2. BÖLÜM
DETERMİNANTLAR

DETERMİNANT KAVRAMI

2.1. Tanım: Sonlu bir M kümesinin bütün f permütasyon fonksiyonlarının kümesi S_n ile gösterelim.

$$S_n = \{f \mid f : M \xrightarrow{1-1 \text{ Örten}} M\}$$

olsun. Bir $A_{n\times n}$ kare matrisinde

$$\det A = \sum_{k=1}^{n!} (-1)^{k+1} a_{f_k(1)1} . a_{f_k(2)2} \cdots a_{f_k(n)n}$$

$$\det A = \sum_{k=1}^{n!} (-1)^{k+1} \prod_{\ell=1}^{n} a_{f_k(\ell)\ell}$$

ifadesine $A_{n\times n}$ matrisinin determinantı denir. A matrisinin determinantı $\det A$ veya $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ ile gösterilir.

2.1. Teorem: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ matrisinin determinantı

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}.a_{22} - a_{21}.a_{12}$$

şeklindedir.

İspat: 2.1. tanıma göre, $M = \{1, 2\}$ kümesini alalım. Bu kümenin permütasyon fonksiyonları,

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Buna göre $f_1(1) = 1, f_1(2) = 2, f_2(1) = 2, f_2(2) = 1$ olduğundan,

$$\det A = \sum_{k=1}^{2!} (-1)^{k+1} a_{f_k(1)1} . a_{f_k(2)2}$$

$$= a_{f_1(1)1} \cdot a_{f_1(2)2} - a_{f_2(1)1} \cdot a_{f_2(2)2}$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$
olur.

Örnek: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}$ determinantının sonucu nedir?

Çözüm: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 1.4 - 2(-1) = 6$

Örnek: $\begin{vmatrix} 1996 & 1997 \\ 1994 & 1995 \end{vmatrix}$ determinantının sonucu nedir?

Çözüm: $\begin{vmatrix} 1996 & 1997 \\ 1994 & 1995 \end{vmatrix} = 1996.1995 - 1997.1994$

burada 1994 = a seçilirse işlemimiz,
$$(a+2)(a+1) - (a+3) \cdot a = a^2 + 2a + a + 2 - a^2 - 3a = 2$$
bulunur.

Örnek: $\begin{vmatrix} x & 5 \\ x+1 & 6 \end{vmatrix} = 0$ ise x in değeri nedir?

Çözüm: $6x - 5(x+1) = 0$
$6x - 5x - 5 = 0$
$x = 5$

Örnek: $A = \begin{bmatrix} \cos x & -\sin x \\ -\sin x & \cos x \end{bmatrix}$ matrisinin determinantını bulunuz.

Çözüm: $\det A = \begin{vmatrix} \cos x & -\sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 - \sin^2 x = \cos 2x$

Örnek: $\begin{vmatrix} xy + y^2 & x^2 - xy \\ (x+y)^2 & x^2 - y^2 \end{vmatrix}$ determinantını bulunuz.

Çözüm: $\begin{vmatrix} xy+y^2 & x^2-xy \\ (x+y)^2 & x^2-y^2 \end{vmatrix}$

$$= (xy+y^2)(x^2-y^2) - (x^2-xy)(x+y)^2$$
$$= y(x+y)(x-y)(x+y) - x(x-y)(x+y)^2$$
$$= (x+y)^2(yx-y^2-x^2+xy)$$
$$= -(x+y)^2(x-y)^2$$

2.2. Teorem: $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ matrisinin determinantı

$$\det A = a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{31}a_{22})$$

biçimindedir.

İspat: 2.1. tanıma göre, $M=\{1,2,3\}$ kümesini alalım. Bu kümenin permütasyon fonksiyonları

$$f_1=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix},\ f_2=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix},\ f_3=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$$
$$f_4=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix},\ f_5=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix},\ f_6=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$$

