6. BÖLÜM
HİPERBOLİK FONKSİYONLAR

HİPERBOLİK FONKSİYON KAVRAMI

6.1. Tanım: i) f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sinh x=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}$

şeklinde tanımlanan fonksiyona hiperbolik sünis fonksiyonu denir.

ii) f: $\mathbb{R}\to[1,+\infty)$, $f(x)=\cosh x=\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}$

şeklinde tanımlanan fonksiyona hiperbolik kosünis fonksiyonu denir.

iii) f: $\mathbb{R}\to(-1\,,1)$, $f(x)=\tanh x=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$

şeklinde tanımlanan fonksiyona hiperbolik tanjant fonksiyonu denir.

iv) f: $\mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R}-[-1,1]$, $f(x)=\coth x=\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{e^{x}-e^{-x}}$

şeklinde tanımlanan fonksiyona hiperbolik kosünis fonksiyonu denir.

v) f: $\mathbb{R}\to(0,1]$, $f(x)=\operatorname{sech} x=\dfrac{2}{e^{x}+e^{-x}}$

şeklinde tanımlanan fonksiyona hiperbolik sekant fonksiyonu denir.

vi) f: $\mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R}-\{0\}$, $f(x)=\operatorname{csch} x=\dfrac{2}{e^{x}-e^{-x}}$

şeklinde tanımlanan fonksiyona hiperbolik kosekant fonksiyonu denir.

Örnek: $\sinh 2$, $\cosh 2$, $\tanh 2$, $\coth 2$, $\operatorname{sech} 2$, $\operatorname{csch} 2$ un değerlerini bulunuz.

Çözüm: $\sinh 2=\dfrac{e^{2}-e^{-2}}{2}=3{,}62$

$$\cosh 2=\frac{e^{2}+e^{-2}}{2}=3{,}76$$

$$\tanh 2=\frac{e^{2}-e^{-2}}{e^{2}+e^{-2}}=0{,}96$$

$$\coth 2=\frac{e^{2}+e^{-2}}{e^{2}-e^{-2}}=1,04$$

$$\operatorname{sech}2=\frac{2}{e^{2}+e^{-2}}=0,27$$

$$\operatorname{csch}2=\frac{2}{e^{2}-e^{-2}}=0,28 \quad //$$

6.1. Sonuç: Her $x\in\mathbb{R}$ için

a) $\sinh x.\operatorname{csch}x=1$
b) $\cosh x.\operatorname{sech}x=1$
c) $\tanh x.\coth x=1$
d) $\tanh x=\dfrac{\sinh x}{\cosh x}$
e) $\coth x=\dfrac{\cosh x}{\sinh x}$

dir.

6.1. Teorem: Her $x\in\mathbb{R}$ için,

a) $\sinh(-x)=-\sinh x$ olup hiperbolik sünis fonksiyonu tek fonksiyondur.

b) $\cosh(-x)=\cosh x$ olup hiperbolik kosünis fonksiyonu çift fonksiyondur.

İspat: Her $x\in\mathbb{R}$ için,

a) $f(-x)=\sinh(-x)=\dfrac{e^{-x}-e^{x}}{2}=-\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}=-\sinh x=-f(x)$

olup hiperbolik sünis fonksiyonu tek fonksiyondur.

b) $f(-x)=\cosh(-x)=\dfrac{e^{-x}+e^{x}}{2}=\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}=\cosh x=f(x)$

olup hiperbolik kosünis fonksiyonu tek fonksiyondur.

6.2. Sonuç: $\operatorname{sech}x$ fonksiyonu çift fonksiyon olup, $\tanh x$, $\coth x$, $\operatorname{csch}x$ fonksiyonları tek fonksiyonlardır.

6.2. Teorem: Her $x\in\mathbb{R}$ için

$$\cosh^{2}x-\sinh^{2}x=1$$

dir.

İspat: $\cosh^{2}x-\sinh^{2}x=\left(\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}\right)^{2}-\left(\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}\right)^{2}$

$$=\frac{e^{2x}+2.e^{x}e^{-x}+e^{-x}}{2}-\frac{e^{2x}-2.e^{x}e^{-x}+e^{-x}}{2}$$
$$=1$$

HİPERBOLİK TOPLAM ve FARK FORMÜLLERİ

6.3. Teorem: Her $x,y\in\mathbb{R}$ için

a) $\sinh(x+y)=\sinh x.\cosh y+\cosh x.\sinh y$

b) $\cosh(x+y)=\cosh x.\cosh y+\sinh x.\sinh y$

dir.

