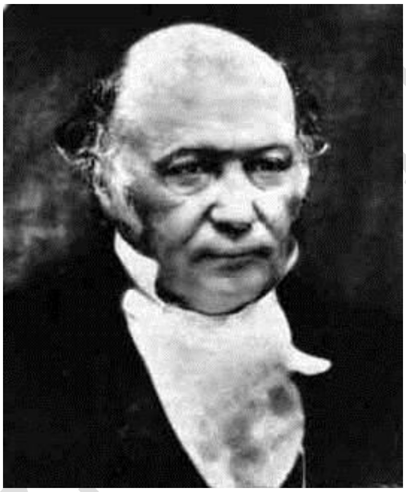
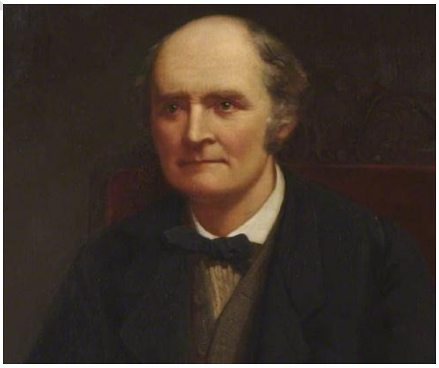
1. BÖLÜM
MATRİSLER

MATRİS KAVRAMI

Matris kavramını ilk defa İrlandalı Matematikçi William Rowan Hamilton (1805-1865) ile İngiliz Matematikçisi Arthur Cayley (1821-1895) tarafından kullanılmıştır.



William Rowan Hamilton
(04 Ağustos 1805, Dublin, İrlanda - 02 Eylül 1865, Dublin, İrlanda)

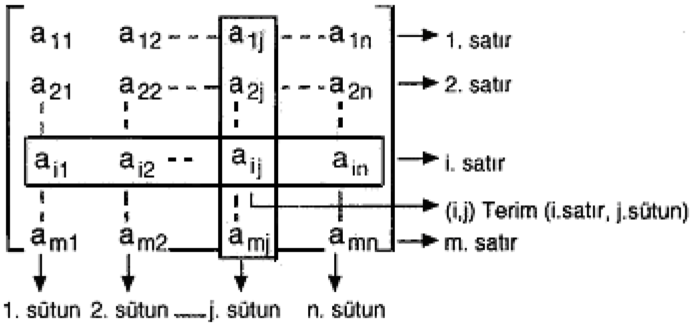


Arthur Cayley
(16 Ağustos 1821, Richmond, İngiltere - 26 Ocak 1895, Cambridge, İngiltere)

1.1. Tanım: $i, j \in \mathbb{N}^+$, $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$ olmak üzere, aşağıdaki tablo biçimde yazıma $m \times n$ boyutunda matris denir.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \vdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}$$

Matris gösterimi kısaca $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ biçiminde gösterilir. Tabloda yatay sıralara matrisin satırları, düşey sıralara matrisin sütunları (kolonları) denir. Buna göre verilen tablo m satır sayını n sütunludur. Ayrıca a_{ij}, A matrisinin i. satırı, j. sütunudur.



1.1. Not: Bu çalışmada $\mathbb{R}$ reel sayılar üzerinde çalışılacaktır. $\mathbb{C}$ karmaşık (kompleks) sayılar incelenmediğinden karmaşık sayılardan bahsedilmeyecektir. Karmaşık sayılar incelenince reel sayılar üzerindeki lineer cebir karmaşık sayılar için de geçerlidir.

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 0 \\ \sqrt{2} & 4 & \pi & e \\ -2 & 0 & 1{,}2 & 6/5 \end{bmatrix}_{3\times 4}$, 3×4 boyutunda bir matristir. Bu matriste

1. satır 1. sütun $a_{11} = 3$	1. satır 2. sütun $a_{12} = 2$
1. satır 3. sütun $a_{13} = -1$	1. satır 4. sütun $a_{14} = 0$
2. satır 1. sütun $a_{21} = \sqrt{2}$	2. satır 2. sütun $a_{22} = 4$
2. satır 3. sütun $a_{33} = \pi$	2. satır 4. sütun $a_{24} = e$
3. satır 1. sütun $a_{31} = -2$	3. satır 2. sütun $a_{32} = 0$
3. satır 3. sütun $a_{33} = 1{,}2$	3. satır 4. sütun $a_{34} = 0$

biçimindedir.

MATRİS ÇEŞİTLERİ

1.2. Tanım: Satır ve sütun sayıları eşit olan matrislere kare matris denir. $A = [a_{ii}]_{n\times n}$ şeklindedir.

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 3}$ matrisi 3×3 boyutunda bir kare matristir.

Örnek: $B = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 3 & \sqrt{2} \\ 1 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 11 & 0 & 6 \\ 2 & 3 & -5 & 4 \end{bmatrix}_{4\times 4}$

B matrisi 4×4boyutunda bir kare matristir.

1.3. Tanım: Bütün elemanları 0 olan matrise sıfır matrisi denir. Sıfır matris matrislerde toplama işleminin birim (etkisiz) elemanıdır. $O = [O_{ij}]_{m\times n}$ şeklindedir.

Örnek: $0_{3\times 4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 4}$

Bu matris 3×4 boyutunda bir sıfır matristir.

1.4. Tanım: Her $n \in \mathbb{N}$, her $i, j \in \mathbb{N}^+$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$ olmak üzere bir $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ kare matriste, $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ terimlerinin bulunduğu doğruya esas (asal) köşegen denir, $a_{n1}, a_{(n-1)2}, \cdots, a_{1n}$ terimlerinin bulunduğu doğruya yedek köşegen denir.

Örnek: $C=\begin{bmatrix}4 & -1 & 2 & 3\\ 1 & -2 & 5 & 1\\ 3 & 0 & 6 & 0\\ 2 & 1 & 3 & 7\end{bmatrix}$

matrisinde 4; −2; 6 ve 7 sayılarının bulunduğu doğruya esas köşegenin, 3; 5; 0; 2 sayılarının bulunduğu doğruya yedek köşegenin terimleridir.

1.5. Tanım:

$$\delta_{ij}=\begin{cases}0, i\neq j\\ 1, i=j\end{cases}$$

ifadesine Kronecker deltası adı verilir.

1.6. Tanım: Bir kare matriste esas (asal) köşegen üzerindeki elemanlar 1, diğer elemanları 0 olan matrise birim matris denir. I ile gösterilir. Birim matris $I=[\delta_{ij}]$ Kronecker biçiminde tanımlanan matrislerdir.

Örnek: $I_{3\times3}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}_{3\times3}$ ve $I_{2\times2}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}_{2\times2}$

3×3 ve 2×2 boyutunda birer birim matrislerdir.

1.7. Tanım: $X=\begin{bmatrix}a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n\end{bmatrix}$ şeklinde sadece bir satırdan oluşan matrise satır matris denir. $Y=\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\\ \vdots\\ b_n\end{bmatrix}$ şeklinde sadece bir sütundan oluşan matrise sütun matris denir. Satır ve sütun matrislerine satır ve sütun vektörleri adı da verilir.

1.8. Tanım: Bir kare matriste, esas köşegen dışında kalan tüm eleman sıfır ise bu matrise köşegen matris denir.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Örnek: $A=\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$

A ve B matrisleri birer köşegen matrislerdir.

1.9. Tanım: Bir matrisinin bazı satır ve sütunları kaldırıldığında geri kalan terimlerinin oluşturduğu yeni matrise alt matris denir.

Örnek: $A=\begin{bmatrix} 4 & 7 & -1 \\ 2 & 8 & 3 \\ 5 & 1 & 10 \end{bmatrix}$ için $B=\begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$ alt matristir. Çünkü B matrisi A matrisinin 3. satırı ve 3. sütunu atılarak elde edilmiştir.

İKİ MATRİSİN EŞİTLİĞİ

1.10. Tanım: Boyutları aynı olan iki matrisin aynı numaralı elemanları birbirine eşit ise buna eşit matris denir. (Boyutları farklı olan matrislerin eşitliğinden bahsedilemez.)

$A=[a_{ij}]_{m\times n}$ ve $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ matrisleri verilsin, eğer her $a_{ij}=b_{ij}$ ise $A=B$ dir.

Örnek: $A=\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$ ve $B=\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$ olduğundan $A=B$ dir.

Örnek: $A=\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ -x+2y & 5 \end{bmatrix}$ ve $B=\begin{bmatrix} 3 & 2x-4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ ve $A=B$ ise x ve y'nin değerini bulunuz.

Çözüm: Eşitlik tanımı gereğince

$2x - 4 = 8$ ise $x = 6$

$-x + 2y = 4$ ise $x = 5$

dür. Buna göre $x = 6$ ve $y = 5$ dir.

BİR MATRİSİN İZİ

1.11. Tanım: Bir kare matrisin esas köşegen üzerindeki terimleri toplamına o matrisin izi denir. $A = [a_{ii}]_{n\times n}$ kare matrisinin izi,

$$iz(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$$

dir.