şeklindedir. Buna göre,

$$f_1(1)=1, f_1(2)=2, f_1(3)=3, f_2(1)=1, f_2(2)=3, f_2(3)=2,$$
$$f_3(1)=2, f_3(2)=3, f_3(3)=1, f_4(1)=2, f_4(2)=1, f_4(3)=3,$$
$$f_5(1)=3, f_5(2)=2, f_5(3)=1, f_6(1)=3, f_6(2)=1, f_6(3)=2$$

olduğundan

$$\det A=\sum_{k=1}^{3!}(-1)^{k+1}a_{f_k(1)1}.a_{f_k(2)2}.a_{f_k(3)3}$$

$$= a_{f_1(1)1}a_{f_1(2)2}a_{f_1(3)3} - a_{f_2(1)1}a_{f_2(2)2}a_{f_2(3)3} + a_{f_3(1)1}a_{f_3(2)2}a_{f_3(3)3}$$
$$-a_{f_4(1)1}a_{f_4(2)2}a_{f_4(3)3} - a_{f_5(1)1}a_{f_5(2)2}a_{f_5(3)3} + a_{f_6(1)1}a_{f_6(2)2}a_{f_6(3)3}$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{31}a_{22}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23}$$

olarak bulunur.//

Bu denklem

$$\det A = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}$$

biçimin de yazılabilir. Bu yazım determinantı bulmak için daha kolay olacağından ikinci yazımı tercih edeceğiz.

Örnek: $A=\begin{bmatrix}4 & 2 & 6\\ 3 & -1 & 7\\ 5 & 0 & 1\end{bmatrix}$ matrisin determinantını bulunuz.

Çözüm:
$\det A = 4((-1)\cdot 1 - 0\cdot 7) - 2(3\cdot 1 - 5\cdot 7) + 6(3\cdot 0 - 5\cdot(-1)) = 84$
ya da

$$\begin{vmatrix}4 & 2 & 6\\ 3 & -1 & 7\\ 5 & 0 & 1\end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix}-1 & 7\\ 0 & 1\end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix}3 & 7\\ 5 & 1\end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix}3 & -1\\ 5 & 0\end{vmatrix} = 84$$

dir.

ALT DETERMİNANT (MİNÖR)

2.2. Tanım: Bir $A = [a_{ij}]_{n\times n}, (i, j \in \mathbb{N})$ bir kare matrisi verilsin. A matrisinin i-inci satır ve j-inci sütunu silindikten sonra elde edilen yeni matrisin determinantına a_{ij} elemanının alt determinantı veya minörü denir.

Örnek: $A=\begin{bmatrix}1 & 3 & -1\\ 2 & 0 & 4\\ 5 & -2 & 1\end{bmatrix}$ matrisinde a_{23} ün alt determinantını bulunuz.

Çözüm: a_{23} ün alt determinantını bulmak için matrisin 2. satırı ve 3. sütunu kapatılması gerekir. Buna göre,

$$\det A_{23} = \begin{vmatrix}1 & 3\\ 5 & -2\end{vmatrix} = -17$$

olarak bulunur.

EŞ ÇARPAN (KOFAKTÖR)

2.3. Tanım: Bir $A = [a_{ij}]_{n\times n}, (i, j \in \mathbb{N})$ bir kare matrisi verilsin. A matrisinin a_{ij} elemanına ait alt determinantın $(-1)^{i+j}$ işaretiyle çarpımına a_{ij} elemanın eş çarpanı (kofaktörü veya işaretli minörü) denir. Yani eş çarpan,

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}(det\,A_{ij})$$
şeklindedir.

Örnek: $A=\begin{bmatrix}1 & 3 & -1\\ 2 & 0 & 4\\ 5 & -2 & 1\end{bmatrix}$ matrisinde bütün a_{12} elemanına ait alt determinant ve eş çarpanını bulunuz.

Çözüm: A matrisinin 1. satır 2. sütununu silerek alt matrisini şu şekilde buluruz.

$$\det A_{12}=\begin{vmatrix}2 & 4\\ 5 & 1\end{vmatrix}=-18$$

Şimdi de kofaktörünü elde edelim:

$$A_{12} = (-1)^{1+2}(-18) = 18$$

dir.

2.1. Not: Eş çarpan (kofaktör) tanımına göre,

i) $A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}_{2\times 2}$ matrisin işaretleri $\begin{vmatrix}+ & -\\ - & +\end{vmatrix}$

ii) $A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}_{3\times 3}$ matrisin işaretleri $\begin{vmatrix}+ & - & +\\ - & + & -\\ + & - & +\end{vmatrix}$

iii) $A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}\end{bmatrix}_{4\times 4}$ matrisin işaretleri $\begin{vmatrix}+ & - & + & -\\ - & + & - & +\\ + & - & + & -\\ - & + & - & +\end{vmatrix}$

şeklindedir.

