10. BÖLÜM
KUVVET SERİLERİ
(TAYLOR ve MACLAURIN SERİLERİ)

KUVVET SERİSİ KAVRAMI

10.1. Tanım:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + ... + c_n(x-a)^n + ...$$

şeklindeki serilere $x=a$ civarında kuvvet serisi denir. Burada merkez a ve katsayılar $c_0, c_1, c_2, ..., c_n, ...$ sabitlerdir. Eğer $x=0$ ise;

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + ... + c_n x^n + ...$$

$x=0$ civarında kuvvet serisi denir.

Örnek: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{0!} + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{3!} + ...$ serisi $x=0$ civarında kuvvet serisidir.

Örnek: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$ serisi her $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ için yakınsak veya ıraksaklığını inceleyiniz.

Çözüm: Oran testini uygulayalım.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} . \frac{n^n}{x^k}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{n+1}\left(\frac{k}{k+1}\right)^k = 0.e^{-1} = 0 < 1$$

olduğundan $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$ serisi yakınsaktır.

Örnek: $\sum_{n=0}^{\infty} n^n x^n$ serisi her $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ için yakınsak veya ıraksaklığını inceleyiniz.

Çözüm: Oran testini uygulayalım.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^{n+1}x^{n+1}}{n^n x^k}\right| = \lim_{n\to\infty}|x|(n+1)\left(\frac{k+1}{k}\right)^k = \infty$$

olduğundan $\sum_{n=0}^{\infty} n^n x^n$ serisi ıraksaktır.

10.1. Teorem (Karşılaştırma Testi): $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ serisi x_1 de yakınsak ve x_2 de, $|x_2-a|<|x_1-a|$ eşitsizliğini sağlayan bir sayı ise $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ serisi x_2 de yakınsaktır.

İspat: $x_1 \neq a$ dır. Çünkü $x_1 = a$ ise $|x_2-a|<0$ olur ki bu mümkün değildir. $|x_2-a|<|x_1-a|$ olduğundan

$$r = \frac{|x_2-a|}{|x_1-a|}$$

sayısı 1'den küçük bir pozitif sayısıdır. $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ yakınsak olduğundan $\lim_{n\to\infty} c_n (x-a)^n = 0$ dır. Yakınsak her dizi sınırlı olduğundan $\left(c_n (x-a)^n\right)$ sınırlıdır. $\sup\left|c_n (x_1-a)^n\right| = B$ olsun. Bu takdirde her bir $k \in \mathbb{N}$ için

$$\left|c_n (x_2-a)^n\right| = |c_n||x_2-a|^k = |c_n|\frac{|x_2-a|^k}{|x_1-a|^k} \leq B.r^k$$

olur. $r < 1$ için $\sum B.r^k = B.\sum r^k$ yakınsak olduğundan, karşılaştırma testi gereğince $\sum c_n (x_2-a)^n$ yakınsaktır. //

Bu teoreminden şunu çıkarılır.

Eğer $|x_2-a|<|x_1-a|$ ve $\sum c_n (x-a)^n$ serisi x_2 de ıraksak ise x_1 noktasında da ıraksaktır.

10.2. Tanım: $\sum c_n (x-a)^n$ kuvvet serisinin $|x-a|<R$ için yakınsak olduğu en büyük pozitif R sayısına, bu kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı, seriyi yakınsak yapan x noktalarının oluşturduğu aralığa da yakınsaklık aralığı denir.

Yakınsaklık yarıçapı oran testi ve Hadamard testiyle bulunur.

Jacques Hadamard
(08 Aralık 1865, Versay, Fransa - 17 Ekim 1963, Paris, Fransa)

10.2. Teorem (Hadamard Testi): $\sum c_n(x-a)^n$ kuvvet serisi için $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}=L$ olsun.

i) $|x-a|.L<1$ ise seri yakınsaktır.

Burada $L\neq 0$ ise $R=\dfrac{1}{L}$ dir, $L=0$ ise $R=+\infty$ dir.

ii) $|x-a|.L>1$ ise seri ıraksaktır.

İspat: $\sum c_n(x-a)^n$ kuvvet serisi verilmiş olsun. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|(x-a)^n}<1$ ise seriler konusundaki kök testi gereğince verilen seri yakınsaktır. Halbuki

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|(x-a)^n}=L.|x-a|$$

dir. O halde $L.|x-a|<1$ ise $\sum c_n(x-a)^n$ serisi yakınsaktır.

$L\neq 0$ ise $L.|x-a|<1$ için yakınsak, $L.|x-a|>1$ için ıraksak olup $R=\dfrac{1}{L}$ dir,

$L=0$ ise $L.|x-a|<1$ eşitsizliği her x için sağlanacağından seri her x için yakınsak olur. Bu durumda yakınsaklık yarıçapı $R=+\infty$ dir.

10.1. Açıklama: Oran testi ile kök testinde $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right|=L$ olduğunda $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{c_n}=L$ olacağından, $L\neq 0$ için

$$R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|}$$

yazılabilir.

10.2. Açıklama: Eğer $\left(\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|\right)$ veya $\left(\sqrt[n]{c_n}\right)$ dizilerinin limiti var ve limiti sıfırdan farklı ise

$$R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|} \text{ veya } R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{c_n}}$$

olur.

Örnek: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ serisinin yakınsaklık yarıçapını ve yakınsaklık aralığını bulunuz.

Çözüm: Oran testini uygulayalım.

$$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}=1$$

olduğundan $R=\frac{1}{1}=1$ dir. O halde bu seri $|x|<1$ yakınsaktır. Yani $-1<x<1$ dir. Şimdi verilen serinin $x=-1$ ve $x=1$ için yakınsak olup olmadığını inceleyelim.

$x=-1$ yazılırsa $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ serisi olur ki bu bize Leibnitz kriteri gereğince yakınsaktır. O halde -1 de yakınsaklık aralığına aittir.

$x=1$ yazılırsa $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ serisi olur ki bu bize ıraksak harmonik seri olduğunu gösterir. O halde yakınsak aralığı $[-1,1)$ aralığıdır.

Örnek: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n!}$ serisinin yakınsaklık aralığını bulunuz.

Çözüm: Oran testini uygulayalım.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{(n+1)!}}{\dfrac{1}{n!}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}$$

olduğundan $R = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1}} = \infty$ dir. O halde verilen serinin yakınsaklık aralığı $(-\infty, +\infty)$ dur. Yani verilen seri her x noktasında yakınsaktır.

