8. BÖLÜM
PARAMETRİK DENKLEMLER

PARAMETRİK DENKLEM KAVRAMI

8.1. Tanım: $A\subset\mathbb{R}$, $f:A\to\mathbb{R}$, $y=f(x)$ fonksiyonu her $A(x,y)$ noktasında sürekli olsun. Yine $g,h:A\to\mathbb{R}$ iki sürekli fonksiyon olsun. $x=g(t)$, $y=h(t)$ gibi fonksiyonları olarak tanımlanıyorsa $x=g(t)$, $y=h(t)$ denklemlerine $y=f(x)$ parametrik denklemi denir. Buna göre $y=f(x)$ fonksiyonu $f(t)=(g(t),h(t))$ biçimine dönüşür.

Bu denklemler t yok edilerek $y=f(x)$ şeklinde yazılabiliyorsa elde edilen bu denkleme de eğrinin kartezyen denklemi denir. Lakin t yok edilerek $y=f(x)$ şeklinde yazılamayan denklemlerde olabilir.

Örnek: $x=g(t)=t+2$ ve $y=h(t)=2t+8$ parametrik fonksiyonları ile verilen fonksiyonun kartezyen denklemine çevirimiz.

Çözüm: $x=t+2$ ise $x-2=t$ olacağından,

$$y=2t+8=2(x-2)+8=2x-4$$

doğru denklemi elde edilir.

Örnek: $a,b,r\in\mathbb{R}$ olmak üzere,

$$x=r\cos t+a \text{ ve } y=r\sin t+b$$

paremetrik denkleminin merkezi M(a, b) ve yarıçapı r olan çember denklemi olduğunu kartezyen denklemine çevirerek yapınız.

Çözüm:

$$x=r\cos t+a$$
$$r\cos t=x-a$$
$$\cos t=\frac{x-a}{r}$$

ve

$$y=r\sin t+b$$
$$r\sin t=y-b$$
$$\sin t=\frac{y-b}{r}$$

elde edilir. Trigonometri bilgisinden,

$$\cos^2 t + \sin^2 t = 1$$
$$\left(\frac{x-a}{r}\right)^2 + \left(\frac{y-b}{r}\right)^2 = 1$$
$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

bulunur. Bu bir çember denklemidir.

Örnek: $a, b, r \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$x = a\cos t \text{ ve } y = b\sin t$$

paremetrik denklemi elipsin denklemi olduğunu kartezyen denklemine çevirerek yapınız.

Çözüm: $\frac{x}{a} = \cos t$ ve $\frac{y}{b} = \sin t$

$$\cos^2 t + \sin^2 t = 1$$
$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

PARAMETRİK DENKLEMLERİN GRAFİĞİNİN ÇİZİMİ

Parametrik denklemi $x = g(t)$, $y = h(t)$ olan bir bağıntının da;

(i) $g(t) = g(-t)$ ve $h(t) = -h(-t)$ ise bağıntısı x-eksenine göre simetriktir.

(ii) $g(t) = -g(-t)$ ve $h(t) = h(-t)$ ise bağıntısı y-eksenine göre simetriktir.

(iii) $g(t) = -g(-t)$ ve $h(t) = -h(-t)$ ise bağıntısı $O(0, 0)$ noktasına göre simetriktir.

(iv) t, parametresi yok ediliyorsa $y = f(x)$ ya da $F(x,y) = 0$ şekline dönüştürülür.

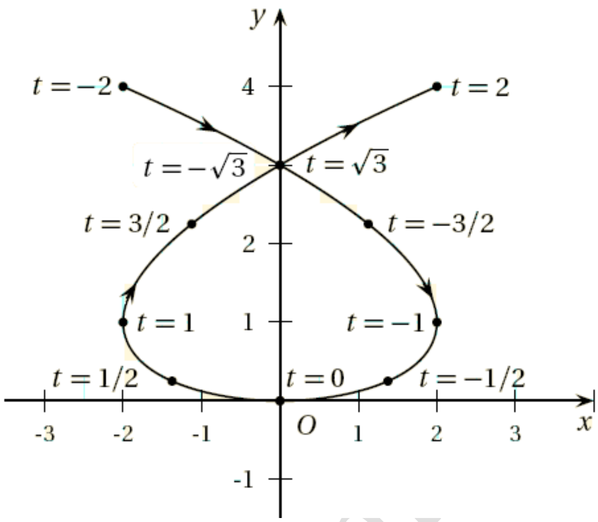
Örnek: $t \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $x = g(t) = t^3 - 3t$ ve $y = h(t) = t^2$ parametrik denklemiyle verilen eğriyi çizelim.