DETERMİNANTIN GENEL ÇÖZÜMÜ (LAPLACE YÖNTEMİ)

2.1. teorem ve 2.2. teoremden 3×3 veya daha fazla kare matrislerin determinantlarının çözmek için bir genelleme şu şekilde yapılır.

Bir determinant herhangi bir satıra veya herhangi bir sütuna göre açabiliriz. 3 × 3 boyutundaki determinant 2.2. teoremde 1. satıra göre bulmuştuk. Ama istenen satıra ya da sütuna göre yapılırsa değişen bir şey olmaz.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

matrisinde 1. satıra göre açılımı yazalım. Alt determinant ve eş çarpanlara göre

$$\det A = (-1)^{1+1} a_{11}|A_{11}| + (-1)^{1+2} a_{12}|A_{12}| + (-1)^{1+3} a_{13}|A_{13}|$$
$$= (-1)^{1+1} a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

bulunur. Benzer şekilde diğer satır ya da sütunlar yapılır.

2.3. Teorem: $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ bir kare matrisin determinantının i. satıra göre açılımı:

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik}$$

dir.

İspat: Bu teoremin ispatını tümevarım metoduyla yapacağız.

P(2) için $n = 2$ olacağından

$$\det A = \sum_{k=1}^{2} a_{ik}A_{ik} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

bulunup P(2) için doğrudur.

P(m) için doğru olsun, yani $\det A = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}A_{ik}$ olsun. P(m + 1) için $\det A = \sum_{k=1}^{m+1} a_{ik}A_{ik}$ determinantı aşikardır. Öyleyse P(m + 1) için de doğrudur.

Örnek: $\begin{vmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$ determinantını 2. satıra göre açınız.

Çözüm: $\begin{vmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -4\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 35$

Örnek: 4×4 boyutundaki matrisin determinantı 1. satıra göre,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}_{4\times 4}$$

matrisin açılımı;

$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14}$$

biçimindedir.

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ -1 & 3 & 1 & 8 \\ 4 & -2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ matrisin determinantını bulunuz.

Çözüm: A matrisini 4. satıra göre açalım.

$$\det A = -3\begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 8 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ -1 & 1 & 8 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 3 & 8 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -3\left[-2\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}\right]$$

$$= -3[-2(32-5) + (2-12)]$$

$$= 192$$

2.2. Not: 4×4 veya daha fazla boyuttaki matrisin determinantlarını bulurken, sıfırı çok olan satır veya sütuna göre açmak işlemleri kolaylaştıracaktır.

2.4. Teorem: $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ bir kare matrisin determinantının i-inci satıra göre açılımı;

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik}$$

iken j-inci satıra göre yazılırsa

$$\sum_{k=1}^{n} a_{jk} A_{jk} = 0$$

dir. (i-inci satıra göre yazılan kofaktör, j-inci satıra göre açılırsa, sonuç 0 olur.)

İspat: Bu teoremin ispatını tümevarım metoduyla yapacağız.

P(2) için $n = 2$ olacağından

$$\sum_{k=1}^{2} a_{jk} A_{ik} = a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} = a_{21}a_{22} - a_{22}a_{21} = 0$$

bulunup P(2) için doğrudur.

P(m) için doğru olsun, yani $\sum_{k=1}^{m} a_{jk} A_{ik} = 0$ olsun. P(m + 1) için $\sum_{k=1}^{m+1} a_{jk} A_{ik} = 0$ determinantı aşikardır. Öyleyse P(m + 1) için de doğrudur.

Örnek: $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 3 & t & 2 \\ 5 & -2 & 4 \end{bmatrix}$ matrisi için $a_{21}A_{31} + a_{22}A_{32} = 10$ ise t değeri kaçtır?

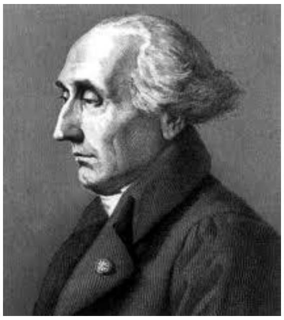
Çözüm: 2.4. teoremden $a_{21}A_{31} + a_{22}A_{32} + a_{23}A_{33} = 0$ olacağından $a_{23}A_{33} = -10$ bulunur. Buna göre

$$2\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & t \end{vmatrix} = -10$$

$$t = 1$$

dir.

