7. BÖLÜM
KUTUPSAL KOORDİNATLAR

KUTUPSAL KOORDİNAT KAVRAMI

Kartezyen koordinat sisteminde verilen bir sayının eksenlere uzaklığına o noktanın koordinatları diyorduk. Bu noktaların kutba (orijine) olan uzaklığının x ekseni ile yaptığı açıya kutupsal koordinatlar olarak adlandıracağız.

Kutupsal koordinat sistemi, matematik, fizik, mühendislik, denizcilik, robot teknolojisi gibi birçok alanda kullanılır. Bu sistem, iki nokta arasındaki ilişkinin açı ve uzaklık ile daha kolay ifade edilebildiği durumlar için özellikle kullanışlıdır. Kartezyen koordinat sisteminde, böyle bir ilişki ancak trigonometrik formüller ile bulunabilir. Kutupsal denklemler, çoğu eğri tipi için en kolay, bazıları için ise yegâne tanımlama yöntemidir.

Antik Yunan uygarlığında açı ve yarıçap kavramlarının kullanıldığı bilinmektedir. (MÖ 190 - 120), her açı için kiriş uzunluklarını veren bir kiriş fonksiyonları tablosu oluşturmuştur ve yıldızların konumlarını belirlemek için kutupsal koordinatlar kullandığına ilişkin kaynaklar bulunmaktadır. "Spiraller Üzerine" (On Spirals) adlı eserinde Arşimet, ünlü spiralini yarıçapın açıya bağlı olduğu bir fonksiyon olarak tanımlar. Bununla beraber, Yunan çalışmaları, koordinat sistemini tam olarak tanımlayamamıştır.

Kutupsal koordinatları resmî bir koordinat sisteminin parçası olarak ilk olarak kimin tanımladığına ilişkin farklı söylemler vardır. Konunun tarihçesi, Harvard profesörü Julian Lowell Coolidge'in "Kutupsal Koordinatların Kaynağı" (Origin of Polar Coordinates) adlı kitabında anlatılmıştır. Gregoire de Saint-Vincent ve Bonaventura Cavalieri yaklaşık aynı zamanda birbirinden bağımsız olarak kavramları oluşturmaya başlamıştır. Saint-Vincent, çalışmalarını 1625 yılında yazmış ve 1647 yılında yayınlamışken, Cavalieri de 1635 yılında kendi çalışmalarının ilk baskısını yapıp, 1653 yılında elden geçirilmiş bir sürümünü yayınlamıştır. Bir Arşimet spirali içindeki alanla ilgili bir problemin çözümünde kutupsal koordinat sisteminden ilk yararlanan Cavalieri olmuştur. Daha sonra Blaise Pascal, parabolik yayların uzunluğunu hesaplamak için kutupsal koordinatları kullanmıştır.

1671 yılında yazılmış ve 1736 yılında basılmış olan Method of Fluxions çalışmasıyla Isaac Newton, kutupsal koordinatlara bir düzlemdeki herhangi bir noktanın yerini saptama yöntemi olarak bakan ilk kişi olmuştur. Newton, kutupsal koordinatlar ve diğer dokuz koordinat sistemi arasındaki dönüşümleri incelemiştir. Acta eruditorum (1691) adlı çalışmasında Jacob Bermoulli, sırasıyla kutup ve kutupsal eksen olarak adlandırdığı bir nokta ve o noktanın üzerinde yer aldığı eksenden oluşan bir sistem kullanmıştır. Bu sistemde koordinatlar, kutba göre uzaklık ve kutup eksenine göre açı ile belirtilmiştir. Bernoulli'nin çalışması, bu koordinatlarla tanımlanmış eğrilerin eğim yarıçaplarını hesaplamaya kadar ilerlemiştir.

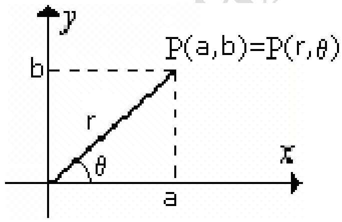
Gregorio Fontana'ya atfedilmiş olan kutupsal koordinatlar terimi, 17. yüzyıl İtalyan yazarları tarafından kullanılmıştır. Terimin İngilizce yayınlarda ilk yer alışı, George Peacock'ın Sylvetre François Lacroix'ya ait "Diferansiyel ve İntegral Hesaplamalar" (Differential and Integral Calculus) adlı kitabını çevirmesi ile 1816 yılında olmuştur. Alexis Clairaut ve Leonhard Euler, kutupsal koordinat kavramının üç boyuta uyarlanmasında rol oynamışlardır. (Marie Antoinette)

7.1. Tanım: $(0,0)$ Başlangıç noktası üzerinde $|OP| = r$ doğru parçası ve pozitif yönde (x eksenine saatin ters yönünde) θ kadar açı yapan noktaların kümesine (geometrik yerine) kutupsal koordinatlar denir.

Kartezyen koordinat sistemindeki $P(a,b)$ noktası kutupsal koordinatlarda

$$P(r,\theta) = P(r,\theta + 2k\pi),\ (k \in \mathbb{Z})$$

biçimindedir.



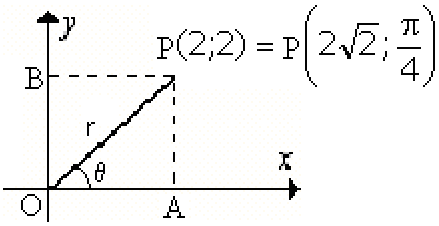
Burada dikkat edilirse,

$$\sin\theta = \frac{b}{r},\ \cos\theta = \frac{a}{r} \text{ ve } \tan\theta = \frac{b}{a}$$

olduğu gözükür.

Örnek: Kartezyen koordinatlardaki $P(2,2)$ noktasını kutupsal koordinat sistemine çeviriniz.

Çözüm:



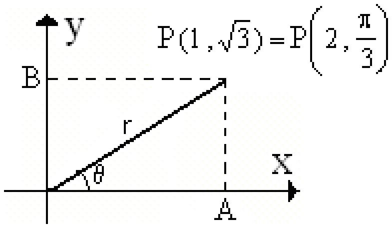
r nin değeri Pisagor teoreminden $r=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$ dir. $O\hat{P}A$ üçgeninde $\sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$ olduğundan $\theta=45^0=\frac{\pi}{4}$ dır. Buna göre

$$P(2,2)=P\left(2\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right)$$

bulunur.

Örnek: Kartezyen koordinatlardaki $P(1,\sqrt{3})$ noktasını kutupsal koordinat sistemine çeviriniz.

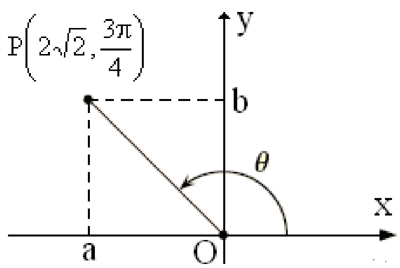
Çözüm:



r nin değeri pisagor teoreminden $r=\sqrt{1^2+\sqrt{3}^2}=2$ dir. $O\hat{P}A$ üçgeninde $\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\theta=\frac{1}{2}$ olacağından $\theta=60^0=\frac{\pi}{3}$ dir. Şu halde $P(1,\sqrt{3})=P\left(2,\frac{\pi}{3}\right)$ bulunur.

Örnek: Kutupsal koordinatlardaki $P\left(2,\frac{2\pi}{3}\right)$ noktasını kartezyen koordinat sistemine çeviriniz.

Çözüm: Kutupsal koordinatlardaki $P\left(2\sqrt{2},\frac{3\pi}{4}\right)$ noktasının kartezyen koordinatta karşılığı $P(a,b)$ olsun.