İspat:

a) $$\sinh x.\cosh y+\cosh x.\sinh y=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}.\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}+\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}.\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}$$
$$=\frac{e^{x+y}+e^{x-y}-e^{y-x}-e^{-x-y}+e^{x+y}-e^{x-y}+e^{y-x}-e^{-x-y}}{4}$$
$$=\frac{2e^{x+y}-2e^{-x-y}}{4}$$
$$=\frac{e^{(x+y)}-e^{-(x+y)}}{2}$$
$$=\sinh(x+y)$$

b) $$\cosh x.\cosh y+\sinh x.\sinh y=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}.\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}+\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}.\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}$$
$$=\frac{e^{x+y}+e^{x-y}+e^{-x+y}+e^{-x-y}+e^{x+y}-e^{x-y}-e^{-x+y}+e^{-x-y}}{4}$$
$$=\frac{2e^{x+y}+2e^{-x-y}}{4}$$
$$=\cosh(x+y)$$

6.3. Sonuç: Her $x,y\in\mathbb{R}$ için,

a) $\sinh(x-y)=\sinh x.\cosh y-\cosh x.\sinh y$

b) $\cosh(x-y)=\cosh x.\cosh y-\sinh x.\sinh y$

dir.

6.4. Teorem: Her $x,y\in\mathbb{R}$ için,

a) $\tanh(x+y)=\dfrac{\tanh x+\tanh y}{1+\tanh x.\tanh y}$

b) $\coth(x+y)=\dfrac{1+\coth x.\coth y}{\coth x+\coth y}$

dir.

İspat: a) 6.3. teoremde,

$$\sinh(x+y)=\sinh x.\cosh y+\cosh x.\sinh y$$
$$\cosh(x+y)=\cosh x.\cosh y+\sinh x.\sinh y$$

olduğunu biliyoruz. 6.1. Sonuç d şıkkı gereği,

$$\tanh(x+y)=\frac{\sinh(x+y)}{\cosh(x+y)}$$
$$=\frac{\sinh x.\cosh y+\cosh x.\sinh y}{\cosh x.\cosh y+\sinh x.\sinh y}$$
$$=\frac{\dfrac{\sinh x.\cosh y+\cosh x.\sinh y}{\cosh x.\cosh y}}{\dfrac{\cosh x.\cosh y+\sinh x.\sinh y}{\cosh x.\cosh y}}$$
$$=\frac{\tanh x+\tanh y}{1+\tanh x.\tanh y}$$

b) 6.1. Sonuç e şıkkı gereği,

$$\coth(x+y)=\frac{\cosh(x+y)}{\sinh(x+y)}$$
$$=\frac{\cosh x.\cosh y+\sinh x.\sinh y}{\sinh x.\cosh y+\cosh x.\sinh y}$$
$$=\frac{\dfrac{\cosh x.\cosh y+\sinh x.\sinh y}{\sinh x.\sinh y}}{\dfrac{\sinh x.\cosh y+\cosh x.\sinh y}{\sinh x.\sinh y}}$$
$$=\frac{1+\coth x.\coth y}{\coth x+\coth y}$$

6.4. Sonuç: Her $x,y\in\mathbb{R}$ için,

a) $\tanh(x-y)=-\dfrac{\tanh x-\tanh y}{1-\tanh x.\tanh y}$

b) $\coth(x-y)=\dfrac{1+\coth x.\coth y}{\coth x-\coth y}$

dir.

HİPERBOLİK YARIM AÇI FORMÜLLERİ

6.5. Teorem: Her $x\in\mathbb{R}$ için,

a) $\sinh 2x=2\sinh x.\cosh x$

b) $\cosh 2x=\cosh^2 x+\sinh^2 x$

c) $\tanh 2x = \dfrac{2\tanh x}{1+\tanh^2 x}$

d) $\coth 2x = \dfrac{1+\coth^2 x}{2\coth x}$

dir.

İspat: a) 6.3. teoremin a şıkkında $x = y$ alınırsa,

$$\sinh(x+y) = \sinh x.\cosh y + \cosh x.\sinh y$$
$$\sinh(x+x) = \sinh x.\cosh x + \sinh x \cosh x$$
$$\sinh 2x = 2\sinh x.\cosh x$$

bulunur.

b) 6.3. teoremi b şıkkında $x = y$ alınırsa,

$$\cosh(x-y) = \cosh x.\cosh y + \sinh x.\sinh y$$
$$\cosh(x+x) = \cosh x.\cosh x + \sinh x.\sinh x$$
$$\cosh 2x = \cosh^2 x - \sinh^2 x$$

bulunur.

c) 6.4. teoremi a şıkkında $x = y$ alınırsa,

$$\tanh(x+y) = \frac{\tanh x + \tanh y}{1+\tanh x.\tanh y}$$
$$\tanh(x+x) = \frac{\tanh x + \tanh x}{1+\tanh x.\tanh x}$$
$$\tanh 2x = \frac{2\tanh x}{1-\tanh^2 x}$$

bulunur.

d) 6.4. teoremi b şıkkında $x = y$ alınırsa,

$$\coth(x+y) = \frac{1+\coth x.\coth y}{\coth x + \coth y}$$
$$\coth(x+x) = \frac{1+\coth x.\coth x}{\coth x + \coth x}$$
$$\coth 2x = \frac{1+\coth^2 x}{2\coth x}$$

bulunur.

