9. BÖLÜM
FONKSİYON DİZİLERİ ve FONKSİYON SERİLERİ

FONKSİYON DİZİLERİ

9.1. Tanım: Tanım kümesi biri pozitif doğal sayılar diğeri reel sayılardan oluşan iki değişkenli fonksiyonlara fonksiyon dizileri veya değişken terimli diziler denir. $A \subset \mathbb{R}$,

$$f_n : \mathbb{N} \times A \to \mathbb{R}$$
$$(n\,,\,x) \to f(n,x) = f_n(x)$$

şeklinde gösterilir. $(f_n(x)) = \{f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots\}$ şeklindeki kümedir. Burada

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

dir.

Örnek: Genel terimi $f_n(x) = \dfrac{x}{1+nx}$ olan bir fonksiyon dizidir. Bu dizi,

$$\left\{\frac{x}{1+x}, \frac{x}{1+2x}, \ldots, \frac{x}{1+nx}, \ldots\right\}$$

terimlerinden oluşur. Bu dizinin limiti,

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{1+nx} = 0$$

şeklindedir.

NOKTASAL YAKINSAKLIK

9.2. Tanım: Bir (f_n) dizisinde $\forall \varepsilon > 0$ ve her bir $x \in A$ için $\exists n_{\varepsilon x}$ sayısı vardır öyle ki, $\forall n \geq n_{\varepsilon x}$ için $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ ise $A \subset \mathbb{R}$ üzerinde f fonksiyonuna noktasal yakınsaktır denir. (Seçilen $n_{\varepsilon x}$, hem x'e hem de ε'na bağlı olacaktır.)

Örnek: Genel terimi $f_n(x)=\frac{1}{(nx)^2}$ olan fonksiyon dizisi $f(x)=0$ a noktasal yakınsak olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$

$$\left|\frac{1}{(nx)^2}-0\right|<\varepsilon$$

$$\left|\frac{1}{(nx)^2}\right|<\varepsilon$$

$$\frac{1}{(nx)^2}<\varepsilon$$

$$n>\frac{1}{x\sqrt{\varepsilon}}=n_{\varepsilon x}$$

olur. Her $\varepsilon>0$ için $n_{\varepsilon x}=\frac{1}{x\sqrt{\varepsilon}}$ seçilebilir. Bu durum her ε ve x için geçerlidir, özel olarak

$$\varepsilon=\frac{1}{100} \text{ ve } x=1 \text{ alınırsa } n_{\varepsilon x}=\frac{1}{x\sqrt{\varepsilon}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{100}}}=10$$

bulunur. Bu şu anlama gelir. İlk 10 terim ε komşuluğun dışında diğer terimleri komşuluğun içindedir. Buna göre, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(nx)^2}=0$ dir. Şu halde 0'a noktasal yakınsaktır.

2. Yol: Her $x\in\mathbb{R}$ için

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(nx)^2}=0=f(x)$$

olduğundan 0'a noktasal yakınsaktır.

Örnek: Genel terimi $f_n(x)=\frac{x}{1+nx}$ ile tanımlı fonksiyon dizisinin I = [0; 1] aralığı üzerinde f (x) = 0 ile tanımlı fonksiyona noktasal yakınsak olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Her $\varepsilon>0$ ve her $x\in(0,1]$ için

$$|f_n(x)-f(x)|=\left|\frac{x}{1+nx}-0\right|=\frac{x}{1+nx}<\varepsilon$$

olup

$$\frac{x}{1+nx} < \varepsilon$$
$$x < \varepsilon + nx\varepsilon$$
$$x - \varepsilon < nx\varepsilon$$
$$\frac{x-\varepsilon}{x\varepsilon} < n\,,\ x \neq 0$$

elde edilir. Dolayısıyla, her $x \in (0,1]$ için $n_{\varepsilon x} = \frac{x-\varepsilon}{x\varepsilon}$ seçilirse, her $\varepsilon > 0$ ve her $n > n_{\varepsilon x}$ için $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ gerçekleşir. x = 0 için ise (f_n (0)) = (0, 0, ... , 0, ...) olup her $\varepsilon > 0$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $|f_n(0) - f(0)| < \varepsilon$ gerçekleştiğinden, [0, 1] üzerinde (f_n) fonksiyon dizisi, f (x) = 0 şeklinde tanımlı fonksiyona noktasal yakınsaktır.

2. Yol: Her $x \in \mathbb{R}$ için

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{1+nx} = 0 = f(x)$$

olduğundan 0'a noktasal yakınsaktır.

Örnek: $f_n : [-1, 0] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$ şeklinde tanımlanan (f_n) fonksiyon dizisi noktasal yakınsak mıdır?

Çözüm. Her $x \in (0,1]$ için $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$ dir.

$x = -1$ için $(f_n(-1)) = ((-1)^n)$ olup bu dizisi noktasal yakınsak değildir.

9.1. Uyarı: Noktasal yakınsak bir fonksiyon dizisi sürekli iken süreksiz bir fonksiyona, süreksiz iken sürekli bir fonksiyona yakınsayabilir.

Örnek: $A = [0,1]$ üzerinde genel terimi $f_n(x) = x^n$ olan (f_n) fonksiyon dizisinin süreklilik durumlarını inceleyiniz.

Çözüm: $f_n(x) = x^n$ fonksiyon dizisi $x \in [0,1]$ aralığında sürekli olduğu aşikârdır.

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

olduğundan yakınsanan f fonksiyonu sürekli değildir.

DÜZGÜN YAKINSAKLIK

9.3. Tanım: Bir (f_n) dizisinde $\forall \varepsilon > 0$ ve her bir $x \in A$ için $\exists n_\varepsilon$ sayısı vardır öyle ki, $\forall n \geq n_\varepsilon$ için $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ ise $A \subset \mathbb{R}$ üzerinde f fonksiyonuna düzgün yakınsaktır denir. (Seçilen n_ε sayısı sadece ε'na bağlı olacaktır.)

Örnek: Genel terimi $f_n(x) = x^n$ ve $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ aralığında olan fonksiyon dizisi $f(x) = 0$ a düzgün yakınsak olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $|f_n(x) - f(x)| = |x^n - 0| = |x^n| = x^n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}$

Buna göre $\left|\frac{1}{2^n} - 0\right| < \varepsilon$ dir. Gerçekten;

$$\frac{1}{2^n} < \varepsilon$$
$$\frac{1}{\varepsilon} < 2^n$$
$$\ln\frac{1}{\varepsilon} < \ln 2^n$$
$$\ln 1 - \ln\varepsilon < n\ln 2$$
$$-\frac{\ln\varepsilon}{\ln 2} < n$$

olur. Her $\varepsilon > 0$ için $n_\varepsilon = -\frac{\ln\varepsilon}{\ln 2}$ seçilebilir. Bu durum her ε için geçerlidir.

Örnek: $f_n(x) = \frac{\cos nx}{n^3}$ ile tanımlı fonksiyon dizisi, $\mathbb{R}$ üzerinde düzgün yakınsak mıdır?

Çözüm: Her $\varepsilon > 0$ ve $x \in \mathbb{R}$ olsun.

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{\cos nx}{n^3} - 0\right| = \frac{|\cos nx|}{n^3} \leq \frac{1}{n^3} < \varepsilon$$

olup gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$n \geq \frac{1}{\sqrt[3]{\varepsilon}}$$

bulunur. $n_\varepsilon = \frac{1}{\sqrt[3]{\varepsilon}}$ seçilirse her $\varepsilon > 0$ ve $x \in \mathbb{R}$ için r $n \geq n_\varepsilon$ olduğunda $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ gerçekleşir. O halde $\mathbb{R}$ üzerinde düzgün yakınsaktır.