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 4 & 7 & -1 \\ 2 & 8 & 3 \\ 0 & 1 & 10 \end{bmatrix}$ matrisinin izi, $iz(A) = 4 + 8 + 10 = 22$ dir.

1.1. Teorem: A ve B iki kare matris, $\alpha \in \mathbb{R}$ için,

i) $iz(A + B) = iz(A) + iz(B)$

ii) $iz(\alpha A) = \alpha \cdot iz(A)$

dir.

İspat: i) Reel sayılarda toplama özellikleri kullanılarak

$$\begin{aligned} iz(A) + iz(B) &= a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} + b_{11} + b_{22} + \cdots + b_{nn} \\ &= (a_{11} + b_{11}) + (a_{22} + b_{22}) + \cdots + (a_{nn} + b_{nn}) \\ &= iz(A + B) \end{aligned}$$

bulunur.

ii) Reel sayılarda çarpmanın toplama üzerine dağılma özelliği kullanılarak

$$\begin{aligned} \alpha \cdot iz(A) &= \alpha(a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}) \\ &= \alpha \cdot a_{11} + \alpha \cdot a_{22} + \cdots + \alpha \cdot a_{nn} \\ &= iz(\alpha A) \end{aligned}$$

bulunur.

MATRİSLERDE TOPLAMA ve ÇIKARMA

1.12. Tanım: Aynı boyuttaki matrislerin aynı numaralı elemanları toplanarak veya çıkarılarak matrislerin toplaması veya çıkarılması elde edilir. (Farklı boyutlardaki matrislerin toplama ve çıkarmasından söz edilemez.)

$$A = [a_{ij}]_{m\times n} \text{ ve } B = [b_{ij}]_{m\times n} \text{ ise}$$
$$A \pm B = [a_{ij}]_{m\times n} \pm [b_{ij}]_{m\times n} = [a_{ij} \pm b_{ij}]_{m\times n}$$

şeklindedir.

Örnek: $A=\begin{bmatrix} 3 & 5 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 6 & -2 \end{bmatrix}$ ve $B=\begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ise $A+B$ ve $A-B$ yi bulunuz.

Çözüm: $A+B=\begin{bmatrix} 2 & 8 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 6 & -1 \end{bmatrix}$

$A-B=\begin{bmatrix} 4 & 2 & -6 & 2 \\ -2 & 7 & 6 & -3 \end{bmatrix}$

Örnek: $A=\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & x \end{bmatrix}$ ve $C=\begin{bmatrix} 3 & y \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$ matrisleri veriliyor. $A+B=C$ ise $x \cdot y$ nedir?

Çözüm: $A+B=\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & x \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 5 & x \end{bmatrix}$ olduğundan $x = 8$ ve $y = 3$ dir. Buna göre $x \cdot y = 24$ olarak bulunur.

Örnek: $\begin{bmatrix} 2x & 3 \\ -x & 4 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -3y & 2 \\ 4y & 5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$ matrislerinde x ve y'nin değeri nedir?

Çözüm: Matrislerde toplama işlemi gereğince $\begin{bmatrix} 2x-3y & 5 \\ -x+4y & 9 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$ bulunur. Matrislerde eşitlik işlemi gereğince

$$2x - 3y = 8 \text{ ve } -x + 4y = 6$$

iki bilinmeyenli iki denklemi elde edilir. Burada bu denklemler çözülürse $x = 10, y = 4$ elde edilir.

1.13. Tanım: Bir $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ matrisinin negatifi (toplamaya göre tersi) $-A = \left[-a_{ij}\right]_{m\times n}$ biçimindedir ve $-A$ ile gösterilir.

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -2 \\ -1 & 10 & 11 \\ 6 & -7 & 0 \end{bmatrix}$ ise $-A = \begin{bmatrix} -4 & -3 & 2 \\ 1 & -10 & -11 \\ -6 & 7 & 0 \end{bmatrix}$

1.2. Teorem: A, B, C aynı boyutta matrisler olmak üzere, matrislerin toplama işleminde aşağıdaki özellikler vardır:

i)	$A + B = B + A$	(Değişme özelliği)
ii)	$A + (B + C) = (A + B) + C$	(Birleşme özelliği)
iii)	$A + 0 = 0 + A = A$	(Birim eleman özelliği)
vi)	$A + (-A) = (-A) + A = 0$	(Ters eleman özelliği)

İspat: i) $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ ve $B = \left[b_{ij}\right]_{m\times n}$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} A + B &= \left[a_{ij}\right]_{m\times n} + \left[b_{ij}\right]_{m\times n} \\ &= \left[a_{ij} + b_{ij}\right]_{m\times n} \\ &= \left[b_{ij}\right]_{m\times n} + \left[a_{ij}\right]_{m\times n} \\ &= B + A \end{aligned}$$

dir.

ii) $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$, $B = \left[b_{ij}\right]_{m\times n}$ ve $C = \left[c_{ij}\right]_{m\times n}$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} A + (B + C) &= \left[a_{ij}\right]_{m\times n} + \left(\left[b_{ij}\right]_{m\times n} + \left[c_{ij}\right]_{m\times n}\right) \\ &= \left[a_{ij}\right]_{m\times n} + \left[b_{ij} + c_{ij}\right]_{m\times n} \\ &= \left[a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})\right]_{m\times n} \\ &= \left[\left(a_{ij} + b_{ij}\right) + c_{ij}\right]_{m\times n} \\ &= \left[a_{ij} + b_{ij}\right]_{m\times n} + \left[c_{ij}\right]_{m\times n} \\ &= \left(\left[a_{ij}\right]_{m\times n} + \left[b_{ij}\right]_{m\times n}\right) + \left[c_{ij}\right]_{m\times n} \end{aligned}$$

dir.

iii) $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ ve $O = \left[0_{ij}\right]_{m\times n}$ olmak üzere;

$$A + O = [a_{ij}]_{m\times n} + [0_{ij}]_{m\times n} = [a_{ij} + 0_{ij}]_{m\times n} = [a_{ij}]_{m\times n} = A$$
$$O + A = [0_{ij}]_{m\times n} + [a_{ij}]_{m\times n} = [0_{ij} + a_{ij}]_{m\times n} = [a_{ij}]_{m\times n} = A$$

dir.

vi) $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ ve $-A = [-a_{ij}]_{m\times n}$ olmak üzere,
$$A + (-A) = [a_{ij}]_{m\times n} + [-a_{ij}]_{m\times n} = [a_{ij} - a_{ij}]_{m\times n} = [0_{ij}]_{m\times n} = 0$$
$$(-A) + A = [-a_{ij}]_{m\times n} + [a_{ij}]_{m\times n} = [-a_{ij} + a_{ij}]_{m\times n} = [0_{ij}]_{m\times n} = 0$$

1.1. Sonuç: Matrisler toplama işlemine göre değişmeli gruptur.

MATRSİLERİN SKALERLE ÇARPIMI

1.14. Tanım: Bir matrisinin her elemanı α ile çarpılmasına o matrisin α skaleriyle çarpılması denir. Bu durum $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ için
$$\alpha A = \alpha \cdot [a_{ij}]_{m\times n} = [\alpha \cdot a_{ij}]_{m\times n}$$
biçimindedir.

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ise $3A$ ve $-4A$ yı bulunuz.

Çözüm: $3A = \begin{bmatrix} 12 & 9 & 6 \\ -3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ ve $-4A = \begin{bmatrix} -16 & -12 & -8 \\ 4 & 0 & -4 \end{bmatrix}$ olarak bulunur.

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 6 & -8 \\ 22 & 12 \end{bmatrix}$ ise $\frac{1}{2}A$ nedir?

Çözüm: $\frac{1}{2}A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 6 & -8 \\ 22 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 11 & 6 \end{bmatrix}$ olarak bulunur.

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$ ise $4A - 2B$ yi bulunuz.

Çözüm: $4A-2B=\begin{bmatrix}20 & 12\\ -4 & 0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}8 & 2\\ 10 & -4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}12 & 10\\ -14 & 8\end{bmatrix}$

1.3. Teorem: A matrisi $m\times n$ boyutunda $\alpha,\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}$, $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ ve $B=\left[b_{ij}\right]_{m\times n}$ olmak üzere, matrislerin skalerle çarpımında aşağıdaki özellikler vardır:

i) $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$
ii) $(\alpha_1+\alpha_2)A=\alpha_1 A+\alpha_2 A$
iii) $(\alpha_1\cdot\alpha_2)A=\alpha_1(\alpha_2 A)=\alpha_2(\alpha_1 A)$
iv) $1\cdot A=A\cdot 1=A$
v) $0\cdot A=A\cdot 0=0_{m\times n}$

İspat: i) $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ ve $B=\left[b_{ij}\right]_{m\times n}$, $\alpha\in\mathbb{R}$ olmak üzere;

$$\begin{aligned}\alpha(A+B)&=\alpha\left(\left[a_{ij}\right]_{m\times n}+\left[b_{ij}\right]_{m\times n}\right)\\&=\alpha\left[a_{ij}+b_{ij}\right]_{m\times n}\\&=\alpha\left[A_{ij}\right]_{m\times n}+\alpha\left[B_{ij}\right]_{m\times n}\\&=\alpha A+\alpha B\end{aligned}$$

dir.

ii) $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$, $\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}$ olmak üzere;

$$\begin{aligned}(\alpha_1+\alpha_2)A&=(\alpha_1+\alpha_2)\left[a_{ij}\right]_{m\times n}\\&=\alpha_1\left[a_{ij}\right]_{m\times n}+\alpha_2\left[a_{ij}\right]_{m\times n}\\&=\alpha_1 A+\alpha_2 A\end{aligned}$$

dir.

iii, iv ve v benzer şekilde ispatlanır.