Çözüm: $g(t) = t^3 - 3t$ ve $h(t) = t^2$ fonksiyonları herhangi bir [a, b] aralığı üzerinde sürekli olduklarından bu parametrik denklemler düzlemde bir eğri belirtir.

$$g(-t) = (-t)^3 - 3(-t) = -(t^3 - 3t) = -g(t)$$
$$h(-t) = (-t)^2 = t^2 = h(t)$$

olduğundan bağıntı y-eksenine göre simetriktir.

t	-2	$-\sqrt{3}$	$-3/2$	-1	$-1/2$	0	$1/2$	1	$3/2$	$\sqrt{3}$	2
x	-2	0	$9/8$	2	$11/8$	0	$-11/8$	-2	$-9/8$	0	2
y	4	3	$9/4$	1	$1/4$	0	$1/4$	1	$9/4$	3	4



PARAMETRİK DENKLEMLERİN TÜREVİ

8.1. Teorem: $A \subset \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$, $x = g(t)$, $y = h(t)$ parametrik denklemleri ile verilen $y = f(x)$ fonksiyonları sürekli olsun.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dh(t)/dt}{dg(t)/dt} = \frac{h'(t)}{g'(t)}$$

dir.

İspat: Türevde zincir kuralından,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{dh(t)/dt}{dg(t)/dt}$$

bulunur.

Örnek: $x = t^2 - t$, $y = 4t^3 + t^2$ parametrik fonksiyonlarına göre türevi nedir?

Çözüm: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy/dt}{dy/dt} = \dfrac{12t^2 + 2t}{2t - 1}$

Örnek: $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$, $x=2\cos\alpha$, $y=2\sin\alpha$ parametrik fonksiyonlarına göre, $x=1$ için türevinin değeri nedir?

Çözüm: $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ aralığında $x=1$ için

$$1=2\cos\alpha$$

$$\cos\alpha=\frac{1}{2}$$

$$\alpha=\frac{\pi}{3}$$

bulunur. Diğer taraftan,

$$x=2\cos\alpha \text{ ise } \frac{dx}{d\alpha}=-2\sin\alpha$$

$$y=2\sin\alpha \text{ ise } \frac{dy}{d\alpha}=2\cos\alpha$$

şeklidedir. O halde,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dy/dt}=\frac{2\cos\alpha}{-2\sin\alpha}=-\cot\alpha$$

bulunur. $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$ olduğundan

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\pi/3}=-\cot\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

biçimindedir.

8.2. Teorem: $A\subset\mathbb{R}$, $f:A\to\mathbb{R}$, $x=g(t)$, $y=h(t)$ parametrik denklemleri ile verilen $y=f(x)$ fonksiyonları sürekli olsun.

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right).\frac{1}{dx/dt}$$

dir.

İspat: $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right).\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right).\dfrac{1}{dx/dt}$

Örnek: $x=3t^2+1$, $y=2t+3$ parametrik denklemleri ile verilen fonksiyon için $\dfrac{dy}{dx}$ ve $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ yi bulunuz.

Çözüm: $x=3t^2+1$ ise $\dfrac{dx}{dt}=6t$

$$y = 2t + 3 \text{ ise } \frac{dy}{dt} = 2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{6t} = \frac{1}{3t}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{3t}\right).\frac{1}{6t} = \frac{1}{3}\frac{d}{dt}\left(t^{-1}\right).\frac{1}{6t} = -\frac{1}{3t^2}.\frac{1}{6t} = -\frac{1}{18t^3}$$

Örnek: $x = 1 + \sin t$, $y = 1 - \cos t$ parametrik denklemleri ile verilen fonksiyon için $\frac{dy}{dx}$ ve $\frac{d^2y}{dx^2}$ yi bulunuz.