9.1. Teorem: (f_n) ve (f) fonksiyonları [a, b] aralığında sürekli olsunlar. (f_n) dizisinin f fonksiyonuna düzgün yakınsak olması için gerek ve yeter şart

$$c_n = \max_{a \le x \le b} |f_n(x) - f(x)|$$

eşitliğini sağlayan (c_n) dizinin sıfır dizisi olmasıdır. Yani;

$$\lim_{n\to\infty} \max_{a \le x \le b} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

ise (f_n) dizisi f fonksiyonuna düzgün yakınsaktır.

İspat: (f_n) dizisi (f) fonksiyonuna düzgün yakınsak olsun. Her n için $|f_n - f|$ fonksiyonları [a, b] aralığında sürekli olduğundan maksimum değeri bu aralıkta bir x_n noktasında alır. $|f_1 - f|$ fonksiyonu x_1 de, $|f_2 - f|$ fonksiyonu x_2 de, ... v.b. maksimum değerini alır. Şu halde;

$$c_n = |f_n(x_n) - f(x_n)|$$

dir. Düzgün yakınsaklık tanımından biliyoruz ki, $\forall \varepsilon > 0$ ve her bir $x \in A$ için $\exists n_\varepsilon$ sayısı vardır öyle ki, $\forall n \ge n_\varepsilon$ için $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ kalır. Buna göre $\forall n \ge n_\varepsilon$ için

$$c_n = |f_n(x_n) - f(x_n)|$$

olur. Şimdi (c_n) dizisinin sıfır dizisi olduğunu gösterelim.

(c_n) sıfır dizisi olsun. Sıfır dizisinin tanımından, $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists n_\varepsilon$ sayısı vardır öyle ki, $\forall n \ge n_\varepsilon$ için $c_n = \max_{a \le x \le b} |f_n(x) - f(x)|$ olduğundan $\forall n \ge n_\varepsilon$ ve $\forall x \in [a, b]$ için,

$$0 \le |f_n(x_n) - f(x_n)| \le c_n < \varepsilon$$

kalır ki, bu bize (f_n) dizisi (f) ye düzgün yakınsak olduğunu gösterir.

Örnek: $f_n : \mathbb{N} \times [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \left(x - \frac{1}{n}\right)^2$ ile tanımlı fonksiyon dizisi düzgün yakınsak mıdır?

Çözüm: $x \in [-1, 1]$ için $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \left(x - \frac{1}{n}\right)^2 = x^2 = f(x)$ dir.

$x \in [-1, 1]$ olmak üzere $|x| \le 1$

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \left(x - \frac{1}{n}\right)^2 - x^2 \right|$$

$$= \left| -\frac{2x}{n} + \frac{1}{n^2} \right|$$

$$\leq \frac{2}{n}|x| + \frac{1}{n^2}$$

$$\leq \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}$$

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \max_{-1\leq x\leq 1} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \max_{-1\leq x\leq 1} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

dır. $\left(\left(x - \frac{1}{n}\right)^2\right)$ dizisi (x^2) ye düzgün yakınsaktır.

Örnek: $f_n : \mathbb{N} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = 4x + \frac{5}{n^2}$ fonksiyon dizisi R üzerinde düzgün yakınsak mıdır?

Çözüm. Her $x \in \mathbb{R}$ için

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\left(4x + \frac{5}{n^2}\right) = 4x = f(x)$$

olup $\mathbb{R}$ üzerinde f_n noktasal yakınsaktır. 9.1. Teorem gereğince,

$$\max_{x\in R} |f_n(x) - f(x)| = \max_{x\in R}\left|4x + \frac{5}{n^2} - 4x\right| = \frac{5}{n^2}$$

olup

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5}{n^2} = 0$$

olduğundan $\mathbb{R}$ üzerinde yakınsama düzgündür.

9.1. Sonuç: $\exists \varepsilon > 0$ ve (f_n) dizisinin bir (f_{n_k}) alt dizisi ile terimleri A kümesinden alınan bir (x_n) dizisi vardır ki öyle ki

$$|f_{n_k}(x_k) - f(x_k)| \geq \varepsilon$$

ise (f_n) dizisi bir A üzerinde bir f fonksiyonuna düzgün yakınsak değildir.

Örnek: Genel terimi $f_n(x) = \frac{x}{n}$ olan dizisi $\mathbb{R}$ üzerinde düzgün yakınsak mıdır?

Çözüm: Her $x \in \mathbb{R}$ için

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{n} = 0 = f(x)$$

olup (f_n) dizisi noktasal yakınsaktır. n_k = k ve x_k = k olsun. $\varepsilon=\frac{1}{2}$ seçilirse, $f_{n_k}(x)=f_n(x)$ olup 9.1. Sonuç gereği

$$\left|f_{n_k}(x_k)-f(x_k)\right|=\left|f_{n_k}(k)-0\right|=\left|\frac{k}{k}-0\right|=1>\frac{1}{2}$$

olduğundan yakınsama düzgün değildir.

9.2. Uyarı: i) (f_n) fonksiyon dizisi (f) ye düzgün yakınsak ise aynı zamanda noktasal yakınsaktır.

ii) A kümesi sonlu elemanlı ise noktasal yakınsaklık ile düzgün yakınsaklık denktir.

9.2. Teorem: (f_n) fonksiyon dizisi A kümesi üzerinde sürekli ve düzgün yakınsak ise f fonksiyonu A üzerinde süreklidir.

İspat: (f_n) fonksiyon dizisi f fonksiyonuna düzgün yakınsak olduğundan $\forall\varepsilon>0$ için $\exists n_\varepsilon$ sayısı vardır öyle ki, $\forall n\geq n_\varepsilon$ ve her $x\in A$ için

$$\left|f_n(x)-f(x)\right|<\frac{\varepsilon}{3}$$

olur. $x_0\in A$ olsun. f_{n_0} fonksiyonu x_0 da sürekli olduğundan öyle bir $\delta>0$ sayısı vardır ki $\left|x-x_0\right|<\delta$ şartını sağlayan her $x\in A$ için

$$\left|f_{n_0}(x)-f_{n_0}(x_0)\right|<\frac{\varepsilon}{3}$$

olur.

$$f(x)-f(x_0)=f(x)-f_{n_0}(x)+f_{n_0}(x)-f_{n_0}(x_0)+f_{n_0}(x_0)-f(x_0)$$

$$\left|f(x)-f(x_0)\right|\leq\left|f(x)-f_{n_0}(x)\right|+\left|f_{n_0}(x)-f_{n_0}(x_0)\right|+\left|f_{n_0}(x_0)-f(x_0)\right|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$$

bulunur. Bu f nin x_0 da sürekli olduğunu gösterir. x_0 keyfi seçildiğinden f, A üzerinde süreklidir. //

Bu teoremin tersi doğru değildir.

Örnek: Genel terimi $f_n(x)=x-x^n$ olan (f_n) dizisi [0, 1) aralığında sürekli ve düzgün yakınsak iken f de süreklidir.

İspat: (f_n) dizisi [0, 1) aralığında sürekli olduğu açıktır.

$x\in[0,1)$ için $\lim\limits_{n\to\infty}\max\limits_{0\leq z\leq 1}\left|x-x^n-x\right|=0$ olduğundan düzgün yakınsaktır.

Buna göre $f(x)=x$ süreklidir.

Örnek: $f_n(x)=\dfrac{n^2x^2}{n^2x^2+1}$ eşitliği ile tanımlanan (f_n) dizisi, R üzerinde düzgün yakınsak mıdır?

Çözüm:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)=\begin{cases}0 & , \quad x=0\\ 1 & , \quad x\neq 0\end{cases}$$

olup, ℝ üzerinde (f_n) dizisi, f fonksiyonuna noktasal yakınsaktır. Ancak f fonksiyonu x = 0 noktasında süreksizdir. Buna göre 9.2. Teorem gereğince düzgün yakınsak değildir.

9.4. Tanım: (f_n), A üzerinde tanımlı fonksiyonların bir dizisi olsun. Eğer her $\varepsilon>0$ sayısına karşılık, her $m.n\geq 0$ ve her $x\in A$ için $|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon$ olacak biçimde bir $n_\varepsilon>0$ sayısı varsa (f_n), A üzerinde bir düzgün Cauchy dizisidir denir.