Örnek: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(x+1)^n}{2^n}$ serisinin yakınsaklık aralığını bulunuz.

Çözüm: Oran testini uygulayalım.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{2^{n+1}}}{\dfrac{1}{2^n}} = \frac{1}{2}$$

olduğundan $R = \dfrac{1}{1/2} = 2$ dir. O halde bu seri $|x+1| < 2$ yakınsaktır. Yani $-3 < x < 1$ dir. Şimdi verilen serinin $x=-3$ ve $x=1$ için yakınsak olup olmadığını inceleyelim.

$x=-3$ yazılırsa $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-3+1)^n}{2^n} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ serisi ıraksaktır. O halde -3 de yakınsaklık aralığına dahil değildir.

$x=1$ yazılırsa $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2^n}{2^n} = 1+1+1+\ldots$ serisi olur ki bu bize ıraksak olduğunu gösterir. O halde $(-3, 1)$ yakınsak aralığıdır.

Örnek: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{2^n}$ serisinin yakınsaklık aralığını bulunuz.

Çözüm: Verilen

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2^n} = \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{8} + \ldots$$

serisinin katsayıları için $c_{2n} = \dfrac{1}{2^n}$ ise $c_n = \dfrac{1}{2^{n/2}}$ dir. Bu durumda

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{c_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2^{n/2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

olduğundan $R=\dfrac{1}{1/\sqrt{2}}=\sqrt{2}$ dir. O halde verilen seri $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ aralığında yakınsaktır. Şimdi verilen serinin $x=-\sqrt{2}$ ve $x=\sqrt{2}$ için yakınsak olup olmadığını inceleyelim.

$x=-\sqrt{2}$ yazılırsa $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-\sqrt{2})^{2n}}{2^n}=1+1+1+\ldots$ serisi ıraksaktır. O halde $-\sqrt{2}$ de yakınsaklık aralığına dahil değildir.

$x=\sqrt{2}$ yazılırsa $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{\sqrt{2}^{2n}}{2^n}=1+1+1+\ldots$ serisi ıraksaktır. O halde $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ yakınsak aralığıdır.

10.3. Teorem: Yakınsaklık aralığının kümesi

$$I=\{x\in R:\sum c_n(x-a)^n \text{ yakinsak}\}$$

olmak üzere I kümesi $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi ya da $[a-R,a+R]$, $(a-R,a+R)$, $[a-R,a+R)$, $(a-R,a+R]$ aralıklarından biridir.

İspat: Eğer $I\neq R$ ise, $\sup\{|x_1-a|:x_1\in I\}=R$ dir. Eğer $x_2\in(a-R,a+R)$ ise $|x_2-a|<R$ dir. Buna göre I da, $|x_2-a|<|x_1-a|$ olacak şekilde bir x_1 vardır. 10.1. teoremden $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x_2-a)^n$ yakınsak ve $x_2\in I$ olur. Bu

$$(a-R,a+R)\subset I \qquad (1)$$

olduğunu gösterir.

$x_1\in I$ olsun. $|x_1-a|\leq R$ olacak şekilde bir R seçelim. Bu takdirde $x_1\in[a-R,a+R]$ olur. Bu

$$I\subset[a-R,a+R] \qquad (2)$$

olduğunu gösterir. (1) ve (2) den

$$(a-R,a+R)\subset I\subset[a-R,a+R]$$

olduğundan, I aralığı

$$[a-R,a+R],\ (a-R,a+R),\ [a-R,a+R),\ (a-R,a+R]$$

aralıklarından biridir.

KUVVET SERİLERİNİN, DÜZGÜN YAKINSAKLIĞI, TÜREV ve İNTEGRALİ

Bir kuvvet serisi, yakınsaklık aralığında

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-a)^n$$

şeklinde bir f fonksiyonu tanımlanır. Bu fonksiyon $\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n\right)$ polinom dizisinin limiti olduğundan polinomların sahibi birçok özelliğe sahiptir. Bu özelliklerin varlığı, serinin düzgün yakınsak olmasının sonucudur. Şimdi serinin düzgün yakınsaklığını veren teoremi verelim. Sonra da türev ve integral teoremlerini verelim.

3.4. Teorem: Yakınsaklık yarıçapı R olan $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ serisi, $(a-R, a+R)$ tarafından kapsanan kapalı aralık üzerinde düzgün yakınsaktır.

İspat: $[c,d] \subset (a-R, a+R)$ olsun. $\sum c_n (x-a)^n$ serisi c ve d noktalarında yakınsaktır. Buna göre;

$$M_k = \begin{cases} \left|c_n (d-a)^n\right|, & |c-a| \le |d-a| \\ \left|c_n (c-a)^n\right|, & |c-a| \ge |d-a| \end{cases}$$

için $\sum M_k$ yakınsaktır. Ayrıca her $x \in [c,d]$ için

$$\left|c_n (x-a)^n\right| \le M_k$$

olduğundan, Weierstrass testinden, $\sum c_n (x-a)^n$ düzgün yakınsaktır. //

Kuvvet serisinin yakınsak olduğu aralığında tanımlana fonksiyon, düzgün yakınsak olduğundan bu seriler düzgün yakınsak özelliklerini sağlar.

10.5. Teorem: $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ serisinin yakınsaklık yarıçapı R ve $x \in (a-R, a+R)$ için

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$$

olsun. f fonksiyonu integrallenebilirdir ve $[c,d] \subset (a-R, a+R)$ için

$$\int_c^d \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n\right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(\int_c^d (x-a)^n dx\right)$$

olur.

İspat: $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ serisinin her bir terimi sürekli bir fonksiyon ve seri her bir $[c,d] \subset (a-R, a+R)$ aralığında düzgün yakınsak olduğundan "Fonksiyon Dizileri ve Serileri" bölümündeki "Bir A kümesi üzerinde f fonksiyonu düzgün yakınsak ise f fonksiyonu A kümesi üzerinde süreklidir" teoremi gereğinden f fonksiyonunu her $x_0 \in (a-R, a+R)$ noktasında süreklidir. Sürekli her fonksiyon integrallenebilir olduğundan f fonksiyonu integrallenebilirdir. Buna göre "Fonksiyon Dizileri ve Serileri" bölümündeki ilgili teoremden;

$$\int_c^d \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n\right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(\int_c^d (x-a)^n dx\right)$$

yazılabilir.