Çözüm: $x = 1 + \sin t$ ise $\frac{dx}{dt} = \cos t$

$$y = 1 - \cos t \text{ ise } \frac{dy}{dt} = \sin t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos t}{\sin t} = \cot t$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt}(\cot t).\frac{1}{\cos t} = -(1 + \cot^2 t).\sec t = -\csc^2 t.\sec t$$

Örnek: $x = \sqrt{t}$, $y = t^2$ parametrik denklemleri ile verilen fonksiyon için $\frac{dy}{dx}$ ve $\frac{d^2y}{dx^2}$ yi bulunuz.

Çözüm: $x = \sqrt{t}$ ise $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{t}}$

$$y = t^2 \text{ ise } \frac{dy}{dt} = 2t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{4t^{3/2}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{4t^{3/2}}\right).\frac{1}{2t^{1/2}} = -\frac{1}{4}.\frac{3}{2}.t^{-5/2}.\frac{1}{2t^{1/2}} = -\frac{3}{16}.\frac{1}{t^3}$$

PARAMETRİK DENKLEMLERİN TEĞET ve NORMAL DENKLEMLERİ

Örnek: $x = \sqrt{t}$, $y = 2t - \frac{4}{\sqrt{t}}$ parametrik denklemleri ile verilen eğrinin $t = 4$ deki teğetinin denklemini bulunuz.

Çözüm: $x=\sqrt{4}=2$, $y=2.4-\dfrac{4}{\sqrt{4}}=6$ olup $A(2,6)$ dir.

$$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{2\sqrt{t}}\,,\quad \frac{dy}{dt}=2+\frac{2}{\sqrt{t^3}}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2+\frac{2}{\sqrt{t^3}}}{\frac{1}{2\sqrt{t}}}$$

$$m_T=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=4}=\frac{2+\frac{2}{\sqrt{4^3}}}{\frac{1}{2\sqrt{4}}}=9$$

olduğundan teğetin denklemi,

$$y-6=9(x-2)$$
$$y=9x-12$$

8.3. Teorem: $A\subset\mathbb{R}$, $f:A\to\mathbb{R}$, $x=g(t)$, $y=h(t)$ parametrik denklemleri ile verilen $y=f(x)$ fonksiyonları sürekli olsun. Bu takdirde parametrik fonksiyonun teğetinin denklemi,

$$y=h(t_0)+\frac{h'(t_0)}{g'(t_0)}(x-g(t_0)) \text{ veya } x=g(t_0)+\frac{g'(t_0)}{h'(t_0)}(y-h(t_0))$$

şeklindedir.

İspat: f fonksiyonunun $t_0$noktasındaki teğetinin eğimi, $g'(t_0)\neq 0$ veya $h'(t_0)\neq 0$ dir. Bu durum t_0 noktasında, $g'(t_0)\neq 0$ ise fonksiyonun bir düşey teğeti vardır, $h'(t_0)\neq 0$ise fonksiyonun bir yatay teğeti vardır. Buna göre g've h' sürekli iki fonksiyon ve bir t_0 noktasında her ikisi de birden sıfır değeri almıyorsa,

$$x=g(t),\ y=h(t)$$

parametrik denklemiyle verilen fonksiyonun $(g(t_0),h(t_0))=(x_0,y_0)$ noktasındaki teğetinin denklemi,

$$y-y_0=y'(x_0)(x-x_0)$$

$$y=h(t_0)+\frac{h'(t_0)}{g'(t_0)}(x-g(t_0)) \text{ veya } x=g(t_0)+\frac{g'(t_0)}{h'(t_0)}(y-h(t_0))$$

bulunur.

8.4. Teorem: $A\subset\mathbb{R}$, $f:A\to\mathbb{R}$, $x=g(t)$, $y=h(t)$ parametrik denklemleri ile verilen $y=f(x)$ fonksiyonları sürekli olsun. Bu takdirde parametrik fonksiyonun normalinin denklemi,

$$y = h(t_0) - \frac{g'(t_0)}{h'(t_0)}(x - g(t_0)) \text{ veya } x = g(t_0) - \frac{h'(t_0)}{g'(t_0)}(y - h(t_0))$$

şeklindedir.

İspat: 8.3. teoremde teğet denklemi gösterilmiştir. Normalin denklemi,

$$y - y_0 = -\frac{1}{y'(x_0)}(x - x_0)$$

$$y = h(t_0) - \frac{g'(t_0)}{h'(t_0)}(x - g(t_0)) \text{ veya } x = g(t_0) - \frac{h'(t_0)}{g'(t_0)}(y - h(t_0))$$

bulunur.