HİPERBOLİK DÖNÜŞÜM FORMÜLLERİ

6.6.Teorem: Her $x, y \in \mathbb{R}$ için,

$$a)\ \sinh x+\sinh y=2\sinh\frac{x+y}{2}.\cosh\frac{x-y}{2}$$

$$b)\ \sinh x-\sinh y=2\sinh\frac{x-y}{2}.\cosh\frac{x+y}{2}$$

dir.

İspat: 6.3. Teorem a şıkkı ve 6.3. Sonuç a şıkkın göre,

$$\sinh(a+b)=\sinh a.\cosh b+\cosh a.\sinh b$$

$$\sinh(a-b)=\sinh a.\cosh b-\cosh a.\sinh b$$

eşitlikleri taraf tarafa bir defa toplar ve bir defa çıkarırsak,

$$\sinh(a+b)+\sinh(a-b)=2\sinh a.\cosh b$$

$$\sinh(a+b)+\sinh(a-b)=2\cosh a.\sinh b$$

bulunur. Burada,

$$a+b=x \text{ ve } a-b=y$$

alınırsa,

$$a=\frac{x+y}{2},\ b=\frac{x-y}{2}$$

elde edilir. Elde edilen bu değerler yerine yazarsak,

$$\sinh x+\sinh y=2\sinh\frac{x+y}{2}.\cosh\frac{x-y}{2}$$

$$\sinh x-\sinh y=2\sinh\frac{x-y}{2}.\cosh\frac{x+y}{2}$$

bulunur.

6.7.Teorem: Her $x,y\in\mathbb{R}$ için,

$$a)\ \cosh x+\cosh y=2\cosh\frac{x+y}{2}.\cosh\frac{x-y}{2}$$

$$b)\ \cosh x-\cosh y=2\sinh\frac{x+y}{2}.\sinh\frac{x-y}{2}$$

dir.

İspat: 6.3. Teorem b şıkkı ve 6.3. Sonuç b şıkkın göre,

$$\cosh(a+b)=\cosh a.\cosh b+\sinh a.\sinh b$$

$$\cosh(a-b)=\cosh a.\cosh b-\sinh a.\sinh b$$

eşitlikleri taraf tarafa bir defa toplar ve bir defa çıkarırsak,

$$\cosh(a+b)+\cosh(a-b)=2\cosh a.\cosh b$$

$$\cosh(a+b)-\cosh(a-b)=2\sinh a.\sinh b$$

bulunur. Burada,

$$a+b=x \text{ ve } a-b=y$$

alınırsa,

$$a=\frac{x+y}{2},\ b=\frac{x-y}{2}$$

elde edilir. Elde edilen bu değerler yerine yazarsak,

$$\cosh x + \cosh y = 2\cosh\frac{x+y}{2}.\cosh\frac{x-y}{2}$$

$$\cosh x - \cosh y = 2\sinh\frac{x+y}{2}.\sinh\frac{x-y}{2}$$

bulunur.

HİPERBOLİK TERS DÖNÜŞÜM FORMÜLLERİ

6.8.Teorem: Her $x,y \in \mathbb{R}$ için,

a) $\sinh x.\cosh y = \frac{1}{2}[\sinh(x+y)+\cosh(x-y)]$

b) $\cosh x.\cosh y = \frac{1}{2}[\cosh(x+y)+\cosh(x-y)]$

c) $\sinh x.\sinh y = \frac{1}{2}[\cosh(x+y)-\cosh(x-y)]$

dir.