MATRİSLERDE ÇARPMA

1.15. Tanım: $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ ve $B=\left[b_{jk}\right]_{n\times p}$ şeklinde iki matrisi verilsin.

$$c_{ik} = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{bmatrix} = a_{i1}.b_{1k} + a_{i2}.b_{2k} + \dots + a_{in}.b_{nk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}.b_{jk}$$

toplamıyla bulunan $C = [c_{ik}]_{m\times p}$ matrisine A ile B matrislerinin çarpımı denir ve

$$A \cdot B = [a_{ij}]_{m\times n} [b_{jk}]_{n\times p} = [c_{ik}]_{m\times p} = C$$

biçimindedir. Bu durum,

$$A.B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ \boxed{a_{i1} \quad a_{i2} \quad \dots \quad a_{in}} & & & \\ \dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & \boxed{b_{1k}} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2k} & \dots & b_{2p} \\ \dots & & & & & \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nk} & \dots & b_{np} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2p} \\ \dots & & \boxed{c_{ik}} & \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mp} \end{bmatrix}$$

olarak ifade edilir. Bu yazılış

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}b_{j1} & \sum_{j=1}^{n} a_{1j}b_{j2} & \cdots & \sum_{j=1}^{n} a_{1j}b_{jp} \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j}b_{j1} & \sum_{j=1}^{n} a_{2j}b_{j2} & \cdots & \sum_{j=1}^{n} a_{2j}b_{jp} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj}b_{j1} & \sum_{j=1}^{n} a_{mj}b_{j2} & \cdots & \sum_{j=1}^{n} a_{mj}b_{jp} \end{bmatrix}$$

biçimdedir.

A ve B matrisleri için $A \cdot B$ çarpımının tanımlı olması için A matrisinin sütün sayısının B matrisinin satır sayısına eşit olması gerekir. A matrisinin sütun sayısı B matrisinin satır sayısına eşit değilse $A \cdot B$ çarpımı tanımlı değildir.

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}_{2x3}$ ve $B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 6 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}_{3x2}$ ise $A \cdot B$ yi bulunuz.

Çözüm: $A\cdot B=\begin{bmatrix}2 & 3 & 5\\ -1 & 1 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 1\\ -2 & 6\\ 2 & 3\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}2.4+3.(-2)+5.2 & 2.1+3.6+5.3\\ (-1).4+1.(-2)+4.2 & (-1).1+1.6+4.3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}12 & 35\\ 2 & 17\end{bmatrix}$$

Örnek: $A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\ 5 & -1 & 4\end{bmatrix}$ ve $B=\begin{bmatrix}1\\ -2\\ 3\end{bmatrix}$ ise $A\cdot B$ yi bulunuz.

Çözüm: $A\cdot B=\begin{bmatrix}1.1+3.(-2)+2.3\\ 5.1+(-1)(-2)+4.3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 19\end{bmatrix}$

Örnek: $A=[a_{ij}]_{3\times n}$ ve $B=[b_{jk}]_{5\times p}$ ise $A\cdot B$ nin tanımlı olması için $n+p$ nin en küçük değeri kaçtır?

Çözüm: $A\cdot B=[a_{ij}]_{3\times n}[b_{jk}]_{5\times p}$ tanımlı olması için A matrisinin sütun sayısı, B matrisinin satır sayısına eşit olması gerekir. Buna göre $n=5$ dir. $n+p$ toplamının en küçük olması için B matrisinin sütun sayısı $p=1$ olması gerekir. O halde

$$n+p=5+1=6$$

dir.

Örnek: $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ x & 1\end{bmatrix}$ olduğuna göre, her $x\in\mathbb{Z}^+$ için $A^n=\begin{bmatrix}1 & 0\\ nx & 1\end{bmatrix}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Tümevarım yöntemi ile göstereceğiz.

i) $n=1$ için $A^1=\begin{bmatrix}1 & 0\\ x & 1\end{bmatrix}$ olduğundan ifade doğrudur.

ii) $n = k$ için $A^k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ kx & 1 \end{bmatrix}$ ifadesinin doğru olduğunu kabul edelim.

$n = k+1$ için $A^{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ (k+1)x & 1 \end{bmatrix}$ ifadesinin doğru olduğunu gösterelim.

$$A^{k+1} = A \cdot A^k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ kx & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ (k+1)x & 1 \end{bmatrix}$$

olduğundan her $x \in \mathbb{Z}^+$ için $A^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ nx & 1 \end{bmatrix}$ dir.

Örnek: $A = \begin{bmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{bmatrix}$ olduğuna göre, her $x \in \mathbb{Z}^+$ için

$$A^n = \begin{bmatrix} \cos nx & -\sin nx \\ \sin nx & \cos nx \end{bmatrix}$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Tümevarım yöntemi ile göstereceğiz.

i) $n = 1$ için $A^1 = \begin{bmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{bmatrix}$ olduğundan ifade doğrudur.

ii) $n = k$ için $A^k = \begin{bmatrix} \cos kx & -\sin kx \\ \sin kx & \cos kx \end{bmatrix}$ ifadesinin doğru olduğunu kabul edelim.

$n = k+1$ için $A^{k+1} = \begin{bmatrix} \cos(k+1)x & -\sin(k+1)x \\ \sin(k+1)x & \cos(k+1)x \end{bmatrix}$ ifadesinin doğru olduğunu gösterelim.

$$A^{k+1} = A \cdot A^k = \begin{bmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \cos kx & -\sin kx \\ \sin kx & \cos kx \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos x.\cos kx - \sin x.\sin kx & -\cos x.\sin kx - \sin kx.\cos kx \\ \sin x.\cos kx + \cos x.\sin kx & -\sin x.\sin kx + \cos x.\cos kx \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(k+1)x & -\sin(k+1)x \\ \sin(k+1)x & \cos(k+1)x \end{bmatrix}$$

olduğundan her $x \in \mathbb{Z}^+$ için $A^n = \begin{bmatrix} \cos nx & -\sin nx \\ \sin nx & \cos nx \end{bmatrix}$ dir.

1.4. Teorem: A, B, C matrisleri $m \times n$ boyutunda $\alpha \in \mathbb{R}$ olmak üzere, matrislerin çarpmasında aşağıdaki özellikler vardır:

i) $A \cdot B \neq B \cdot A$ (Değişme özelliği yoktur)
ii) $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$ (Birleşme özelliği)
iii) $A \cdot I = I \cdot A = A$ (Birim eleman özelliği)
vi) $A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$
(Çarpmanın toplama üzerine dağılma özelliği)
vii) $\alpha(A \cdot B) = (\alpha \cdot A) \cdot B$

Ayrıca, 8. Özellik olan çarpmanın ters eleman özelliği matrislerin tersinin tanımından sonra verilecektir.

İspat: i) $A \cdot B \neq B \cdot A$ değişme özelliğinin olmadığına bir örnek vermek yeterlidir.

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 & -4 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & -10 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 22 & -4 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 20 & -10 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$$

$A \cdot B \neq B \cdot A$

ii) $A = [a_{ij}], B = [b_{jk}]$ ve $C = [c_{kr}]$ olsun. Bu takdirde

$A \cdot B = T = [t_{ik}]$ ve $B \cdot C = S = [a_{jr}]$

şeklinde olsunlar. Öyleyse,

$$t_{ik} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + \dots + a_{im} \cdot b_{mk} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \cdot b_{jk}$$

$$s_{jr} = b_{j1} \cdot c_{1r} + b_{j2} \cdot c_{2r} + \dots + b_{jn} \cdot c_{nr} = \sum_{k=1}^{n} b_{jk} \cdot c_{kr}$$

dir. Şimdi $(A \cdot B)$ ve C çarpılırsa $A \cdot B = T$ olduğundan

$$t_{i1} \cdot c_{1r} + t_{i2} \cdot c_{2r} + \dots + t_{in} \cdot b_{nr} = \sum_{k=1}^{n} t_{ik} \cdot c_{kr} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} (a_{ii} \cdot b_{jk}) \cdot c_{kr} \qquad (1)$$

dir. Diğer taraftan A, (BC) ile çarpılırsa $BC = S$ olduğundan

$$a_{i1}\cdot s_{1r} + a_{i2}\cdot s_{2r} + ... + a_{im}\cdot s_{mr} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\cdot s_{jr} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} a_{ii}\cdot(b_{jk}\cdot c_{kr}) \qquad (2)$$

dir. (1) ve (2) denklemler birbirlerine eşit olduğundan $A\cdot(B\cdot C) = (A\cdot B)\cdot C$ dir.

iii) $A = [a_{ii}]_{n\times n}$ ve $I_{n\times n}$ olsun. Bu takdirde $A\cdot I = T = [t_{ik}]$ şeklinde olsun. Öyleyse;

$$t_{ik} = a_{i1}\cdot 0 + a_{i2}\cdot 0 + \cdots + a_{ik}\cdot 1 + \cdots + a_{in}\cdot 0 = a_{ik}$$

dir. Elde edilen verileri matris formunda yazılırsa A matrisin kendisi olduğu gözükür. Buna göre,

$$A\cdot I = I\cdot A = A$$

dir.

vi, v, vi ve vii benzer şekilde ispatlanır.

