u=2+2\cos\pi$ ise $u=0$

$$S=\int_0^\pi \sin t\sqrt{2+2\cos t}.dt$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^4\sqrt{u}.du$$

$$=-\frac{1}{2}.\frac{u^{3/2}}{3/2}\Big|_4^0$$

$$= -\frac{1}{3}(0 - 4^{3/2})$$
$$= \frac{8}{3} \text{ br.}$$

Örnek: Bir hareketlinin t zamanındaki hızı $v(t) = |t-1|$ dir. $0 \le t \le 4$ olduğuna göre, $t = 4$ anında hareketlinin gittiği yolun uzunluğunu bulunuz.

Çözüm: $v(t) = |t-1| = \begin{cases} -t+1 & , \quad 0 \le t \le 1 \\ t-1 & , \quad 1 < t \le 4 \end{cases}$

$$v = \frac{dS}{dt} \text{ ise } |1-t| = \frac{dS}{dt}$$
$0 \le t \le 1$ için $dS = (-t+1)dt$
$1 < t \le 4$ için $dS = (t-1)dt$

$$S = \int_0^4 |t-1| dt$$
$$= \int_0^1 (-t+1)dt + \int_1^4 (t-1)dt$$
$$= \left(-\frac{t^2}{2} + t\right)\Big|_0^1 + \left(\frac{t^2}{2} - t\right)\Big|_1^4$$
$$= \left(-\frac{1^2}{2} + 1\right) - \left(-\frac{0^2}{2} + 0\right) + \left(\frac{4^2}{2} - 4\right) - \left(\frac{1^2}{2} - 1\right)$$
$$= 5 \text{ br.}$$

8– DİFERENSİYELİN İNTİGRALE UYGULAMASI

Bir birimim zamana türevi, birim ile elde edilen verinin çarpımını verir. Elde edilen bu değerlerin integrali, o birimin zamana göre fonksiyonunu verir.

Örnek: Bir askeri kurumda sağlık giderleri için yapılan harcamalarda her yıl bir önceki yıla göre % 3 arttığı tespit edilmiştir. Sağlık giderlerini y, zamanı x olarak gösterirsek, sağlık giderlerini zamana göre fonksiyonunu elde ediniz. 2019 yılında o askeri kurumda yıllık sağlık gideri 100 000 ₺ olduğuna göre 2022 yılında bu askeri kurumda kaç lira sağlık gideri olacaktır.

Çözüm: % 3 = 0,03 olmak üzere, sağlık gideri y, zaman x olduğundan fonksiyonun türevi

$$\frac{dy}{dx} = 0{,}03y$$

$$\frac{dy}{y} = 0{,}03dx$$

bulunur. Her iki tarafın integralini alırsak,

$$\int \frac{dy}{y} = \int 0{,}03dx$$

$$\ln y = 0{,}03x + c$$

$$y = e^{0{,}03x} e^{c}$$

elde edilir. Burada özel olarak e^c = A seçilirse,

$$y = Ae^{0{,}03x}$$

fonksiyonu elde edilir. Burada A = 100 000 □ dir. Çünkü 2019 yılında o askeri kurumda sağlık gideri 100 000 □ olmuştur. 2022 yılı ile 2019 yılı arasında 3 olduğundan x = 3 dür. Şu halde 2022 yılının sağlık gideri

$y = Ae^{0{,}03x}$ = $10000.e^{0{,}03.3}$ = 109 417 □

olacağı tahmin edilmektedir.

Örnek: Türkiye'nin 2019 yılında nüfusu 82 500 000 olduğu bilinmektedir. Türkiye'nin önceki yıllara göre nüfus artışı yıllık % 1 olduğu tespit edilmiştir. Bu ilçemizin nüfus artış hız fonksiyonu ve 2023 yılında tahmini nüfusu elde ediniz.

Çözüm: %1 = 0,01 olmak üzere, nüfus y, zaman x olduğundan fonksiyonun türevi

$$\frac{dy}{dx} = 0{,}01y$$

$$\frac{dy}{y} = 0{,}01dx$$

bulunur. Her iki tarafın integralini alırsak,

$$\int \frac{dy}{y} = \int 0{,}01dx$$

$$\ln y = 0{,}01x + c$$

$$y = e^{0{,}01x} e^{c}$$

elde edilir. Burada özel olarak e^c = A seçilirse,

$$y = Ae^{0{,}01x}$$

fonksiyonu elde edilir. Türkiye'nin 2019 yılında nüfusu A = 82 500 000 olduğuna göre, 2019 yılı ile 2023 yılı arasında 4 yıl olduğundan x = 4 dür. Şu halde 2023 yılının tahmini nüfusu

$y = Ae^{0{,}01x}$ = $82\,500\,000.e^{0{,}01.4}$ = 85 866 888

olacağı tahmin edilmektedir.

Örnek: 70^0C sıcaklıktaki bir cam kahve bardağı 20^0C sıcaklıktaki bir odaya bırakılırsa, zamana bağlı olarak kahvenin nasıl değiştiğini veren fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm: Kahve bardağı 20^0C sıcaklığa düşeceğinden sıcaklığın değişimini y ile gösterirsek,

$$\frac{dy}{dx} = -(y-20)$$

$$\frac{dy}{y-20} = -dx$$

bulunur. Her iki tarafın integralini alırsak,

$$\int \frac{dy}{y-20} = -\int dx$$

$$\ln|y-20| = -x + c$$

$$y - 20 = e^{-x} e^{c}$$

elde edilir. Burada özel olarak e^c = A seçilirse,

$$y = 20 + Ae^{-x}$$

fonksiyonu elde edilir. Burada zamana göre cismin soğuma hızını verir. (Her cismin soğuma hızı farklıdır. Mesela, demirin soğuma hızı, cam soğuma hızı porselenin hızı farklı farklıdırlar.)