# 11. BÖLÜM
# GENELLEŞTİRİLMİŞ İNTEGRAL

**GENELLEŞTİRİŞMİŞ İNTEGRAL KAVRAMI**

**11.1. Tanım:** $I=\int_a^b f(x)dx$ integralinde a veya b den biri $\pm\infty$ veya f, $[a,b]$ aralığında süreksiz veya sınırsız ise I integraline genelleştirişmiş (has olmayan) integral denir. Bu tür integraller limit olarak hesaplanır.

**11.2. Tanım:** Eğer integralin limiti sonlu (reel sayı) ise bu integrale yakınsak, limiti sonsuz ise bu integrale ıraksak integral denir.

Genelleştirişmiş İntegraller iki ayrı grupta incelenir.

**Birinci Tip Genelleştirilmiş İntegraller (Sınırları Sonsuz Olan İntegraller)**

a) Üst sınır sonsuz ise,

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$$

b) Alt sınır sonsuz ise,

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx=\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$$

c) Alt ve üst sınır sonsuz ise,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\lim_{(a,b)\to(-\infty,+\infty)}\int_a^b f(x)dx$$

veya

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\lim_{a\to-\infty}\int_a^c f(x)dx+\lim_{b\to\infty}\int_c^b f(x)dx, \quad c\in\mathbb{R}$$

şeklinde olacaktır.

**Örnek:** $\int_4^{+\infty}\frac{dx}{x^{3/2}}$ integralini bulunuz.

Çözüm: $\displaystyle\int_4^{+\infty}\frac{dx}{x^{3/2}}=\lim_{b\to+\infty}\int_4^{b}\frac{dx}{x^{3/2}}$

$$=\lim_{b\to+\infty}\left.\frac{x^{-1/2}}{-1/2}\right|_4^b$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\left.\frac{-2}{\sqrt{x}}\right|_4^b$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{-2}{\sqrt{b}}-\frac{-2}{\sqrt{4}}\right)$$

$$=1$$

olup integral yakınsaktır.

**Örnek:** $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}}$ integralini bulunuz.

Çözüm: $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}}=\lim_{b\to+\infty}\int_1^{b}\frac{dx}{\sqrt{x}}$

$$=\lim_{b\to+\infty}2\sqrt{x}\Big|_1^b$$

$$=\lim_{b\to+\infty}[2\sqrt{b}-2]$$

$$=+\infty$$

olup integral ıraksaktır.

**Örnek:** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$ integralini bulunuz.

Çözüm: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{(a,b)\to(-\infty,+\infty)}\int_a^{b}\frac{dx}{1+x^2}$

$$=\lim_{(a,b)\to(-\infty,+\infty)}\arctan x\Big|_a^b$$

$$=\lim_{(a,b)\to(-\infty,+\infty)}(\arctan b-\arctan a)$$

$$=\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=\pi$$

olup integral yakınsaktır.

**Örnek:** $\int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{x}\, dx$ integralini bulunuz.

Çözüm: $$\int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{x}\, dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} \sqrt{x}\, dx + \lim_{b\to\infty} \int_{0}^{b} \sqrt{x}\, dx$$
$$= \lim_{a\to-\infty} \left.\frac{2x^{3/2}}{3}\right|_{a}^{0} + \lim_{b\to\infty} \left.\frac{2x^{3/2}}{3}\right|_{0}^{b}$$
$$= +\infty$$
olup integral ıraksaktır.

**11.1. Uyarı:** Bir $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ integralini
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{k\to\infty} \int_{-k}^{k} f(x)dx$$
biçiminde yazmak hatalıdır. Mesela;
$$\int_{-\infty}^{\infty} x\, dx = \lim_{k\to\infty} \int_{-k}^{k} x\, dx = \lim_{k\to\infty} \left.\frac{x^2}{2}\right|_{-k}^{k} = 0$$
olur ki, bu bir hatadır. Çünkü;
$$\int_{-\infty}^{\infty} x\, dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} x\, dx + \lim_{b\to\infty} \int_{0}^{b} x\, dx = \lim_{a\to-\infty} \left.\frac{x^2}{2}\right|_{a}^{0} + \lim_{b\to\infty} \left.\frac{x^2}{2}\right|_{0}^{b} = +\infty$$
olmalıdır.

**1. Genelleme:** t bir sabit sayı olmak üzere
$$\int_{a}^{\infty} e^{-tx} dx = \begin{cases} t > 0 \ , & \text{yakinsak} \\ t \le 0 \ , & \text{iraksak} \end{cases}$$
dir.

**2. Genelleme:** p bir sabit sayı ve $a > 0$ olmak üzere
$$\int_{a}^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} p > 1 \ , & \text{yakinsak} \\ p \le 1 \ , & \text{iraksak} \end{cases}$$
dir.

**İkinci Tip Genelleştirilmiş İntegraller (Sınırları İçerisinde Süreksiz İntegraller)**

$\int_a^b f(x)dx$ integralinde;

**a)** f, fonksiyonu $x=a$ da süreksiz, $(a,b]$ aralığında sürekli ise,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to 0^+} \int_{a-t}^b f(x)dx$$

**b)** f, fonksiyonu $x=b$ da süreksiz, $[a,b)$ aralığında sürekli ise,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to 0^+} \int_a^{b-t} f(x)dx$$

**c)** $a<c<b$ olmak üzere, f fonksiyonu $[a,b]$ aralığının $x=c$ noktası dışında tüm noktalarında sürekli ise,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to 0^+}\left( \int_a^{c-t} f(x)dx + \int_{c+t}^b f(x)dx \right)$$

**d)** f fonksiyonu $x=a$, $x=b$ noktalarında süreksiz $(a,b)$ aralığında sürekli ise,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to 0^+} \int_{a+t}^{b-t} f(x)dx$$

şeklinde olacaktır.

**Örnek:** $\int_0^2 \frac{\ln x}{x}dx$ integralini bulunuz.

Çözüm: 0 noktasında süreksiz olduğundan $\int_0^2 \frac{\ln x}{x}dx = \lim_{t\to 0^+} \int_t^2 \frac{\ln x}{x}dx$ yazılabilir. Buna göre,

$\int \frac{\ln x}{x}dx$ integralinde $u=\ln x$ alınırsa $du=\frac{dx}{x}$ olacağından

$$\int \frac{\ln x}{x}dx = \int u du = \frac{u^2}{2}+c = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + c$$

bulunur. O halde,

$$\int_0^2 \frac{\ln x}{x}dx = \frac{1}{2}\lim_{t\to 0^+}(\ln x)^2\Big|_t^2$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{t\to 0^+}[(\ln 2)^2 - (\ln t)^2]$$

$$=-\infty$$

olup integral ıraksaktır.