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 8 \\ -2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ ve I_3 ise $A\cdot I = A$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $A\cdot I = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 8 \\ -2 & 0 & 5 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 8 \\ -2 & 0 & 5 \end{bmatrix} = A$

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ ve $A\cdot B = B\cdot A$ ise x nedir?

Çözüm:

$$A\cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} x & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x+0.4 & 2.0+0.2 \\ -3x+4.4 & -3.0+4.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & 0 \\ -3x+16 & 8 \end{bmatrix}$$

$$B\cdot A = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x.2+0.(-3) & x.0+0.4 \\ 4.2+2.(-3) & 4.0+2.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & 0 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$$

$A\cdot B = B\cdot A$

$$\begin{bmatrix} 2x & 0 \\ -3x+16 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & 0 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$$

$-3x + 16 = 2$

$x = \frac{14}{3}$ //

Bu örnekten şu sonucu çıkarabiliriz. 1.4. Teorem ii özelliği gereği değişme özelliği yoktur. Ama değişme özelliği olan istisnai örnekler vardır.

1.2. Not: $A \neq 0$ ve $B \neq 0$ olan iki matris olsun. $A \cdot B = 0$ olacak şekilde matrisler vardır.

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \neq 0$ ve $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \neq 0$ iki matrisi verilsin.

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-2 & 2-2 \\ -2+2 & -2+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0_{2\times 2}$$

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ matrisleri için $A \cdot B$ matrisini bulunuz.

Çözüm: $A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.4 + 4.(-1) & 1.0 + 4.0 \\ 0.4 + 0.(-1) & 0.0 + 0.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

1.3. Not: $A \neq 0$ ve $A \cdot B = A \cdot C$ iken $B \neq C$ olabilir. (Determinant konusunda böyle tanımlanan A matrisinin determinantı sıfır olduğu izah edilecektir. Yani $A \neq 0$ ama A matrisinin determinantı sıfırdır.)

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \neq 0$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ ve $C = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ matrisi verilsin. $B \neq C$ olduğu halde

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 11 \\ 22 & 22 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot C = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 11 \\ 22 & 22 \end{bmatrix}$$

olduğu halde $A \cdot B = A \cdot C$ dir.

1.5. Teorem: I, $n \times n$ boyutunda bir birim matris her $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$I^n = I$$

dir.

İspat: Önce $I^2 = I \cdot I$ yi bulalım. $I \cdot I = T = [t_{ik}]$ şeklinde olsun. Öyleyse,

$$t_{ii} = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + \cdots + 1 \cdot 1 + \cdots + 0 \cdot 0 = 1$$

dir. Elde edilen verileri matris formunda yazılırsa I matrisin kendisi olduğu gözükür. Buna göre

$$I^2 = I$$

dir. Benzer şekilde $I^3 = I$, ... , $I^n = I$ bulunur.

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ise A^{100} ü bulunuz.

Çözüm: $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

bulunur. Buna göre,

$A^2 = I$ olacağından $A^{100} = (A^2)^{50} = I^{50} = I$

elde edilir.

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ ise A^{200} ü bulunuz.

Çözüm: $A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} = 7 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 7 \cdot I$

$$A^{200} = (A^2)^{100} = (7 \cdot I)^{100} = 7^{100} I^{100} = 7^{100} \cdot I$$

Örnek: $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$ ise A^3 i bulunuz.

Çözüm: $A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$

$$A^3 = A \cdot A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} = 8 \cdot I_2$$

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ise A^{24} matrisini bulunuz.

Çözüm: $A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^2 & 0 \\ 2 \cdot 2 & 2^2 \end{bmatrix}$

$$A^3 = A \cdot A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2^2 & 0 \\ 2 \cdot 2 & 2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^3 & 0 \\ 3 \cdot 2 & 2^3 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = A \cdot A^3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2^3 & 0 \\ 3 \cdot 2 & 2^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^4 & 0 \\ 4 \cdot 2 & 2^4 \end{bmatrix}$$

$$\vdots$$

$$A^{24} = A \cdot A^{23} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2^{23} & 0 \\ 23 \cdot 2 & 2^{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^{24} & 0 \\ 24 \cdot 2 & 2^{24} \end{bmatrix}$$

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ matrisi verilmiş olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $A^n = \begin{bmatrix} 1 & 3n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ dir.

Çözüm: Bu örneği tümevarımla gösterelim.

i) $n = 1$ için $A^n = \begin{bmatrix} 1 & 3.1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ olup doğrudur.

ii) $n = k$ için $A^k = \begin{bmatrix} 1 & 3.k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ doğru olduğunu kabul edelim. $n = k + 1$ için $A^{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 3.(k+1) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ doğruluğunu gösterelim.

$$A^{k+1} = A.A^k = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 3.k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3.(k+1) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

O halde her $n \in \mathbb{N}$ için $A^n = \begin{bmatrix} 1 & 3n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ dir.

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ise A^{100} matrisini bulunuz.

Çözüm: $A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^2 & 0 \\ 2.2 & 2^2 \end{bmatrix}$

$$A^3 = A \cdot A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2^2 & 0 \\ 2\cdot 2 & 2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^3 & 0 \\ 3\cdot 2 & 2^3 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = A \cdot A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2^3 & 0 \\ 3\cdot 2 & 2^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^4 & 0 \\ 4\cdot 2 & 2^4 \end{bmatrix}$$

$$\vdots$$

$$A^{100} = A \cdot A^{99} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2^{99} & 0 \\ 99\cdot 2 & 2^{99} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^{100} & 0 \\ 100\cdot 2 & 2^{100} \end{bmatrix}$$

olur.

1.6. Teorem: $A_{n\times n} \neq 0$ ise $A^0 = I_{n\times n}$ dir.

İspat: $m \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$

$$A^0 = A^{m-m} = A^m A^{-m} = \frac{A^m}{A^m} = 1$$
$$A^0 I_{n\times n} = 1 \cdot I_{n\times n}$$
$$A^0 = I_{n\times n}$$

olur.

1.16. Tanım: A ve B kare matrisi verilmiş olsun. Eğer $A \cdot B = B \cdot A$ oluyorsa A ve B değişmeli matrisler, eğer $A \cdot B = -B \cdot A$ oluyorsa A ve B ters değişmeli matrisler adı verilir.

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ için $A \cdot B = B \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ olduğundan A ve B değişmeli matrislerdir.

Örnek: $C=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & -1\end{bmatrix}$ ve $D=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 4 & -1\end{bmatrix}$ için $C\cdot D=-D\cdot C=\begin{bmatrix}-3 & 2\\ -2 & 3\end{bmatrix}$ olduğundan C ve D ters değişmeli matrislerdir.

BİR MATRİSİN ÇARPMA İŞLEMİNE GÖRE TERSİ

1.17. Tanım: $A_{n\times n}$ kare matrisi verilmiş olsun. Eğer $A\cdot B=I_{n\times n}$ ve $B\cdot A=I_{n\times n}$ olacak şekilde B matrisi varsa, B matrisine A matrisinin tersi denir. $B=A^{-1}$ ile gösterilir. Burada,

$$A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=I_{n\times n}$$

olacaktır. Buna çarpmanın ters eleman özelliği de denir.

Örnek: $A=\begin{bmatrix}4 & 7\\ 1 & 2\end{bmatrix}$ matrisinin çarpmaya göre tersini bulunuz.

Çözüm: A matrisinin çarpmaya göre tersi $A^{-1}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ matrisi olsun.

$$A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=I_{n\times n}$$

olduğundan

$$\begin{bmatrix}4 & 7\\ 1 & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}4a+7c & 4b+7d\\ a+2c & b+2d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

Matrislerin eşitliğinden,

$$4a+7c=1 \quad 4b+7d=0$$
$$a+2c=0 \quad b+2d=1$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemleri çözersek,

$$a=2, b=-7, c=-1, d=4$$

bulunur. Buna göre $A=\begin{bmatrix}4 & 7\\ 1 & 2\end{bmatrix}$ matrisinin çarpmaya göre tersini $A^{-1}=\begin{bmatrix}2 & -7\\ -1 & 4\end{bmatrix}$ elde edilir.

Örnek: $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&4\\0&0&1\end{bmatrix}$ matrisinin çarpmaya göre tersini bulunuz.