Örnek: $\displaystyle\int_0^{1/2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n.2^n}$ eşitliğini gösteriniz.

Çözüm: $$\int_0^{1/2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{1/2} x^n dx$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left.\frac{x^{n+1}}{n+1}\right|_0^{1/2}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{(n+1)\,2^{n+1}}\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n\,2^n}\right)$$

10.6. Teorem: Herhangi bir (c_n) dizisi ve a sayısı için $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ serisi ve terimleri bu serinin terimlerinin türevlerinden oluşan $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n.c_n (x-a)^{n-1}$ serisinin yakınsaklık yarıçapı aynıdır.

İspat: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ serisinin yakınsaklık yarıçapı R_1 ve $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} nc_n (x-a)^{n-1}$ serisinin yakınsaklık yarıçapı R_2 olsun. Eğer $|x_1 - a| \le R_2$ ise $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} nc_n (x-a)^{n-1}$ mutlak yakınsaktır.

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x_1 - a)^n = (x_1 - a) \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x_1 - a)^{n-1}$$

ve

$$\left|c_n (x_1 - a)^{n-1}\right| \le \left|nc_n (x_1 - a)^{n-1}\right|$$

olduğundan $\sum c_n (x-a)^n$ serisi de mutlak yakınsaktır. $\sum nc_n (x-a)^{n-1}$ serisini yakınsak yapan her x_1 noktası $\sum c_n (x-a)^n$ serisi de yakınsak yaptığından $R_2 \le R_1$ dir.

$\sum c_n(x-a)^n$ serisi yakınsak olsun. $|x_2-a|<|x_1-a|$ eşitsizliğini sağlayan her bir için

$$\left|\frac{c_n(x_2-a)^{n-1}}{c_n(x_1-a)^n}\right|=k.\left|\frac{x_2-a}{x_1-a}\right|^n.\frac{1}{|x_1-a|}$$

olur. $\left|\frac{x_2-a}{x_1-a}\right|=r$ alınırsa

$$\left|\frac{n.c_n(x_2-a)^{n-1}}{c_n(x_1-a)^n}\right|\leq n.r^n.\frac{1}{|x_1-a|}$$

bulunur. $0\leq r<1$ için

$$\lim n.r^{n-1}=0$$

olacağından $nr^n.\frac{1}{|x_1-a|}$ sınırlıdır. Şu halde

$$\left|n.c_n(x_2-a)^{n-1}\right|\leq M.\left|c_n(x_1-a)^n\right|$$

olacak şekilde bir M sayısı vardır. Dolayısıyla $\sum c_n(x_1-a)^{n-1}$ serisi yakınsak olduğundan $\sum c_n(x_2-a)^{n-1}$ yakınsaktır. $\sum c_n(x_2-a)^n$ serisinin yakınsak olduğu açıktır.

$\sum c_n(x-a)^n$ serisinin yakınsak olduğu her x₂ noktasında $\sum nc_n(x_1-a)^{n-1}$ yakınsak olduğundan $R_1\leq R_2$ dir. $R_1=R_2$ dir.

10.1. Uyarı: Yukarıdaki iki serinin yakınsaklık yarıçaplarıdır. Yakınsaklık aralıkları aynı olmayabilir.

Örnek: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$ ve $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n}$ serilerinin yakınsaklık yarıçaplarını ve yakınsaklık aralıklarını bulunuz.

Çözüm: Oran testi uygulanarak

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}=1$$

olduğundan $R_1=\frac{1}{1}=1$ dir. O halde bu seri $|x|<1$ yakınsaktır. Yani $-1<x<1$ dir. Şimdi verilen serinin $x=-1$ ve $x=1$ için ilk seri yakınsak olduğundan bu serinin yakınsaklık aralığı $I_1=[-1,1]$ aralığıdır.

İkinci seri için, $R_1=\frac{1}{1}=1$ ve $-1<x<1$ dir. $x=-1$ için $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ yakınsak, $x=1$ için $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ ıraksaktır. O halde bu serinin yakınsaklık aralığı $I_2=[-1,1)$ aralığıdır.

$R_1=R_2=1$ olup $I_1\neq I_2$ dir.

Şimdi kuvvet serilerinin terim terim türevlenebildiğini gösteren teoremi verelim.

10.7. Teorem: $\sum c_n(x-a)^n$ serisinin yakınsaklık yarıçapı R ve her $x\in(a-R,a+R)$ için

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-a)^n$$

olsun. f fonksiyonu $(a-R,a+R)$ aralığında türevlenebilirdir ve

$$f'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}nc_n(x-a)^{n-1}$$

dir.

İspat: $\sum c_n(x-a)^n$ ve $\sum nc_n(x-a)^{n-1}$ serisinin yakınsaklık yarıçapı R olduğundan, $(a-R,a+R)$ aralığı tarafından kapsanan her bir kapalı aralıkta her iki seri de düzgün yakınsaktır. Ayrıca $\sum c_n(x-a)^n$ serisinin her bir terimi türevlenebilen bir fonksiyon olup bu seri $(a-R,a+R)$ aralığının her bir noktasında yakınsaktır. Böylece $(a-R,a+R)$ aralığının her bir alt aralığı üzerinde "Fonksiyon Dizileri ve Fonksiyon Serileri" konusundaki;

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}f_n{}'(x)$$

eşitliği sağlanır. Buna göre;

$$f'(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-a)^n\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}\left[c_n(x-a)^n\right]'=\sum_{n=0}^{\infty}nc_n(x-a)^{n-1}$$

elde edilir.

TERİM TERİM TÜREVLENEBİLME ve İNTEGRALLENEBİLME

$\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-a)^n$ kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı R ve her $x\in(a-R,a+R)$ için

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-a)^n$$

olsun.

i) f fonksiyonu $(a-R,a+R)$ aralığında türevlenebilirdir ve

$$f'(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-a)^n\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}\left[c_n(x-a)^n\right]'=\sum_{n=0}^{\infty}nc_n(x-a)^{n-1}$$

dir. Ayrıca

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-a)^n \text{ ve } \sum_{n=0}^{\infty}nc_n(x-a)^{n-1}$$

serilerinin yakınsaklık yarıçapları aynıdır.

ii) f fonksiyonu $(a-R,a+R)$ aralığında integrallenebilirdir ve

$$\int_a^x f(t)dt=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\int_a^x(t-a)^n dt=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}$$

dir.