Not: Her $t \in A$, $t \neq t_0$ için,

i) $\lim\limits_{t \to t_0} \frac{h'(t)}{g'(t)}$ limiti var ve $g'(t) < 0$ veya $g'(t) > 0$ ise fonksiyonun t_0 noktasında teğeti vardır.

ii) $\lim\limits_{t \to t_0} \frac{g'(t)}{h'(t)}$ limiti var ve $h'(t) < 0$ veya $h'(t) > 0$ ise fonksiyonun t_0 noktasında teğeti vardır.

iii) (i) ve (ii) şatlarından herhangi biri sağlamıyorsa bu fonksiyon t_0 noktasında teğeti yoktur.

Örnek: Parametrik denklemi $x = g(t) = t^3$, $y = h(t) = t^6$ olan fonksiyonun teğetinin olduğu noktaları bulunuz.

Çözüm: $t \neq 0$ için,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6t^5}{3t^2} = 2t^3 \neq 0 \text{ ve } \frac{dx}{dy} = \frac{3t^2}{6t^5} = \frac{1}{2t^3} \neq 0$$

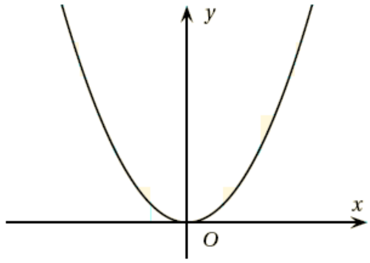
olduğundan her noktada teğeti vardır.

$$\lim_{t \to 0} \frac{dy}{dx} = \lim_{t \to 0} 2t^3 = 0$$

ve her t için,

$$x' = g'(t) = 3t^2 > 0$$

olduğundan fonksiyon $t = 0$ noktasında da teğeti vardır.



Örnek: Parametrik denklemi $x = g(t) = \cos^3 t$, $y = h(t) = \sin^3 t$ olan fonksiyonun teğetinin olduğu noktaları bulunuz.

Çözüm: $t \in \left(0, -\frac{\pi}{2}\right)$ için $\frac{dy}{dx} = \frac{3\sin^2 t\cos t}{3\cos^2 t(-\sin t)} = -\tan t \neq 0$

$t \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ için $\frac{dx}{dy} = \frac{3\cos^2 t(-\sin t)}{3\sin^2 t\cos t} = -\cot t \neq 0$

olduğundan her noktada teğeti vardır.

$$\lim_{t\to 0}\frac{dy}{dx} = \lim_{t\to 0} -\tan t = 0$$

ve

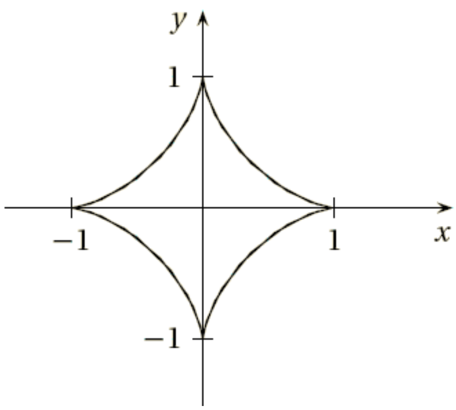
$$\lim_{t\to 0^+}\frac{dy}{dx} = \lim_{t\to 0^+} -\cot t = -\infty \, , \ \lim_{t\to 0^-}\frac{dx}{dy} = \lim_{t\to 0^-} -\cot t = \infty$$

olduğundan 0 noktasında limiti yoktur. Ayrıca

$t \in \left(0, -\frac{\pi}{2}\right)$ için $x' = g'(t) = -3\cos^2 t\sin t < 0$

$t \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ için $y' = h''(t) = 3\sin^2 t.\cos t > 0$

olduğundan fonksiyonun $(x, y) = (g(0), h(0)) = (1, 0)$ noktasında teğeti yoktur. Benzer şekilde $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $t = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ve $t = k\pi$ noktalarında olmadığı gösterilir.



Örnek: $x = g(t) = r(t - \sin t)$, $y = h(t) = r(1 - \cos t)$ parametrik denklemiyle verilen Sikloid eğrisinin

i) $t = \frac{\pi}{3}$ noktasındaki teğetin ve normalin denklemini
ii) Yatay teğetinin olduğu noktalarını
iii) Düşey teğetinin olduğu noktaları bulunuz.