İspat: a) 6.3. Teorem a şıkkı ve 6.3. Sonuç a şıkkın göre,

$$\sinh(x+y)=\sinh x.\cosh y+\cosh x.\sinh y$$

$$\sinh(x-y)=\sinh x.\cosh y-\cosh x.\sinh y$$

eşitlikleri taraf tarafa toplarsak,

$$\sinh(x+y)+\sinh(x-y)=2\sinh x.\cosh y$$

$$\sinh x.\cosh y=\frac{1}{2}[\sinh(x+y)+\cosh(x-y)]$$

bulunur.

b) 6.3. Teorem b şıkkı ve 6.3. Sonuç b şıkkın göre,

$$\cosh(x+y)=\cosh x.\cosh y+\sinh x.\sinh y$$

$$\cosh(x-y)=\cosh x.\cosh y-\sinh x.\sinh y$$

eşitlikleri taraf tarafa toplarsak,

$$\cosh(x+y)+\cosh(x-y)=2\cosh x.\cosh y$$

$$\cosh x.\cosh y=\frac{1}{2}[\cosh(x+y)+\cosh(x-y)]$$

bulunur.

c) 6.3. Teorem b şıkkı ve 6.3. Sonuç b şıkkın göre,

$$\cosh(x+y)=\cosh x.\cosh y+\sinh x.\sinh y$$

$$\cosh(x-y)=\cosh x.\cosh y-\sinh x.\sinh y$$

eşitlikleri taraf tarafa çıkarırsak,

$$\cosh(x+y)-\cosh(x-y)=2\sin x.\sin y$$

$$\sinh x.\sinh y=\frac{1}{2}[\cosh(x+y)-\cosh(x-y)]$$

bulunur.

HİPERBOLİK İNDİRGEME FORMÜLLERİ

6.9. Teorem: Her $x \in \mathbb{R}$ için,

a) $\sinh^2 x = \dfrac{-1+\cosh 2x}{2}$

b) $\cosh^2 x = \dfrac{1+\cosh 2x}{2}$

İspat: 6.2. Teorem ve 6.5. Teorem b şıkkı gereği,

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$
$$\cosh^2 x + \sinh^2 x = \cosh 2x$$

olduğu bilinmektedir. Bu iki denklem taraf tarafa çıkarılırsa,

$$\sinh^2 x = \frac{-1+\cosh 2x}{2}$$

elde edilir. Yine bu iki denklem taraf tarafa toplanırsa,

$$\cosh^2 x = \frac{1+\cosh 2x}{2}$$

bulunur.

TERS HİPERBOLİK FONKSİYONLAR

Bir fonksiyonun tersi olması için gerek ve yeter şart o fonksiyonun birebir ve örten olmasıdır. Eğer o fonksiyon birebir ve örten değilse, birebir ve örten aralıkta tersi incelenir.

sinh fonksiyonu bir birebir ve örten fonksiyon olduğundan, bu fonksiyonun tersi vardır. Bu sinh fonksiyonun tersi asinh olarak göstereceğiz. sinh fonksiyonunun tersi bazen $\sinh^{-1}$, arcsinh ya da argsinh olarak da gösterilir.

Benzer şekilde diğer fonksiyonların birebir ve örten aralıklarında incelenerek aşağıdaki tanım yapılır.

6.2. Tanım: i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sinh x$

şeklindeki fonksiyonun ters fonksiyonu;

$$f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f^{-1}(x) = \operatorname{asinh} x$$

biçimindedir. Bu tanımlanan fonksiyona ters hiperbolik sünis fonksiyonu denir. Burada,

$$\operatorname{asinh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

dir. Gerçekten;

$$f(x)=\sinh x=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$$

$$x=\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}$$

$$2x=e^{y}-\frac{1}{e^{y}}$$

$$2xe^{y}=e^{2y}-1$$

$$e^{2y}-2xe^{y}-1=0$$

yazılabilir. Burada $e^{y}=t$ alınırsa,

$$t^{2}-2xt-1=0$$

2. dereceden denklemi elde edilir. Bu denklem çözülürse;

$$\Delta=(-2x)^{2}-4.1.(-1)=4x^{2}+4$$

$$t=\frac{-(-2x)\pm\sqrt{4x^{2}+4}}{2}=x\pm\sqrt{x^{2}+1}$$

$$f^{-1}(x)=a\sinh x=\ln\left(x+\sqrt{x^{2}+1}\right)$$

bulunur.

ii) $f:\mathbb{R}\to[1,+\infty)$, $f(x)=\cosh x$

şeklindeki fonksiyonun ters fonksiyonu;

$$f^{-1}:[1,+\infty)\to\mathbb{R},\ f^{-1}(x)=a\cosh x$$

biçimindedir. Bu tanımlanan fonksiyona ters hiperbolik kosünis fonksiyonu denir. Burada,

$$a\cosh x=\ln\left(x+\sqrt{x^{2}-1}\right)$$

dir. (Bu eşitlik (i) de olduğu gibi gösterilir.)

iii) $f:\mathbb{R}\to(-1,1)$, $f(x)=\tanh x$

şeklindeki fonksiyonun ters fonksiyonu;

$$f^{-1}:(-1,1)\to\mathbb{R},\ f^{-1}(x)=a\tanh x$$

biçimindedir. Bu tanımlanan fonksiyona ters hiperbolik tanjant fonksiyonu denir. Burada,

$$a\tanh x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x},\ |x|<1$$

dir. (Bu eşitlik (i) de olduğu gibi gösterilir.)