TAYLOR ve MACLAURIN SERİLERİ

Brook Taylor

18 Ağustos 1685, Middlesex, Bir. Krallık - 29 Aralık 1731, Londra, Birleşik Krallık

10.8. Teorem: $A\subset\mathbb{R}$, $f:A\to\mathbb{R}$, a'yı bir iç nokta olarak içeren bir aralıkta her mertebeden türevi olan bir fonksiyon olsun. $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-a)^n$ için,

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+\dots$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

eşitliği mevcuttur. Bu eşitliğe $x=a$ 'da Taylor serisi veya Taylor açılımı denir.

İspat: $f(x)$ 'in, yakınsaklık yarıçapı pozitif olan bir

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-a)^n$$

$$=c_0+c_1(x-a)+c_2(x-a)^2+...+c_n(x-a)^n+...$$

kuvvet serisinin toplamı olduğunu varsayarsak, son soruya hemen cevap verebiliriz. I yakınsaklık aralığında art arda terim-terime türev alarak,

$$f'(x)=c_1+2c_2(x-a)+3c_3(x-a)^2+...+nc_n(x-a)^{n-1}+...$$

$$f''(x)=1.2.c_2+2.3.c_3(x-a)+3.4.c_4(x-a)^2+...$$

$$f'''(x)=1.2.3.c_3+2.3.4.c_4(x-a)+3.4.5.c_5(x-a)^2+...$$

...

elde edilir. Burada n. Türev, her n için,

$$f^{(n)}(x)=n!c_n+(n+1)!c_{n+1}(x-a)+...$$

çarpanını içeren terimlerin bir toplamı ile verilir. Bu denklemlerin hepsi x = a'da sağlandığından,

$$f'(a)=c_1$$

$$f''(a)=1.2.c_2$$

$$f'''(a)=1.2.3.c_3$$

...

$$f^{(n)}(a)=n!c_n$$

bulunur. Buradan

$$c_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

elde edilir. Bu değerlerini kuvvet serisinde yerine yazılırsa,

$$f(x)=c_0+c_1(x-a)+c_2(x-a)^2+...+c_n(x-a)^n+...$$

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(x)}{2!}(x-a)^2+...+\frac{f^{(n)}(x)}{n!}(x-a)^n+...$$

olur.

Örnek: $\sqrt[3]{3}$ ün değerini Taylor yöntemiyle bulunuz.

Çözüm: $f(x)=\sqrt[3]{x}$ için $x=3$, $a=1$ seçilirse $x-a=2$ dir.

$f(x)=x^{\frac{1}{3}}$ ise $f(1)=1$

$f'(x)=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$ ise $f'(1)=\frac{1}{3}$

$$f''(x)=-\frac{1}{3}\frac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}} \text{ ise } f''(1)=-\frac{2}{9}$$

$$f'''(x)=\frac{10}{27}x^{-\frac{5}{3}} \text{ ise } f'''(1)=\frac{10}{27}$$

$$f^{(4)}(x)=-\frac{50}{81}x^{-\frac{8}{3}} \text{ ise } f^{(4)}(1)=-\frac{50}{81}$$

...

bulunur. Elde edilen bu değerleri Taylor serisinde yerine yazarsak,

$$f(3)=1+\frac{1}{3}.2+\left(-\frac{2}{9}\right)\frac{2^2}{2!}+\frac{16}{27}.\frac{2^3}{3!}+\left(-\frac{50}{81}\right)\frac{2^3}{4!}+...=1,4$$

yazılır.

Örnek: $\sqrt{7}$ ’in değerini Taylor yöntemiyle bulunuz.

Çözüm: $f(x)=\sqrt{x}$ için $x=7$ ve $a=4$ seçilirse $x-a=3$ dir.

$$f(x)=x^{\frac{1}{2}} \text{ ise } f(4)=2$$

$$f'(x)=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \text{ ise } f'(4)=\frac{1}{4}$$

$$f''(x)=-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} \text{ ise } f''(4)=-\frac{1}{4}\frac{1}{8}=-\frac{1}{32}$$

$$f'''(x)=\frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}} \text{ ise } f'''(4)=\frac{3}{8}\frac{1}{32}=\frac{3}{256}$$

$$f^{(4)}(x)=-\frac{15}{16}x^{-\frac{7}{2}} \text{ ise } f^{(4)}(4)=-\frac{15}{16}\frac{1}{128}=-\frac{15}{2048}$$

...

bulunur. Elde edilen bu değerleri Taylor serisinde yerine yazarsak

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+...$$

$$f(7)=2+3\frac{1}{4}+\frac{3^2}{2}\left(-\frac{1}{32}\right)+\frac{3^3}{3!}\frac{3}{256}+\frac{3^4}{4!}\left(-\frac{15}{2048}\right)...=2,64$$

yazılır.

Örnek: $f(x)=\frac{1}{x}$ fonksiyonunun $a=2$ noktasındaki Taylor serisini bulunuz.

Çözüm: $f(2), f'(2), f''(2),...$ katsayılarını bulmamız gerekir. Türevlerden

$$f(x)=x^{-1} \text{ ise } f(2)=2^{-1}=\frac{1}{2}$$

$$f'(x) = -x^{-2} \text{ ise } f'(2) = -2^{-2} = -\frac{1}{2^2}$$

$$f''(x) = 2!\,x^{-3} \text{ ise } \frac{f''(2)}{2!} = 2^{-3} = \frac{1}{2^3}$$

$$f'''(x) = -3!\,x^{-4} \text{ ise } \frac{f'''(2)}{3!} = -2^{-4} = -\frac{1}{2^4}$$

...

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n n!\,x^{-(n+1)} \text{ ise } \frac{f^{(n)}(2)}{n!} = (-1)^n 2^{-(n+1)} = \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}$$

bulunur. Taylor serisi

$$f(x) = f(2) + f'(2).(x-2) + \frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x-2)^n + ...$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{(x-2)}{2^2} + \frac{(x-2)^2}{2!} + ... + (-1)^2 \frac{(x-2)^n}{2^{n+1}} + ...$$

biçimindedir.

Colin Maclaurin

Şubat 1698, Kilmodan, Bir. Krallık - 14 Haziran 1746, Edinburgh, Birleşik Krallık

10.3. Tanım: $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$, a'yı bir iç nokta olarak içeren bir aralıkta her mertebeden türevi olan bir fonksiyon olsun.