Çözüm: i) $x' = g'(t) = r(1 - \cos t)$, $y' = h'(t) = r\sin t$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{r\sin t}{r(1-\cos t)} = \frac{\sin t}{1-\cos t}$$

ve

$$x = g\left(\frac{\pi}{3}\right) = r\left(\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3}\right) = r\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$y = h\left(\frac{\pi}{3}\right) = r\left(1 - \cos\frac{\pi}{3}\right) = r\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{r}{2}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\frac{\pi}{3}} = \frac{\sin\frac{\pi}{3}}{1-\cos\frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

olur. Buna göre eğimi $\sqrt{3}$ olan,

$$(x,y) = \left(g\left(\frac{\pi}{3}\right), h\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \left(r\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \frac{r}{2}\right)$$

noktasından geçen teğetin denklemi,

$$y = h(t_0) + \frac{h'(t_0)}{g'(t_0)}(x - g(t_0))$$

$$y = \frac{r}{2} + \sqrt{3}\left(x - r\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$$

$$y = \sqrt{3}x - \left(1 + \frac{\sqrt{3}\pi}{3}\right)r$$

ve normalin denklemi,

$$y = h(t_0) - \frac{g'(t_0)}{h'(t_0)}(x - g(t_0))$$

$$y = \frac{r}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\left(x - r\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$$

$$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-\left(1+\frac{\sqrt{3}\pi}{9}\right)r$$

şeklindedir.

ii) $\dfrac{dh(t)}{dt}=0$ ve $\dfrac{dg(t)}{dt}\neq 0$ özelliğindeki noktalarda yatay teğet vardır. Buna,

$$h'(t)=r\sin t=0 \text{ ve } g'(t)=r(1-\cos t)\neq 0$$

ise $r\neq 0$ olduğundan

$$\sin t=0 \text{ ve } 1-\cos t\neq 0$$

dır. Yani $k\in\mathbb{Z}$ olmak üzere $t=k\pi$ ve $t\neq 2k\pi$ olmalıdır. Bu durumda k tek sayı ise,

$$\begin{aligned}(x,y)&=(r(t-\sin t),r(1-\cos t))\\&=(r((2k-1)\pi-\sin(2k-1)\pi),r(1-\cos(2k-1)\pi))\\&=(r(2k-1)\pi),2r)\end{aligned}$$

noktalarında yatay teğeti vardır.

iii) $\dfrac{dg(t)}{dt}=0$ ve $\dfrac{dh(t)}{dt}\neq 0$ özelliğindeki noktalarda düşey teğet vardır. Buna,

$$g'(t)=r(1-\cos t)=0 \text{ ve } h'(t)=r\sin t\neq 0$$

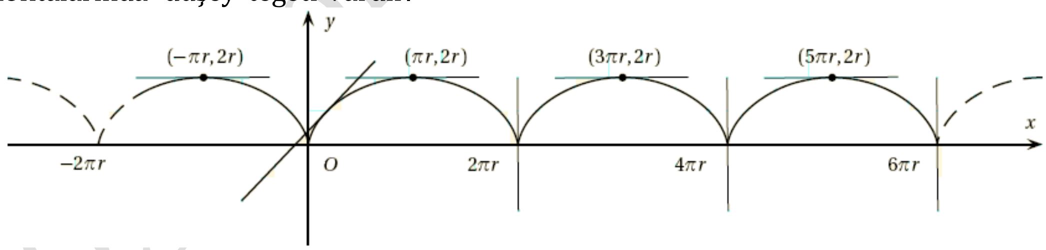
ise $r\neq 0$ olduğundan

$$1-\cos t\neq 0 \text{ ve } \sin t=0$$

dır. Yani $k\in\mathbb{Z}$ olmak üzere $t=2k\pi$ ve $t\neq k\pi$ olmalıdır. Bu durumda k çift sayı ise,

$$\begin{aligned}(x,y)&=(r(t-\sin t),r(1-\cos t))\\&=(r(2k\pi-\sin 2k\pi),r(1-\cos 2k\pi))\\&=(r2k\pi,0)\end{aligned}$$

noktalarında düşey teğeti vardır.