iv) $f:\mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R}-[-1,1]$, $f(x)=\coth x$

şeklindeki fonksiyonun ters fonksiyonu;

$$f^{-1}:\mathbb{R}-[-1,1]\to\mathbb{R}-\{0\},\ f^{-1}(x)=a\coth x$$

biçimindedir. Bu tanımlanan fonksiyona ters hiperbolik kosünis fonksiyonu denir. Burada,

$$\operatorname{atanh} x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{x-1}\,,\ |x|>1$$

dir. (Bu eşitlik (i) de olduğu gibi gösterilir.)

v) $f:\mathbb{R}\to(0,1]\,,\ f(x)=\operatorname{sech} x$

şeklindeki fonksiyonun ters fonksiyonu;

$$f^{-1}:(0,1]\to\mathbb{R},\ f^{-1}(x)=\operatorname{asech} x$$

biçimindedir. Bu tanımlanan fonksiyona ters hiperbolik sekant fonksiyonu denir. Burada,

$$\operatorname{asech} x=\ln\left(\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right),\ 0<x\leq 1$$

dir. (Bu eşitlik (i) de olduğu gibi gösterilir.)

vi) $f:\mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R}-\{0\},\ f(x)=\operatorname{csch} x$

şeklindeki fonksiyonun ters fonksiyonu;

$$f^{-1}:\mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R}-\{0\},\ f^{-1}(x)=\operatorname{acsch} x$$

biçimindedir. Bu tanımlanan fonksiyona ters hiperbolik kosekant fonksiyonu denir. Burada,

$$\operatorname{acsch} x=\ln\left(\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|}\right)$$

dir. (Bu eşitlik (i) de olduğu gibi gösterilir.)

HİPERBOLİK FONKSİYONLARIN TÜREVİ

6.10. Teorem: $A\subset\mathbb{R},\ f:A\to\mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun.

a) $(\sinh u(x))'=u'(x).\cosh u(x)$

b) $(\cosh u(x))'=u'(x).\sinh u(x)$

c) $(\tanh u(x))'=u'(x).(1-\tanh^2 u(x))$

d) $(\coth u(x))'=u'(x).(1-\coth^2 u(x))$

e) $(\operatorname{sech} u(x))'=-u'(x).\operatorname{sech} u(x)\tanh u(x)$

f) $(\operatorname{csch} u(x))'=-u'(x).\operatorname{csch} u(x).\coth u(x)$

İspat:

a) $$(\sinh u(x))'=\left(\frac{e^{u(x)}-e^{-u(x)}}{2}\right)=\frac{\left[u'(x)e^{u(x)}-u'(x)e^{-u(x)}\right]2}{4}$$
$$=u'(x)\left(\frac{e^{u(x)}-e^{-u(x)}}{2}\right)$$
$$=u'(x)\cosh u(x)$$

b) a şıkkına benzer şekilde ispat edilir.

c) $(\tanh u(x))' = \left(\dfrac{\sinh u(x)}{\cosh u(x)}\right)'$

$$= \frac{u'(x).\cosh u(x).\cosh u(x) - u'(x).\sinh u(x).\sinh u(x)}{\cosh^2 u(x)}$$

$$= u'(x)\left(\frac{\cosh^2 u(x) - \sinh^2 u(x)}{\cosh^2 u(x)}\right)$$

$$= u'(x)\left(1 - \tanh^2 u(x)\right)$$

d) c şıkkına benzer şekilde ispat edilir.

Örnek: $f(x) = \sinh(2x+4)$ nun türevini bulunuz.

Çözüm: $f'(x) = 2.\cosh(2x+4)$

Örnek: $f(x) = e^{5x}\cosh 3x$ nin türevini bulunuz.

Çözüm: $f'(x) = 5e^{5x}\cosh 3x + 3e^{5x}\sinh 3x$

TERS HİPERBOLİK FONKSİYONLARIN TÜREVİ

6.11. Teorem: $A \subset \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun.

a) $f(x) = a\sinh u(x)$ ise $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{\sqrt{1+u(x)^2}}$

b) $f(x) = a\cosh u(x)$ ise $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{\sqrt{-1+u^2(x)}}$

c) $f(x) = a\tanh u(x)$ ise $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{1-u^2(x)}$

d) $f(x) = a\coth u(x)$ ise $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{1-u^2(x)}$

e) $f(x) = a\mathrm{sech}\, u(x)$ ise $f'(x) = \dfrac{-u'(x)}{u(x).\sqrt{u^2(x)-1}}$

f) $f(x) = a\mathrm{csch}\, u(x)$ ise $f'(x) = \dfrac{-u'(x)}{u(x).\sqrt{u^2(x)-1}}$

dir.