**Örnek:** $\displaystyle\int_0^5 \frac{dx}{(x-5)^2}$ integralini bulunuz.

Çözüm: 5 noktasında süreksiz olduğundan

$$\int_0^5 \frac{dx}{(x-5)^2} = \lim_{t\to 0^+} \int_0^{5-t} \frac{dx}{(x-5)^2}$$
$$= \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{5-x}\Big|_0^{5-t}$$
$$= \lim_{t\to 0^+} \left( \frac{1}{5-5+t} - \frac{1}{5-0} \right)$$
$$= \lim_{t\to 0^+} \left( \frac{1}{t} - \frac{1}{5} \right)$$
$$= +\infty$$

olup integral ıraksaktır.

**Örnek:** $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ integralini bulunuz.

Çözüm: $x=1$ noktasında süreksiz olduğundan

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{t\to 0^+} \int_0^{1-t} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$= \lim_{t\to 0^+} \arcsin x\Big|_0^{1-t}$$
$$= \lim_{t\to 0^+} (\arcsin(1-t) - \arcsin 0)$$
$$= \frac{\pi}{2}$$

olup integral yakınsaktır.

**Örnek:** $\displaystyle\int_0^3 \frac{2x\,dx}{x^2-1}$ integralini bulunuz.

Çözüm: $x=1$ noktasında süreksizdir. Buna göre,

$$\int_0^3 \frac{2x\,dx}{(x^2-1)^{2/3}} = \lim_{t\to 0^+} \left( \int_0^{1-t} \frac{2x\,dx}{(x^2-1)^{2/3}} + \int_{1+t}^3 \frac{2x\,dx}{(x^2-1)^{2/3}} \right)$$

$$= \lim_{t\to 0^+}\left(\left[3(x^2-1)^{1/3}\right]_0^{1-t} + \left[3(x^2-1)^{1/3}\right]_{1+t}^{3}\right)$$
$$= \lim_{t\to 0^+}\left(\left[3((1-t)^2-1)^{1/3}\right] - \left[3(0^2-1)^{1/3}\right] + \left[3(3^2-1)^{1/3}\right] - \left[3((1+t)^2-1)^{1/3}\right]\right)$$
$$= 0+3+6-0$$
$$= 9$$

olup integral yakınsaktır.

**Örnek:** $\int_{-2}^{2}\frac{x^2\,dx}{\sqrt{4-x^2}}$ integralini bulunuz.

Çözüm: $x=\pm 2$ noktalarında süreksizdir. Buna göre,

$$\int_{-2}^{2}\frac{x^2\,dx}{\sqrt{4-x^2}} = \lim_{t\to 0^+}\int_{-2+t}^{2-t}\frac{x^2\,dx}{\sqrt{4-x^2}}$$

yazılabilir. Burada $\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{4-x^2}}$ integrali $x=2\sin t$ dönüşümü yapılarsak,

$$\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{4-x^2}} = 2\arcsin\frac{x}{2}-\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}+c$$

bulunur. Öyleyse,

$$\int_{-2}^{2}\frac{x^2\,dx}{\sqrt{4-x^2}}$$
$$= \lim_{t\to 0^+}\left[2\arcsin\frac{x}{2}-\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}\right]_{-2+t}^{2-t}$$
$$= \lim_{t\to 0^+}\left(\left[2\arcsin\frac{2-t}{2}-\frac{2-t}{2}\sqrt{4-(2-t)^2}\right] - \left[2\arcsin\frac{-2+t}{2}-\frac{-2+t}{2}\sqrt{4-(-2+t)^2}\right]\right)$$
$$= \left(2.\frac{\pi}{2}+0\right)-\left(2.\left(-\frac{\pi}{2}\right)+0\right)$$
$$= 2\pi$$

elde edilir.

**11. Genelleme:** $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^p} = \begin{cases} p<1, & \text{yakinsak} \\ p\geq 1, & \text{iraksak} \end{cases}$

**Üçüncü Tip Genelleştirilmiş İntegraller (Hem Sınırları Sonsuz Olan Hem de Sınırları İçerisinde Süreksiz İntegraller)**

**11.3. Tanım:** Bir genelleştirilmiş integral hem birinci tip hem de ikinci tip integral ise yani fonksiyon hem sınırsız aralık üzerinde hem de bu aralığın en az bir noktası komşuluğunda sınırsız ise bu integrale üçüncü tip genelleştirilmiş integral denir.

**Örnek:** $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x}$ integrali üçüncü tip genelleştirilmiş integraldir. Çünkü hem sınırları sonsuz hem de $x=0$ noktasında süreksizdir. //

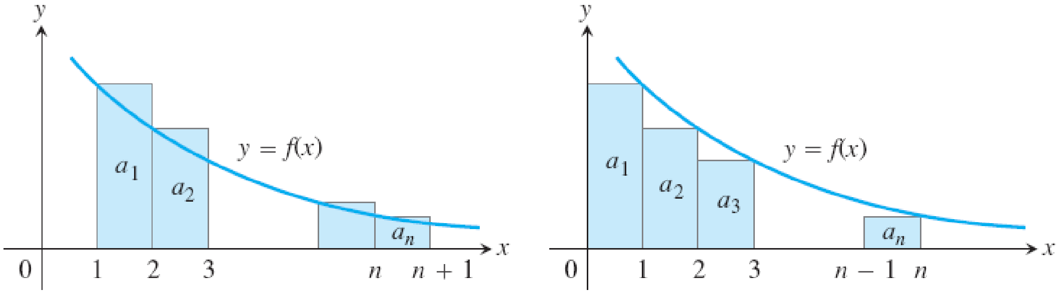
Üçüncü tip genelleştirilmiş integraller, birinci ve ikinci çeşit genelleştirilmiş integrallerin toplamı şeklinde yazılabildiğinden bunların yakınsaklığı için ikisinin de yakınsak olması gerekir. Bunlarla ilgili gama ve beta fonksiyonları verilecektir. O konuya müracaat edilirse, bu durum görülecektir.

## SERİLER İÇİN İNTEGRAL TESTİ

Seriler konusunda bazı yakınsaklık testleri anlatılmıştı. Burada yeni bir test olarak integral testi verilecektir.

**11.1. Teorem (Serilerde İntegral Testi):** $(a_n)$ pozitif ve monoton azalan bir dizi, f de $[1,+\infty)$ aralığında her x için sürekli, pozitif ve azalan bir fonksiyonu olmak olsun. $a_n = f(n)$ olduğunu varsayalım. Bu durumda, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi ve $\int\limits_{1}^{\infty} f(x)\,dx$ integralinin ikisi de ya yakınsak ya da ıraksar. (Burada n = 1 olmak zorunda değildir. Ama verilen seriler n = 1'e çevrilebileceğinden herhangi bir doğal sayı olabilir.)

İspat: f 'nin, her n için $a_n = f(n)$ olmak üzere, monoton azalan bir fonksiyon olsun.