9.3. Teorem: (f_n) fonksiyon dizisinin, A kümesi üzerinde düzgün Cauchy dizisi olması için (f_n) dizisinin, A kümesi üzerinde düzgün yakınsak olmasıdır. Bu teoremin tersi doğru değildir.

Bu teoremin ispatı dizi bölümündeki dizi kavramı için yapılan adımlar fonksiyon dizileri içinde geçerli olduğundan, ispatı okuyucuya bırakılmıştır.

9.4. Teorem: (f_n) dizisi, I aralığında f fonksiyonuna düzgün yakınsak ve her bir f_n, I üzerinde sürekli olsun. Bu taktirde;

$$F_n(x)=\int_c^x f_n(t)dt$$

eşitliği ile tanımlanan (F_n) dizisi

$$F(x)=\int_c^x f(t)dt$$

şeklinde tanımlı F fonksiyonuna düzgün yakınsaktır.

İspat: (f_n) dizisi f ye düzgün yakınsak olduğundan f sürekli ve dolayısıyla integrallenebilirdir. I aralığının boyu L olsun. (f_n), f fonksiyonuna düzgün yakınsak olduğundan, her $\varepsilon>0$ için $\exists n_\varepsilon$ sayısı vardır öyle ki, $\forall n\geq n_\varepsilon$ ve her $t\in I$ için

$$|f_n(t)-f(t)|<\frac{\varepsilon}{L}$$

olur. Aynı n ve her $x \in I$ için

$$|F_n(x) - F(x)| = \left|\int_c^x f_n(t)dt - \int_c^x f(t)dt\right| = \int_c^x |f_n(t) - f(t)|dt < \frac{\varepsilon}{L}|x - c| \le \varepsilon$$

bulunur. Şu halde (F_n) dizisi F fonksiyonuna düzgün yakınsaktır.

Örnek: $F_n(x) = \dfrac{\ln(1 + n^3x^2)}{n^2}$ şeklinde tanımlanan (F_n) dizisinin $I = [0,1]$ aralığı üzerinden düzgün yakınsak olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $F_n'(x) = \dfrac{2nx}{1 + n^3x^2} = f_n(x)$ denilirse (f_n) dizisi $f = 0$ fonksiyonuna düzgün yakınsaktır. Çünkü

$$c_n = \max_{0 \le x \le 1} |f_n(x) - f(x)|$$

$$f_n'(x) = \frac{2n(1 + n^3x^2) - 2nx(2n^3x)}{(1 + n^3x^2)^2} = 0$$

$$x = n^{-3/2}$$

$$\lim_{n \to \infty} f_n(n^{-3/2}) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

olur. Şu halde (F_n) dizisi $F(x) = \displaystyle\int_c^x \frac{2nx}{1 + n^3t^2} = 0$ fonksiyonuna düzgün yakınsaktır.

9.5. Tanım: Her n ve her $x \in A$ için $|f_n(x)| \le M$ olacak şekilde bir M sayısı varsa (F_n) dizisi A üzerinde düzgün sınırlıdır denir.

Örnek: $f_n(x) = \dfrac{nx^2}{1 + n^2x^2}$ ile tanımlı fonksiyon dizisi, $\mathbb{R}$ de düzgün sınırlı mıdır?

Çözüm: Her $x \in \mathbb{R}$ ve her n için

$$|f_n(x)| = \left|\frac{nx^2}{1 + n^2x^2}\right|$$

$$= \frac{nx^2}{1 + n^2x^2}$$

$$< \frac{n}{n^2}$$

$$= \frac{1}{n}$$

<1

olup her $x \in \mathbb{R}$ ve her n için $|f_n(x)| < 1$ olacak biçimde M = 1 olduğundan (f_n) düzgün sınırlıdır.

FONKSİYON DİZİSİNİN İNTEGRALİN DÜZGÜN YAKINSAKLIĞI

$f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ ile tanımlı her bir (f_n) Riemann integrallenebilir olsun. Ayrıca [a, b] aralığında (f_n) noktasal yakınsak olsun. Bu durumda;

1) f integrallenebilir mi?
2) f integrallenebilir olduğunda

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

yazılabilir mi?

Şimdi bu kısımda bu soruya cevap aranacak ve yukarıdaki eşitliğin ne zaman gerçekleştiği incelenecektir.

9.5. Teorem: (f_n), [a, b] aralığı üzerinde reel değerli ve sınırlı fonksiyon dizisi olsun. f_n fonksiyonu [a, b] üzerinde integrallenebilen fonksiyon ve (f_n) dizisi f fonksiyonuna düzgün yakınsak ise f fonksiyonu [a, b] üzerinde integrallenebilirdir ve

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

dir.

İspat: $\varepsilon > 0$ olsun. (f_n) dizisi [a, b] üzerinde f ye düzgün yakınsak olduğundan öyle bir n_0 doğal sayısı vardır ki, her $n \ge n_0$ ve her $x \in [a,b]$ için

$$|f_n(x) - f(x)| \le \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \qquad (1)$$

olur. f_{n_0} integrallenebilir olduğundan, [a, b] aralığının öyle bir P parçalanması vardır ki parçalanma için,

$$\ddot{U}(f_{n_0}, P) - A(f_{n_0}, P) < \frac{\varepsilon}{3}$$

olur. (1) eşitsizliğinden yararlanarak her $x \in [a,b]$ için

$$f(x) \le f_{n_0} + \frac{\varepsilon}{3(b-a)}$$

yazılabilir. Buna göre $M_k = \sup\{f(x) : x_{k-1} \le x \le x_k\}$, $M'_k = \sup\{f_{n_0+1}(x) : x_{k-1} \le x \le x_k\}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \text{Ü}(f,P) &= \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k \\ &\leq \sum_{k=1}^{n}\left(M'_k + \frac{\varepsilon}{3(b-a)}\right)\Delta x_k \\ &= \sum_{k=1}^{n} M'_k \Delta x_k + \frac{\varepsilon}{3(b-a)}\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k \\ &= \text{Ü}(f_{n_0},P) + \frac{\varepsilon}{3} \end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde;

$$A(f,P) \geq A(f_{n_0},P) - \frac{\varepsilon}{3}$$

olduğu gösterilebilir. Böylece

$$\text{Ü}(f,P) - A(f,P) = \text{Ü}(f,P) - \text{Ü}(f_{n_0},P) + \text{Ü}(f_{n_0},P) - A(f_{n_0},P) + A(f_{n_0},P) - A(f,P) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

olur, ki bu da f'nin Rieman anlamında integrallenebilme şartıdır. Şimdi

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

olduğunu gösterelim. (f_n), f'ye düzgün yakınsak olduğundan öyle bir n_0 doğal sayısı vardır ki, her $n \geq n_0$ ve her $x \in [a,b]$ için

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$$

olur. Şu halde

$$\left|\int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx < \frac{\varepsilon}{(b-a)}\int_a^b dx = \varepsilon$$

olur ki bu bize

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \qquad (2)$$

olduğunu gösterir. //

Burada $f = \lim f_n$ olduğundan (2) eşitliği

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx$$

şeklinde de yazılabilir. Bu durum dizi düzgün yakınsak olduğunda, limit alma ile integral alma işlemlerinin sırası değiştirilebileceğini gösterir.

Örnek: $f_n : [0,1] \to \mathbb{R},\ f_n(x) = x^2 - \dfrac{x}{n}$ dizisi düzgün yakınsak mıdır ve

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx=\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx$$

eşitliği gerçeklenir mi?