İspat: a) $f(x)=a\sinh u(x)$ ise $u(x)=\sinh f(x)$ olduğuna göre eşitliğinin her iki yanını x e göre türevini türevde zincir kuralına göre alırsak,

$$(\sinh f(x))'=u'(x)$$
$$f'(x).\cosh f(x)=u'(x)$$
$$f'(x)=\frac{u'(x)}{\cosh f(x)} \quad , \ (\cos t=\sqrt{1+\sin^2 t})$$
$$f'(x)=\frac{u'(x)}{\sqrt{1+\sin^2 f(x)}}$$
$$f'(x)=\frac{u'(x)}{\sqrt{1+u^2(x)}}$$

olarak bulunur.

b) a şıkkına benzer yöntemle ispat edilir.

c) $f(x)=a\tanh u(x)$ ise $u(x)=\tanh f(x)$ olduğuna göre eşitliğinin her iki yanını x e göre türevini türevde zincir kuralına göre alırsak,

$$(\tanh f(x))'=u'(x)$$
$$f'(x).\left[1-\tan^2 f(x)\right]=u'(x)$$
$$f'(x)=\frac{u'(x)}{1-\tan^2 f(x)}$$
$$f'(x)=\frac{u'(x)}{1-u^2(x)}$$

olarak bulunur.

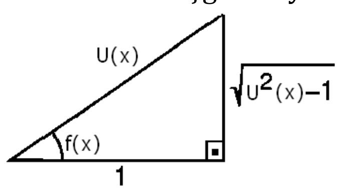
d) c şıkkına benzer yöntemle ispat edilir.

e) $f(x)=\operatorname{arcsech} u(x)$ ise $u(x)=\operatorname{sech} f(x)$ olduğuna göre eşitliğinin her iki yanını x e göre türevini türevde zincir kuralına göre alırsak,

$$(\operatorname{sech} f(x))'=u'(x)$$
$$-f'(x).\operatorname{sech} f(x).\tanh f(x)=u'(x)$$
$$f'(x)=\frac{-u'(x)}{\operatorname{sech} f(x).\tanh f(x)}$$

(1)

bulunur. $u(x)=\operatorname{sech} f(x)$ ifadesini bir dik üçgende yerine yazarsak,



şekli oluşur. Bu şekle göre $\sec f(x)=\sqrt{u^2(x)-1}$ olacağından (1) eşitliği,

$$f'(x)=\frac{-u'(x)}{u(x).\sqrt{u^2(x)-1}}$$

olarak bulunur.

f) e şıkkına benzer yöntemle ispat edilir.

HİPERBOLİK FONKSİYONLARIN GRAFİKLERİ

Hiperbolik fonksiyonlar ℝ'de tanımlı oldukları aşikardır. 6.1. teoremde hiperbolik sinüs fonksiyon tek bir fonksiyondur, hiperbolik kosinüs fonksiyon çift bir fonksiyon olduğunu biliyoruz. Bu durum fonksiyonların $(0,0)$ noktasına göre simetrik olduğu gösterir. Ayrıca sinh 0 = 0 ve cosh 0 = 1 dir.

Fonksiyonların grafiğini çizmek için türevlerine bakalım.

$$(\sinh x)'=\cosh x$$

$$(\cosh x)'=\sinh x$$

olduğundan $\sinh x$ fonksiyonunun sürekli arttığı, dolayısıyla $x\geq 0$ ise

$$\sinh x\geq \sinh 0=0$$

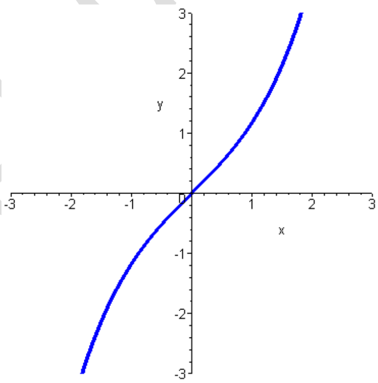
olduğu ve dolayısıyla $\cosh x$ fonksiyonunun $x\geq 0$ için arttığı çıkar. $\sinh x$'in $x\geq 0$ iken pozitif olduğu aslında tanımın kendisinden de oldukça çabuk çıkar.