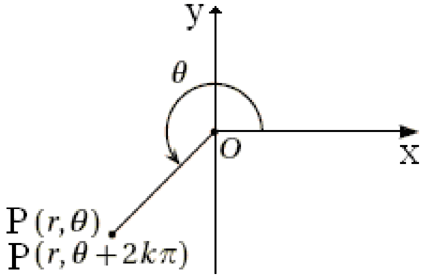


$\frac{3\pi}{4}=135^0$ olduğundan $P\hat{A}O$ üçgeninde

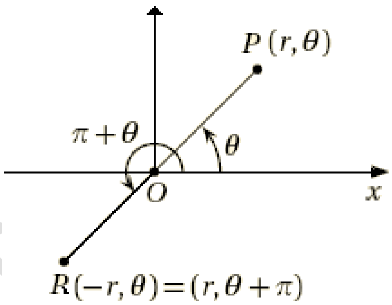
$$\sin(180-\theta)=\frac{b}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\ ,\ \cos(180-\theta)=\frac{a}{2\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

olacağından $a=-2$, $b=2$ dir. Şu halde $P\left(2\sqrt{2},\dfrac{3\pi}{4}\right)=P(-2\,,2)$ bulunur.

Not: Görüleceği gibi $P(a,b)$ noktasının kutupsal koordinatı $P(r,\theta)$ ise $k\in\mathbb{Z}$ için $P(r,\theta+2k\pi)$ de $P(a,b)$ noktasının kutupsal koordinatıdır.



7.1. Uyarı: Burada $r>0$ için bu tanımlar yapıldı ise de negatif r sayıları içinde bir P noktasının kutupsal koordinatı tanımlanabilir. Örneğin $r>0$ olmak üzere bir P noktasının kutupsal koordinatı $P(r,\theta)$ ise yönlendirilmiş $|OP|$ doğru parçasının tersi yönde r birim gidilirse $R(-r,\theta)$ de O noktasına göre P noktasının simetriği olan R noktasının kutupsal koordinatı olur. $R(-r,\theta)$ noktasının diğer bir kutupsal koordinatı da $R(r,\theta+\pi)$ dır.

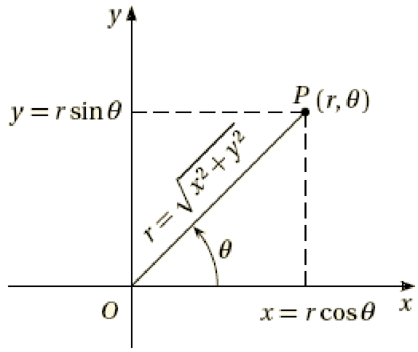


7.1. Teorem: Kartezyen koordinatta $P(x,y)$ noktasının kutupsal koordinatı $P(r,\theta)$ ise bu noktalar arasında

$$x=r\cos\theta \text{ ve } y=r\sin\theta$$

ilişkisi vardır.

İspat: Verilen bilgiler doğrultusunda şu grafik çizilebilir.



Bu şekle göre

$$x = r\cos\theta \text{ ve } y = r\sin\theta$$

ilişkisi oluşur.

Mesela, yukarıdaki bir örnekte Kartezyen koordinatlardaki $P(1,\sqrt{3})$ noktasının kutupsal koordinatta $P\left(2,\frac{\pi}{3}\right)$ olduğunu bulmuştuk. Buna göre,

$$1 = 2\cos\frac{\pi}{3} \text{ ve } \sqrt{3} = 2\sin\frac{\pi}{3}$$

dir.

Örnek: Kutupsal koordinatlar olarak verilen

a) $P\left(-3,\frac{\pi}{2}\right)$

b) $P\left(2,-\frac{\pi}{2}\right)$

noktalarına karşılık gelen kartezyen koordinat noktalarını bulunuz.

Çözüm: a) $r=-3$ ve $\theta=\frac{\pi}{6}$ dir. Buna göre

$$x = r\cos\theta = -3\cos\frac{\pi}{2} = 0$$

$$y = r\sin\theta = -3\sin\frac{\pi}{2} = -3$$

olur. O halde $P\left(-3,\frac{\pi}{2}\right)$ nin Kartezyen koordinatı $P(0,-3)$ dür.

b) $r=2$ ve $\theta=-\frac{\pi}{6}$ dir. Buna göre

$$x = r\cos\theta = 2\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$$

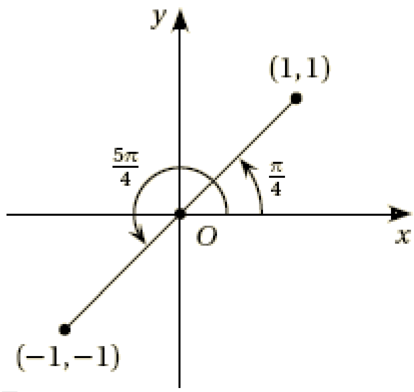
$$y = r\sin\theta = 2\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -1$$

olur. O halde $P\left(2,-\frac{\pi}{2}\right)$ nin Kartezyen koordinatı $P(\sqrt{3},-1)$ dür. //

$x \neq 0$ olmak üzere $\tan\theta = \frac{y}{x}$ yada $\arctan\frac{y}{x} = \theta$ eşitliklerini kullanarak θ yı bulurken dikkatli olmalıyız. Örneğin $P(1,1)$ ve $P(-1,-1)$ noktaları için bu eşitlikler kullanılırsa

$$\arctan\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4} \text{ ve } \arctan\left(\frac{-1}{-1}\right) = \frac{\pi}{4}$$

olur. Fakat $P(1,1)$ ve $P(-1,-1)$ noktaları için gerek θ değerleri sırasıyla $\theta = \frac{\pi}{4}$ ve $\theta = \frac{5\pi}{4}$ dür.



Örnek: Kartezyen koordinattaki $P(3,4)$ noktasının kutupsal koordinatta arctanjant yöntemiyle bulunuz.

Çözüm: i) 3 ve 4 koordinat sisteminde I. bölgede

ii) $r = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

iii) $\theta = \arctan\frac{4}{3} = 37^0$

olduğundan

$$P(3,4) = P(5, 37^0)$$

bulunur.

7.1. Uyarı: Her ne kadar $r > 0$ için bu tanımlar yapıldı ise de negatif r sayıları içinde bir P noktasının kutupsal koordinatı tanımlanabilir. Örneğin $r > 0$ olmak üzere bir P noktasının kutupsal koordinatı (r, θ) ise OP ışınının tersi yönde r birim gidilirse $(-r, \theta)$ de O noktasına göre P noktasının simetriği olan nokta kutupsal koordinatı olur.

KUTUPSAL KOORDİNATLARDA FONKSİYONLAR

Kartezyen koordinat sisteminde verilen bir fonksiyon

$$x = r\cos\theta \text{ ve } y = r\sin\theta$$

denklemleri ile kutupsal koordinatlara çevrilir. Burada,

$$x^2 + y^2 = r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta = r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r^2$$

olduğunu görmek gerekir.

Örnek: Aşağıda verilen kutupsal koordinatlardaki denklemleri Kartezyen koordinatlarda ifade edelim.

a) $r = 10$ b) $r = 2\cos\theta\tan\theta$

c) $\tan\theta = 5$ d) $r\cot\theta = 4$

e) $r = 1 - \sin\theta$

Çözüm: a) $r = 10$ ise $x^2 + y^2 = r^2 = 10^2 = 100$

b) $r = 3\cos\theta\tan\theta$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 3\cos\theta\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 3\sin\theta$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 3\frac{y}{r}$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 3\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$x^2 + y^2 = 3y$$

c) $\tan\theta = 5$

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = 5$$

$$\frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}} = 5$$

$$y = 5x$$

d) $r\cot\theta = 4$

$$\sqrt{x^2+y^2}\,\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=4$$

$$\sqrt{x^2+y^2}\,\frac{\frac{x}{r}}{\frac{y}{r}}=4$$

$$\sqrt{x^2+y^2}=4\frac{y}{x}$$

$$x^2+y^2=16\frac{y^2}{x^2}$$

$$x^4+y^2x^2-16y^2=0$$

e) $r=1-\sin\theta$

$$\sqrt{x^2+y^2}=1-\frac{y}{r}$$

$$\sqrt{x^2+y^2}=1-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$x^2+y^2=1-y$$

KUTUPSAL KOORDİNATLARDA EĞRİ ÇİZİMİ

Kartezyen koordinatlarda $y=f(x)$ şeklinde tanımlanan bir fonksiyon kartezyen koordinat sisteminde $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ olduğundan $r=f(\theta)$ fonksiyonu elde edilir.