Verilen sol taraftaki şeklin alanları $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ olan dikdörtgenlerin, birlikte, $x=1$'den $x=n$'e kadar f eğrisinin altında kalan alandan daha fazla alan kapladığı götürür. Buna göre,

$$\int\limits_{1}^{n} f(x)dx \le a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n \qquad (1)$$

dir. Sağ taraftaki şeklin alanları $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ olan dikdörtgenlerin, birlikte, $x=1$ 'den $x=n$'e kadar f eğrisinin altında kalan alandan daha az alan kapladığı götürür. Buna göre,

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n \leq \int_1^n f(x)dx \qquad (2)$$

(1) ve (2) den

$$\int_1^n f(x)dx = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$$

bulunur. Bu eşitsizlikler her $n$ için geçerlidir ve $n \to \infty$ iken de geçerlidir.

$\int_1^n f(x)\,dx$ integrali sonlu ise sağ taraftaki eşitsizlik $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 'nin sonlu olduğunu gösterir. $\int_1^n f(x)\,dx$ integrali sonsuz ise sol taraftaki eşitsizlik $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 'nin sonsuz olduğunu gösterir. Şu halde seri ve integralin ikisi de ya sonludur ya da sonsuzdur.

**Örnek:** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ serisi integral testine göre yakınsak olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ fonksiyonu $x \geq 1$ için pozitif, sürekli ve monoton azalandır.

$$\begin{aligned}
\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2+1}dx &= \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{1}{x^2+1}dx \\
&= \lim_{t\to\infty} \left[\arctan x\right]_1^t \\
&= \lim_{t\to\infty} \left[\arctan t - \arctan 1\right] \\
&= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \\
&= \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

tür. Buna göre bu seri yakınsaktır. Ama serinin toplamının $\frac{\pi}{4}$ olup olmadığını bilmeyiz.

**Örnek:** $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}$ serisinin karakterini inceleyiniz.

Çözüm: $n \geq 1$ için $f(x) = xe^{-x^2}$ fonksiyonunun monotonluğunu inceleyelim.

$$f'(x) = e^{-x^2} - 2x^2e^{-x^2} = e^{-x^2}(1-2x^2) < 0$$

dır. O zaman bu seriye integral testi uygulanabilir.

$$\lim_{t\to\infty}\int_1^t \left(xe^{-x^2}\right)dx = \lim_{t\to\infty} -\frac{1}{2}e^{-x^2}\Big|_1^t = \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{1}{2}e^{-t^2}\right) - \left(-\frac{1}{2}e^{-1^2}\right) = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{2e} - \frac{1}{2e^{t^2}} = \frac{1}{2e}$$

olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}$ serisi yakınsaktır.

**Örnek:** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ Harmonik serisini karakterize ediniz.

Çözüm: $f(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonu $x \geq 1$ için pozitif, sürekli ve monoton azalan-dır.

$$\begin{aligned}\int_1^{\infty}\frac{1}{x}dx &= \lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{1}{x}dx \\ &= \lim_{t\to\infty}\left[\log x\right]_1^t \\ &= \lim_{t\to\infty}\left[\log t - \log 1\right] \\ &= +\infty\end{aligned}$$

tür. Buna göre bu seri ıraksaktır.

**Örnek:** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ serisi için;

i) $p > 1$ ise yakınsayacağını
ii) $p < 1$ ise ıraksayacağını gösteriniz.

Çözüm: p > 1 ise, $f(x)=\dfrac{1}{x^p}$, x'in pozitif, sürekli ve monoton azalan bir fonksiyonudur.

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx=\lim_{t\to\infty}\int_1^t x^{-p}dx$$
$$=\lim_{t\to\infty}\left.\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right|_1^t$$
$$=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{t^{-p+1}}{-p+1}-\frac{1^{-p+1}}{-p+1}\right)$$
$$=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{t^{-p+1}(-p+1)}-\frac{1}{-p+1}\right)$$
$$=\frac{1}{p-1}$$

olduğundan, integral testine göre seri yakınsaktır. Ama serinin toplamının $\dfrac{1}{p-1}$ olup olmadığını bilmeyiz.

ii) p < 1 ise, $1-p>0$ dir.

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx=\frac{1}{1-p}\lim_{t\to\infty}(t^{1-p}-1)=\infty$$

olur. İntegral testine göre seri ıraksaktır.

**BİRİNCİ TİP GENELLEŞTİRİLMİŞ İNTEGRALLER İÇİN YAKINSAKLIK TESTLERİ**

**11.2. Teorem (Karşılaştırma Testi):** f ve g pozitif tanımlı fonksiyonlar, her x için $f(x)\le g(x)$ olsun.

a) $\int_a^\infty g(x)\,dx$ yakınsak ise $\int_a^\infty f(x)\,dx$ de yakınsaktır.

b) $\int_a^\infty f(x)\,dx$ ıraksak ise $\int_a^\infty g(x)\,dx$ de ıraksaktır.

İspat: a) $\int_a^\infty g(x)\,dx$ yakınsak olduğundan $\forall\varepsilon>0$ için $\exists t$ öyle ki $\forall t_2>t_1>t$ için

$$\int_{t_1}^{t_2} f(x)\,dx < \int_{t_1}^{t_2} g(x)\,dx < \varepsilon$$

olur ki $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ nin yakınsak olduğunu gösterir.

(b) şıkkı da benzer şekilde ispatlanır.

**Örnek:** $\int_1^{\infty} e^{-x^2}\,dx$ Euler-Poisson integralinin yakınsaklık durumunu inceleyiniz.

Çözüm: $\int_1^{\infty} e^{-x}dx = \lim\limits_{t\to\infty}\int_1^{t} e^{-x}dx = \lim\limits_{t\to\infty} e^{-x}\Big|_1^t = \lim\limits_{t\to\infty}\left(\frac{1}{e}-\frac{1}{e^t}\right) = \frac{1}{e}$

olup yakınsaktır. Ayrıca $x \geq 1$ için $x^2 \geq x \Leftrightarrow -x^2 \leq -x \Leftrightarrow e^{-x^2} \leq e^{-x}$ olacağından $\int_1^{\infty} e^{-x}dx$ integrali yakınsak olduğuna göre $\int_1^{\infty} e^{-x^2}dx$ yakınsaktır.