SARRUS YÖNTEMİ

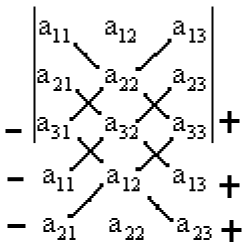


Pierre Frederic Sarrus
10 Mart 1798, Saint-Affrique, Fransa - 20 Kasım 1861, Saint-Affrique, Fransa

Bu yöntem sadece 3×3 boyutundaki matrislerin determinantı için geçerlidir. Bu yöntem aşağıda görüldüğü gibi ilk iki satır determinantının altına tekrar yazılır veya ilk iki sütun determinantının yanına tekrar yazılır. Okların ucuna yazılan işaretler dikkate alınarak toplanır.

2.5. Teorem: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ determinantında;

i) İlk iki satır matrisin sağına aynen yazılıp pozitif işaretler toplanıp, negatif işaretler çıkarılarak



$= (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{11}a_{32}a_{23} + a_{21}a_{12}a_{33})$
bulunur,

ii) İlk iki sütun determinantın yanına aynen yazılıp pozitif işaretler toplanıp, negatif işaretler çıkarılarak,

$$\begin{array}{ccc|cc} & & - & - & - \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ & & + & + & + \end{array}$$

$= (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{11}a_{32}a_{23} + a_{21}a_{12}a_{33})$ bulunur,

İspat: 2.2. teoremde
$\det A = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22})$ olduğunu biliyoruz. Buna göre
$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{31}a_{23} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{31}a_{22}$
$= (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23}) - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{11}a_{32}a_{23} + a_{21}a_{12}a_{33})$
bulunur.

Örnek: $\begin{vmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 7 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ determinantının değeri nedir?

Çözüm: $\left|\begin{array}{ccc|cc} 5 & 2 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 3 \\ 7 & -2 & 1 & 7 & -2 \end{array}\right. = (15+56+0)-(-21-40+0) = 132$

Örnek: $\begin{vmatrix} 2 & x & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 15$ ise x in değeri nedir?

Çözüm: $\left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & x & 1 & 2 & x \\ -1 & 2 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 & 1 & 4 \end{array}\right. = 15$

$(12 + 0 - 4) - (2 + 0 - 3x) = 15$
$x = 3$

DETERMİNATI BLOK MATRİSLER YÖNTEMİYLE ÇÖZÜMÜ

2.6. Teorem: Köşegen blokları $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n$ olan bir üst (alt) üçgensel blok matris M olsun. Bu takdirde;

$$\det M = \det A_1 \cdot \det A_2 \cdot \det A_3 \cdots \det A_n$$

dir.

İspat: Burada $n = 2$ için, yani $M = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix}$ şeklinde bir karesel blok matris için yapılacaktır. Genelleme tümevarım yöntemiyle gösterilmesi okuyucuya bırakılmıştır.

$$\det M = \det A \cdot \det B - \det 0 \cdot \det C = \det A \cdot \det B$$

dır.

Örnek: $M = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 8 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 6 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ matrisinin determinatını blok matrisler yöntemiyle bulunuz.

Çözüm: $A_1 = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 8 & 3 & 2 \\ 6 & 7 & 5 \end{bmatrix}$, $0_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A_4 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 6 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

olacağından

$$M = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0_3 & A_4 \end{bmatrix}$$

olup üst üçgensel matris olur. Buna göre,

$$\begin{aligned} \det M &= \det A_1 \cdot \det A_4 \\ &= \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 10 \cdot 39 \\ &= 390 \end{aligned}$$

elde edilir.

2.3. Not: Blok matrisler yöntemi üst veya alt blok matris olmadığında daima doğru değildir. Yani A,B, C, D karesel matrisler olmak üzere $M=\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ olsun. O zaman $\det M = \det A \cdot \det D - \det B \cdot \det C$ ifadesi genellikle yanlıştır.