Çözüm: Her $x\in[0,1]$ için

$$\lim_{n\to\infty}\left(x^2-\frac{x}{n}\right)=x^2=f(x)$$

olup, [0; 1] aralığı üzerinde (f_n) dizisi, $f(x)=x^2$ ile tanımlı fonksiyona noktasal yakınsaktır.

$$c_n=\max_{x\in[0,1]}\left|x^2-\frac{x}{n}-x^2\right|=\max_{x\in[0,1]}\frac{|x|}{n}=\frac{1}{n}$$

olup $n\to\infty$ için limit alınırsa

$$\lim_{n\to\infty} c_n=0$$

elde edilir. Buna göre (f_n) düzgün yakınsaktır. O halde, her bir f_n, [0; 1] aralığında integrallenebilirdir. Gerçekten;

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\int_0^1\left(x^2-\frac{x}{n}\right)dx=\frac{1}{3}$$

olup ayrıca

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x^2\,dx=\frac{1}{3}$$

olduğu da elde edilir.

Örnek: [0, 2] aralığı üzerinde

$$f_n(x)=\begin{cases} n^2x & , \ 0\le x\le \dfrac{1}{n} \\ -n^2x+2n & , \ \dfrac{1}{n}\le x\le \dfrac{2}{n} \\ 0 & , \ \dfrac{2}{n}\le x\le 2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan (f_n) dizisinin her bir terimi bir sürekli fonksiyondur. Buna göre integrallenebilirdir. $x=0$ için $f_n(0)=0$ ve $x\neq 0$ için $f_n(x)\to 0$ olduğundan (f_n) dizisi $f=0$ fonksiyonuna noktasal yakınsaktır.

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^2 f_n(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\left[\int_0^{1/n} n^2x\,dx+\int_{1/n}^{2/n} n^2x\,dx+\int_{2/n}^{2} 0\,dx\right]=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+0=1$$

olduğundan

$$1=\lim\int_0^2 f_n(x)\,dx \neq \int_0^2 f(x)\,dx=\int_0^2 \lim f_n(x)\,dx=\int_0^2 0\,dx=0$$

dır. Şu halde limit fonksiyonu integrallenebilen bir fonksiyon dahi olsa limit işlemi ile integral alma işleminin sırası değiştirilemez.

FONKSİYON DİZİSİNİN TÜREVİNİN DÜZGÜN YAKINSAKLIĞI

Bundan önceki kısımlarda süreklilik ve integrallenbilmenin düzgün yakınsaklık altında korunduğunu gördük. Ama bu durum türev için geçerli değildir. Yani, x_0 noktasının bir ε komşuluğu üzerinde tanımlı, reel değerli, x_0 noktasında türevlenebilen fonksiyonların (f_n) dizisinin f fonksiyonuna düzgün yakınsak ise de

$$(\lim f_n)'(x_0)=\lim f_n'(x_0)$$

olmamaktadır. Şimdi türev hangi şartlar altında bu gerçekleştiğini gösteren bir teorem verelim.

9.6. Teorem: (f_n), [a, b] aralığı üzerinde reel değerli ve sürekli türeve sahip olsun. (f_n) dizisi f fonksiyonuna noktasal yakınsak ve (f_n') türev dizisi bir f_n' fonksiyonuna düzgün yakınsak ise [a, b] aralığında

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x)=\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)'$$

dir.

İspat: 9.2. Teorem gereğince f' üzerinde süreklidir. $c\in[a,b]$ olmak üzere her bir n doğal sayısı için

$$\int_c^x f_n'(t)\,dt=f_n(x)-f_n(c)$$

yazılabilir. 9.3. Teoremden

$$\int_c^x f'(t)\,dt=\int_c^x \lim_{n\to\infty} f_n'(t)\,dt=\lim_{n\to\infty}\int_c^x f_n'(x)=\lim_{n\to\infty}[f_n(x)-f_n(c)] \qquad (1)$$

bulunur. (f_n) dizisi f fonksiyonuna noktasal yakınsak olduğundan, (1) eşitliği

$$\int_c^x f'(t)\,dt=f(x)-f(c)$$

şeklinde yazılabilir. İntegral hesabın temel teoreminden biliyoruz ki $f(x)=\int_c^x f'(t)\,dt$ şeklinde tanımlanan f fonksiyonu türevlidir.

Örnek: [0; 1] aralığı üzerinde $f_n(x)=\dfrac{x^n}{n}$ şeklinde tanımlanan fonksiyon dizisi için,

a) $\left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n\right)'(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x)$ eşitliği gerçekleşir mi?

b) (f_n') türev dizisi düzgün yakınsak mıdır?

Çözüm: a) Öncelikle $(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x))'$ değerini hesaplayalım. Her $x\in[0,1]$ için

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{n}=0=f(x)$$

olup, [0; 1] aralığında $f_n\to 0$ olup noktasal yakınsaktır. O halde f (x) = 0 sabit fonksiyondur. Yani

$$(\lim_{n\to\infty} f_n(x))''=f'(x)=0$$

bulunur. Diğer yandan

$$f_n(x)=x^{n-1} \quad , \; x\in[0,1]$$

olacağından

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x)=\lim_{n\to\infty} x^{n-1}=\begin{cases}0 & , \; 0\le x<1\\ 1 & , \; x=1\end{cases}$$

olarak elde edilir. Dolayısıyla $x\in[0,1)$ için (a) şıkkındaki eşitlik gerçekleşir. Ancak $x=1$ için gerçekleşmez. Çünkü

$$0=(\lim_{n\to\infty} f_n)''(1)\neq\lim_{n\to\infty} f'(1)=1$$

olarak bulunur.

b) $f_n(x)=x^{n-1}$ türev dizisi düzgün yakınsak değildir. Çünkü

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x)=\lim_{n\to\infty} x^{n-1}=\begin{cases}0 & , \; 0\le x<1\\ 1 & , \; x=1\end{cases}=f(x)$$

olup [0; 1] aralığında $f_n\to f$ olup noktasal yakınsaktır. Ancak bu f fonksiyonu $x=1$ noktasında süreksiz olduğundan yakınsama düzgün yakınsak değildir.

9.6. Tanım: (f_n) bir A kümesi üzerinde tanımlı fonksiyonların bir dizisi olsun. $\forall\varepsilon>0$ için en az $n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ öyle ki $\forall m,n>n_\varepsilon$ ve $\forall x\in A$ için $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$ ise (f_n) fonksiyon dizisi düzgün Cauchy dizisidir.

Burada dikkat edecek olursak n_ε sayısı sadece ε sayısına bağlıdır.

9.7. Teorem: (f_n) bir A kümesi üzerinde tanımlı fonksiyonların bir dizisi olsun. (f_n), A üzerinde düzgün yakınsak olması için gerek ve yeter şart (f_n), A üzerinde düzgün Cauchy dizisidir.

İspat: (f_n) dizisi A üzerinde bir f fonksiyonuna düzgün yakınsak olsun. $\varepsilon > 0$ verildiğinde öyle bir $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ bulunur ki $\forall n > n_\varepsilon$ ve $\forall x \in A$ için $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ olur. Eğer $m, n > n_\varepsilon$ seçilirse $x \in A$ için

$$|f_m(x) - f_n(x)| = |f_m(x) - f(x) + f(x) - f_n(x)| \le |f_m(x) - f(x)| + |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

olur. Bu da (f_n) dizisinin düzgün Cauchy dizisi olduğunu gösterir.

Tersine (f_n) bir düzgün Cauchy dizisi olsun. Bu takdirde reel terimli $(f_n(x))$ bir Cauchy dizisidir. $\mathbb{R}$ deki her Cauchy dizisi yakınsak olduğundan $(f_n(x))$ dizisi bir $f(x)$ sayısına yakınsar. Dolayısıyla A üzerinde $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ eşitliği yardımıyla bir f fonksiyonu tanımlanmış olur. $\varepsilon > 0$ için (f_n) düzgün Cauchy dizisi olduğundan öyle bir $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ bulunur ki $\forall m, n > n_\varepsilon$ ve $\forall x \in A$ için $|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ olur. Böylece $\forall x \in A$ ve $\forall m > n_\varepsilon$ için

$$|f_m(x) - f(x)| = \lim_{n\to\infty} |f_m(x) - f_n(x)| \le \varepsilon$$

olur. Bu (f_n) dizisinin f fonksiyonuna A üzerinde düzgün yakınsak olduğunu gösterir.