**Örnek:** $\int_1^{\infty} \frac{x+1}{x^2}dx$ integralinin yakınsaklık durumunu inceleyiniz.

Çözüm: $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim\limits_{t\to\infty}\int_1^{t} \frac{dx}{x} = \lim\limits_{t\to\infty} \ln x\Big|_1^t = \lim\limits_{t\to\infty}(\ln x - \ln 1) = \infty$

olup ıraksaktır. Ayrıca $\frac{x+1}{x^2} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > \frac{1}{x}$ ve $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x}$ ıraksak olduğundan $\int_1^{\infty}\frac{x+1}{x^2}dx$ integrali de ıraksaktır. //

**11.3. Teorem (Oran Testi):** f ve g pozitif tanımlı fonksiyonlar olsun. Eğer $f(x) \geq 0$ ve $g(x) \geq 0$ için $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = A$ ise

i) $A \neq 0$ veya $A \neq \infty$ ise $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ ve $\int_a^{\infty} g(x)\,dx$ integralleri aynı karakterdedir.

ii) $A = 0$ ise $\int_a^{\infty} g(x)\,dx$ yakınsak ise, o zaman $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ yakınsaktır.

iii) $A=\infty$ ise $\int_a^\infty g(x)\,dx$ ıraksak ise, o zaman $\int_a^\infty f(x)\,dx$ ıraksaktır.

İspat: i) $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=A$ olsun. Bu takdirde herhangi bir $\varepsilon>0$ verildiğinde $x\geq n_\varepsilon$ iken $\left|\frac{f(x)}{g(x)}-A\right|<\varepsilon$ sağlayacak şekilde $n_\varepsilon$ bulunur. Böylece $x\geq n_\varepsilon$ için,

$$A-\varepsilon<\frac{f(x)}{g(x)}<A+\varepsilon$$

$$(A-\varepsilon)g(x)<f(x)<(A+\varepsilon)g(x)$$

$$(A-\varepsilon)\int_x^b g(x)<\int_x^b f(x)<(A+\varepsilon)\int_x^b g(x)$$

olur. $A-\varepsilon>0$ seçmek genelliği bozmayacağından karşılaştırma testi gereğince,

Eğer $\int_a^\infty g(x)\,dx$ yakınsak ise $\lim_{b\to\infty}\int_x^b f(x)\,dx$ vardır ve dolayısıyla $\int_a^\infty f(x)\,dx$ de yakınsaktır. Eğer $\int_a^\infty g(x)\,dx$ ıraksak ise $\lim_{b\to\infty}\int_x^b f(x)\,dx=\infty$ dur ve dolayısıyla $\int_a^\infty f(x)\,dx$ de ıraksaktır.

ii ve iii benzer şekilde gösterilir.

**Örnek:** $\int_1^\infty \frac{x\,dx}{4x^4+8x^2+1}$ integralinin karakterini bulunuz.

Çözüm: $\int_1^\infty \frac{dx}{x^3}$ integrali yakınsak olduğu aşikardır.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{4x^4+8x^2+1}}{\frac{1}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4}{4x^4+8x^2+1}=\frac{1}{4}$$

olduğundan $\int_1^\infty \frac{x\,dx}{4x^4+8x^2+1}$ integrali de yakınsaktır. //

Karşılaştırma testinde $g(x)=1$ alınırsa şu test elde edilir.

**11.1. Sonuç (Cauchy Testi):**

$\int_a^\infty f(x)\,dx$ yakınsak olması için gerek ve yeter şart $\lim_{(t_1,t_2)\to(\infty,\infty)} \int_{t_1}^{t_2} f(x)\,dx = 0$ dır.

**Örnek:** $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ integralini inceleyelim.

Çözüm: Kısmi integralle,

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\cos t_1}{t_1} - \frac{\cos t_2}{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{\cos x}{x^2}\,dx$$

olacağından

$$\left| \int_{t_1}^{t_2} \frac{\sin x}{x}\,dx \right| \le \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \left| \int_{t_1}^{t_2} \frac{dx}{x^2} \right| \le \frac{2}{t_1} + \frac{2}{t_2}$$

olur. $t_1$ ve $t_2$ yeteri kadar büyük alınırsa $\frac{2}{t_1} + \frac{2}{t_2}$ yeteri kadar küçük kalacaktır. Buna göre her $\varepsilon > 0$ dan küçük bırakılabilir. Bu da $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ integralinin yakınsak olduğunu gösterir. //

Karşılaştırma testinde $g(x) = \frac{c}{x^p}$ alınırsa şu test elde edilir.

**11.2. Sonuç: (Özel Karşılaştırma Testi):** $x \ge a$ için f pozitif tanımlı bir fonksiyon olsun. Yeteri kadar büyük x değerleri için;

i) $f(x) \le \frac{\lambda}{x^p}$ ve $p > 1$ ise $\int_a^\infty f(x)\,dx$ yakınsaktır.

ii) $f(x) \ge \frac{\lambda}{x^p}$ ve $p \le 1$ ise $\int_a^\infty f(x)\,dx$ ıraksaktır.

**Örnek:** $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2 + \ln x}$ integralinin yakınsaklık durumunu inceleyiniz.

Çözüm: $x \geq 1$ için $x^2 + \ln x \geq x^2$ olduğundan $\frac{1}{x^2+\ln x} \leq \frac{1}{x^2}$ dir. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$ integrali yakınsak olduğuna göre $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2+\ln x}$ yakınsaktır. //

Karşılaştırma testinde $g(x) = \frac{1}{x^p}$ alınırsa şu test elde edilir.

**11.3. Sonuç (Karşılaştırma Testinin Limit Formu):** Pozitif tanımlı bir f fonksiyonu için

$$\lim_{x\to\infty} x^p.f(x) = \lambda$$

olsun.

i) $\lambda \geq 0$ ve $p > 1$ ise $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ yakınsaktır.

ii) $\lambda > 0$ ve $p \leq 1$ ise $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ ıraksaktır.

**Örnek:** $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}$ integralinin yakınsaklık durumunu inceleyiniz.

Çözüm: $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}} = \lim_{x\to\infty} x^{3/2} \frac{1}{\sqrt{x^3+1}} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{x^3}{x^3+1}} = 1$

olup $p = 3/2$ ve $\lambda = 1$ olduğundan verilen integral yakınsaktır.

**Örnek:** $\int_1^{\infty} e^{-x^2}\,dx$ integralinin yakınsaklık durumunu inceleyiniz.

Çözüm: $\int_0^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{2xe^{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^{x^2}} = 0$

olup $p = 2 > 1$ ve $\lambda = 0$ olduğundan verilen integral yakınsaktır.

**Örnek:** $\int_1^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx$ integralinin karakterini inceleyiniz.

Çözüm: $\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}dx = \lim_{x\to\infty} x^2.x^{n-1}.e^{-x} = 0$

olup $\lambda = 0$ ve $p = 2$ olduğundan verilen integral yakınsaktır.