PARAMETRİK DENKLEMLERİN KONVEKS ve KONKAVLIĞI

8.4. Teorem: $A\subset\mathbb{R}$, $f:A\to\mathbb{R}$, $x=g(t)$, $y=h(t)$ parametrik denklemleri ile verilen $y=f(x)$ fonksiyonları sürekli olsun.

i) $\dfrac{d^2y}{dx^2}<0$ ise eğri konkavdır.

ii) $\dfrac{d^2y}{dx^2} > 0$ ise eğri konvekstir.

Bu teoremin tek değişkenli fonksiyonların konveks ve konkav ile aynı olduğundan ispatı okuyucuya bırakılmıştır.

Örnek: $x = g(t) = r(t - \sin t)\,,\, y = h(t) = r(1 - \cos t)$ parametrik denklemiyle verilen sikloid eğrisinin konveks ve konkavlığını araştırınız.

Çözüm: $$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right).\frac{1}{dx/dt}$$
$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{r\sin t}{r(1-\cos t)}\right).\frac{1}{r(1-\cos t)}$$
$$= \frac{\cos t(1-\cos t) - \sin^2 t}{(1-\cos t)^2}.\frac{1}{r(1-\cos t)}$$
$$= -\frac{1}{r(1-\cos t)^2} < 0$$
olduğundan eğri konkavdır.

ÖZEL EĞRİLERİN PARAMETRİK DENKLEMLERİ

1. Doğrunun Parametrik Denklemi (Euclid, Jordan):

$$x = at + b, \quad y = ct + d$$

2. Çemberin Parametrik Denklemi (Ahmes, Thales, Euclid, Anaxagoes):

$$x = r\cos t + a \text{ ve } y = r\sin t + b$$

3. Elipsin Parametrik Denklemi (Menaechmus, Euclid, Apollonius):

$$x = a\cos t \text{ ve } y = b\sin t$$

4. Hiperbolün Parametrik Denklemi (Mnaechmus, Euclid, Aristeaeus, Apollonius):

$$x = a\sec t, \quad y = b\tan t$$

Örnek: $x = \dfrac{2}{\cos t}, \quad y = 3\tan t$

parametrik denklemlerin gösterdiği eğrinin türü ve denklemi nedir?

Çözüm: $\dfrac{1}{\cos t} = \dfrac{x}{2}$ ve $\tan t = \dfrac{y}{3} \Leftrightarrow \dfrac{\sin t}{\cos t} = \dfrac{y}{3}$

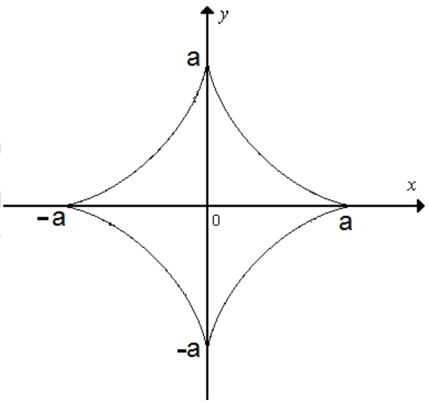
$$\frac{x^2}{4} = \frac{1}{\cos^2 t} \text{ ve } \frac{y^2}{9} = \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}$$

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = \frac{1}{\cos^2 t} - \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} = \frac{1-\sin^2 t}{\cos^2 t} = \frac{\cos^2 t}{\cos^2 t} = 1$$

hiperbol elde edilir.

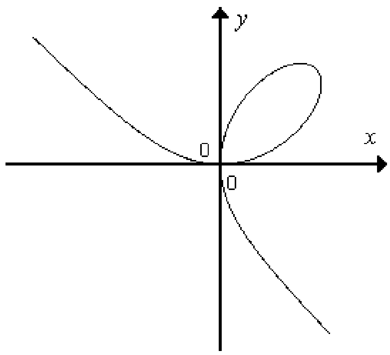
5. Dört Dişli Eğrisi (Bernoulli, Leibniz):

$$x = a\cos^3 t, \quad y = a\sin^3 t$$



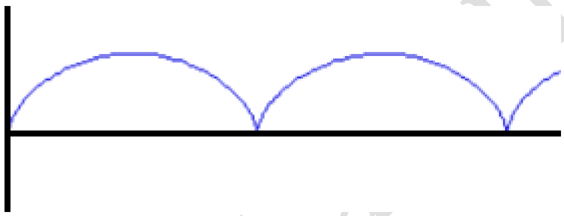
6. Descartes Yaprağı (Descartes, Roberval):