Kutupsal koordinatlarda verilen bir $r=f(\theta)$ fonksiyonun grafiği kutupsal koordinatlarda çizilirken genellikle aşağıdaki yol izlenir.

i) Fonksiyon periyodik ise periyodu belirlenir.
ii) $r=f(\pi+\theta)$ ise fonksiyonun grafiği orijine göre simetriktir.
iii) Fonksiyon $f(\theta)=f(-\theta)$ ise fonksiyonun grafiği x-eksenine göre simetriktir.
iv) Fonksiyon $f(\theta)=f(\pi-\theta)$ ise fonksiyonun grafiği y -eksenine göre simetriktir.
v) Bazı θ değerleri için $(\theta, f(\theta))$ noktaları bulunur fonksiyonun bazı özellikleri kullanılarak grafik tamamlanır.

Doğrusal Fonksiyonun Kutupsal Koordinatlardaki Denklemi

7.2. Teorem: Kartezyen koordinatta $ax+by+c=0$ $(a,b,c\in\mathbb{R})$ olan doğrusal fonksiyonun denklemi, kutupsal koordinata

$$\frac{1}{r} = A\cos\theta + B\sin\theta \text{ , } (r \in \mathbb{R})$$

şeklindedir.

İspat: $c \neq 0$ olmak üzere $x = r\cos\theta$ ve $y = r\sin\theta$ dönüşümü yapılırsa,

$$ax + by + c = 0$$
$$ar\cos\theta + br\sin\theta + c = 0$$
$$r(a\cos\theta + b\sin\theta) = -c$$
$$\frac{1}{r} = -\frac{a}{c}\cos\theta - \frac{b}{c}\sin\theta, \quad (A = -\frac{a}{c} \text{ , } B = -\frac{b}{c})$$
$$\frac{1}{r} = A\cos\theta + B\sin\theta$$

bulunur.

$c = 0$ ise bu durum denklemde tanımsızlık yapacağından kutuptan geçen doğruyu göstermez. //

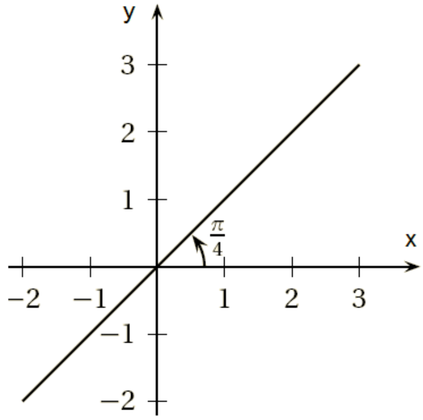
Özel Durumlar;

1. $A = 0$ ise $\frac{1}{r} = B\sin\theta$ olup doğru x eksenine paraleldir.

2. $B = 0$ ise $\frac{1}{r} = A\cos\theta$ olup doğru x eksenine diktir.

Örnek: $\theta = \frac{\pi}{4}$ ün grafiğini çiziniz.

Çözüm: $\theta = \frac{\pi}{4}$ sabit fonksiyon olduğundan kutupsal koordinatlarda bu bir doğru belirtir. Bu doğru üzerindeki noktaların kutupsal koordinatları $r \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $\left(r, \frac{\pi}{4}\right)$ şeklindedir.



Çemberin Kutupsal Koordinatlardaki Denklemi

7.3. Teorem: Kartezyen koordinatta $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ $(D, E, F \in \mathbb{R})$ olan çemberin denklemi, kutupsal koordinata

$$r^2 + r(D\cos\theta + E\sin\theta) + F = 0 \ , \ (r \in \mathbb{R})$$

şeklindedir.

İspat: $x = r\cos\theta$ ve $y = r\sin\theta$ dönüşümü yapılırsa,

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

$$(r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2 + D(r\cos\theta) + E(r\sin\theta) + F = 0$$

$$r^2 + r(D\cos\theta + E\sin\theta) + F = 0$$

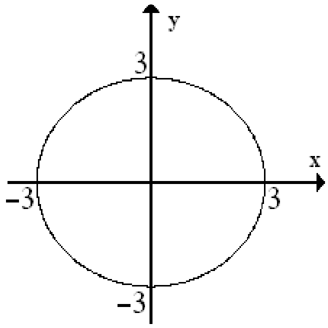
dir. //

Özel Durumlar;

1. $F = 0$ ise $r = -D\cos\theta - E\sin\theta$ olup merkezi $O(0,0)$ geçen çember denklemini verir.

2. Merkezi $O(0,0)$ noktasından geçen yarıçapı R olan bir çemberin kartezyen koordinattaki denklemi $x^2 + y^2 = R^2$ ise kutupsal koordinattı $r = \pm R$ dir.

Örnek: Yarıçapı $R = 3$ olan $r(\theta) = 3$ çember denkleminin grafiği



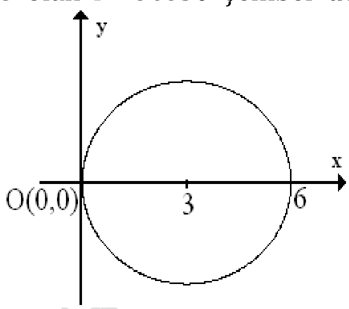
şeklindedir.

3. Merkezi x ekseni üzerinde, yarıçapı R olan ve bir noktası $O(0,0)$ noktasından geçen çemberin kartezyen koordinattaki denklemi $(x-R)^2+y^2=R^2$ ise kutupsal koordinatı

$$r=2R\cos\theta$$

dir.

Örnek: Yarıçapı $R=3$ olan $r=6\cos\theta$ çember denkleminin grafiği



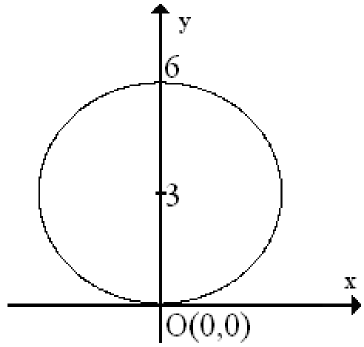
şeklindedir.

4. Merkezi y ekseni üzerinde, yarıçapı R olan ve bir noktası $O(0,0)$ noktasından geçen çemberin kartezyen koordinattaki denklemi $x^2+(y-R)^2=R^2$ ise kutupsal koordinatı

$$r=2R\sin\theta$$

dir.

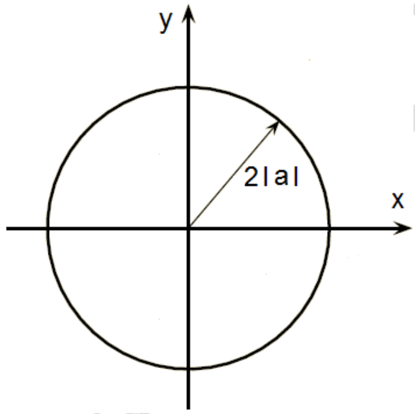
Örnek: Yarıçapı $R=3$ olan $r=6\sin\theta$ çember denkleminin grafiği



şeklindedir.

Örnek: $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere $r = 2a$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm: Her θ için $|r| = |2a|$ olduğundan bu eğri yarıçapı $2|a|$ olan çemberdir.



Koniklerin Kutupsal Koordinatlardaki Denklemi

7.4. Teorem: Kartezyen koordinatta $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ $(A,B,C,D,E,F \in \mathbb{R})$ olan koniklerin denklemi, kutupsal koordinata

$$r^2(A\cos^2\theta + B\cos\theta\sin\theta + C\sin^2\theta) + r(D\cos\theta + E\sin\theta) + F = 0 \ , \ (r \in \mathbb{R})$$

şeklindedir.