**Örnek:** $n \geq 0$ ve $m \in \mathbb{R}$ için $\int_1^\infty \frac{x^m}{1+x^n}dx$ integralinin karakterini inceleyiniz.

$$\frac{x^m}{1+x^n} = \frac{x^m}{x^n}.\frac{1}{1+x^{-n}} = \frac{1}{x^{n-m}}.\frac{1}{1+x^{-n}} \text{ ve } \frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+x^{-n}} \leq 1$$

olduğundan

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{x^{n-m}} \leq \frac{x^m}{1+x^n} \leq \frac{1}{x^{n-m}}$$

yazılabilir. Buna göre $n - m > 1$ ise integral yakınsak, $n - m \leq 1$ ise integral ıraksaktır.

**11.4. Teorem (Dizi Testi):** $\int_a^\infty f(x)\,dx$ integralinin yakınsak olması için gerek ve yeter şart her $n \in \mathbb{N}$ için $t_n \geq a$ ve $\lim_{n\to\infty} t_n = +\infty$ özelliğini sağlayan her bir $(t_n)$ dizisi için $\left(\int_a^{t_n} f(x)\,dx\right)$ dizisinin yakınsak olmasıdır. (Bu dizinin limiti verilen integralin değeridir.)

İspat: $\int_a^\infty f(x)\,dx$ birinci tip genelleştirilmiş integrali $F(t) = \int_a^t f(x)\,dx$ integralinin $t \to \infty$ için limiti ve bir fonksiyonunun limiti dizilerin limiti yardımıyla tanımlanabildiğinden, verilen integralin yakınsaklığını gösterir.

**Örnek:** $\int_2^\infty \frac{x\,dx}{\sqrt{(x^2-5)^3}}$ integralinin değerini nedir?

Çözüm: Verilen integralin değeri, $(t_n) = (n) \geq 2$ için,

$$\lim_{n\to\infty} \int_2^n \frac{x\,dx}{\sqrt{(x^2-5)^3}} = \lim_{n\to\infty} -\left(\frac{1}{\sqrt{(n^2-5)^3}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{\sqrt{(n^2-5)^3}} = 1$$

olur ki, bu verilen integralin yakınsak ve integralinin 1 olduğunu gösterir.

**11.5. Teorem (Seri Testi):** $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ integralinin yakınsak olması için gerek ve yeter şart her $n \in \mathbb{N}$ için $t_n \geq a$ ve $= \lim_{n\to\infty} t_n = +\infty$ özelliğini sağlayan her bir $(t_n)$ dizisi için $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{t_{n-1}}^{t_n} f(x)\,dx\right)$ dizisinin yakınsak olmasıdır.

$t_0 = a$ seçildiğinde $\left(\int_a^{t_n} f(x)\,dx\right)$ dizisi $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{t_{n-1}}^{t_n} f(x)\,dx\right)$ serisinin kısmi toplamlar dizisi olduğundan 11.2. teoreme dönüşür. Bu ise ispatın aşikâr olduğunu gösterir.

**Örnek:** $\int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x}$ integralinin ıraksak olduğunu seri testi yönetimiyle yapınız.

Çözüm: $\sum_{n=1}^{\infty}\int_{n-1}^{n} \frac{dx}{1+x}$ serisi için

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{n-1}^{n} \frac{dx}{1+x} = \sum_{n=1}^{\infty} \ln|1+x|\Big|_{n-1}^{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+n)$$

olup ıraksaktır. Bu yüzden $\int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x}$ integrali de ıraksaktır.

**11.2. Uyarı:** $(t_n)$ dizisi yukarıdaki her iki teste de keyfi seçilen bir dizidir. Özel seçilen bazı diziler için serinin yakınsak olması integralin yakınsak olmasını gerektirmez. İntegralin yakınsak olması için yukarıdaki şartı sağlayan her bir $(t_n)$ dizisi için serinin yakınsak olması gerekir. Mesela $\int_0^{\infty} \sin x\,dx$ i inceleyelim.

$$\int_0^{\infty} \sin x\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_0^{t} \sin x\,dx = \lim_{t\to\infty}(-\cos x)\Big|_0^{t} = \lim_{t\to\infty}(1-\cos t)$$

yazılabilir. Burada $\cos t \in [-1, 1]$ olduğundan $\int_0^{\infty} \sin x\,dx$ ıraksaktır. Ama

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{2(n-1)\pi}^{2n\pi} \sin x\,dx\right)$$

serisi yakınsaktır. Çünkü serinin her bir terimi sıfırdır.

**11.6. Teorem (Abel Testi):** f, $[a,+\infty)$ aralığında sürekli ve aynı aralık üzerinde sürekli türeve sahip bir fonksiyon olsun. Eğer;

$$F(x)=\int_a^{\infty} f(x)\,dx$$

fonksiyonu $[a,+\infty)$ aralığında sınırlı ve g'de $\lim_{x\to\infty} g(x)=0$ şartını sağlayan monoton azalan bir fonksiyon ise

$$\int_a^{\infty} f(x)\,g(x)dx$$

integrali yakınsaktır.

İspat: $\forall t_2>t_1>t$ için kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\int_{t_1}^{t_2} f(x)\,g(x)dx=F(t_2).g(t_2)-F(t_1).g(t_1)-\int_{t_1}^{t_2} f(x)\,g'(x)dx$$

olur. g fonksiyonu monoton azalan olduğundan $g'(x)\le 0$ dır. İntegral hesabın genelleştirilmiş ortalama değer teoremi uygulanırsa

$$\int_{t_1}^{t_2} f(x)\,g'(x)dx=F(c)\,[g(t_2)-g(t_1)]$$

olacak şekilde bir $c\in(t_1,t_2)$ vardır. Buna göre

$$\int_{t_1}^{t_2} f(x)\,g(x)dx=F(t_2).g(t_2)-F(t_1).g(t_1)-F(c)\,[g(t_2)-g(t_1)]$$

olur. F(c) sınırlı olduğundan, $t_1,t_2\to\infty$ için

$$\int_{t_1}^{t_2} f(x)\,g(x)dx\to 0$$

bulunur ki bu da $\int_a^{\infty} f(x)\,g(x)dx$ integralinin yakınsak olduğunu gösterir.

**Örnek:** $\alpha>0$ için $\int_{\pi}^{\infty}\frac{\sin x}{x^n}dx$ intergalinin yakınsaklığını inceleyiniz.

Çözüm: $f(x)=\sin x$, $g(x)=\frac{1}{x^{\alpha}}$ denirse

$$|F(x)|=\left|\int_{\pi}^{x}\sin t\,dt\right|=|\cos\pi-\cos x|\le 2$$

olur. f fonksiyonu sınırlıdır. $g(x)=\dfrac{1}{x^\alpha}$ alınırsa monoton azalan ve $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^\alpha}=0$ olduğundan Abel testi gereğince verilen integral yakınsaktır.

**Örnek:** Optik biliminde kullanılan ve Fresnel İntegrali adı verilen

$$\int_0^\infty \sin(x^2)dx$$

integralinin yakınsak olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $x^2=t$ alınırsa

$$\int_0^\infty \sin(x^2)dx=\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin t}{t^{1/2}}dt$$

elde edilir. Önceki örnek bu integral yakınsak olduğu gösterir. Buna göre verilen integral yakınsaktır.