İkinci türevleri alalım:

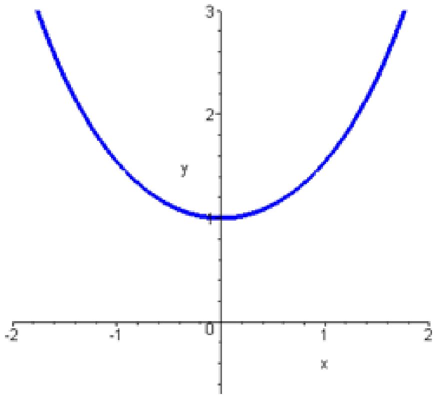
$$(\sinh x)''=\sinh x$$

$$(\cosh x)''=\mathrm{coh}x$$

Buna göre cosh fonksiyonunun her yerde, sinh fonksiyonunun ise $IR\geq 0$ üstünde dışbükey olduğu çıkar. Bu bilgilerden hareketle sinh ve cosh fonksiyonlarının grafiklerini çizebiliriz:

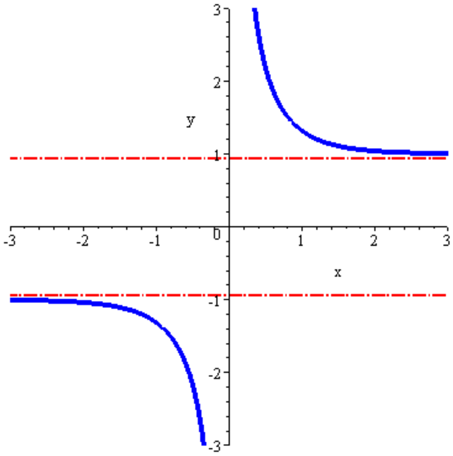


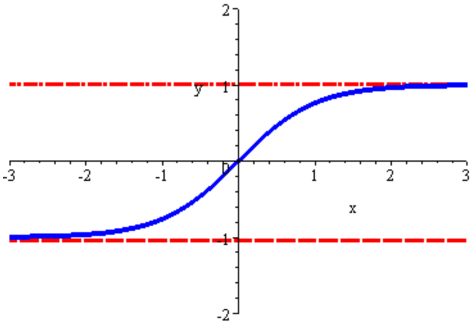
$f(x)=\sinh x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$



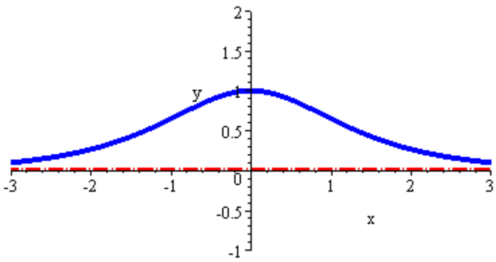
$f(x)=\cosh x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$

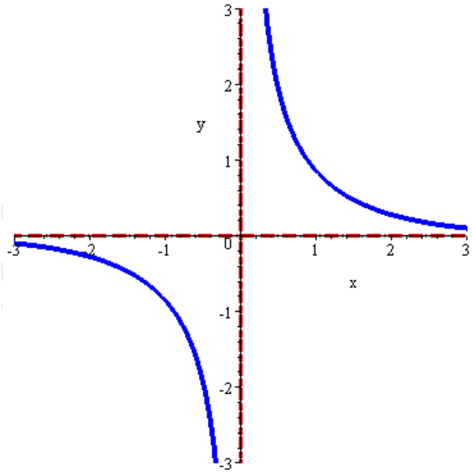
Benzer şekilde tanh, coth, sech ve csch fonksiyonların grafikleri de çizilir.



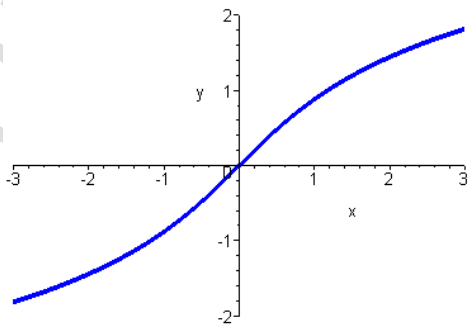


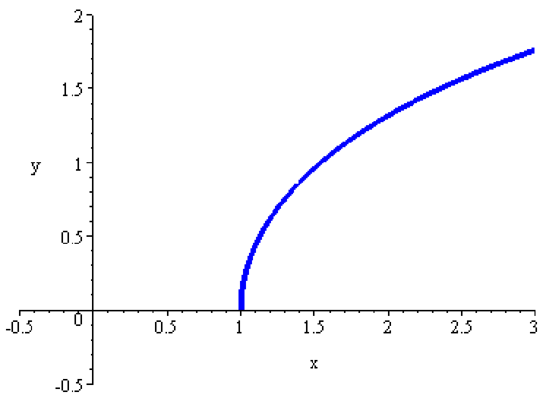
$f(x) = \tanh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ $\qquad$ $f(x) = \coth x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$