Çözüm: A matrisinin çarpmaya göre tersi $A^{-1}=\begin{bmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{bmatrix}$ matrisi olsun.

$$A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=I_{n\times n}$$

olduğundan

$$\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&4\\0&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}a_1+2b_1+3c_1&a_2+2b_2+3c_2&a_3+2b_3+3c_3\\b_1+4c_1&b_2+4c_2&b_3+4c_3\\c_1&c_2&c_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

Matrislerin eşitliğinden,

$a_1+2b_1+3c_1=1$ $\quad a_2+2b_2+3c_2=0$ $\quad a_3+2b_3+3c_3=0$
$b_1+4c_1=0$ $\quad b_2+4c_2=1$ $\quad b_3+4c_3=0$
$c_1=0$ $\quad c_2=0$ $\quad c_3=1$

denklemleri elde edilir. Bu denklemleri çözersek,

$b_1=0$ $\quad b_2=1$ $\quad b_3=-4$
$a_1=1$ $\quad a_2=-2$ $\quad a_3=5$

bulunur. Buna göre $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&4\\0&0&1\end{bmatrix}$ matrisinin çarpmaya göre tersini

$A^{-1}=\begin{bmatrix}1&-2&5\\0&1&-4\\0&0&1\end{bmatrix}$ elde edilir. //

Matrisin tersinin bulunması ile ilgili iki yöntemden ileri de bahsedilecektir. Bunlardan biri determinant yöntemi determinant konusunda, diğeri Echeleon (Eşelon) yöntemi lineer denklem sistemleri konusundadır.

1.18. Tanım: $A_{n\times n}$ kare matrisi verilmiş olsun. Eğer $A\cdot B=I_{n\times n}$ ve

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_1x+a_0$$

polinomu tanımlı iken,

$$f(A) = a_n A^n + a_{n-1}A^{n-1} + a_{n-2}A^{n-2} + \cdots + a_1 A + a_0 I$$

biçiminde matrisleştirmeye polinom matrisi adı verilir.

Örnek: $f(x) = x^2 + 4x + 3$ ve $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ise f(A) i bulunuz.

Çözüm: $f(A) = A^2 + 4A + 3I$ olacağından

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix},\ 4A = \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix},\ 3I = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$f(A) = \begin{bmatrix} 14 & -6 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$$

bulunur.

1.7. Teorem: f(x) ve g(x) iki polinom ve $A_{n\times n}$ bir kare matris olsun. bu takdirde;

i) $(f+g)(A) = f(A) + g(A)$
ii) $(f \cdot g)(A) = f(A) \cdot g(A)$
ii) $f(A) \cdot g(A) = g(A) \cdot f(A)$

dir.

Bu teoremin ispatı okuyucuya bırakılmıştır.

1.19. Tanım: $A_{n\times n}$ kare matrisi verilmiş olsun. Eğer $A \cdot B = I_{n\times n}$ ve $B \cdot A = I_{n\times n}$ olacak şekilde B matrisi yoksa A matrisine **singüler (tekil) matris** denir. Yani singüler (tekil) matris tersi olmayan matrislere denir. Tersi olan matrislere ise **regüler (düzenli)** matris adı verilir.

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ matrisini tersi var mıdır?

Çözüm: $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ olsun. Buna göre $A \cdot A^{-1} = I$ olacağından,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+2c & b+2d \\ 3a+6c & 3b+6d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olmalıdır. Matrislerin eşitliğinden,

$$a + 2c = 1 \quad b + 2d = 0$$
$$3a + 6c = 0 \quad 3b + 6d = 1$$

denklemlerinin çözümü yoktur. Buna göre A matrisinin tersi yoktur, öyleyse singüler matristir.

1.8. Teorem: Eğer bir matrisin tersi varsa tektir.

İspat: B ve C, A matrisinin iki tane ters matrisleri olsunlar. O zaman,

$$A \cdot B = B \cdot A = I_n \text{ ve } A \cdot C = C \cdot A = I_n$$

dir. Şimdi

$$B \cdot I_n = B \cdot (A \cdot C) = (B \cdot A) \cdot C = I_n \cdot C = C$$

olup A matrisinin tersi varsa tektir.

1.9. Teorem: A ve B, $n \times n$ boyutunda terslenebilen kare matrisler olmak üzere, matrislerin çarpmaya göre tersinin aşağıdaki özellikler vardır:

i) $A \cdot I = I \cdot A = A$
ii) $(A^{-1})^{-1} = A$
iii) $(\alpha \cdot A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} \cdot A^{-1}$, $(\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$
iv) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$
v) $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$, $(k \in \mathbb{N})$

İspat: i) $A_{n\times n}$ ve $I_{n\times n}$ biçiminde iki matrisi verilsin.

$$A_{n\times n} \cdot I_{n\times n} = C_{n\times n}$$

olsun,

$$c_{ii} = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} = a_{i1} \cdot 0 + \dots + a_{ii} \cdot 1 + \dots + a_{in} \cdot b_{nn} = a_{ii}$$

biçimindedir. Buna göre $A \cdot I = I \cdot A = A$ dir.

ii) $A_{n\times n}$ matrisi ve $I_{n\times n}$ birim matrisi verilsin.

$$(A^{-1})^{-1} \cdot A^{-1} = I$$
$$[(A^{-1})^{-1} \cdot A^{-1}] \cdot A = I \cdot A$$
$$(A^{-1})^{-1} \cdot (A^{-1} \cdot A) = A$$
$$(A^{-1})^{-1} \cdot I = A$$
$$(A^{-1})^{-1} = A$$

iii) $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ ve $A_{n\times n}$ olsunlar.

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_{n\times n}$$

olduğunu biliyoruz. Burada

$$(\alpha \cdot A)\left(\frac{1}{\alpha} \cdot A^{-1}\right) = \left(\frac{1}{\alpha} \cdot A^{-1}\right)(\alpha \cdot A) = I_{n\times n}$$

olduğunu göstermeliyiz.

$$(\alpha \cdot A)\left(\frac{1}{\alpha} \cdot A^{-1}\right) = \alpha \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot A \cdot A^{-1} = I_{n\times n}$$

$$\left(\frac{1}{\alpha} \cdot A^{-1}\right)(\alpha \cdot A) = \alpha \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot A^{-1} \cdot A = I_{n\times n}$$

dir.

iv) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$ olduğunu göstermek için,

$$(A \cdot B) \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1}) = (B^{-1} \cdot A^{-1}) \cdot (A \cdot B) = I_{n\times n}$$

olduğunu göstermemiz gerekir.

$$\begin{aligned}(A \cdot B) \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1}) &= [(A \cdot B) \cdot B^{-1}] \cdot A^{-1} \\ &= [A \cdot (B \cdot B^{-1})] \cdot A^{-1} \\ &= [A \cdot I] \cdot A^{-1} \\ &= A \cdot A^{-1} \\ &= I\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(B^{-1} \cdot A^{-1}) \cdot (A \cdot B) &= B^{-1} \cdot [A^{-1} \cdot (A \cdot B)] \\ &= B^{-1} \cdot [I \cdot B] \\ &= B^{-1} \cdot B \\ &= I\end{aligned}$$

v) $A \cdot A^{-1} = I_{n\times n}$

$$(A \cdot A^{-1})^k = I^k$$

$$A^k \cdot (A^{-1})^k = I$$

$$(A^k)^{-1} \cdot [A^k \cdot (A^{-1})^k] = (A^k)^{-1} \cdot I$$

$$[(A^k)^{-1} \cdot A^k] \cdot (A^{-1})^k = (A^k)^{-1}$$

$$I \cdot (A^{-1})^k = (A^k)^{-1}$$

$$(A^{-1})^k = (A^k)^{-1}$$

dir.

1.10. Teorem: $A_{n\times n}$ ve $B_{n\times n}$ iki matris, $A \neq 0$ ve tersi olan matris olsun. Bu takdirde $A \cdot B = 0$ ise $B = 0$ dır.

İspat: $A \cdot B = 0$

$$A^{-1} \cdot (A \cdot B) = A^{-1} \cdot 0$$

$$(A^{-1} \cdot A) \cdot B = 0$$

$I \cdot B = 0$
$B = 0$

1.11. Teorem: $A_{n\times n}$, $B_{n\times n}$ ve $C_{n\times n}$ tersleri olan matrisleri için,
$A \cdot B = A \cdot C$ ise $B = C$
dır.

İspat: A, B ve C tersi bulunan birer matrisler olsun. Bu takdirde,
$A^{-1} \cdot (A \cdot B) = A^{-1} \cdot (A \cdot C)$
$(A^{-1} \cdot A) \cdot B = (A^{-1} \cdot A) \cdot C$
$I \cdot B = I \cdot C$
$B = C$
olur.

BİR MATRİSİN TRANSPOZU (DEVRİĞİ)

1.20. Tanım: Bir $m \times n$ boyutunda A matrisin aynı numaralı satırlarını sütun, sütunlarını da satır yapmakla elde edilen $n \times m$ boyutundaki yeni matrise A matrisinin transpozu (devriği) denir. A^T ile gösterilir.

$A = [a_{ij}]_{m\times n}$ ise $A^T = [a_{ji}]_{n\times m}$

Örnek: $B = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}_{2\times 3}$ ise $B^T = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}_{3\times 2}$ dir.

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ ise $3A^T + 2B^T$ nu bulunuz.