**11.3. Uyarı:** $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ şekildeki bir integralin yakınsaklığını incelerken $x=-t$ değişken değiştirmesi yapılır. $\int_{-a}^{+\infty} f(-t)\,dt$ integrali elde edilir. Bunun yakınsaklığı bundan önceki tüm kriterler yardımıyla incelenir.

**Örnek:** $\int_{-\infty}^{0} x^3e^x dx$ integralinin yakınsaklığını inceleyiniz.

Çözüm: $x=-t$ alınırsa

$$\int_{-\infty}^{0} x^3e^x dx=-\int_0^\infty t^3e^{-t}dt$$

ve

$$\lim_{t\to\infty} t^2.t^3e^{-t}=\lim_{t\to\infty}\frac{t^5}{e^t}=0$$

olacağından verilen integral yakınsaktır.

**Örnek:** $\int_{-\infty}^{0} \dfrac{dx}{1+e^x}$ integralinin yakınsaklığını inceleyiniz.

Çözüm: $x=-t$ alınırsa

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+e^{x}}=-\int_{\infty}^{0}\frac{dt}{1+e^{-t}}=\int_{0}^{\infty}\frac{e^{t}dt}{1+e^{t}}=\lim_{k\to\infty}\int_{0}^{k}\frac{e^{t}dt}{1+e^{t}}=\lim_{k\to\infty}\ln(1+e^{t})\Big|_{0}^{k}=\lim_{k\to\infty}\ln(1+e^{k})-\ln 2=\infty$$

olacağından verilen integral ıraksaktır.

## İKİNCİ TİP GENELLEŞTİRİLMİŞ İNTEGRALLER İÇİN YAKINSAKLIK TESTLERİ

İkinci çeşit genelleştirilmiş integraller için verilen testlerin ispatları, birinci çeşit genelleştirilmiş integraller için verilen ispatına benzer olduğundan burada tekrar ispat yapılmayacaktır.

**11.7. Teorem (Karşılaştırma Testi):** Pozitif f fonksiyonunun süreksiz olduğu tek nokta b ve her $x\in[a,b)$ için $f(x)\le g(x)$ olsun.

a) $\int_{a}^{b} g(x)\,dx$ yakınsak ise $\int_{a}^{b} f(x)\,dx$ de yakınsaktır.

b) $\int_{a}^{b} f(x)\,dx$ ıraksak ise $\int_{a}^{b} g(x)\,dx$ de ıraksaktır.

**Örnek:** $\int_{1}^{2}\frac{\ln(x+2)}{(x-2)^{3}}dx$ integralinin karakterini inceleyiniz.

Çözüm: Benzer örnek çözüldüğünden $\int_{1}^{2}\frac{1}{(x-2)^{3}}dx$ integrali ıraksak olduğu okuyucuya bırakılmıştır. $x\in[1,2]$ için $x+2>e \Leftrightarrow \ln(x+2)>1$ olduğundan

$$\frac{\ln(x+2)}{(x-2)^{3}}>\frac{1}{(x-2)^{3}}$$

dır. $\int_{1}^{2}\frac{1}{(x-2)^{3}}dx$ integrali ıraksak olduğundan verilen integral de ıraksaktır.

**Not:** Süreksiz noktanın a veya (a, b) aralığındaki bir $x_0$ noktası olması halinde benzer test verilebilir.

**Örnek:** $\int_{1}^{3}\frac{dx}{\sqrt{x^{3}-1}}$ integralinin karakterini inceleyiniz.

Çözüm: Benzer örnek çözüldüğünden $\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$ integrali yakınsak olduğu okuyucuya bırakılmıştır. $x \in (1,3]$ için

$$x^3 - 1 > x - 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^3-1} > \sqrt{x-1} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x^3-1}} < \frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

ve $\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$ yakınsak $\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{x^3-1}}$ integralinin yakınsaktır.

**Örnek:** $\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x-2}}$ integralinin yakınsaklık durumunu inceleyiniz.

Çözüm: İntegralin süreksiz noktası $x = 2$ noktasıdır.

$$\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x-2}} = \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x-2}} + \int_2^4 \frac{dx}{\sqrt{x-2}}$$

olacağından eşitlinden sağındaki her iki integralde yakınsaktır. Çünkü $p = 1/2$ dir.

**11.4. Sonuç (Özel Karşılaştırma Testi):** (a, b] üzerinde tanımlı, negatif olmayan, integrallenebilen f ve g fonksiyonları için tek süreksiz nokta a ve

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda$$

olsun.

i) $\lambda > 0$ ise $\int_a^b f(x)\,dx$ ile $\int_a^b g(x)\,dx$ aynı karakterdedir.

ii) $\lambda = 0$ ise $\int_a^b g(x)\,dx$ yakınsak ise $\int_a^b f(x)\,dx$ de yakınsaktır.

iii) $\lambda < 0$ ise $\int_a^b g(x)\,dx$ ıraksak se $\int_a^b f(x)\,dx$ aynı ıraksaktır.

**Örnek:** $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}}$ integralinin karakterini bulunuz.

Çözüm: $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{x^{1/2}}$ yani $p = 1/2$ olduğundan yakınsaktır.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{\sqrt{\sin x}}}=\lim_{x\to 0^+}\sqrt{\frac{\sin x}{x}}=1$$

Şu halde iki integralinde karakteri aynıdır.

**Not:** Süreksiz noktanın fonksiyonun üst sınırı da olsa benzer test ifade edilebilir.

**Örnek:** $\int_0^{\pi}\frac{dx}{1+\cos x}$ integralinin karakterini bulunuz.

Çözüm: $\int_0^{\pi}\frac{dx}{\pi-x}=\lim_{b\to\pi}\int_0^{b}\frac{dx}{\pi-x}=\lim_{b\to\pi}\ln|\pi-x|\Big|_0^b=-\infty$

ıraksaktır ve

$$\lim_{x\to\pi^+}\frac{\frac{1}{1+\cos x}}{\frac{1}{\pi-x}}=\lim_{x\to\pi^+}\frac{\pi-x}{1+\cos x}=\lim_{x\to\pi^+}\frac{-1}{-\sin x}=+\infty$$

Şu halde iki integralinde karakteri aynıdır.

**11.5. Sonuç (Karşılaştırma Testi Limit Formu):** (a, b] aralığından pozitif tanımlı, integrallenebilen bir fonksiyon ve

$$\lim_{x\to a}(x-a)^p.f(x)=\lambda$$

olsun.

i) $\lambda\geq 0$ ve $p<1$ ise $\int_a^b f(x)\,dx$ yakınsaktır.

ii) $\lambda\neq 0$ ve $p\geq 1$ ise $\int_a^b f(x)\,dx$ ıraksaktır.