$$x = \frac{3at}{1+t^3}, \quad y = \frac{3at^2}{1+t^3}$$



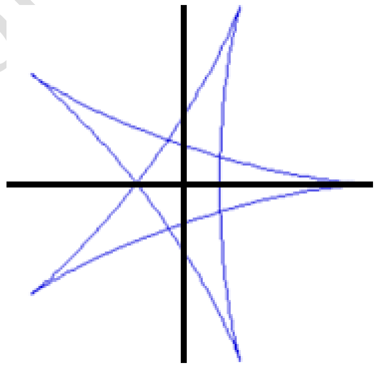
6. Çembersi Eğrisi (Cusa, Mersenne, Galileo):

$x = at - h\sin t, \quad y = a - h\cos t$



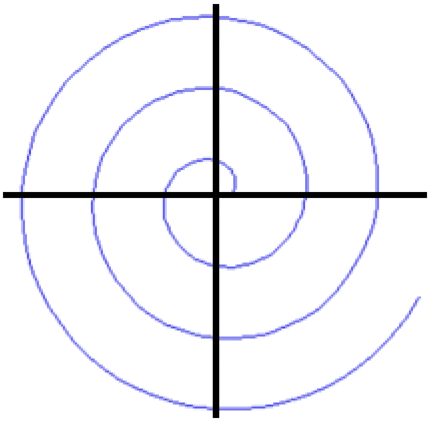
7. Yıldızıl Eğrisi (Dürer):

$x = (a-b)\cos t + b\cos\left(\frac{a}{b}-1\right)t, \; y = (a-b)\sin t - b\sin\left(\frac{a}{b}-1\right)t$



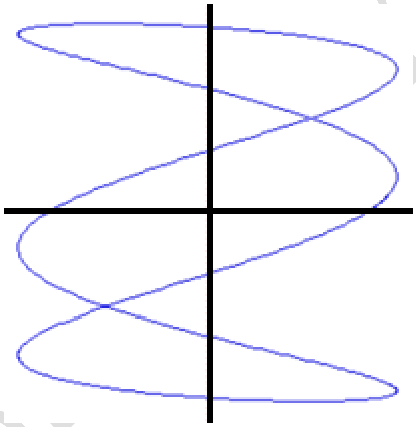
8. Dairenin İç-Spirali (Huygens):

$x = (a-b)\cos t + b\cos\left(\frac{a}{b}-1\right)t, \; y = (a-b)\sin t - b\sin\left(\frac{a}{b}-1\right)t$



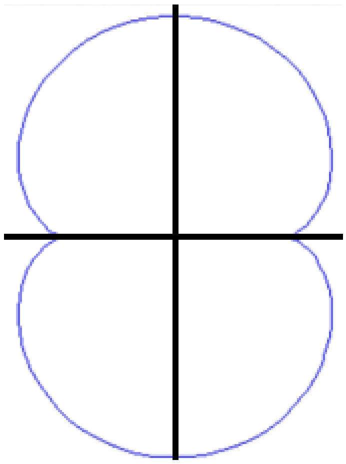
9. Lissajous-Bowditch Eğrisi:

$x = a\sin(nt + c),\ y = b\sin t$



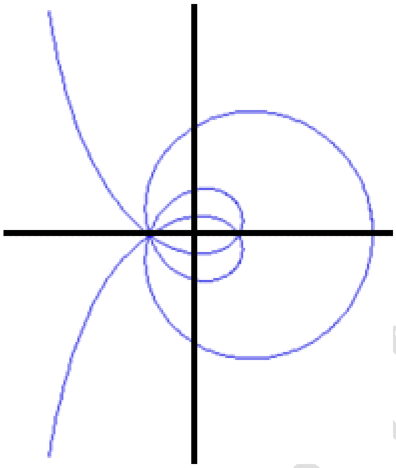
10. Böbreğimsi Eğrisi (Proctor, Huygens, Airy)