FONKSİYON SERİLERİ ve DÜZGÜN YAKINSAKLIĞI

9.7. Tanım: $A \subseteq \mathbb{R}$, $f_k : \mathbb{N} \times A \to \mathbb{R}$ fonksiyon dizisi (f_k) olsun, $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ serisine fonksiyon serisi denir. $s_n = f_1, f_2, ..., f_n$ ile tanımlı (s_n) dizisine $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ serisinin A üzerinde kısmi toplamlar dizisi denir. Eğer (s_n) dizisi A üzerinde düzgün yakınsak ise $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ serisi A üzerinde düzgün yakınsaktır denir.

Örnek: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - x^{k+1}}{1 - x}$ ile tanımlanan fonksiyon serisi $A = \left[0, \frac{1}{2}\right]$ üzerinde düzgün yakınsak mıdır?

Çözüm: Verilen serinin kısmi toplamlar dizisi $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1 - x^{k+1}}{1 - x}$ düzgün yakınsak olup olmadığını inceleyelim.

$$s_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1-x^{k+1}}{1-x}$$
$$=\frac{1-x^2}{1-x}+\frac{1-x^3}{1-x}+...+\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$
$$=\frac{1}{1-x}\left[1-x^2+1-x^3+...+1-x^{n+1}\right]$$
$$=\frac{1}{1-x}\left[n-x^2(1+x+x^2+...+x^{n-1}\right]$$
$$=\frac{1}{1-x}\left[n-x^2.\frac{1-x^n}{1-x}\right]$$

$f_n:\mathbb{N}\times[a,b]\to\mathbb{R}$ ile tanımlı her bir (f_n) Riemann integrallenebilir olsun. Ayrıca [a; b] aralığında $f_n\to f$ olup her $x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$ için

$$\lim_{n\to\infty}s_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-x}\left[n-x^2.\frac{1-x^n}{1-x}\right]$$
$$=\frac{1}{1-x}\left[\lim_{n\to\infty}n-\frac{x^2}{1-x}\lim_{n\to\infty}(1-x^n)\right]$$
$$=\infty$$

olduğundan (s_n) kısmi toplamlar dizisi noktasal yakınsak değildir. O halde $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-x^{k+1}}{1-x}$ de noktasal yakınsak olamaz. Noktasal yakınsak değilse, düzgün yakınsak da değildir.

Örnek: $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{2^{k+1}}$ serisi [0; 1] üzerinde düzgün yakınsak mıdır?

Çözüm: $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{2^{k+1}}$ serisinin kısmi toplamlar dizisi yazılırsa

$$s_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{2^{k+1}}$$
$$=\frac{x}{2^2}+\frac{x^2}{2^3}+...+\frac{x^n}{2^{n+1}}$$
$$=\frac{x}{4}\left[1+\frac{x}{2}+...+\frac{x^{n-1}}{2^{n-1}}\right]$$

$$=\frac{x}{4}\left[\frac{1-\left(\frac{x}{2}\right)^n}{1-\frac{x}{2}}\right]$$

$$=\frac{x}{4-2x}\left[1-\left(\frac{x}{2}\right)^n\right], \quad x\in[0,1]$$

olup, her $x\in[0,1]$ için

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{2^{k+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x}{4-2x}=\frac{x}{4-2x}=s(x)$$

bulunur. O halde $s(x)$ dizisi, $s(x)=\dfrac{x}{4-2x}$ ile tanımlı fonksiyona noktasal yakınsaktır. Şimdi düzgün yakınsaklığını gösterelim.

$$c_n(x)=\max_{x\in[0,1]}\left|\frac{x}{4-2x}\left[1-\left(\frac{x}{2}\right)^n\right]-\frac{x}{4-2x}\right|$$

$$=\max_{x\in[0,1]}\left|\frac{x}{4-2x}\left(\frac{x}{2}\right)^n\right|$$

$$=\max_{x\in[0,1]}\left\{\frac{x^{n+1}}{(2-x)2^{n+1}}\right\}$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} c_n(x)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}=0$$

olduğundan yakınsama düzgündür. (s_n) kısmi toplamlar dizisi, [0; 1] üzerinde $s(x)=\dfrac{x}{4-2x}$ ile tanımlı fonksiyona düzgün yakınsak olur. Buna göre $\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{x^k}{2^{k+1}}$ serisi de aynı s fonksiyonuna, [0; 1] üzerinde düzgün yakınsaktır.

9.8. Teorem (Düzgün Yakınsaklık Prensibi): $\sum f_k$, bir A kümesi üzerinde tanımlı fonksiyonların bir serisi olsun. $\sum f_k$ serisi A üzerinde düzgün yakınsak olması için gerek ve yeter şart $\forall\varepsilon>0$ için $\exists n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ öyle ki $\forall x\in A$ ve her $n>m\geq n_\varepsilon$ için

$$\left|\sum_{k=m+1}^{n} f_k(x)\right| < \varepsilon$$

dir.

İspat: $\sum f_k$ serisinin kısmi toplamlar dizisi (s_n) olsun. $\sum f_k$ serisinin düzgün yakınsak olması için gerek ve yeter şart (s_n) dizisinin düzgün yakınsak ve dolayısıyla düzgün Cauchy olmasıdır. Buna göre;

$\sum f_k$, A üzerinde düzgün yakınsaktır $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ öyle ki her $m, n \geq n_\varepsilon$ ve $\forall x \in A$ için

$$|s_n(x) - s_m(x)| < \varepsilon$$

dir. $n > m$ için

$$|s_n(x) - s_m(x)| = \left|\sum_{k=m+1}^{n} f_k(x)\right| < \varepsilon$$

olduğundan ispat tamamlanır.//

Yukarıdaki eşitlikte $n \to \infty$ yapılırsa şu sonuç elde edilir.

9.2. Sonuç: $\sum f_k$, A üzerinde fonksiyonların bir serisi olsun. $\sum f_k$ serisi A üzerinde düzgün yakınsak olması için gerek ve yeter şart $\forall \varepsilon > 0$ için $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ öyle ki $\forall x \in A$ ve her $n > n_\varepsilon$ için

$$|K_n(x)| = \left|\sum_{k=m+1}^{n} f_k(x)\right| < \varepsilon$$

dir. Başka bir değişle, (K_n) kalan terim dizisi düzgün sıfır dizisidir.//

Şimdi değişken terimli seriler için yakınsaklık testleri verelim.

9.9. Teorem (Weierstrass Testi): $\sum f_n$, A üzerinde tanımlı fonksiyonların bir serisi olsun. Her $x \in A$ için $|f_n(x)| < a_n$ ve $\sum a_n < \infty$ (yakınsak) ise $\sum f_n$ serisi A üzerinde düzgün yakınsaktır.

İspat: $\sum f_n(x)$ serisinin kalan kısmı $K_n(x)$, $\sum a_n$ serisinin kalan kısmı R_n olsun.

$$|K_n(x)| < \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)\right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = R_n$$

dir. $\sum a_n$ yakınsak olduğundan bu serinin kalan kısmi sıfıra gider. O halde $K_n(x)$ düzgün olarak sıfıra gider. Şu halde $\sum f_n$ serisi A üzerinde düzgün yakınsaktır.

İspat: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$ serisi $[-1,1]$ aralığı üzerinde düzgün yakınsaktır. Çünkü $-1\le x\le 1$ için, $\left|\frac{x^n}{n^2}\right|\le\frac{1}{n^2}$ olup $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ yakınsak olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$ serisi düzgün yakınsaktır.

Örnek: $\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n$ serisi $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ aralığında düzgün yakınsak mıdır?