İspat: $x = r\cos\theta$ ve $y = r\sin\theta$ dönüşümü yapılırsa,

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$
$$Ar^2\cos^2\theta + Br\cos\theta . r\sin\theta + Cr^2\sin^2\theta + Dr\cos\theta + Er\sin\theta + F = 0$$
$$r^2(A\cos^2\theta + B\cos\theta\sin\theta + C\sin^2\theta) + r(D\cos\theta + E\sin\theta) + F = 0$$

dir. //

Özel Durumlar;

1. $B=D=E=0$ ve $F=AC$ ise denklem elipstir.

2. $B=D=E=0$ ve $F=-AC$ ise denklem hiperboldür.

ÖZEL EĞRİLERİN KUTUPSAL KOORDİNATLARI

Kutupsal koordinatlarda özel eğriler mevcuttur. Bunları bazılarının çizimini ve bazılarının da kendisini gösterelim.

Kardioid Eğrisi: $a>0$ olmak üzere $r=a(1-\cos\theta)$ kardiod eğrisinin grafiğini çiziniz.

Çözüm: Bu fonksiyon periyodik ve periyodu 2π dir. $\theta\in[0,\pi]$ için

$$a(1-\cos\theta)=a(1-\cos(-\theta))$$
$$f(\theta)=f(-\theta)$$

olduğundan eğri x-eksenine göre simetriktir.

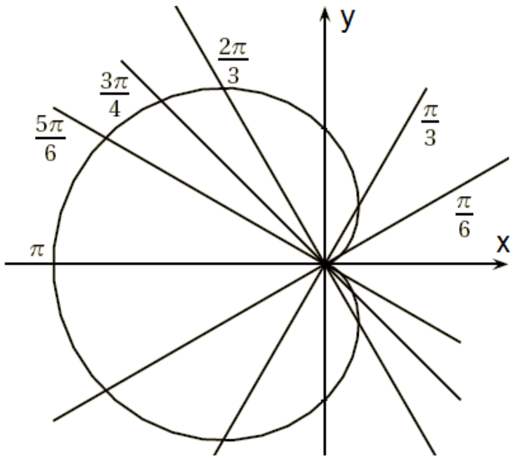
$$-1\le\cos\theta\le 1$$
$$-1\le-\cos\theta\le 1$$
$$0\le 1-\cos\theta\le 2$$
$$0\le a(1-\cos\theta)\le 2a$$

olur. $1-\cos\theta=0$ olduğundan fonksiyon 0 da minimum π noktasında maksimum değerini alır. Buna göre π noktasında

$$r=a(1-\cos\pi)=a(1-(-1))=2a$$

dır. $[0,\pi]$ aralığında bazı değerleri bulalım.

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
r	0	$a\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$\frac{a}{2}$	a	$\frac{3a}{2}$	$a\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right)$	$a\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right)$	2a



Lemniskat Kurdelesi (Bernoulli, Fagnano, Euler): $a>0$ olmak üzere $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ Lemniskat kurdelisinin grafiğini çiziniz.

Çözüm: Bu fonksiyon periyodik ve periyodu π dir. $\theta \in [-\pi, \pi]$ için

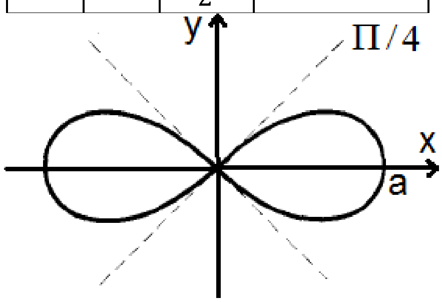
$$a\sqrt{\cos\theta} = a\sqrt{\cos(-\theta)}$$
$$f(\theta) = f(-\theta)$$

olduğundan eğri x-eksenine göre simetriktir.

$$-1 \le \cos 2\theta \le 1$$
$$-a^2 \le a^2 \cos 2\theta \le a^2$$
$$0 \le a\sqrt{\cos 2\theta} \le a$$

olur. $\cos 2\theta = 0$ olduğundan fonksiyon 0 ve $\frac{\pi}{2}$ noktasında maksimum, $\frac{\pi}{4}$ noktasında minimum değerini alır. $[0, \pi/2]$ aralığında bazı değerleri bulalım.

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$
r	a	$\frac{a}{2}$	0



Gül (Rodonea) Eğrisi:

Dom Luigi Guido Grandi
01 Ekim 1671, Cremona, İtalya-04 Temmuz 1742, Pisa, İtalya
(Bu eğriye Gül Eğrisine diyen şahıs)

$r = a\cos k\theta$ denklemin gül eğrisi adı verilir.

Bu denklemde kosinüs yerine sinüs de yazılabilir, ortaya çıkacak eğri kosinüs eğrisinin π/2k radyan kadar döndürülmüş bir kopyası olacaktır. Bunun sebebi de sinüs ve kosinüs arasındaki şu ilişkidir:

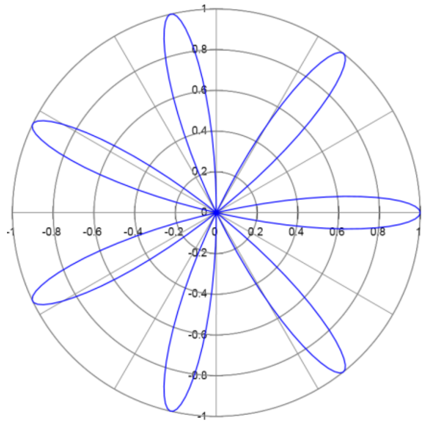
$$\sin k\theta = \cos\left(k\theta - \frac{\pi}{2}\right)$$

Gül eğrisi aynı zamanda, orijinden çıkan ve sabit açısal hızla dönmekte olan bir doğrunun üzerinde sinüs/kosinüs dalgası şeklinde ileri geri hareket eden bir noktanın izleyeceği eğridir.

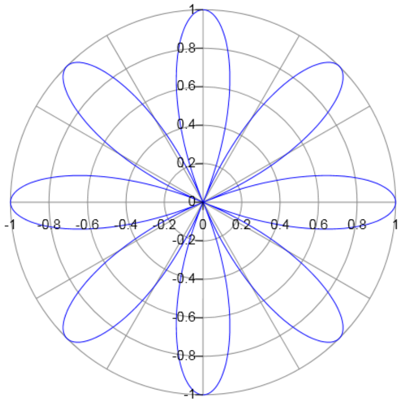
Denklemdeki a değeri gülün şeklini değil, bir bütün olarak büyüklüğünü (yani yaprakların uzunluğunu) etkiler.

Eğer k tek sayı ise, gül şeklinin tamamen çizilmesi için θ'nın π uzunluğunda bir interval boyunca ilerlemesi yeterlidir ve ortaya çıkacak gül k yapraklı olacaktır. Yok eğer k çift sayı ise, şeklin tamamen çizilmesi için θ'nın 2π uzunluğunda bir intervalde ilerlemesi gerekir ve ortaya çıkacak gül 2k yapraklı olacaktır. Burada ilginç bir nokta şudur: Herhangi tek sayının iki katı kadar (2, 6, 10, 14, 18, vs.) yaprağı olan bir gül çizilemez.