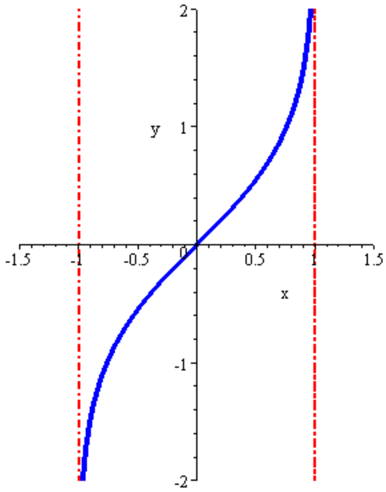


$f(x) = \operatorname{sech} x = \dfrac{1}{e^x + e^{-x}}$ $\qquad$ $f(x) = \operatorname{csch} x = \dfrac{1}{e^x - e^{-x}}$

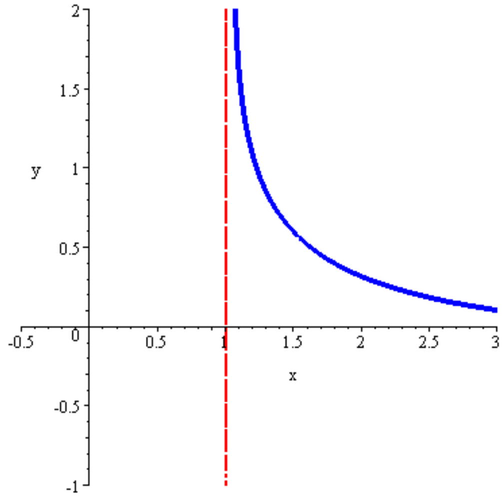




$$f(x) = a\sinh x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \qquad\qquad f(x) = a\cosh x$$



$$f(x) = a\tanh x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$



$$f(x) = a\cot hx = \left(\frac{1-x}{1+x}\right)$$

HİPERBOLİK FONKSİYONLARIN İNTEGRALİ

6.10 ve 6.11 teoremlerin sonucu olarak aşağıdakileri tespitler yapılır.

6.3. Sonuç: $A \subset \mathbb{R},\ f: A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun.

a) $\int \sinh u(x)dx = \frac{1}{u'(x)}\cosh u(x) + c$

b) $\int \cosh u(x)dx = \frac{1}{u'(x)}\sinh u(x) + c$

c) $\int (1 - \tanh^2 u(x))\,dx = \frac{1}{u'(x)}\tanh u(x) + c$

d) $\int (1 - \coth^2 u(x))\,dx = \frac{1}{u'(x)}\coth u(x) + c$

e) $\int \operatorname{sech} u(x).\tanh u(x).dx = -\frac{1}{u'(x)}\operatorname{sech} u(x) + c$

f) $\int \operatorname{csch} u(x).\coth u(x).dx = -\frac{1}{u'(x)}\operatorname{csch} u(x) + c$

g) $\int \frac{u'(x)}{\sqrt{1+u(x)^2}}dx = a\sinh u(x) + c$

h) $\int \frac{u'(x)}{1-u^2(x)}dx = a\tanh u(x) + c$

ı) $\int \frac{u'(x)}{u(x).\sqrt{u^2(x)-1}}dx = a\sec h u(x) + c$

Örnek: a) $\int \tanh x dx = \ln|\cosh x| + c$

b) $\int \coth x dx = \ln|\sinh x| + c$

c) $\int \sec h x dx = \arctan(\sinh x) + c$

d) $\int \operatorname{csch} x dx = \ln\left|\tanh\frac{x}{2}\right| + c$

Bu örneğin çözümü okuyucuya bırakılmıştır.

TERS HİPERBOLİK FONKSİYONLARIN İNTEGRALİ

6.10 ve 6.11 teoremlerin sonucu olarak aşağıdakileri tespitler yapılır.

6.4. Sonuç: $A \subset \mathbb{R},\ f: A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun.

a) $\int \operatorname{arcsinh} x dx = x \operatorname{arcsinh} x - \sqrt{x^2+1} + c$

b) $\int \operatorname{arccosh} x dx = x \operatorname{arccosh} x - \sqrt{x^2-1} + c$

c) $\int \operatorname{arctanh} x dx = x \operatorname{arctanh} x + \frac{1}{2}\log(1-x^2) + c$

d) $\int \operatorname{arccoth} x dx = x \operatorname{arccoth} x + \frac{1}{2}\log(x^2-1) + c$

e) $\int \operatorname{arcsech} x dx = x \operatorname{arcsech} x - \arctan\left(\frac{x}{x-1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right) + c$

f) $\int \operatorname{arccsch} x dx = x \operatorname{arccsch} x + \log x\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right) + c$