Çözüm: $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ise $A^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ ve $B^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ dir. Buna göre

$$3A^T + 2B^T = 3\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 3 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$$

elde edilir.

Örnek: $A=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 4 & 5\end{bmatrix}$ ise $A\cdot A^T$ nu bulunuz.

Çözüm: $A=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 4 & 5\end{bmatrix}$ ve $A^T=\begin{bmatrix}3 & 4\\ 2 & 5\end{bmatrix}$

$$A.A^T=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 4 & 5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3 & 2\\ 4 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}17 & 16\\ 32 & 33\end{bmatrix}$$

1.12. Teorem: $\alpha\in\mathbb{R}$, A, B, C birer matris olsunlar.

i) $(A^T)^T=A$

ii) $(\alpha\cdot A)^T=\alpha\cdot A^T$

iii) A ve B, $m\times n$ boyutunda iki matris ise $(A+B)^T=A^T+B^T$

iv) A, $m\times n$ boyutunda B, $n\times p$ boyutunda ise $(A\cdot B)^T=B^T\cdot A^T$

v) $(A^{-1})^T=(A^T)^{-1}$

İspat: i) $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ olmak üzere,

$$(A^T)^T=\left([a_{ij}]_{m\times n}^T\right)^T=[a_{ji}]_{n\times m}^T=[a_{ij}]_{m\times n}=A$$

dir.

ii) $A=[a_{ij}]_{m\times n}$, $\alpha\in\mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}(\alpha\cdot A^T)&=\left(\alpha\cdot[a_{ij}]_{m\times n}\right)^T\\ &=\left([\alpha\cdot a_{ij}]_{m\times n}\right)^T\\ &=[\alpha\cdot a_{ji}]_{n\times m}\\ &=\alpha\cdot[a_{ji}]_{n\times m}\\ &=\alpha\cdot\left([a_{ij}]_{m\times n}\right)^T\\ &=\alpha\cdot A^T\end{aligned}$$

dir.

iii) $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ ve $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ iki matris,

$$\begin{aligned}(A+B)^T&=\left([a_{ij}]_{m\times n}+[b_{ij}]_{m\times n}\right)^T\\ &=\left([a_{ij}+b_{ij}]_{m\times n}\right)^T\\ &=\left([c_{ij}]_{m\times n}\right)^T\\ &=[c_{ij}]_{m\times n}^T\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= [c_{ji}]_{n\times m} \\
&= [a_{ji} + b_{ji}]_{n\times m} \\
&= [a_{ji}]_{n\times m} + [b_{ji}]_{n\times m} \\
&= [a_{ij}]_{m\times n}^{T} + [b_{ij}]_{m\times n}^{T} \\
&= A^T + B^T
\end{aligned}
$$

dir.

iv) $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ ve $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ olsun. Matrislerde çarpma tanımından

$$A\cdot B = a_{i1}\cdot b_{1k} + a_{i2}\cdot b_{2k} + \ldots + a_{in}\cdot b_{nk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\cdot b_{jk} = c_{ik}$$

bulunur. Burada transpoz işlemi uygulanırsa

$$(A\cdot B)^T = [c_{ij}]_{m\times n}^{T} = [c_{ji}]_{n\times m}$$

$$c_{ki} = \sum_{j=1}^{n} a_{jk}\cdot b_{ji}$$

elde edilir. Buna göre,

$$(A\cdot B)^T = \left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\cdot b_{jk}\right]^T = \left[\sum_{j=1}^{n} b_{kj}\cdot a_{ji}\right] = B^T\cdot A^T$$

dir.

v) A tersi olan bir matris ise,

$$
\begin{aligned}
&A\cdot A^{-1} = I \\
&(A\cdot A^{-1})^T = I^T, \qquad && (I^T = I) \\
&(A^{-1})^T\cdot A^T = I, && (\text{iv den}) \\
&[(A^{-1})^T\cdot A^T]\cdot (A^T)^{-1} = I\cdot (A^T)^{-1} \\
&(A^{-1})^T\cdot [A^T\cdot (A^T)^{-1}] = (A^T)^{-1} \\
&(A^{-1})^T\cdot I = (A^T)^{-1} \\
&(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}
\end{aligned}
$$

dir.

Örnek: $A = \begin{bmatrix} a & 4 \\ 1 & b \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} 25 & -7 \\ -7 & 2 \end{bmatrix}$

matrisleri için $A\cdot A^T = B^T$ olduğuna göre, a ve b'nin değeri nedir?

Çözüm: $A^T = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 4 & b \end{bmatrix}$, $B^T = \begin{bmatrix} 25 & -7 \\ -7 & 2 \end{bmatrix}$

$$A \cdot A^T = \begin{bmatrix} a & 4 \\ 1 & b \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a & 1 \\ 4 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2+16 & a+4b \\ a+4b & 1+b^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 & -7 \\ -7 & 2 \end{bmatrix}$$

$a^2 + 16 = 25$ ise $a = \pm 3$

$1 + b^2 = 25$ ise $b = \pm 1$

bulunur. Ama $a + 4b = -7$ denklemini $a = 3$ için $b = -\frac{5}{2}$ sağlamaz. Fakat $a = -3$ için $b = -1$ sağlar.

SİMETRİK ve TERS SİMETRİK MATRİSLER

1.21. Tanım: Bir kare matrisin her elemanı esas (asal) köşegene göre simetrik olan matrislere simetrik matris denir.

Örnek: $A = \begin{bmatrix} x & m & t \\ m & y & n \\ t & n & z \end{bmatrix}$

Esas köşegen x, y, z olup m, t, n birer simetrik olduğundan A matrisi simetrik matristir.

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 5 & 8 & 9 \\ 0 & 7 & 9 & 10 \end{bmatrix}$

Esas köşegen 2, 3, 8, 10 olup -1, 2, 0, 5, 7, 9 birer simetrik olduğundan simetrik matristir.

1.22. Tanım: Bir kare matrisin esas (asal) köşegen üzerindeki elemanları sıfır ve esas köşegene göre simetrik elemanların toplamı sıfır olan matrislere ters simetrik matris denir.

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 0 & m & -t \\ -m & 0 & n \\ t & -n & 0 \end{bmatrix}$

Esas köşegen 0 olup simetrik elemanların toplamı sıfır olduğundan A matrisi ters simetrik matristir.

Örnek: $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & -2 & 8\\ -1 & 0 & 5 & -7\\ 2 & -5 & 0 & 9\\ -8 & 7 & -9 & 0\end{bmatrix}$

Esas köşegen 0 olup simetrik elemanların toplamı sıfır olduğundan A matrisi ters simetrik matristir.

1.13. Teorem: A bir kare matris olmak üzere,

i) $A^T = A$ ise A simetrik matristir

ii) $A^T = -A$ ise A ters simetrik matristir.

Bu teoremin ispatı okuyucuya bırakılmıştır.

Örnek: $A=\begin{bmatrix}2 & -3 & 4\\ -3 & 5 & 8\\ 4 & 8 & 7\end{bmatrix}$ matrisinin özelliği nedir?

Çözüm: $A=\begin{bmatrix}2 & -3 & 4\\ -3 & 5 & 8\\ 4 & 8 & 7\end{bmatrix}$ ve $A^T=\begin{bmatrix}2 & -3 & 4\\ -3 & 5 & 8\\ 4 & 8 & 7\end{bmatrix}$

olduğundan A matrisi simetrik matristir.

Örnek: $B=\begin{bmatrix}12 & 3 & 6\\ -3 & 9 & -11\\ -6 & 11 & 4\end{bmatrix}$ matrisinin özelliği nedir?

Çözüm: $B=\begin{bmatrix}12 & 3 & 6\\ -3 & 9 & -11\\ -6 & 11 & 4\end{bmatrix}=B^T$ ve $B^T=\begin{bmatrix}12 & -3 & -6\\ 3 & 9 & 11\\ 6 & -11 & 4\end{bmatrix}$

olduğundan B matrisi ters simetrik matristir.

1.14. Teorem: A bir kare matris olmak üzere,

i) $B = A + A^T$ ise $B^T = B$ yani B matrisi simetrik matris,
ii) $C = A - A^T$ ise $C^T = -C$ yani C matrisi ters simetrik matristir.

İspat:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n} \quad \text{ve} \quad A^T=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \cdots & a_{n2} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \cdots & a_{n3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n}$$

olduğundan

$$\text{i) } B=A+A^T=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \cdots & a_{n2} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \cdots & a_{n3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} a_{11}+a_{11} & a_{12}+a_{21} & a_{13}+a_{31} & \cdots & a_{1n}+a_{n1} \\ a_{21}+a_{12} & a_{22}+a_{22} & a_{23}+a_{32} & \cdots & a_{2n}+a_{n2} \\ a_{31}+a_{13} & a_{32}+a_{23} & a_{33}+a_{33} & \cdots & a_{3n}+a_{n3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+a_{1n} & a_{n2}+a_{2n} & a_{n3}+a_{3n} & \cdots & a_{nn}+a_{nn} \end{bmatrix}$$

olup B matrisi simetrik matristir.

ii benzer şekilde gösterilir.

Örnek: $A=\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 8 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ matrisini simetrik ve ters simetrik matrise çeviriniz.