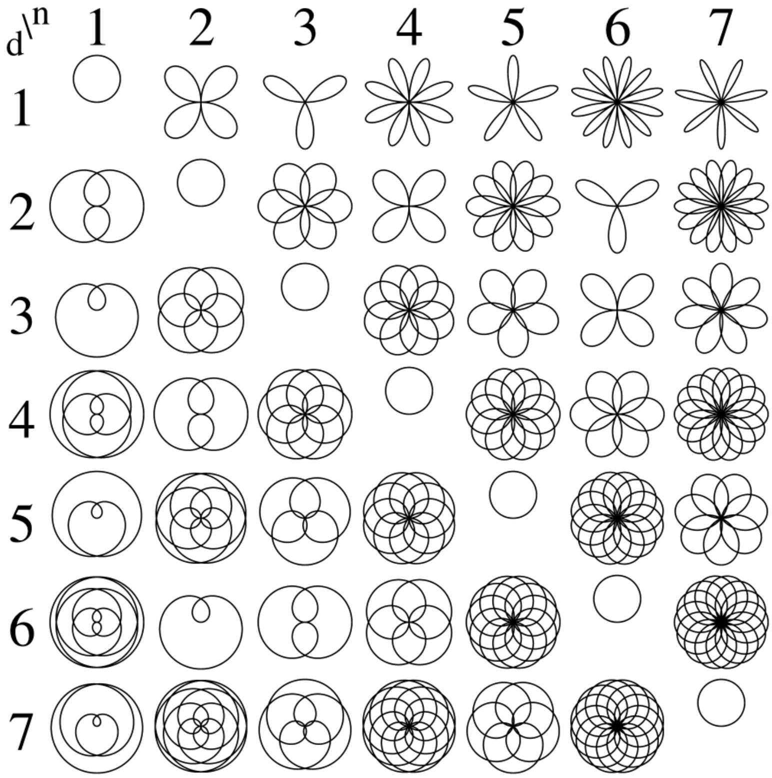
Elbette k bir tamsayı olmak zorunda değildir, rasyonel ya da irrayonel de olabilir. Eğer k bir rasyonel sayı ise, ortaya çıkan eğri kapalı ve sonlu uzunlukta olacaktır. k irrasyonel ise, eğri kapalı olmayacak ve uzunluğu sonsuz olacaktır.



Yedi Yapraklı Gül



Sekiz Yapraklı Gül

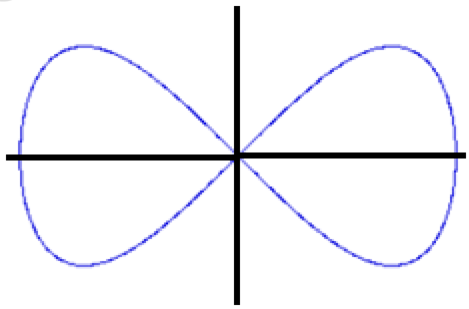


Bazı rasyonel k değerlerine karşılık gelen güller (k=n/d)

Şimdi teknolojide ve anatomide kullanılan bazı özel eğrileri verelim.

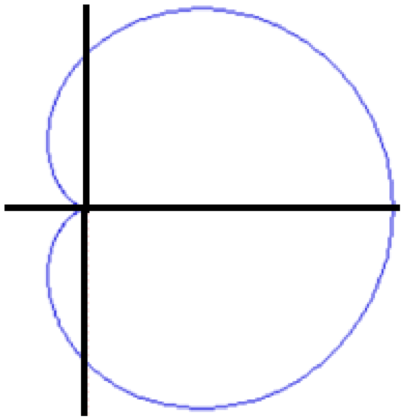
1. Gerono Kurdelesi (Gerono, Bernoulli, Fagranı, Euler):

$$r^2 = a^2 \cos 2\theta \, soc^4\theta$$



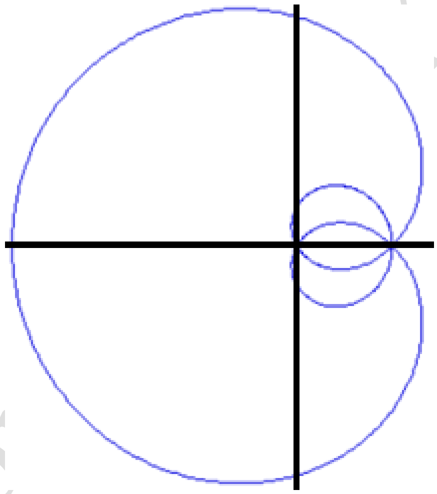
2. Yüreksi Eğrisi (Castillion, La Hire):

$$r = 2a(1+\cos\theta)$$



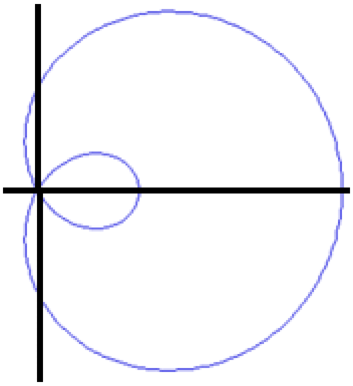
3. Freeth Böbreğimsi:

$$r = a\left(1 + 2\sin\frac{\theta}{2}\right)$$

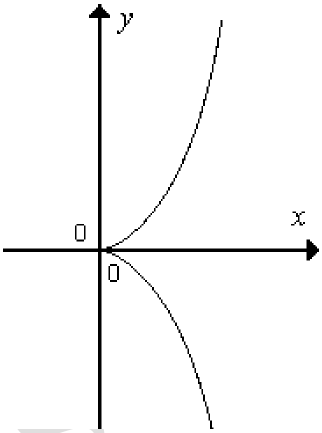


4. Paskal Salyangozu (Dürer, Pascal, Roberval, Mersenne):

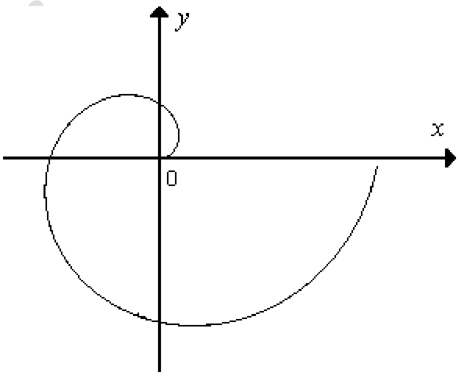
$$r = a + 2a\cos\theta$$



5. Diocles Sarmaşığı (Diocles): $r = \frac{2a\sin^2\theta}{\cos\theta}$

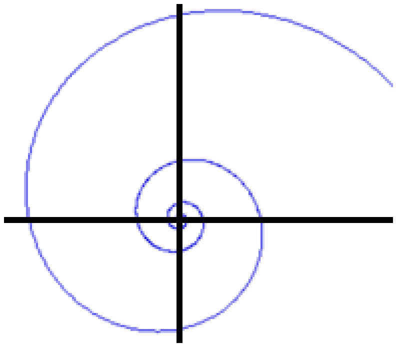


6. Spiral Eğrisi: $r = \theta$



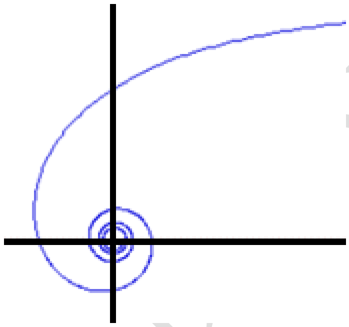
7. Eş-Açısal Sarmal (Descartes, Torricelli):

$r = a.e^{\theta\cot b}$



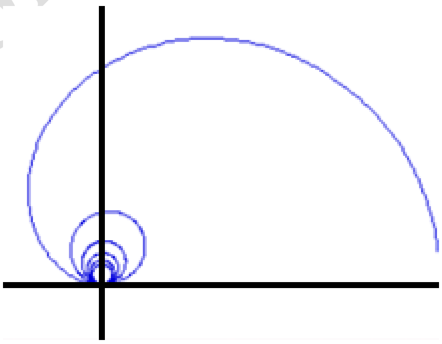
8. Hiperbolik Sarmal (Varignon, Bernoulli, Cotes):

$$r = \frac{a}{\theta}$$



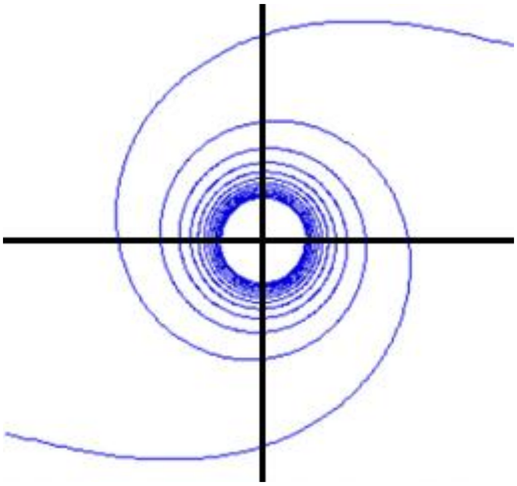
9. Salyangozsu Spirali

$$r = \frac{a.\sin\theta}{\theta}$$



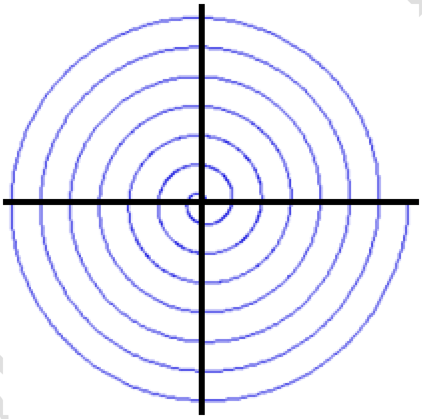
10. Kanca Spirali (Cotes):