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

eşitliğine $x = a$'da Taylor serisi veya Taylor açılımı denir. Eğer Taylor serisinde özel olarak $a = 0$ alınırsa,

$$f(x) = f(0) + f'(0).x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + ...$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

elde edilir. Bu yazıma Maclaurin serisi ve Maclaurin açılımı adı verilir. Bazı kitaplarda Taylor polinomu şeklinde isimlendirilmektedir.

Örnek: $|x|<1$ için $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$ fonksiyonunu Maclaurin serisine uygulayınız.

Çözüm: $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$

$f(x)=(1-x)^{-1}$ ise $f(0)=(1-0)^{-1}=1$

$f'(x)=-(1-x)^{-2}(-1)$ ise $f'(0)=1^{-2}=1$

$f''(x)=-2!(1-x)^{-3}(-1)$ ise $\dfrac{f''(0)}{2!}=1^{-3}=1$

$f'''(x)=-3!(1-x)^{-4}(-1)$ ise $\dfrac{f'''(0)}{3!}=1^{-4}=1$

...

$f^{(n)}(x)=-n!(1-x)^{-(n+1)}(-1)$ ise $\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}=1^{-(n+1)}=1$

bulunur. Maclaurin serisi

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+...+x^n+...$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty} x^n$$

biçimindedir.

Örnek: Her x için $f(x)=e^x$ fonksiyona Maclaurin serisine uygulayınız.

Çözüm: $f(x)=e^x$, $f'(x)=e^x$, $f''(x)=e^x$, ... , $f^{(n)}(x)=e^x$, ...

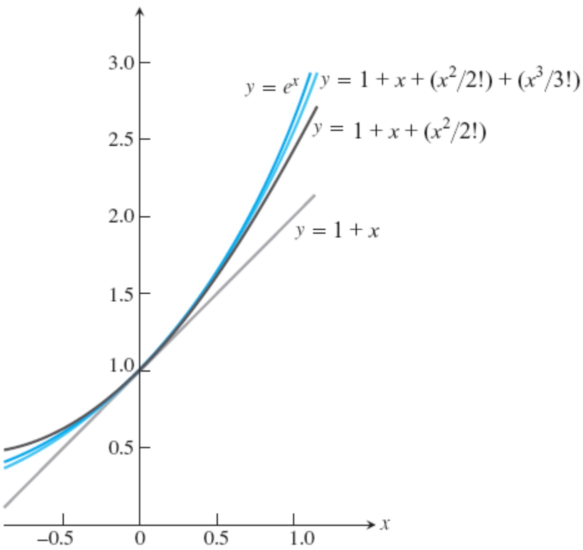
olduğundan

$f(0)=e^0=1$, $f'(0)=e^0=1$, $f''(0)=e^0=1$, ... , $f^{(n)}(0)=e^0=1$, ...

bulunur. Maclaurin açılımına uygulanırsa

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}...+\frac{x^n}{n!}+...=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

elde edilir.



e^x fonksiyonunun terimlerinin grafikleri

Örnek: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{2^k}$ serisinin toplamını $|x|<1$ için $\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$ serisini kullanarak bulunuz.

Çözüm: $\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$ serisi terim terim türevi alınırsa,

$$\sum_{n=1}^{\infty}n.x^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2}$$

bulunur. Her taraf x ile çarpılırsa,

$$\sum_{n=1}^{\infty}n.x^{n}=\frac{x}{(1-x)^2}$$

olur. Burada özel olarak x yerine $\frac{1}{2}$ alınırsa

$$\sum_{n=1}^{\infty}n.\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}=2$$

elde edilir.

Örnek: $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ...$ ve $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ...$ serileri kullanarak $\tan x$ serisini bulunuz.

Çözüm: $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ...}{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ...}$

Polinom bölmesi yapılırsa

$$\begin{array}{l|l} x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ... & 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ... \\ \cline{2-2} x - \frac{x^3}{2!} + \frac{x^5}{4!} - \frac{x^7}{6!} + ... & x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \frac{17x^7}{315} + ... \\ \cline{1-1} \quad \frac{x^3}{3} - \frac{4x^5}{5!} - \frac{6x^7}{7!} + ... & \\ \quad \vdots & \end{array}$$

olur. Buna göre;

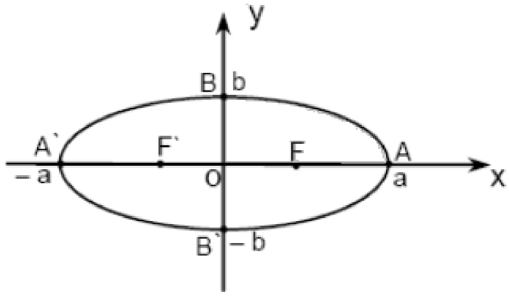
$$\tan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \frac{17x^7}{315} + ...$$

elde edilir.

10.9. Teorem: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ denklemi ile verilen elipste, $a > b$ olmak üzere elipsin çevre uzunluğu;

$$Ç = 2\pi a \left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...2n} \right)^2 \frac{\rho^{2n}}{2n-1} \right]$$

dir. Burada $\rho = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$ dir.



İspat: Elips denkleminde $x = a\cos t$ ve $y = b\sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$ dönüşümü yapalım.

$$dx = -a\sin t\, dt \text{ ve } dy = b\cos t\, dt$$

dir. İntegralde yay uzunluğu bulunması gereği,

$$Ç = 4\int_a^b \sqrt{1+(y')^2}\, dx$$

$$= 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{dx^2+dy^2}\, dx$$

$$= 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{dx^2+dy^2}$$

$$= 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\, dt$$

$$= 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2(1-\cos^2 t) + b^2\cos^2 t}\, dt$$

$$= 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 - (a^2-b^2)\cos^2 t}\, dt$$

$$= 4a\int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)\cos^2 t}\, dt$$

$$= 4a\int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\rho^2\cos^2 t}\, dt, \quad \rho = \sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}} \qquad (1)$$

olur. Ayrıca Maclaurin serisinde

$$(1+x)^k = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!}x^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}x^3 + \dots, \quad -1 < x < 1$$

olduğunu biliyoruz. Burada $k = \frac{1}{2}$ alınırsa,

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}1.3.5\dots(2n-3)}{2^n n!}x^n$$

bulunur. Burada $x = -\rho^2\cos^2 t$ alınırsa

$$\sqrt{1-\rho^2\cos^2 t} = 1 - \frac{\rho^2\cos^2 t}{2} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1.3.5\dots(2n-3)}{2^n n!}\rho^{2n}\cos^{2n} t \qquad (2)$$