$x = a(3\cos t - \cos 3t),\ y = a(3\sin t - 3\sin t)$



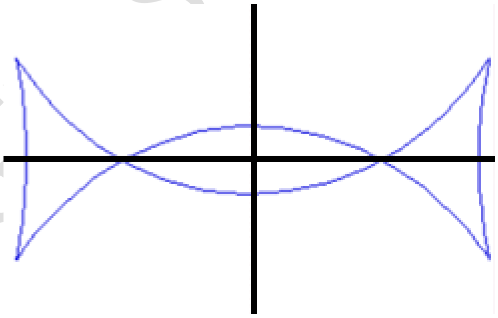
11. Plateau Eğrisi:

$$x = a\frac{\sin(m+n)t}{\sin(m-n)t},\ \ y = 2a\frac{\sin mt.\sin nt}{\sin(m-n)t}$$



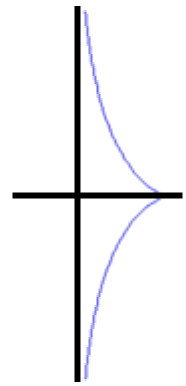
12. Talbot Eğrisi:

$$x = \frac{(a^2+f^2\sin^2 t)\cos t}{a},\ \ y = \frac{(a^2-2f^2+f^2\sin^2 t)\sin t}{b}$$



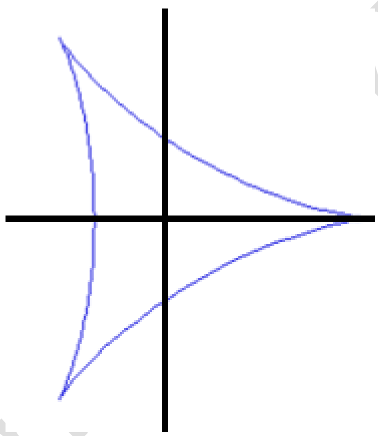
13. Çekme Eğrisi (Huygens, Leibniz, Bernoulli)

$$x = \frac{1}{\cosh t},\ \ y = t - \tanh t$$



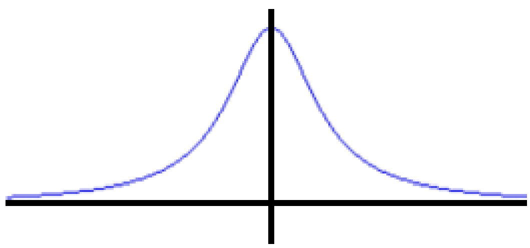
14. Üç Dişli Eğrisi (Euler, Steiner):

$x = a(2\cos t + \cos 2t)\,,\; y = a(2\sin t - \sin 2t)$



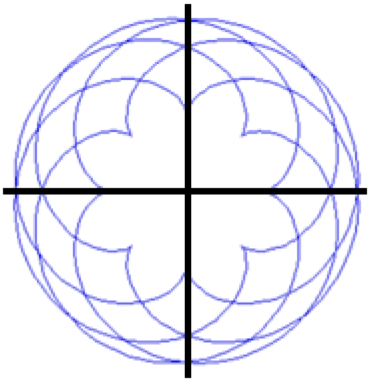
15. Angesi Eğrisi (Fermat, Grandi, Angesi):

$x = at\,,\; y = \dfrac{a}{1+t^2}$



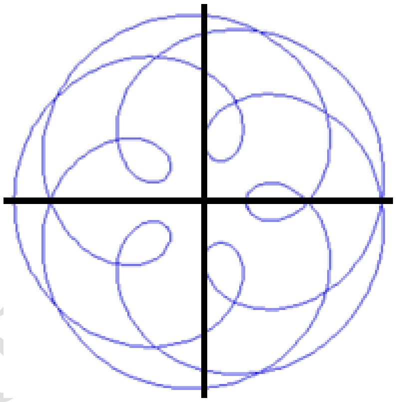
16. Üst Çembersi Eğrisi (Dürer):

$x = (a+b)\cos t - b\cos\left(\dfrac{a}{b}+1\right)t\,,\; x = (a+b)\sin t - b\sin\left(\dfrac{a}{b}+1\right)t$



17. Üst Tekerleksi Eğrisi (Dürer):

$$x=(a+b)\cos t-c\cos\left(\frac{a}{b}+1\right)t\ ,\ \ y=(a+b)\sin t-c\sin\left(\frac{a}{b}+1\right)t$$



18. Alt Tekerleksi Eğrisi (Hire, Desargues, Leibniz, Newton):

$$x=(a-b)\cos t-c\cos\left(\frac{a}{b}-1\right)t\ ,\ \ y=(a-b)\sin t-c\sin\left(\frac{a}{b}-1\right)t$$