$$r^2 = \frac{a^2}{\theta}$$



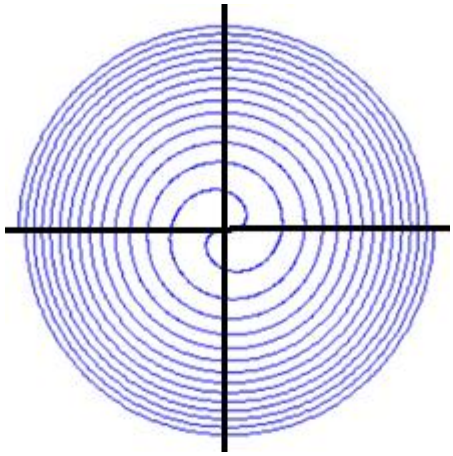
11. Archimedes Sarmalı (Archimedes, Conan):

$r = a^{\theta}$

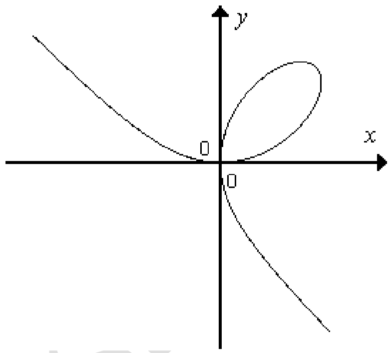


12. Fermat Spirali:

$r^2 = a^2\theta$

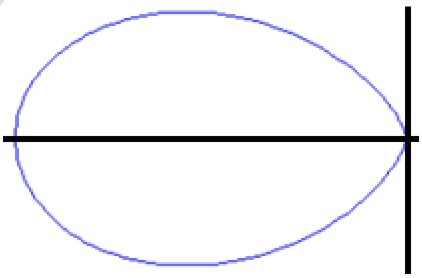


13. Descartes Yaprağı: $r=\dfrac{3a\cos\theta\sin\theta}{\cos^3\theta+\sin^3\theta}$



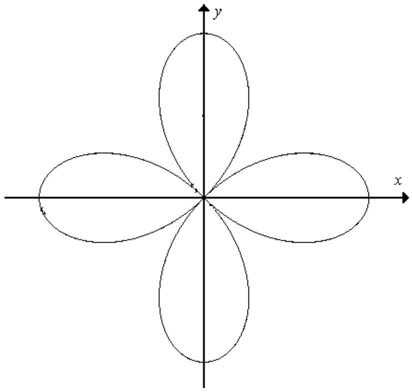
2. Tek Yaprak:

$r=-b\cos\theta+4a\cos\theta\sin^2\theta$



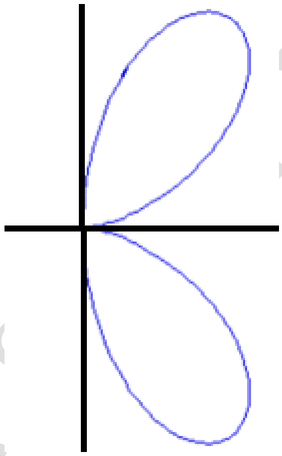
15. Dört Yapraklı Yonca:

$r=4\cos2\theta$



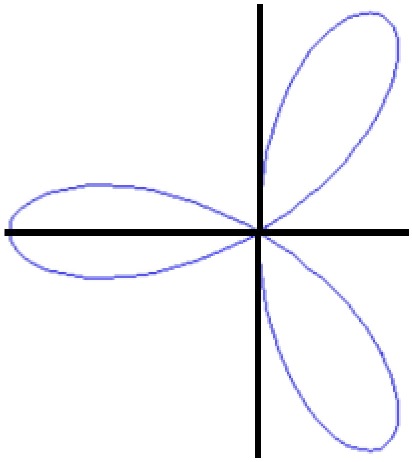
16. Çift Yaprak:

$r = 4a\cos\theta\sin^2\theta$



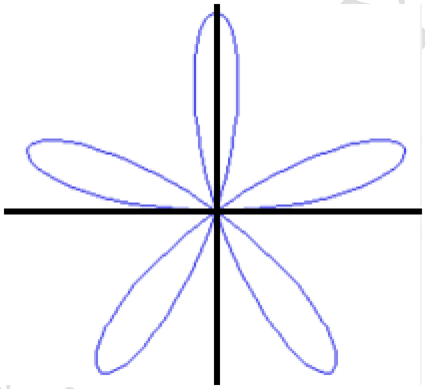
17. Üç Yaprak:

$r = a\cos\theta(4\sin^2\theta - 1)$



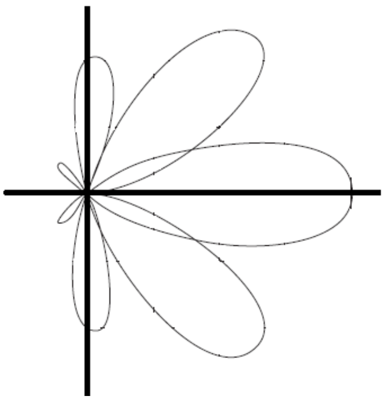
18. Beş Yaprak (Grandi):

$r = a \sin k\theta$



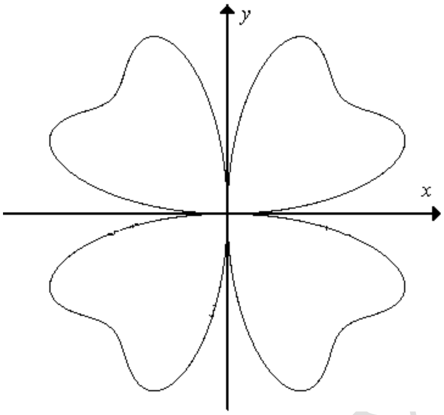
19. Yedi yapak

$r = \cos t + \cos 4t$



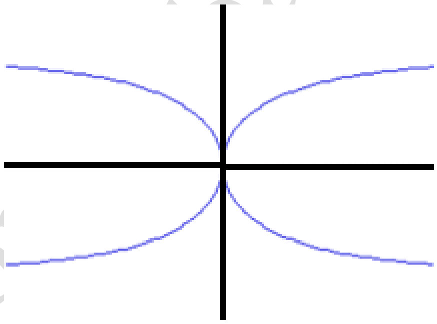
20. Kelebek Eğrisi:

$$r = \sin 2\theta + \frac{1}{4}\sin 6\theta$$



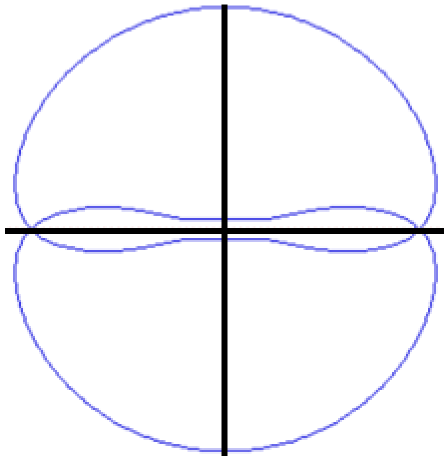
21. Kappa Eğrisi (Gutschoven, Newton, Bernoulli):