Çözüm: $A^T=\begin{bmatrix} 3 & 4 & 8 \\ -2 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ olduğundan,

i) $B = A + A^T = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 8 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 4 & 8 \\ -2 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 9 \\ 2 & 10 & 2 \\ 9 & 2 & -2 \end{bmatrix}$ olup simetriktir

ii) $C = A - A^T = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 8 & 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 4 & 8 \\ -2 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -6 & -7 \\ 6 & 0 & 2 \\ 7 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ olup ters simetriktir.

1.15. Teorem: A ve B matrisleri simetrik (ters simetrik) olsunlar. AB nin simetrik (ters simetrik) olması için gerek ve yeter şart A ve B matrisleri değişmeli (ters değişmeli) matrisler olmalıdır.

İspat: $\Rightarrow$: A ve B matrisleri simetrik olsunlar. Bu takdirde,

$$(AB)^T = AB$$

dir. 1.12. Teorem ve 1.13. Teoreme göre,

$$(AB)^T = B^T A^T = BA$$

dir. Buna göre, $AB = BA$ olacağından A ve B matrisleri değişmeli matrislerdir.

$\Leftarrow$: A ve B matrisleri değişmeli matrisler olsun. O halde $AB = BA$ dir. Ayrıca

$$(AB)^T = B^T A^T = BA = AB$$

dir. Buna göre A ve B matrisleri simetriktir. //

Bu teorem ters simetrik matrisler içinde geçerli olduğunun ispatı okuyucuya bırakılmıştır.

ORTAGONAL MATRİSLER

1.23. Tanım: A bir kare matris olmak üzere, $A^T = A^{-1}$ ise A matrisine ortogonal matris denir.

Örnek: $C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ matrisinin ortogonal olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $C^T=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ ve $C^{-1}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$
olduğundan C matrisi ortogonal matristir.

Örnek: $A=\begin{bmatrix}\cos t & \sin t\\ -\sin t & \cos t\end{bmatrix}$ matrisinin ortogonal olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $A^{-1}=A^t=\begin{bmatrix}\cos t & -\sin t\\ \sin t & \cos t\end{bmatrix}$

NORMAL MATRİSLER

1.24. Tanım: A bir kare matris olmak üzere, $AA^T = A^TA$ ise A matrisine normal matris denir.

Örnek: $A=\begin{bmatrix}4 & -2\\ 2 & 4\end{bmatrix}$ matrisinin normal matris olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $A^T=\begin{bmatrix}4 & 2\\ -2 & 4\end{bmatrix}$ olacağından

$$AA^T=\begin{bmatrix}4 & -2\\ 2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 2\\ -2 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}20 & 0\\ 0 & 20\end{bmatrix}$$

$$A^TA=\begin{bmatrix}4 & 2\\ -2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & -2\\ 2 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}20 & 0\\ 0 & 20\end{bmatrix}$$

$AA^T = A^TA$ olduğundan A matrisi normal matristir. Ama bu A matrisi aynı zamanda simetri, ters simetri ve ortogonal matristir.

1.16. Teorem: A bir 2×2 normal matris olsun. O zaman A, ya simetriktir veya bir skaler matrisle bir ters simetrik matrisin toplamıdır.

Bu teoremin ispatı okuyucuya bırakılmıştır.

ÜÇGEN MATRİSLER

1.25. Tanım: Bir $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ kare matrisinde, $i < j$ için $a_{ij} = 0$ ise bu matrise üst üçgen matris; $i > j$ iken $a_{ij} = 0$ ise alt üçgen matris denir.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ veya } B=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

A üst üçgen matris, B alt üçgen matristir.

Örnek: $A=\begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & 0 \\ 9 & 8 & 3 \end{bmatrix}$ veya $B=\begin{bmatrix} 5 & 10 & 3 \\ 0 & 7 & -6 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$

A alt üçgen matris, B üst üçgen matrislerdir.

1.17. Teorem: $A_{n\times n}$ ve $B_{n\times n}$ üst (alt) üçgensel matrislerinde;
i) $A + B$ matrisi
ii) kA matrisi
iii) AB matrisi
iv) $f(x)$ polinomu için $f(A)$ matrisi
birer üst (alt) üçgensel matrislerdir.

PERİYODİK MATRİSLER

1.26. Tanım: A bir kare matris olsun. $k \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $A^{k+1} = A$ ise A matrisine periyodik matris denir. Periyodik matrislerde özel olarak $k = 1$ ise idempotent matris, $A^k = 0$ ise nilpotent matris denir.

Örnek: $A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ matrisinin periyodunu bulunuz.

Çözüm: $A^3=\begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}1&-2&-6\\-3&2&9\\2&0&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-2&-6\\-3&2&9\\2&0&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-2&-6\\-3&2&9\\2&0&-3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&-2&-6\\-3&2&9\\2&0&-3\end{bmatrix}$$

$$=A$$

olduğundan periyodu $k=2$ dir.

Örnek: $A=\begin{bmatrix}2&-1&1\\-3&4&-3\\-5&5&-4\end{bmatrix}$ ise A^2 yi bulunuz.

Çözüm: $A^2=\begin{bmatrix}2&-1&1\\-3&4&-3\\-5&5&-4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-1&1\\-3&4&-3\\-5&5&-4\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}4+3-5&-2-4+5&2+3-4\\-6-12+9&3+16-15&-3-12+12\\-10-15+20&5+20-20&-5-15+6\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2&-1&1\\-3&4&-3\\-5&5&-4\end{bmatrix}$$

$$=A$$

olduğundan periyodu $k=1$ dir. Buna göre bu matris idempotent matristir.

Örnek: $A=\begin{bmatrix}2&-2&-4\\-1&3&4\\1&-2&-3\end{bmatrix}$ matrisinin periyodunu bulunuz.

Çözüm: $A^2=\begin{bmatrix}2&-2&-4\\-1&3&4\\1&-2&-3\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$=A$$

olduğundan periyodu $k = 1$ dir. Buna göre bu matris idempotent matristir.

Örnek: $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$ matrisinin nilpotent matris olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $A^3=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}^3=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ olduğundan nilpotent matristir.

PERMÜTASYON MATRİSLER

1.27. Tanım: Her satırında ve sütununda yalız bir elemanı 1 ve diğer bütün elemanları 0 olan kare matrislere permütasyon matrisleri denir.

Örnek: $A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ matrisi bir permütasyon matrisidir.

Örnek: Her birim matris, bir permütasyon matrisidir.

DAİREVİ DÖNME MATRİSLER

1.28. Tanım: Her bir satırı, bir önceki satırın ileriye doğru terimlerinin bir adım dönmesiyle elde edilen ve ilk satırın bir dairevi pemürasyonu olan

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

biçimindeki matrisler, dairevi dönme matrislerdir.

Örnek: $A=\begin{bmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 3 \end{bmatrix}$ bir dairevi dönme matrisidir.

Örnek: Her permütasyon matrisi bir dairevi dönme matrisidir.

BLOK MATRİSLERİ

1.29. Tanım: Yatay ve düşey doğruları kullanarak bir A matrisini birkaç parçaya ayırarak elde edilen matrise A'nın blokları (veya hücreleri) adı verilir.

Örnek: $A=\begin{bmatrix} 4 & -1 & \varphi & 5 & 3 \\ e & 2 & 2 & 10 & 8 \\ 2 & \pi & 3 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ matrisi $A=\left[\begin{array}{ccc:cc} 4 & 1 & \varphi & 5 & 3 \\ e & 2 & 2 & 0 & 8 \\ \hdashline 2 & \pi & 3 & 0 & 7 \end{array}\right]$ biçiminde bloklara ayrılırsa;

$$A_1=\begin{bmatrix} 4 & 1 & \varphi \\ e & 2 & 2 \end{bmatrix},\ A_2=\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 8 \end{bmatrix},\ A_3=\begin{bmatrix} 2 & \pi & 3 \end{bmatrix},\ A_4=\begin{bmatrix} 0 & 7 \end{bmatrix}$$

olur.

1.30. Tanım: Bir A matrisi aşağıdaki şekildeki gibi blok matrisi olsun.

$$A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \cdots & A_{2n} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & \cdots & A_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & A_{m3} & \vdots & A_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}$$

Bu blok matrisini $A=\left[A_{ij}\right]_{m\times n}$ biçiminde gösterelim.

$A = \left[A_{ij}\right]_{m\times n}$ ve $B = \left[B_{ij}\right]_{m\times n}$ gibi iki blok matrisini alalım.

i) $A + B = \left[A_{ij}\right]_{m\times n} + \left[A_{ij}\right]_{m\times n} = \left[A_{ij} + B_{ij}\right]_{m\times n}$

ii) $kA = \left[kA_{ij}\right]_{m\times n}$

dir.