**Örnek:** $\int_1^7\frac{dx}{\sqrt[5]{x^3-1}}$ integralinin karakterini bulunuz.

Çözüm: $\lim_{x\to 1^+}(x-1)^{3/5}\frac{1}{\sqrt[5]{x^3-1}}=\lim_{x\to 1^+}\sqrt[5]{\frac{(x-1)^3}{x^3-1}}=\lim_{x\to 1^+}\sqrt[5]{\frac{3(x-1)^2}{3x^3}}=0$

ve $p=\frac{3}{5}<1$ olduğundan verilen integral yakınsaktır.

**Örnek:** $\int_0^3 \frac{\arcsin x}{1-x}dx$ integralinin karakterini bulunuz.

Çözüm: Verilen integral $x=1$ noktasından süreksizdir.

$$\int_0^3 \frac{\arcsin x}{1-x}dx=\int_0^1 \frac{\arcsin x}{1-x}dx+\int_1^3 \frac{\arcsin x}{1-x}dx$$

yazılırsa sağdaki iki integralin de süreksiz noktası $x=1$ dir. Bu iki integral yakınsak ise verilen integal yakınsak olacaktır.

$$\lim_{x\to 1^-}(1-x)^1\frac{\arcsin x}{1-x}=\arcsin 1=\frac{\pi}{2}$$

ve $p=1$ olduğundan iki integral ıraksaktır. Dolayısıyla verilen integral ıraksaktır.

**11.8. Teorem (Oran Testi):** f ve g negatif olmayan fonksiyonlar olsun. Eğer $a<x\le b$ için $f(x)\ge 0$, $g(x)\ge 0$ ve $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=A$ ise

i) $A\ne 0$ veya $A\ne\infty$ ise $\int_a^b f(x)\,dx$ ve $\int_a^b g(x)\,dx$ integralleri aynı karakterdedir.

ii) $A=0$ ise $\int_a^b g(x)\,dx$ yakınsak ise, o zaman $\int_a^b f(x)\,dx$ yakınsaktır.

iii) $A=\infty$ ise $\int_a^b g(x)\,dx$ ıraksak ise, o zaman $\int_a^b f(x)\,dx$ ıraksaktır.

**İNTEGRALDE MUTLAK VE ŞARTLI YAKINSAKLIK**

**11.4. Tanım:** $\int_a^b f(x)\,dx$ yakınsak iken $\int_a^b |f(x)|\,dx$ yakınsak ise $\int_a^b f(x)\,dx$ mutlak yakınsak, $\int_a^b f(x)\,dx$ yakınsak iken $\int_a^b |f(x)|\,dx$ ıraksak ise $\int_a^b f(x)\,dx$ şartlı yakınsak denir.

**Örnek:** $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ birinci tip genelleştirilmiş integralinin mutlak yakınsaklığını araştırınız.

Çözüm: $\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx$ yakınsak olduğu yukarıda gösterildi. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}\frac{|\sin x|}{x}\,dx\right)$ serisi de yakınsaktır. Ayrıca,

$$\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}\frac{|\sin x|}{x}\,dx \geq \frac{1}{n\pi}\left|\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}|\sin x|\,dx\right| = \frac{2}{n\pi} \text{ ve } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi} = \infty$$

olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}\frac{|\sin x|}{x}\,dx\right)$ ıraksak ve dolayısıyla $\int_0^{\infty}\frac{|\sin x|}{x}\,dx$ ıraksaktır. Buna göre $\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx$ mutlak yakınsaktır.

**11.9. Teorem:** Mutlak yakınsak her integral yakınsaktır. (Hem birinci tip, hem ikinci tip ve hem de üçüncü tip genelleştirilmiş integral için geçerlidir. Biz sadece birinci tip integraller için ispatlayacağız.)

İspat: $\int_a^{\infty}|f(x)|\,dx$ yakınsak olsun. $\forall\varepsilon>0$ için $\exists t$ öyle ki $\forall t_2>t_1>t$ için

$$\int_{t_1}^{t_2}|f(x)|\,dx<\varepsilon$$

kalır. O halde,

$$\left|\int_{t_1}^{t_2}f(x)\,dx\right| < \int_{t_1}^{t_2}|f(x)|\,dx<\varepsilon$$

olur ki bu bize $\int_a^{\infty}|f(x)|\,dx$ yakınsak olduğunu gösterir.

**Örnek:** $\int_1^{\infty}\frac{\cos x}{x^2}\,dx$ integralini karakterize ediniz.

Çözüm: $x\geq 1$ olduğundan $\left|\frac{\cos x}{x^2}\right|<\frac{1}{x^2}$ olur. $\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}\,dx$ integrali yakınsak olduğundan $\int_1^{\infty}\left|\frac{\cos x}{x^2}\right|dx$ de yakınsaktır. 11.9. teorem gereği $\int_1^{\infty}\frac{\cos x}{x^2}\,dx$ integrali de yakınsaktır.

**GENELLEŞTİRİLMİŞ İNTEGRALLERİN DÜZGÜN YAKINSAKLIĞI**

**11.5. Tanım:** $(f_n(x))$ bir fonksiyon dizisi olmak üzere $\phi(n)=\int_a^{\infty} f_n(x)\,dx$ şeklindeki diziye genelleştirilmiş integrallerin fonksiyon dizisi denir.

**11.6. Tanım:** Eğer her $\varepsilon>0$ için, ε'a bağlı fakat n'ye bağlı olmayan $u>n_\varepsilon$ ve $n\in[n_1,n_2]$ deki her n için

$$\left|\phi(n)-\int_a^{u} f_n(x)\,dx\right|<\varepsilon$$

ifadesi sağlayacak şekilde bir $n_\varepsilon$ sayısı bulunabilirse $\phi(n)=\int_a^{\infty} f_n(x)\,dx$ integraline $[n_1,n_2]$ aralığında düzgün yakınsaktır denir. Bu bir seri için $n_\varepsilon$ terimden sonraki kalanın mutlak değerine benzer olan

$$\left|\phi(n)-\int_a^{u} f_n(x)\,dx\right|=\left|\int_u^{\infty} f_n(x)\,dx\right|$$

olduğuna dikkat etmek gerekir.

**Örnek:** $n>0$ için $\phi(n)=\int_a^{\infty} ne^{-nx}\,dx$ in düzgün yakınsaklığını inceleyiniz.

Çözüm: Her $\varepsilon>0$ için tüm $u>n_\varepsilon$ için $\left|1-\int_0^{u} ne^{-nx}\,dx\right|<\varepsilon$ ifadesi sağlanacak şekilde ε'na bağımlı fakat n'ya bağımlı olmayan bir $n_\varepsilon$ bulanabilirsek $0<n_1<n$ de 1'e düzgün yakınsaktır.