Çözüm: Verilen fonksiyon serisinin kısmi toplamlar dizisi

$$s_n(x)=\sum_{k=1}^{n}(k+1)x^k$$

olduğundan bu sorunun çözümü buradan bulmak zordur. Ama Weierstrass testi uygulanırsa her $x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ için

$$|f_n(x)|=|(n+1)x^n|\le\frac{n+1}{2^n}=a_n$$

yazılabilir. Burada $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2^n}$ yakınsaklığını inceleyelim. D'alambert Oran testi gereğince

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+2}{2^{n+1}}}{\frac{n+1}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{2^{n+1}}\right)\left(\frac{2^n}{n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{2(n+1)}=\frac{1}{2}<1$$

olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2^n}$ yakınsaktır. Bu durumda Weierstrass testi gereği $\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n$ serisi $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ aralığında düzgün yakınsaktır.

Örnek: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}e^{-nx}$ serisi $[0,1]$ aralığında düzgün yakınsak mıdır?

Çözüm: Her $x\in[0,1]$ için

$$|f_n(x)|=\left|\frac{x^n}{n!}e^{-nx}\right|\leq\frac{1}{n!}=a_n$$

yazılabilir. Burada $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$ yakınsaklığını inceleyelim. D'alambert Oran testi gereğince

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0<1$$

olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$ yakınsaktır. Bu durumda Weierstrass testi gereği $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}e^{-nx}$ serisi $[0,1]$ aralığında düzgün yakınsaktır.

Örnek: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{1-x^n}}{3^n}$ serisi $[-1,1]$ aralığında düzgün yakınsak mıdır?

Çözüm: Her $x\in[-1,1]$ için

$$|f_n(x)|=\left|\frac{\sqrt{1-x^n}}{3^n}\right|\leq\frac{1}{3^n}=a_n$$

yazılabilir. Burada $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$ serisi geometrik seridir. Geometrik serilerde $r=\frac{1}{3}<1$ olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$ yakınsaktır. Bu durumda Weierstrass testi gereği $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{1-x^n}}{3^n}$ serisi $[-1,1]$ aralığında düzgün yakınsaktır.

Örnek: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4+x^4}}$ serisi $\mathbb{R}$ üzerinde düzgün yakınsak mıdır?

Çözüm: Her $x\in\mathbb{R}$ için

$$|f_n(x)|=\left|\frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4+x^4}}\right|\leq\frac{1}{\sqrt[3]{n^4+x^4}}\leq\frac{1}{\sqrt[3]{n^4}}=a_n$$

yazılabilir. Burada $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^4}}$ serisi harmonik seridir. Harmonik seride $\alpha=\frac{4}{3}>1$ olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^4}}$ yakınsaktır. Bu durumda Weierstrass testi gereği $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4+x^4}}$ serisi $\mathbb{R}$ aralığında düzgün yakınsaktır.

9.10. Teorem: $\sum f_n$, $[a,b]$ üzerinde f fonksiyonuna düzgün yakınsak ve $c\in[a,b]$ olmak üzere $\lim\limits_{x\to c} f_n(x)=c_n$ olsun. Buna göre

$$\lim_{x\to c}\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)=\sum_{k=1}^{\infty}(\lim_{x\to c} f_k(x))$$

dir.

İspat: $\sum f_n$ düzgün yakınsak olduğundan, 9.7. teoremden her $\varepsilon>0$ için $\exists n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ öyle ki $\forall x\in[a,b]$ ve her $n>m>n_\varepsilon$ için

$$\sum_{k=m+1}^{n} f_k(x)=\left|f_{m+1}(x)+f_{m+2}(x)+...+f_n(x)\right|<\varepsilon$$

olur. Bu sonlu toplamda $x\to c$ için limit alınırsa $n>n_\varepsilon$ için

$$\left|c_{m+1}(x)+c_{m+2}(x)+...+c_n(x)\right|\le\varepsilon$$

bulunur ki bu $\sum c_n$ serisinin yakınsak olduğunu gösterir. $\sum c_n$ serisinin kısmi toplamlar dizisi (t_n), kalan terimi R_n olsun. $\sum c_n=t$ diyelim. $\sum f_n(x)$ serisinin toplamı $f(x)$, kısmi toplamlar dizisi $(s_n(x))$ ve kalan terimi $K_n(x)$ ise

$$f(x)=s_n(x)+K_n(x) \text{ ve } t=t_n(x)+R_n(x)$$

yazılabilir. Bu eşitlikleri taraf tarafa çıkarırsak,

$$|f(x)-t|=|s_n(x)+K_n(x)-t_n-R_n|\le|s_n(x)-t_n|+|K_n(x)-R_n|$$

olur. $\sum f_n$ düzgün yakınsak, $\sum c_n$ yakınsak olduğundan her $\varepsilon>0$ için $\exists n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ öyle ki $\forall x\in[a,b]$ ve her $n>m\ge n_\varepsilon$ için

$$|K_n(x)|<\frac{\varepsilon}{3} \text{ ve } |R_n(x)|<\frac{\varepsilon}{3}$$

olur. Buna göre n için

$$\lim_{x\to c} s_n(x)=\lim_{x\to c}\sum_{k=1}^{n} f_k(x)=\sum_{k=1}^{n}(\lim_{x\to c} f_k(x))=\sum_{k=1}^{n} c_k=t_n$$

olduğundan öyle bir $\delta>0$ bulunur ki $|x-c|<\delta$ şartını sağlayan her $x\in[a,b]$ için $|s_n(x)-t_n|<\frac{\varepsilon}{3}$ olur. Demek ki $|x-c|<\delta$ şartını sağlayan her $x\in[a,b]$ için

$$|f(x)-t|<\varepsilon$$

bulunur. Bu

$$\lim_{x\to c} f(x)=t$$

olacağını gösterir. $f(x)$ ve t'nin değerleri yerine yazılırsa

$$\lim_{x\to c}\sum_{k=1}^{\infty} f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}(\lim_{x\to c} f_k(x))$$

bulunur.

Örnek: Her $x\in[0,1]$ için $\lim_{x\to 0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sqrt{1-x^{2n}}}{2^n}$ limitini bulunuz.

Çözüm: Önce $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sqrt{1-x^{2n}}}{2^n}$ serisinin $[0,1]$ aralığında düzgün yakınsaklığını inceleyelim. Her $x\in[0,1]$ için

$$|f_n(x)|=\left|\frac{\sqrt{1-x^{2n}}}{2^n}\right|\le\frac{1}{2^n}=a_n$$

yazılabilir. Burada $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ serisi geometrik seridir. Geometrik serilerde $r=\frac{1}{2}<1$ olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ yakınsaktır. Bu durumda Weierstrass testi gereği $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{1-x^{n}}}{2^n}$ serisi $[0,1]$ aralığında düzgün yakınsaktır. Şimdi limitini bulalım. Her n için

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x^{2n}}}{2^n}=\frac{1}{2^n}$$

limiti mevcuttur. O halde 9.10. teorem gereği limit ve toplam yer değiştirebilir.

$$\lim_{x\to 0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sqrt{1-x^{2n}}}{2^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x^{2n}}}{2^n}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}$$

geometrik serisi elde edilir. Bu seri

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{2^{\infty}}}{1-\frac{1}{2}}=2$$

sonucunu verir.

Örnek: Her $x\in[0,1]$ için $\lim_{x\to 0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n(n+1)}$ limitini bulunuz.

Çözüm: Önce $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n(n+1)}$ serisinin $[0,1]$ aralığında düzgün yakınsaklığını inceleyelim. Her $x\in[0,1]$ için

$$|f_n(x)|=\left|\frac{\cos nx}{n(n+1)}\right|\le\frac{1}{n^2+n}<\frac{1}{n^2}=a_n$$

yazılabilir. Burada $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ serisi harmonik seridir. Harmonik serilerde $\alpha=2>1$ olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ yakınsaktır. Bu durumda Weierstrass testi gereği $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n(n+1)}$ serisi $[0,1]$ aralığında düzgün yakınsaktır. Şimdi limitini bulalım. 9.10. teorem gereği limit ve toplam yer değiştirebilir.

$$\lim_{x\to 0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos nx}{n(n+1)}=\sum_{n=0}^{\infty}\lim_{x\to 0}\frac{\cos nx}{n(n+1)}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$$

serisi elde edilir. Bu seri

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$$

sonucunu verir.