$$r = a\cot\theta$$



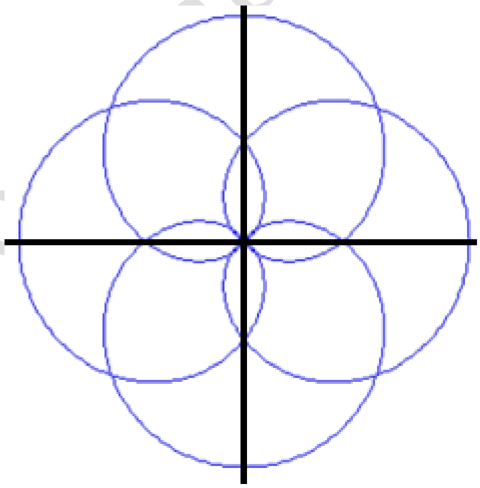
22. WATT Eğrisi (Watt, Sylvester, Kempe, Carley):

$$r^2 = b^2 - \left[a\sin\theta \pm \sqrt{c^2 - a^2\cos\theta}\right]^2$$



23. Sinüsoidal Spirali (Mc Laurin):

$$r^p = a^p \cot p\theta = \begin{cases} p=-2, & \text{hiperbol} \\ p=-1, & \text{dogru} \\ p=-1/2, & \text{parabol} \\ p=1/2, & \text{yüreksi} \\ p=1, & \text{daire} \\ p=2, & \text{Bernolli Kurdelesi} \end{cases}$$



KUTUPSAL KOORDİNATLARIN TÜREVİ

Kutupsal koordinatlarda $x = r\cos\theta$ ve $y = r\sin\theta$ dönüşümler yapıldığından,

$$x = f(\theta)\cos\theta \text{ ve } y = f(\theta)\sin\theta$$

parametrik denklemin türevi alınır.

Örnek: $r=\cos 2\theta$ fonksiyonunun kartezyen koordinatlardaki parametrik denklemini yazarak

a) Türevini bulunuz.

b) $\frac{\pi}{6}$ noktasında teğetin eğimini bulunuz.

Çözüm: a) Bu fonksiyonun kartezyen koordinatlardaki parametrik denklemi

$$x=\cos 2\theta\cos\theta \text{ ve } y=\cos 2\theta\sin\theta$$

olduğundan,

$$\frac{dx}{d\theta}=-2\sin 2\theta\cos\theta-\sin\theta\cos 2\theta=-\frac{1}{2}(3\sin 3\theta+\sin\theta)$$

$$\frac{dy}{d\theta}=-2\sin 2\theta\sin\theta+\cos\theta\cos 2\theta=\frac{1}{2}(3\cos 3\theta-\cos\theta)$$

olur. Böylece,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{\frac{1}{2}(3\cos 3\theta-\cos\theta)}{-\frac{1}{2}(3\sin 3\theta+\sin\theta)}=\frac{\cos\theta-3\cos 3\theta}{3\sin 3\theta+\sin\theta}$$

elde edilir.

b) $\frac{\pi}{6}$ noktasında teğetin eğimi;

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=\frac{\pi}{6}}=\frac{\cos\frac{\pi}{6}-3\cos 3\frac{\pi}{6}}{3\sin 3\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{6}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}-3.0}{3.1+\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{7}$$

olur.

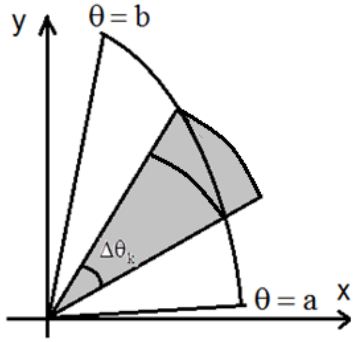
KUTUPSAL KOORDİNATLARIN İNTEGRALİ

7.5. Teorem: Kutupsal koordinatlarda $r=f(\theta)$ fonksiyonu $\theta=a$ ve $\theta=b$ doğruları tarafından sınırlanan düzlemsel bölgenin A alanını;

$$A=\frac{1}{2}\int_a^b f^2(\theta)d\theta$$

dir.

İspat:



$\theta=[a,b]$ için $f(\theta)\geq 0$ ve f bu aralıkta sürekli olsun. $\theta=a$ ve $\theta=b$ doğrularının oluşturduğu açıyı

$$a=\theta_1<\theta_2<\cdots<\theta_{n-1}<\theta_n=b$$

şeklinde parçalayalım.

$$M_k=\sup\{f(\theta):\theta\in[\theta_{n-1},\theta_n]\}$$
$$m_k=\inf\{f(\theta):\theta\in[\theta_{n-1},\theta_n]\}$$

olsun. M_k ve m_k yarıçaplı daire dilimlerinin alanları sırası ile $\frac{1}{2}M_k^2\Delta\theta_k$ ve $\frac{1}{2}m_k^2\Delta\theta_k$ olduğundan,

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}m_k^2\Delta\theta_k\leq A\leq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}M_k^2\Delta\theta_k$$

yazılabilir. f sürekli olduğundan integrallenebilirdir. Dolayısıyla alt ve üst Riemann-Darbouks toplamlarının $\|p\|\to 0$ limitleri,

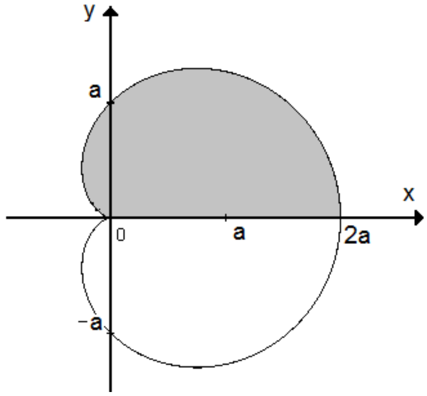
$$A=\lim_{\|p\|\to 0}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}m_k^2\Delta\theta_k=\lim_{\|p\|\to 0}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}M_k^2\Delta\theta_k$$

$$A=\frac{1}{2}\int_a^b f^2(\theta)\,d\theta$$

olur.

Örnek: $r=a(1+\cos\theta)$ kardioid eğrisinin sınırladığı bölgenin alanını bulunuz.

Çözüm:



Taralı bölgenin alanı istenen bölgenin alanının yarısıdır. Buna göre;

$$A = 2.\frac{1}{2}\int_a^b f^2(\theta)d\theta$$

$$= a^2\int_0^\pi (1+2\cos\theta+\cos^2\theta)\,d\theta$$

$$= a^2\int_0^\pi (1+2\cos\theta+\cos^2\theta)\,d\theta$$

$$= a^2\int_0^\pi \left(1+2\cos\theta+\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)d\theta$$

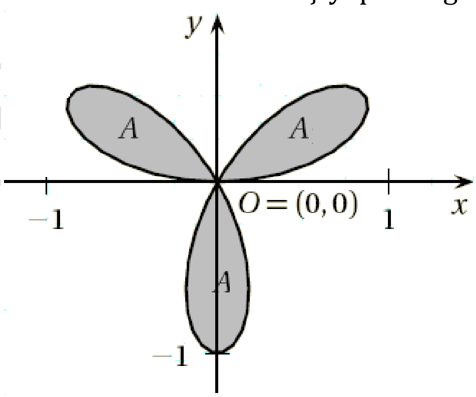
$$= a^2\left[\theta+2\sin\theta+\frac{\theta}{2}+\frac{\sin 2\theta}{4}\right]_0^\pi$$

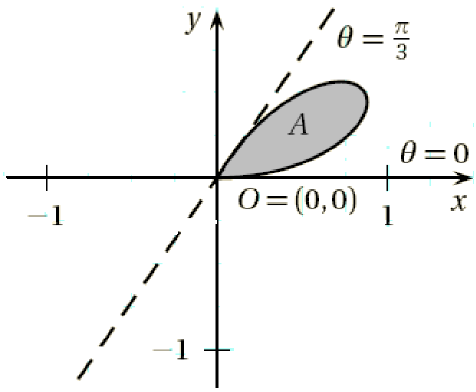
$$= a^2\left[\left(\pi+2\sin\pi+\frac{\pi}{2}+\frac{\sin 2\pi}{4}\right)-\left(0+2\sin 0+\frac{0}{2}+\frac{\sin 0}{4}\right)\right]$$

$$= \frac{3}{2}\pi a^2 \text{ br}^2$$

olur.