yazılabilir. $0 \le \rho^2\cos^2 t < 1$ olmak üzere (2) eşitliği (1) de yazılırsa

$$Ç = 4a\int_0^{\pi/2}\left(1 - \frac{\rho^2\cos^2 t}{2} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1.3.5\dots(2n-3)}{2^n n!}\rho^{2n}\cos^{2n} t\right)dt$$

$$= 4a\left(\int_0^{\pi/2} dt - \frac{\rho^2}{2}\int_0^{\pi/2}\cos^2 t\, dt - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1.3.5\dots(2n-3)}{2^n n!}\rho^{2n}\int_0^{\pi/2}\cos^{2n} t\, dt\right) \qquad (3)$$

olur. Burada yine Maclaurin serisinden

$$\int_0^{\pi/2}\cos^{2n}t\,dt=\frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{5}{6}...\frac{2n-1}{2n}.\frac{\pi}{2}=\frac{1.3.5...(2n-1)}{2^n n!}.\frac{\pi}{2},\ n=1,2,3,...\quad (4)$$

yazılabilir. (4) eşitliği (3) de yazılırsa

$$Ç=4a\left[\frac{\pi}{2}-\frac{\rho^2}{2}\left(\frac{1}{2}.\frac{\pi}{2}\right)-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(1.3.5...(2n-3)(2n-1).\rho^n)^2}{(2^n n!)^2(2n-1)}\frac{\pi}{2}\right]$$

$$=2\pi a\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\rho^2-\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...2n}\right)^2\frac{\rho^{2n}}{2n-1}\right]$$

$$=2\pi a\left[1-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...2n}\right)^2\frac{\rho^{2n}}{2n-1}\right]$$

$$=2\pi a\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{\rho^2}{1}-\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\frac{\rho^4}{3}-\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2\frac{\rho^6}{5}-\left(\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\right)^2\frac{\rho^8}{7}-...\right]$$

Örnek: $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$ elipsinin çevre uzunluğunu bulunuz.

Çözüm: $a^2=8, b^2=4$

$$\rho=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1-\frac{4}{8}}=\frac{1}{2}$$

$$Ç=2\pi 2\sqrt{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{1}-\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4}{3}-\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^6}{5}-...\right]$$

$$=4\sqrt{2}\pi\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{8}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^4\frac{1}{3}-\left(\frac{15}{24}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^6\frac{1}{5}-\cdots\right]$$

$$=4\sqrt{2}\pi\left[1-\frac{1}{16}-\frac{3}{1024}-\frac{5}{4096}\cdots\right]$$

$$=16{,}5897052219\text{br}$$

TÜREV YOLUYLA TAYLOR ve MACLAURİN SERİLERİNİN BULUNMASI

Bilinen Taylor ve Maclaurin serisini kullanarak, başka bir fonksiyonu türevi alınarak Taylor ve Maclaurin serisi bulunabilir.

Örnek: Sinüs fonksiyonunun Maclaurin serisinin türevini kullanarak kosünüs fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm: $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ...$ eşitliğinin her iki tarafının da türevini alalım.

$$\cos x = \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ... \right)'$$
$$= 1 - \frac{3x^2}{3!} + \frac{5x^4}{5!} - \frac{7x^6}{7!} + ...$$
$$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ...$$

Örnek: $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^n + ...$ eşitliğini kullanarak $\frac{1}{(1-x)^2}$ i bulunuz.

Çözüm: $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^n + ...$ eşitliğinin her iki tarafının da türevini alırsak,

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \left(1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^n + ...\right)'$$
$$= 1 + 2x + 3x^2 + ... + nx^{n-1} + ...$$

bulunur.

KUVVET SERİLERİN LİMİTE ve İNTEGRALE UYGULAMASI

Kuvvet serileri Taylor ve Maclaurin serileri yardımlarıyla belirli integrale uygulanmak suretiyle sonuçlar elde edilir.

Örnek: $\int \frac{1}{1+x^2} dx$ integralini Maclaurin serisi yardımlarıyla bulunuz.

Çözüm: $\frac{1}{1+x^2}$ in Maclaurin serisi $1 - x^2 + x^4 - x^6 + ...$ olduğunu biliyoruz.

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \int (1 - x^2 + x^4 - x^6 + ...) dx$$
$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + ...$$

Örnek: $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ integralini Maclaurin serisi yardımlarıyla bulunuz.

Çözüm: e^x fonksiyonunun Maclaurin serisi,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} ... + \frac{x^n}{n!} + ...$$

olduğunu biliyoruz. Buna göre;

$$e^{-x^2} = 1 + (-x^2) + \frac{(-x^2)^2}{2!} + \frac{(-x^2)^3}{3!} + ... + \frac{(-x^2)^n}{n!} + ...$$

$$= 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + ... + \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} + ...$$

olur. Her iki tarafın integrali alınırsa;

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx = \int_0^1 \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + ... + \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} + ...\right)dx$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{2!.5} - \frac{x^7}{3!.7} + ... + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+1}}{n!(2n+1)} + ...\Big|_0^1$$

$$= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2!.5} - \frac{1}{3!.7} + ...$$

elde edilir.

Örnek: $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx$ integralini Maclaurin serisi yardımlarıyla bulunuz.

Çözüm: Sinüs x fonksiyonunun Maclaurin serisi,

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ...$$

olduğunu biliyoruz. Buna göre;

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ...}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + ...$$

olur. Her iki tarafın integrali alınırsa;

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + ...\right)dx$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{3!.3} + \frac{x^5}{5!.5} - \frac{x^7}{7!.7} + ...\right)\Big|_0^1$$

$$= 1 - \frac{1}{3!.3} + \frac{1}{5!.5} - \frac{1}{7!.7} + ...$$

bulunur.

Örnek: $\int_0^1 \sin x^2 dx$ integralini Maclaurin serisi yardımlarıyla bulunuz.

Çözüm: Sinüs x fonksiyonunun Maclaurin serisi,

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ...$$

olduğunu biliyoruz. Buna göre;

$$\sin x^2 = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + ...$$

olur. Her iki tarafın integrali alınırsa;

$$\int_0^1 \sin x^2 dx = \int_0^1 \left(x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + ... \right) dx$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{3!.7} + \frac{x^{11}}{5!.11} - \frac{x^{15}}{7!.15} + ... \right) \Bigg|_0^1$$

$$= 1 - \frac{1}{3!.7} + \frac{1}{5!.11} - \frac{1}{7!.15} + ...$$

bulunur.