ABEL ve DIRICTLET TESTİ

9.11. Teorem (Abel Testi): $\sum f_n$, A üzerinde tanımlı fonksiyonların herhangi bir serisi ve (g_n) de negatif olmayan fonksiyonların bir dizisi olsun. Eğer A üzerinde;

i) $\sum f_n$ serisi düzgün yakınsaktır,

ii) (g_n) azalan ve düzgün sınırlı,

ise $\sum f_n g_n$ serisi A üzerinde düzgün yakınsaktır.

İspat: $\varepsilon > 0$ olsun. (i) den $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ öyle ki $\forall x \in A$ ve her $n > m \geq n_\varepsilon$ için

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)\right| < \frac{\varepsilon}{M}$$

olur. Diğer taraftan $F_n = \sum_{k=m}^{p} f_k$ ve $M = \{|F_m|, |F_{m+1}|, ..., |F_n|\}$ olsun. Abel formülünden

$$\sum_{k=m}^{n} f_k g_k = F_n g_n + \sum_{k=m+1}^{n-1} F_k (g_k - g_{k+1})$$

bulunur. Böylece,

$$\left|\sum_{k=m}^{n} f_k g_k\right| \leq |F_n g_n| + \sum_{k=m}^{n-1} |F_k (g_k - g_{k+1})| \leq M g_n + \sum_{k=m}^{n-1} M (g_k - g_{k+1}) = M g_n$$

elde edilir. Burada,

$$\left|\sum_{k=m}^{n} f_k(x) g_k(x)\right| \leq g_n(x). \max_{m \leq k \leq n} \left|\sum_{k=m}^{n} f_k(x)\right| \leq M. \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$$

olur. 9.7. teoremden $\sum f_n g_n$ serisinin A üzerinde düzgün yakınsak olduğu ortaya çıkar.

Örnek: $c \in (0,1)$ olmak üzere $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n (1 + x^n)}{n}$ serisi, [0, c] aralığında düzgün yakınsak mıdır?

Çözüm: $f_n(x) = \frac{x^n}{n}$ ve $g_n(x) = 1 + x^n$ olarak alınsın.

i) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ serisi [0, c] üzerinde düzgün yakınsaktır. Gerçekten, her $x \in [0,c]$ için

$$|f_n(x)| = \left|\frac{x^n}{n}\right| = \frac{x^n}{n} = \frac{c^n}{n} = a_n$$

ve

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{c^{n+1}}{(n+1)}}{\dfrac{c^n}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{c^{n+1} n}{c^n (n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{cn}{n+1} = c < 1$$

olup, oran testinden $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c^n}{n}$ serisi yakınsaktır. Dolayısıyla, [0, c] üzerinde $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n(1+x^n)}{n}$ serisi Weierstrass testinden düzgün yakınsaktır.

ii) Her $x \in [0,c]$ için $g_n(x) = 1 + x^n > 0$ olup, her n için (g_n) dizisi negatif olmayan fonksiyonların bir dizisidir. Her $x \in [0,c]$ için

$$g_n(x) = 1 + x^n > 1 + x^{n+1} = g_{n+1}(x)$$

olduğundan (g_n) azalandır. Her $x \in [0,c]$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$|g_n(x)| = |1 + x^n| \leq 1 + c^n < 2$$

olduğundan (g_n) düzgün sınırlıdır.

O halde Abel testi gereğince $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n(1+x^n)}{n}$ serisi [0, c] üzerinde düzgün yakınsaktır.

Örnek: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^3} x^n$ serisi (0, 1) üzerinde düzgün yakınsak mıdır?

Çözüm: $f_n(x) = \frac{\cos nx}{n^3}$ ve $g_n(x) = x^n$ olarak alınsın.

i) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^3}$ serisi (0, 1) üzerinde düzgün yakınsaktır. Gerçekten, her $x \in (0,1)$ için

$$|f_n(x)| = \left|\frac{\cos nx}{n^3}\right| \leq \frac{1}{n^3} = a_n$$

$$g_n(x) = x^n > 0$$

ve $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ harmonik serisi yakınsak olduğundan, Weierstrass testi gereğince $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^3}$ serisi (0, 1) üzerinde düzgün yakınsaktır.

ii) Her $x \in (0,1)$ için $g_n(x) = x^n > 0$ olup, her n için (g_n), negatif olmayan bir fonksiyonların dizisidir. Her $x \in [0,c]$ için

$$g_n(x) = x^n > x^{n+1} = g_{n+1}(x)$$

olduğundan (g_n) azalandır. Her $x \in [0,1]$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$|g_n(x)| = |x^n| < 1$$

olduğundan (g_n) düzgün sınırlıdır.

O halde Abel testi gereğince $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^3} x^n$ serisi (0, 1) üzerinde düzgün yakınsaktır.

Örnek: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} |x|^n$ serisi $[-1,1]$ aralığı üzerinde düzgün yakınsaktır. Çünkü her $x \in [-1,1]$ için $(|x|^n)$ negatif olmayan sayıların bir azalan dizisi ve $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ serisi x'e bağlı olmadığından düzgün yakınsaktır. Abel testi gereğince verilen seri düzgün yakınsaktır.

9.12. Teorem (Dirichlet Testi): $\sum f_n$, A üzerinde tanımlı fonksiyonların herhangi bir serisi ve (g_n) de negatif olmayan fonksiyonların bir dizisi olsun. Eğer A üzerinde;

i) $\sum f_n$ serisi düzgün yakınsaktır,

ii) (g_n) azalan ve $g = 0$ fonksiyonuna düzgün sınırlı,

ise $\sum f_n g_n$ serisi A üzerinde düzgün yakınsaktır.

İspat: (i) den her $x \in A$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \right| \le M$$

olacak şekilde bir $M \in \mathbb{R}$ için vardır. $\varepsilon > 0$ verilmiş olsun. (ii) den $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ öyle ki $\forall x \in A$ ve her $n > n_\varepsilon$ için

$$|f_n(x)| \le \frac{\varepsilon}{2M}$$

olur. Böylece $\forall x \in A$ ve $n > m \ge n_\varepsilon$ için

$$\left| \sum_{k=m}^{n} f_k(x) g_k(x) \right| \le g_n(x).\max_{m \le k \le n} \left| \sum_{k=m}^{n-1} f_k \right|$$

$$\le g_n(x).\max_{m \le k \le n} \left\{ \left| \sum_{k=1}^{m} f_k \right| + \left| \sum_{k=1}^{n-1} f_k \right| \right\}$$

$$\leq (M+M).\frac{\varepsilon}{2M}=\varepsilon$$

bulunur. 9.7. teoremden, $\sum f_n g_n$ serisi A üzerinde düzgün yakınsaktır.

Örnek: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n(1-x)}{\log(n+1)}$ serisinin $[0,1)$ aralığında düzgün yakınsak olduğunu gösterimiz.

Çözüm: $f_n(x)=x^n(1-x)$, $g_n(x)=\frac{1}{\log(n+1)}$ olsun.

i) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty} x^n(1-x)$ serisinin kısmi toplamlar dizisini bulalım.

$$\begin{aligned} s_n(x) &= \sum_{k=1}^{n} x^k(1-x) \\ &= x(1-x)+x^2(1-x)+\ldots+x^n(1-x) \\ &= x(1-x)[1+x+\ldots+x^{n-1}] \\ &= x(1-x)\frac{(1-x^n)}{(1-x)} \\ &= x(1-x^n) \end{aligned}$$

olup her $x\in[0,1)$ ve her $n\in\mathbb{N}$ için

$$|s_n(x)|=|x^n(1-x)|\leq 1$$

olduğundan (s_n) düzgün sınırlıdır.

ii) (g_n) dizisi, her n için negatif olmayan fonksiyonların bir dizisidir. Her $x\in[0,1)$ için

$$g_n(x)=\frac{1}{\log(n+1)}>\frac{1}{\log(n+2)}=g_{n+1}(x)$$

olduğundan (g_n) azalan fonksiyondur. Ayrıca

$$\lim_{n\to\infty} g(n+1)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log(n+1)}=0=g(x)$$

olduğundan (g_n) dizisi, $g=0$ fonksiyonuna noktasal yakınsaktır. (g_n), x'ten bağımsız olduğundan düzgün yakınsamadir.