1.31. Tanım: $A = \left[A_{ij}\right]_{m\times n}$ ve $B = \left[A_{jk}\right]_{n\times p}$ şeklinde iki matrisi verilsin.

$$C_{ik} = \begin{bmatrix} A_{i1} & A_{i2} & \dots & A_{in} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} B_{1k} \\ B_{2k} \\ \vdots \\ B_{nk} \end{bmatrix} = A_{i1}.B_{1k} + A_{i2}.B_{2k} + \dots + A_{in}.B_{nk} = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}\cdot B_{jk}$$

toplamıyla bulunan $C = [C_{ik}]_{m\times p}$ matrisine A ile B blokl matrislerinin çarpımı denir ve

$$A\cdot B = \left[A_{ij}\right]_{m\times n}\left[B_{jk}\right]_{n\times p} = [B_{ik}]_{m\times p} = C$$

biçimindedir.

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

ise AB'yi bulunuz.

Çözüm: Bu iki matrisi kolon matrislerine ayıralım.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix},\ A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ A_4 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 6 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix},\ B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ A_4 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

olup A_2, A_3, B_2, B_3 birer sıfır matrislerdir. Buna göre;

$$A=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1\\5&3\end{bmatrix} & 0_{2\times3}\\ 0_{2\times2} & \begin{bmatrix}3&2&-1\\6&5&2\end{bmatrix}\end{bmatrix} \text{ ve } B=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}4&-2\\2&3\end{bmatrix} & 0_{2\times2}\\ 0_{2\times3} & \begin{bmatrix}2&1\\4&2\\1&1\end{bmatrix}\end{bmatrix}$$

olacağından

$$AB=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1\\5&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&-2\\2&3\end{bmatrix} & 0_{2\times2}\\ 0_{2\times2} & \begin{bmatrix}3&2&-1\\6&5&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1\\4&2\\1&1\end{bmatrix}\end{bmatrix}$$

$$AB=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}10&-1\\26&-1\end{bmatrix} & 0_{2\times2}\\ 0_{2\times2} & \begin{bmatrix}13&6\\30&18\end{bmatrix}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10&-1&0&0\\26&-1&0&0\\0&0&13&6\\0&0&30&18\end{bmatrix}$$

sonucu bulunur.

ÇÖZÜMLÜ ALIŞTIRMALAR

1. Elemanları, $(\mathbb{Z}_{/5},+,\cdot)$ olan,

$$A=\begin{bmatrix}\overline{2}&\overline{1}\\-\overline{1}&\overline{0}\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}\overline{1}&-\overline{2}\\\overline{0}&\overline{2}\end{bmatrix}$$

matrisleri için de çarpma kuralı geçerli ise $A\cdot B$ çarpımı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\begin{bmatrix}\overline{2}&\overline{1}\\\overline{1}&\overline{0}\end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix}\overline{2}&\overline{2}\\\overline{2}&\overline{0}\end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix}\overline{2}&\overline{1}\\\overline{1}&\overline{2}\end{bmatrix}$ D) $\begin{bmatrix}\overline{2}&\overline{2}\\\overline{2}&\overline{4}\end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix}\overline{2}&\overline{1}\\\overline{1}&\overline{2}\end{bmatrix}$

Çözüm: $$A\cdot B=\begin{bmatrix}\overline{2}&\overline{1}\\\overline{1}&\overline{0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\overline{2}&\overline{4}\\\overline{3}&\overline{1}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\overline{2}\cdot\overline{2}+\overline{1}\cdot\overline{3} & \overline{2}\cdot\overline{4}+\overline{1}\cdot\overline{1}\\\overline{1}\cdot\overline{2}+\overline{0}\cdot\overline{3} & \overline{1}\cdot\overline{4}+\overline{0}\cdot\overline{1}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\overline{2}&\overline{2}\\\overline{2}&\overline{4}\end{bmatrix}$$

Cevap: D

2. $A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ -1 & 1\end{bmatrix}$ ise A^{300} matrisi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(-2)^{100}\cdot I$ B) $2^{100}\cdot I$ C) $3^{100}\cdot I$ D) $5^{100}\cdot I$ E) $7^{100}\cdot I$

Çözüm: $A^2=\begin{bmatrix}1 & 3\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3\\ -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 6\\ -2 & -2\end{bmatrix}$

$$A^3=\begin{bmatrix}1 & 3\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & 6\\ -2 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-8 & 0\\ 0 & -8\end{bmatrix}=(-8)\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=(-2)^3 I$$

$$(A^3)^{100}=(-2\cdot I)^{100}=(-2)^{100}.I^{100}=2^{100}\cdot I$$

Cevap: B

3. $\begin{bmatrix}3 & 2\\ 0 & -3\end{bmatrix}^{100}$ matrisinin sonucu $3^n I$ (I birim matris) ise n'nin değeri kaçtır?

A) 100 B) 200 C) 300 D) 400 E) 500

Çözüm: $\begin{bmatrix}3 & 2\\ 0 & -3\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 0 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 2\\ 0 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9 & 0\\ 0 & 9\end{bmatrix}=9\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

$$\left(\begin{bmatrix}3 & 2\\ 0 & -3\end{bmatrix}^2\right)^{50}=\left(9\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right)^{50}$$

$$\begin{bmatrix}3 & 2\\ 0 & -3\end{bmatrix}^{50}=9^{50}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}^{50}$$

$$\begin{bmatrix}3 & 2\\ 0 & -3\end{bmatrix}^{100}=3^{100}I$$

Cevap: A

4. Bir $A_{m\times n}$ matrisi ve $B=A^T-A$ verilsin. B^T (transpozesi) ifadesinin sonucu nedir?

A) A B) B C) –A D) A^T E) –B

Çözüm: $B^T = (A^T - A)^T = (A^T)^T - A^T = A - A^T = -B$

Cevap: E

5. $\begin{bmatrix} x & 5 \\ 10 & y \end{bmatrix}$ matrisinin tersi kendisine eşit olduğuna göre a aşağıdakilerden hangisidir?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

Çözüm: $A = A^{-1}$ ve $A \cdot A^{-1} = I$ ise $A^2 = I$ dir.

$$\begin{bmatrix} x & 5 \\ 10 & y \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x & 5 \\ 10 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$x \cdot x + 5 \cdot 10 = 1$

$x = 7$

Cevap: C

6. $\begin{bmatrix} 5 & -2 & x & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ x \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = [15]$ olduğuna göre, a kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: $[5 \cdot 2 - 2x + 3x + 4 \cdot 1] = [15]$

$x = 1$

Cevap: A

7. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & . \\ . & b \end{bmatrix}$ ise $a - b$ toplamı kaçtır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Çözüm:

$a = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 4 \cdot 4 = 21$ ve $b = 2 \cdot 3 + 1 \cdot 1 + 5 \cdot 2 = 17$

$a-b=21-17=4$

Cevap: B

8. $A=\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ ve $f(x)=x^2-2x+1$ toplamı aşağıdaki matrislerden hangisine eşittir?

A) $\begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 8 & 7 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} 7 & 8 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$ D) $\begin{bmatrix} 8 & 7 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ E) $7\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Çözüm: $f(x)=x^2-2x+1=(x-1)^2$ ise $f(A)=(A-I)^2$ dir.

$$A-I=\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(A-I)^2=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3\cdot3-2\cdot1 & 3\cdot2+2\cdot1 \\ -1\cdot3-1\cdot1 & -1\cdot2+2\cdot1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 7 & 8 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$$

Cevap: C

9. $A=\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ ve $B=\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ olduğuna göre, $(A+B)^T$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ D) $\begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

Çözüm:

$$A+B=\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(A+B)^T=\begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Cevap: D

10. $\begin{bmatrix} 4x+y \\ -3x+2y \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -3x+y \\ 2x-y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$

eşitliğini sağlayan xy nin değerleri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 0 B) –1 C) 1 D) –2 E) 2

Çözüm: Matrislerde toplamadan

$$\begin{bmatrix} 4x+y \\ -3x+2y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3x+y \\ 2x-y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x+2y \\ -x+y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

bulunur. Matrislerin eşitliği gereği

$$x + 2y = 5 \text{ ve} -x + y = 1$$

denklemleri elde edilir. Bu iki denklem çözülürse $x = 1, y = 2$ bulunur.

Cevap: E

KAYNAKÇA

1. H. Hilmi Hacısalihoğlu, Lineer Cebir, Gazi Üniversitesi Yayınları, Ankara, 1975.
2. Hüseyin Bilgiç, Lineer Cebir Ders Notları, Kahramanmaraş Sütçü İmam Üniversitesi, Kahramanmaraş, 2015.
3. M. Zeki DERMAN, Ökkeş ÖZKÖSELER, Serdar GÜLMEZ, Matematik III Zafer Yayınları, Ankara, 2005.
4. Ahmet HANÇERLİOĞLU, Faniye ALAN, Üniversiteye Hazırlık Matematik Seti, Tümay Yayınları, İstanbul Yayıncılık, 2006, Ankara.
5. Seymeur LİPSCHUTZ Ph. Dr., Çev. H. Hilmi HACISALİHOĞLU, Schaum Serisinden Lineer Cebir, Japonya.
6. Yrd. Doç. Dr. Nezahat ÇETİN, Öğr. Grv. Dr. Nevin ORHUN, Lineer Cebir, Anadolu Üniversitesi Yayınları: 1074, AÖF Yayınları: 589, 1998, Eskişe-hir.