Örnek: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ olduğunu Maclaurin serisi yardımlarıyla bulunuz.

Çözüm: Sinüs x fonksiyonunun Maclaurin serisinden,

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ...$$

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ...}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + ...$$

olur. Buna göre;

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + ... = 1$$

dir.

BAZI ÖNEMLİ MACLAURIN SERİLERİ

Rasyonel Polinomların Maclaurin Serileri

1. $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $|x| < 1$

2. $\dfrac{x}{(1-x)^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty} nx^n\,,\quad |x|<1$

3. $\dfrac{x(x+1)}{(1-x)^3}=\sum\limits_{n=0}^{\infty} n^2x^n\,,\quad |x|<1$

4. $\dfrac{x(1+4x+x^2)}{(1-x)^4}=\sum\limits_{n=0}^{\infty} n^3x^n\,,\quad |x|<1$

5. $\left(x\dfrac{d}{dx}\right)^n\dfrac{1}{1\mp x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\pm 1)^n x^n\,,\quad |x|<1$

6. $(1+x)^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\binom{n}{k}x^k\,,\quad |x|<1$

Trigonometrik Fonksiyonların Maclaurin Serileri

7. $\sin x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\,,\ \text{(Her n için)}$

8. $\cos x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}\,,\ \text{(Her n için)}$

9. $\tan x=x+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{2x^5}{15}+\dfrac{17x^7}{315}+\dfrac{62x^9}{2835}+\ldots\,,\ |x|<\pi$

10. $\cot x=\dfrac{1}{x}-\dfrac{x}{3}-\dfrac{x^3}{45}+\dfrac{2x^5}{945}+\ldots\,,\ |x|<\dfrac{\pi}{2}$

11. $\sec x=1+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{5x^4}{24}+\dfrac{61x^7}{720}+\ldots$

12. $\csc x=\dfrac{1}{x}+\dfrac{x}{6}+\dfrac{7x^3}{360}+\dfrac{31x^5}{15120}+\ldots$

Ters Trigonometrik Fonksiyonların Maclaurin Serileri

13. $\sin^{-1}x=x+\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\prod\limits_{k=1}^{n}(2k-1)}{\prod\limits_{k=1}^{n}(2k)}.\dfrac{x^n}{n}\,,\ |x|<1$

14. $\cos^{-1}x=\dfrac{\pi}{2}-\sin^{-1}x\,,\ |x|<1$

15. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=\arctan x\,,\quad |x|<1$

16. $\cot^{-1}x=\dfrac{\pi}{2}-\tan^{-1}x\,,\ |x|<1$

17. $\sec^{-1}x=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\prod_{k=1}^{n}(2k-1)}{\prod_{k=1}^{n}(2k)}.\dfrac{1}{nx^n}$, $|x|>1$

18. $\csc^{-1}x=\dfrac{\pi}{2}-\sec^{-1}x$, $|x|>1$

Hiperbolik Fonksiyonların Maclaurin Serileri

19. $\sinh x=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, (Her n için)

20. $\cosh x=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$, (Her n için)

21. $\tanh x=x-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{2x^5}{15}+\dfrac{17x^7}{315}-\dfrac{62x^9}{2835}+\ldots$, $|x|<\dfrac{\pi}{2}$

22. $\coth x=\dfrac{1}{x}+\dfrac{x}{3}-\dfrac{x^3}{45}+\dfrac{2x^5}{945}+\ldots$, $|x|<\pi$

23. $\operatorname{sech} x=1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{5x^4}{24}-\dfrac{61x^6}{720}+\ldots$, $|x|<\dfrac{\pi}{2}$

25. $\operatorname{csch} x=\dfrac{1}{x}-\dfrac{x}{6}+\dfrac{7x^4}{360}-\dfrac{31x^6}{15120}+\ldots$, $|x|<\pi$

Ters Hiperbolik Fonksiyonların Maclaurin Serileri

26. $\sinh^{-1}x=\dfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\prod_{k=1}^{n}(2k-1)}{\prod_{k=1}^{n}(2k)}.\dfrac{x^n}{n}$, $|x|<1$

27. $\cosh^{-1}x=\dfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\prod_{k=1}^{n}(2k-1)}{\prod_{k=1}^{n}(2k)}.\dfrac{1}{nx^n}$, $|x|>1$

28. $\tanh^{-1}x=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n-1}}{2n-1}$, $|x|<1$

29. $\coth^{-1}x=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)x^{2n-1}}$, $|x|>1$

Exponential (Üstel) Fonksiyonların Maclaurin Serileri

30. $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, (Her n için)

31. $a^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x \ln a)^n}{n!}$

32. $e^{\sin x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} - \frac{x^5}{15} + ...$

33. $e^{\cos x} = e\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6} - \frac{x^6}{720} + ...\right)$

34. $e^{\tan x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + \frac{3x^4}{8} + ...$

35. $e^x \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{2}^n \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) x^n}{n!}$, (Her n için)

36. $e^x \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{2}^n \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) x^n}{n!}$, (Her n için)

Logaritmik Fonksiyonların Maclaurin Serileri

37. $\ln x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-1)^n}{n}, \quad 0 < x \le 2$

38. $\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, \quad |x| < 1$

39. $\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}, \quad |x| < 1$

40. $\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}, \quad |x| < 1$

41. $\int_0^{\pi} \frac{\ln(1-t)}{t} dt = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}, \quad |x| < 1$

42. $\ln x^x = (1-x) - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-x)^{n+1}}{n(n+1)}, \quad 0 < x < 1$

43. $\ln|\sin x| = \ln|x| - \frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{180} - \frac{x^6}{2835} - ..., \quad 0 < x \le \pi$

44. $\ln|\cos x| = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45} - \frac{17x^8}{2520} - ..., \quad |x| \le \frac{\pi}{2}$

45. $\ln|\tan x| = \ln|x| + \frac{x^2}{3} + \frac{7x^4}{90} + \frac{62x^6}{2835} + ..., \quad 0 < x \le \pi$

KALAN TERİMLİ TAYLOR FORMÜLÜ

10.4. Tanım: a noktası civarında $f(x)$ ile $T_n[f(x)]$ birbirlerine çok yakın değerler olsun. $f(x)-T_n[f(x)]=K_n(x)$ ifadesine kalan terim, fark veya hata miktarı denir. Buna göre,

$$f(x)=\sum_{k!}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+K_n(x)$$

yazılabilir. Bu ifadeye kalan terimli Taylor formülü adı verilir.