Örnek: $r = \sin 3\theta$ üç yapraklı gülün alanını bulunuz.





Çözüm: $3A = 3.\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\pi/3} \sin^2 3\theta\, d\theta$

$$= \frac{3}{2}\int_0^{\pi/3} \frac{1-\cos 6\theta}{2}\, d\theta$$

$$= \frac{3}{4}\int_0^{\pi/3} (1-\cos 6\theta)\, d\theta$$

$$= \frac{3}{4}\left[\theta - \frac{\sin 6\theta}{2}\right]_0^{\pi/3}$$

$$= \frac{3}{4}\left[\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sin 2\pi}{2}\right) - \left(0 - \frac{\sin 2.0}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{\pi}{4}\ \text{br}^2$$

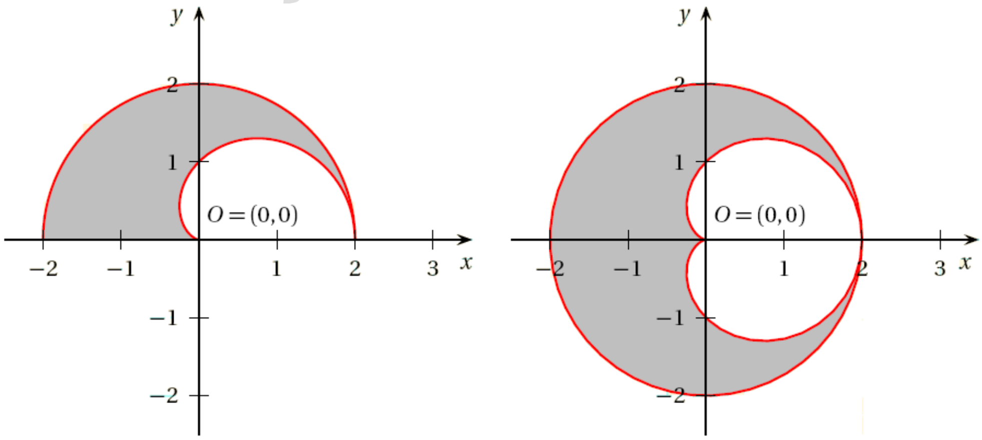
7.6. Teorem: Kutupsal koordinatlarda $r = f(\theta)$ ve $r = g(\theta)$ fonksiyonlarının $\theta = a$ ve $\theta = b$ doğruları arasında kalan düzlemsel bölgenin A alanını;

$$A = \frac{1}{2}\int_a^b \left[f^2(\theta) - g^2(\theta)\right] d\theta$$

dir.

Bu teoremin ispatı okuyucuya bırakılmıştır.

Örnek: $r_1 = 2$ ve $r_2 = 1 + \cos\theta$ eğrileri arasında kalan alanı bulunuz.



Çözüm: $A = 2.\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\pi} \left[f^2(\theta) - g^2(\theta)\right] d\theta$

$$=\int_0^{\pi}\left[2^2-(1+\cos\theta)^2\right]d\theta$$

$$=\int_0^{\pi}\left[4-(1+2\cos\theta+\cos^2\theta)\right]d\theta$$

$$=\int_0^{\pi}\left[3-2\cos\theta-\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)\right]d\theta$$

$$=\int_0^{\pi}\left[\frac{5}{2}-2\cos\theta-\left(\frac{\cos 2\theta}{2}\right)\right]d\theta$$

$$=\frac{5}{2}\theta-2\sin\theta-\left(\frac{\sin 2\theta}{4}\right)\Bigg|_0^{\pi}$$

$$=\left[\frac{5}{2}\pi-2\sin\pi-\left(\frac{\sin 2\pi}{4}\right)\right]-\left[\frac{5}{2}.0-2\sin 0-\left(\frac{\sin 2.0}{4}\right)\right]$$

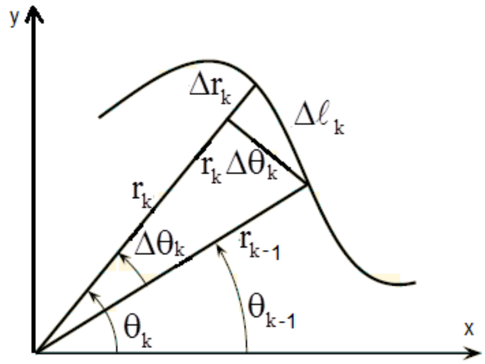
$$=\frac{5}{2}\pi \text{ br}^2$$

7.7. Teorem: Kutupsal koordinatlarda $r=f(\theta)$ fonksiyonu $\theta=a$ ve $\theta=b$ doğruları tarafından sınırlanan düzlemsel bölgenin uzunluğu;

$$\ell=\int_a^b\sqrt{[f'(\theta)]^2+[f(\theta)]^2}\,d\theta$$

dir.

İspat:



$\theta=[a,b]$ için $f(\theta)\geq 0$ ve f bu aralıkta sürekli olsun. $\theta=a$ ve $\theta=b$ doğrularının oluşturduğu açıyı

$$a=\theta_1<\theta_2<\cdots<\theta_{n-1}<\theta_n=b$$

şeklinde parçalayalım. Yarıçapı r olan bir çemberin çevresinin uzunluğu $2\pi r$ olduğundan $\Delta\theta_k$ açılı çemberin yay uzunluğu $r_k.\Delta\theta_k$ olur. Buna göre f nin θ_k ve θ_{k-1}

arasında kalan eğri parçasının uzunluğu $\Delta\ell_k$ nın yaklaşık değeri $\Delta\ell_k = \sqrt{(\Delta r_k)^2 + (r_k.\Delta\theta_k)^2}$ dir. Bu durumda

$$\Delta\ell_k = \sqrt{(\Delta\theta_k)^2\left[\left(\frac{\Delta r_k}{\Delta\theta_k}\right)^2 + (r_k)^2\right]}$$

$$= \Delta\theta_k\sqrt{\left[\left(\frac{\Delta r_k}{\Delta\theta_k}\right)^2 + (r_k)^2\right]}$$

olur. Buna göre

$$\ell \cong \left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\left(\frac{\Delta r_k}{\Delta\theta_k}\right)^2 + (r_k)^2}\right)\Delta\theta_k$$

olur. Buradan

$$\ell = \lim_{\|p\|\to 0}\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\left(\frac{\Delta r_k}{\Delta\theta_k}\right)^2 + (r_k)^2}\right)\Delta\theta_k = \int_a^b \sqrt{[f'(\theta)]^2 + [f(\theta)]^2}\, d\theta$$

olur.

Örnek: $r = 1 + \cos\theta$ kardioid eğrisinin yay uzunluğunu bulunuz.

Çözüm: Kardioid x-eksenine göre simetrik olduğundan önce r eğrisinin, $\theta = 0$ ve $\theta = \pi$ doğruları arasında kalan kısmının yay uzunluğunu bulalım.

$f(\theta) = 1 + \cos\theta$ için $f'(\theta) = -\sin\theta$

dir. Trigonometride indirgeme formüllerinden,

$$1 + \cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2}$$

yazılabileceğinden,

$$\frac{\ell}{2} = \int_0^\pi \sqrt{(-\sin\theta)^2 + (1+\cos\theta)^2}\, d\theta$$

$$= \int_0^\pi \sqrt{\sin^2\theta + 1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta}\, d\theta$$

$$= \int_0^\pi \sqrt{2 + 2\cos\theta}\, d\theta$$

$$= \sqrt{2}\int_0^\pi \sqrt{1+\cos\theta}\, d\theta$$

$$= \sqrt{2}\int_0^\pi \sqrt{2\cos^2\frac{\theta}{2}}\, d\theta$$

$$=2\int_0^{\pi}\cos\frac{\theta}{2}d\theta$$

$$=4\sin\frac{\theta}{2}\Big|_0^{\pi}$$

$$=\left(4\sin\frac{\pi}{2}-4\sin 0\right)$$

$$=4$$

$$\ell=8 \text{ br}$$

bulunur.