O halde, Dirichlet testi gereğince verilen seri [0, 1) üzerinde düzgün yakınsaktır.

FONKSİYON SERİLERİNİN SÜREKLİLİK, İNTEGRAL VE TÜREV İLİŞKİLERİ

9.13. Teorem: $\sum f_k$, bir A kümesi üzerinde sürekli fonksiyonların bir serisi olsun. Bu seri A üzerinde bir f fonksiyonuna düzgün yakınsak ise f fonksiyonu A üzerinde süreklidir.

İspat: $s_n = f_1 + f_2 + ... + f_n$ ve $x_\varepsilon \in A$ olsun. f_k fonksiyonları sürekli olduğundan s_n fonksiyonları da x_ε da süreklidir. (s_n) f fonksiyonuna düzgün yakınsak olduğundan 9.2. teorem gereğince f fonksiyonu x_ε da süreklidir. x_ε keyfi olduğundan f, A üzerinde süreklidir.

9.14. Teorem: $\sum f_n$, [a, b] üzerinde sınırlı, reel değerli ve integrallenebilir fonksiyonları bir serisi olsun. $\sum f_n$ serisi düzgün yakınsak ise

$$\int_a^b \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_a^b f_k(x)\,dx \right)$$

dir.

İspat: $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) + K_n(x)$ olduğundan,

yazılabilir. Sonlu sayıdaki toplamın integrali integrallerin toplamı olduğundan

$$\int_a^b \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \right) = \sum_{k=1}^{n} \int_a^b f_k(x)\,dx + \int_a^b K_n(x)dx$$

olur. (K_n) sıfıra düzgün yakınsayan bir dizi olduğundan $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ öyle ki $\forall x \in [a,b]$ ve her $n > n_\varepsilon$ için $|K_n(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$ olur. Buna göre aynı n ve x'ler için

$$\left| \int_a^b K_n(x)dx \right| < \int_a^b |K_n(x)dx| < \frac{\varepsilon}{b-a} \int_a^b dx = \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon$$

bulunur. Bu durumda

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b K_n(x)dx = 0$$

dir. Buna göre yukarıdaki eşitlikte $n \to \infty$ için limit alınırsa

$$\int_a^b \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_a^b f_k(x)\,dx \right)$$

bulunur.

Örnek: $\sum_{n=1}^{\infty}\int_1^2 \frac{x}{(1+x)^n}dx$ integralinin sonucu nedir?

Çözüm: Öncelikle $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{(1+x)^n}$ serisini düzgün yakınsaklığını inceleyelim.

$$\begin{aligned} s_n(x) &= \sum_{k=1}^{n}\frac{x}{(1+x)^k} \\ &= x\left[\frac{1}{1+x}+\frac{1}{(1+x)^2}+\dots+\frac{1}{(1+x)^n}\right] \\ &= \frac{x}{1+x}\left[1+\frac{1}{1+x}+\dots+\frac{1}{(1+x)^{n-1}}\right] \\ &= \frac{x}{1+x}\left[\frac{1-\frac{1}{(1+x)^n}}{1-\frac{1}{1+x}}\right] \\ &= 1-\frac{1}{(1+x)^n} \end{aligned}$$

ve

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{x}{(1+x)^k} = \lim_{n\to\infty}\left[1-\frac{1}{(1+x)^n}\right] = 1$$

olup (s_n) dizisi, $s_n(x)=1$ ile tanımlı fonksiyona noktasal yakınsaktır.

$$\lim_{n\to\infty} c_n(x) = \lim_{n\to\infty}\max_{x\in[1,2]}\left|1-\frac{1}{(1+x)^n}-1\right| = \lim_{n\to\infty}\max_{x\in[1,2]}\frac{1}{(1+x)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n} = 0$$

olup $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{(1+x)^n}dx$ serisi düzgün yakınsaktır. 9.14. teorem gereği,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_1^2\frac{x}{(1+x)^n}dx = \int_1^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{(1+x)^n}dx = \int_1^2 dx = x\Big|_1^2 = 1$$

bulunur.

9.15. Teorem: $\sum f_n$, (a, b) üzerinde türevlenebilen fonksiyonların bir serisi olsun. $\sum f_n$ serisi bir f fonksiyonuna noktasal yakınsak ve $\sum f_n'$ serisi bir g fonksiyonuna düzgün yakınsak ise $\sum f_n$ serisi düzgün yakınsaktır ve

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} \left(f_k'(x)\right)$$

dir.

İspat: $s_n = f_1 + f_2 + \dots + f_n$ olsun. (s_n) dizisi 9.5. teoremin gereği,

$$\left(\lim_{n\to\infty} s_n(x)\right)' = \lim_{n\to\infty} s_n'(x)$$

dir. Diğer taraftan

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \text{ ve } \lim_{n\to\infty} s_n'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x)$$

olduğundan

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} \left(f_k'(x)\right)$$

bulunur.

Örnek: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+1}}{n+1}\right)$ serisinin $[0,1]$ aralığında terim terime türevi var mıdır?

Çözüm: Öncelikle $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+1}}{n+1}\right)$ serisini düzgün yakınsaklığını inceleyelim.

$$\begin{aligned} s_n(x) &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{x^k}{k} - \frac{x^{k+1}}{k+1}\right) \\ &= \left(x - \frac{x^2}{2}\right) + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right) + \dots + \left(\frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+1}}{n+1}\right) \\ &= x - \frac{x^{n+1}}{n+1} \end{aligned}$$

ve

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty} \left[x - \frac{x^{n+1}}{n+1}\right] = x$$

olup (s_n) dizisi, $s_n(x) = x$ ile tanımlı fonksiyona noktasal yakınsaktır.

$$\lim_{n\to\infty} c_n(x) = \lim_{n\to\infty} \max_{x\in[0,1]} \left| x - \frac{x^{n+1}}{n+1} - x \right| = \lim_{n\to\infty} \max_{x\in[0,1]} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

olup $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n}-\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)$ serisi düzgün yakınsaktır. Buna göre

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n}-\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)\right]'=(x)'=1 \qquad (1)$$

dir. Şimdi 9.15. teoremdeki eşitliğin ikinci yanını inceleyelim.

$$f_n(x)=\frac{x^n}{n}-\frac{x^{n+1}}{n+1} \text{ olup } f_n'(x)=x^{n-1}-x^n$$

bulunur. Buradan

$$\sum_{n=1}^{\infty}(x^{n-1}-x^n)=(1-x)+(x-x^2)+\dots+(x^{n-1}-x^n)=1-x^n$$

olup

$$\lim_{x\to 0}\sum_{n=1}^{\infty}(x^{n-1}-x^n)=\lim_{x\to 0}(1-x^n)=\begin{cases}1, & 0\le x<1\\ 0, & x=1\end{cases} \qquad (2)$$

bulunur. Sonuç olarak (1) ve (2) eşit olmadığından seri bu aralıkta terim terime türevlenemez.

KAYNAKÇA

1. Prof. Dr. Mustafa BALCI, Matematik Analiz II, Bilim Kitap Kırtasiye Ltd. Şti., Ankara, 1997.
2. George B. Thomas Jr., Thomas Calcalus, Çev. Recep Korkmaz, Beta Yayınları, 11. Baskı, Ağustos 2009, İstanbul.
3. Doç. Dr. Yelda AYGAR KÜÇÜKEVCİLİOĞLU, Ankara Üniversitesi İleri Analiz Ders Notları, 2019, Ankara.