10.10. Teorem: f fonksiyonu a noktasını içeren bir aralıkta $n+1$-inci mertebeden sürekli türevlere sahip olsun. Bu aralıktaki her x için Taylor formülü

$$K_n(x)=\frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt \qquad (1)$$

olmak üzere,

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+K_n(x)$$

olur.

İspat: İspatı tümevarım ile yapacağız. $n=1$ için

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+K_1(x)$$

olur. Şimdi

$$K_1(x)=\int_a^x (x-a)f''(t)\,dt$$

olduğunu göstereceğiz.

$$\begin{aligned}K_1(x)&=f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)\\&=\int_a^x f'(t)\,dt-f'(a)\int_a^x dt\\&=\int_a^x [f'(t)-f'(a)]dt\end{aligned}$$

olur. $u=f'(t)-f'(a)$, $v=t-x$ alınırsa son integral $\int_a^x u\,dv$ şeklini alır. Kısmi integrasyon formülünden

$$K_1(x)=\int_a^x u\,dv$$

$$=uv\Big|_a^x-\int_a^x(t-x)f''(t)\,dt$$

$$=\int_a^x(t-x)f''(t)\,dt$$

olur ki bu (1) eşitliğinin n = 1 için doğru olduğunu gösterir.

n = k için doğru olsun. Kalan terim tanımından

$$K_{k+1}(x)=K_k(x)-\frac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!}(x-a)^{k+1}$$

olacağı açıktır. Şu halde

$$K_{k+1}(x)=\frac{1}{n!}\int_a^x(x-a)^n f_{(t)}^{(n+1)}(t)dt-\frac{f^{(n+1)}(a)}{n!}\int_a^x(x-a)^n\,dt$$

$$=\frac{1}{n!}\int_a^x(x-a)^n\left[f_{(t)}^{(n+1)}(t)-f_{(t)}^{(n+1)}(a)\right]dt$$

olur. $u=f^{(n+1)}(t)-f^{(n+1)}(a)$, $dv=(t-x)^n\,dt$ alınıp kısmi integrasyon formülü uygulanırsa, $t=a$ için $u=0$ ve $t=x$ için $v=0$ olacağından,

$$K_{k+1}(x)=\frac{1}{n!}\int_a^x u\,dv$$

$$K_{k+1}(x)=\frac{1}{(n+1)!}\int_a^x(x-t)^{n+1}f^{(n+2)}(t)\,dt$$

olur ki bu ispatı tamamlar.

TAYLOR ORTALAMA TEOREMİ

10.5. Tanım: Her $f^{(n)}(x)$, [a, b] de sürekli ve (a, b) de türevlenebilirse,

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+K_n(x)$$

$K_n(x)$ kalanı;

$$K_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)(b-a)^{n+1}}{(n+1)!},\qquad a<c<b \qquad (1)$$

ve / veya

$$K_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)(b-c)^n(b-a)}{n!},\qquad a<c<b \qquad (2)$$

olacak biçimde yazılabilir. Bu yazıma Taylor ortalama teoremi denir ve (1) eşitliğine Lagrenge biçimi, (2) eşitliğine Cauchy biçimi adı verilir.

Örnek: $\sin 57^0$ nin değerini Taylor serisini iki defa açılım yaprak $\frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{15}\right)^3$ den daha az hata yapılarak bulunuz.

Çözüm: Taylor açılımı iki defa açılım yapılarak;

$$\sin x = \sin a + (x-a)\cos a - \frac{(x-a)^2 \cos a}{2!} - \frac{(x-a)^3 \cos c}{3!}$$

bulunur. $x = 57^0 = \frac{57\pi}{180}$ ve $a = 45^0 = \frac{45\pi}{180} = \frac{\pi}{4}$ alınırsa,

$$x - a = \frac{57\pi}{180} - \frac{45\pi}{180} = \frac{\pi}{15}$$

olur. Burada $\sin 45 = \cos 45 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ olduğunu hatırlarsak,

$$\sin 57 = \sin 45 + \frac{\pi}{15}\cos 45 - \left(\frac{\pi}{15}\right)^2 \frac{1}{2!}\cos 45 - \left(\frac{\pi}{15}\right)^3 \frac{1}{3!}\cos c$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{15}.\frac{\sqrt{2}}{2} - \left(\frac{\pi}{15}\right)^2 \frac{1}{2!}.\frac{\sqrt{2}}{2}5 - \left(\frac{\pi}{15}\right)^3 \frac{1}{3!}\cos c$$

olup hata miktarı;

$$\left| -\left(\frac{\pi}{15}\right)^3 \frac{1}{3!}\cos c \right| < \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{15}\right)^3$$

den az kalır.

ÜNİVERSİTEYE GİRİŞ SINAVI SORULARI

1. Aşağıdakilerden hangisi $1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \cdots + \frac{2^n}{n!}$ toplamına eşittir?

A) e B) e^2 C) $2^n e$ D) $e - \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!}2^k$ E) $e^2 - \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!}2^k$

Çözüm: Taylor serisine göre e^x üstel fonksiyonu,

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

şeklindedir. Özel olarak x = 2 seçilirse,

$$e^2 + 1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \dots + \frac{2^n}{n!} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!}2^k$$

elde edilir. Şu halde,

$$1+\frac{2}{1!}+\frac{2^2}{2!}+\frac{2^3}{3!}+...+\frac{2^n}{n!}=e^2-\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k!}2^k$$

dir.

(1975 ÜSS) Cevap: E

KAYNAKÇA

- Prof. Ahmet KARADENİZ, Yüksek Matematik 2, Çaylayan Kitapevi, Beyoğlu, İstanbul, 1992.
- Prof. Dr. Mustafa BALCI, Matematik Analiz II, Bilim Kitap Kırtasiye Ltd. Şti., Ankara, 1997.
- George B. Thomas Jr., Thomas Calcalus, Çev. Recep Korkmaz, Beta Yayınları, 11. Baskı, Ağustos 2009, İstanbul.
- Murray R. Spiegel, İleri Matematik, Çev. Prof. Dr. H. Hilmi HACISALİHOĞLU, Schaum Yayınları, Nobel Yayın Dağıtım, 1997, Ankara.