$u>\dfrac{1}{n_1}\ln\dfrac{1}{\varepsilon}=n_\varepsilon$ için

$$\left|1-\int_0^{u} ne^{-nx}\,dx\right|=\left|1-(1-e^{-nx})\right|=e^{-nx}\le e^{-n_1x}<\varepsilon$$

olduğundan verilen integral düzgün yakınsaktır. //

Düzgün yakınsaklığın yukarıdaki tanımı ve özellikleri birinci tip genelleştirilmiş integraller için erilmiştir. Benzer sonuçlar ikinci ve üçüncü tip genelleştirilmiş integraller için de yapılır.

Şimdi genelleştirilmiş integrallerin düzgün yakınsaklığı için özel testler verelim.

**11.10. Teorem (Weierstrass M Testi):** $n \in [n_1, n_2]$, $x > n$ için,

i) $|f_n(x)| \le M(x)$

ii) $\int_a^\infty M(x)\,dx$ yakınsak

olacak şekilde bir $M(x) \ge 0$ fonksiyonu bulabilirsek, o zaman $\int_a^\infty f_n(x)\,dx$ integrali düzgün ve mutlak yakınsaktır.

**Örnek:** $\left|\frac{\cos nx}{x^2+1}\right| \le \frac{1}{x^2+1}$ ve $\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+1}$ yakınsak olduğundan, $\int_0^\infty \frac{\cos nx}{x^2+1}dx$ tüm reel n değerleri için düzgün ve mutlak yakınsaktır.

**Örnek:** $n > 0$ için $\phi(n) = \int_a^\infty n e^{-nx}\,dx$ in düzgün yakınsaklığını inceleyiniz.

Çözüm: $0 < n_1 < n$ için $\lim_{x\to\infty} x^2 n e^{-nx} = 0$ olduğundan, yeterince büyük $x > x_0$ için $|e^{-nx}| < \frac{1}{x^2}$ seçilirse, $M(x) = \frac{1}{x^2}$ alarak ve $\int_{x_0}^\infty \frac{dx}{x^2}$ nin yakınsak olduğuna dikkat ederek, verilen integral $0 < n_1 < n$ de 1'e düzgün yakınsaktır.

**Not:** İntegralde olduğu gibi bir integral mutlak yakınsak olmadan düzgün yakınsak olabilir ve tersi de geçerlidir.

**11.11. Teorem (Dirichlet Testi):** $n \in [n_1, n_2]$, $u > a$ için,

i) $x \to \infty$ iken sıfıra yaklaşan pozitif monoton azalan bir fonksiyon $g(x)$ olsun.

ii) $\left|\int_a^u f_n(x)dx\right| < P$ ise $\int_a^\infty f_n(x)\,g(x)\,dx$

integrali düzgün yakınsaktır.

**11.12. Teorem:** $(f_n(x))$ fonksiyonu $n \in [n_1, n_2]$, $x > n$ için $\phi(n) = \int_a^\infty f_n(x)\,dx$ için düzgün yakınsak ise, o zaman $\phi(n)$ de süreklidir.

İspat: $R_n(u)=\int_u^\infty f_n(x)\,dx$ olmak üzere $\phi(n)=\int_a^u f_n(x)\,dx+R_n(u)$ olsun. O zaman $\phi(n+h)=\int_a^u f_{(n+h)}(x)\,dx+R_{(n+h)}(u)$ ve dolayısıyla

$$\phi(n+h)-\phi(n)=\int_a^u [f_{(n+h)}(x)-f_n(x)]dx+R_{(n+h)}(u)-R_n(u)$$

böylece

$$|\phi(n+h)-\phi(n)|\le\int_a^u |f_{(n+h)}(x)-f_n(x)|\,dx+|R_{(n+h)}(u)|+|R_n(u)| \qquad (1)$$

olur. İntegral $n\in[n_1,n_2]$ de düzgün yakınsak olduğundan, her $\varepsilon>0$ için, $u>n_\varepsilon$ olacak şekilde n'den bağımsız $n_\varepsilon$ bulabiliriz.

$$|R_{(n+h)}(u)|<\frac{\varepsilon}{3},\ |R_n(u)|<\frac{\varepsilon}{3} \qquad (2)$$

$f_n(x)$ sürekli olduğundan, her $\varepsilon$'na karşılık

$$\int_a^u |f_{(n+h)}(x)-f_n(x)|\,dx<\frac{\varepsilon}{3} \qquad (3)$$

sağlanacak $\delta>0$ şekilde bulabiliriz.
(1) de (2) ve (3) ü kullanarak $|h|<\delta$ için $|\phi(n+h)-\phi(n)|<\varepsilon$ olduğunu görürüz. Demek ki $\phi(n)$ süreklidir. //

Bu teoremde özel olarak $n_0\in[n_1,n_2]$ aralığında herhangi bir nokta ise,

$$\lim_{n\to n_0}\phi(n)=\lim_{n\to n_0}\int_a^x f_n(x)\,dx=\int_a^x \lim_{n\to n_0} f_n(x)\,dx$$

ifadesi yazılabilir. Eğer $n_0$ aralığın uç noktalarından biri ise, sağ ve sol taraflı limitleri kullanırız.

**11.13. Teorem (İntegralde Sıranın Değişimi):** $(f_n(x))$ fonksiyonu $n\in[n_1,n_2]$, $x>n$ için sürekli ve $\int_a^\infty f_n(x)\,dx$ için düzgün yakınsak ise,

$$\int_{n_1}^{n_2}\phi(n)\,dn=\int_{n_1}^{n_2}\left\{\int_a^\infty f_n(x)\,dx\right\}dn=\int_a^\infty\left\{\int_{n_1}^{n_2} f_n(x)\,dn\right\}dx$$

ifadesi elde ederiz.

**11.13. Teorem (İntegralde Sıranın Değişimi):** $(f_n(x))$ fonksiyonu $n \in [n_1, n_2]$, $x > n$ için sürekli, n'ye göre sürekli kısmi türeve sahipse ve $\int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial n} dx$ de düzgün yakınsak ise, a, n'ye bağımlı olmadığı zaman

$$\frac{d\phi}{da} = \int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial n} dx$$

sağlanır. Eğer a, n'ye bağımlı ise bu sonuç değiştirilebilir.

**KAYNAKÇA**

**1.** Prof. Dr. Mustafa BALCI, Matematik Analiz II, Bilim kitap kırtasiye A.Ş., Ankara, 1997.

**2.** Murray R. SPIEGEL, Çeviri: Prof. Dr. H. Hilmi HACISALİHOĞLU, Nobel Yayın Dağıtım, 1997.

**3.** George B. Thomas, Çeviri Recep Korkmaz, Thomas Calculus II, Beta, İstanbul, 2009.