DETERMİNANTIN ÖZELLİKLERİ

2.6. Teorem: Bir determinantın bir satırdaki veya bir sütundaki elemanları 0 ise, o determinantın değeri 0 olur.

İspat: $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ matrisin i-inci satıra göre determinantı:

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik}$$

dır. i-inci satır 0 ise,

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} 0.A_{ik} = 0$$

olur.

Örnek: $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} 4 & 1 \\ 5 & 3 \\ 0 & 0 \end{matrix}$

$= (4\cdot 3\cdot 0 + 1\cdot 8\cdot 0 + 2\cdot 5\cdot 0) - (2\cdot 3\cdot 0 + 4\cdot 8\cdot 0 + 1\cdot 5\cdot 0)$
$= 0$

2.7. Teorem: Bir determinantın bir satırı ile çarpılması demek, herhangi bir satırın veya sütunun o sayı ile çarpılması demektir.

İspat: $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ matrisin i-inci satıra göre determinantı:

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik}$$

olsun. $c \in \mathbb{R}$ için,

$$c.\det A = c\sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} c a_{ik} A_{ik}$$

dir. O halde i-inci satır c ile çarpımıdır.

Örnek: $4\cdot\begin{vmatrix}6 & 4 & -2\\5 & 10 & 0\\3 & 7 & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}6 & 4 & -2\\20 & 40 & 0\\3 & 7 & 2\end{vmatrix}$ (2. satıra göre yazılır)

Örnek: 3×3 matrisin determinantının 1. satırı $c\in\mathbb{R}$ ile çarpılırsa,

$$c\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\a_{21} & a_{22} & a_{23}\\a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}ca_{11} & ca_{12} & ca_{13}\\a_{21} & a_{22} & a_{23}\\a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$$

olur.

Örnek: $x^2y=\sqrt{7}$ olduğuna göre $\begin{vmatrix}5 & -1 & 2x^2\\3 & 0 & x^2\\2y & -3y & 4x^2y\end{vmatrix}$ determinantının sonucu nedir?

Çözüm: 3. satırda y, 3. sütunda x^2 olduğundan,

$$\begin{vmatrix}5 & -1 & 2x^2\\3 & 0 & x^2\\2y & -3y & 4x^2y\end{vmatrix}=x^2y\begin{vmatrix}5 & -1 & 2\\3 & 0 & 1\\2 & -3 & 4\end{vmatrix}$$

olur. Burada,

$$\begin{vmatrix}5 & -1 & 2\\3 & 0 & 1\\2 & -3 & 4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}5 & -1 & 2\\3 & 0 & 1\\2 & -3 & 4\end{vmatrix}\begin{matrix}5 & -1\\3 & 0\\2 & -3\end{matrix}=7$$

olduğundan,

$$\begin{vmatrix}5 & -1 & 2x^2\\3 & 0 & x^2\\2y & -3y & 4x^2y\end{vmatrix}=7\sqrt{7}$$

bulunur.

2.1. Sonuç: $A_{n\times n}$ matrisinde, bir determinantın her satırı ile $c\in\mathbb{R}$ çarpılması demek, o determinantı c^n ile çarpmaktır.

$$\det cA=c^n\det A$$

dir.

Örnek: $A=\begin{bmatrix}3 & 5\\ 2 & 4\end{bmatrix}$ ise $|A|$ ve $|5A|$ determinantlarını bulunuz.

Çözüm: $|A|=\begin{vmatrix}3 & 5\\ 2 & 4\end{vmatrix}=3\cdot4-2\cdot5=2$

$$|5A|=\begin{vmatrix}15 & 25\\ 10 & 20\end{vmatrix}=15\cdot20-10\cdot25=50$$

$$|5A|=50=5^2\cdot2=5^2|A|$$

2.8. Teorem: Bir determinantın iki satırı ve sütunu yer değiştirirse, determinantın işaretleri değişir.

İspat: Determinantın tanımından i-inci ve $(i+1)$-inci satırları sırasıyla

$$(-1)^{i+1}a_{f_i(1)1}a_{f_i(2)2}\cdots a_{f_i(n)n}+(-1)^{i+1+1}a_{f_{i+1}(1)1}a_{f_{i+1}(2)2}\cdots a_{f_{i+1}(n)n}$$

olsunlar. Burada i-inci ve $(i+1)$-inci satırları yer değiştirirse,

$$(-1)[(-1)^{i+1}a_{f_{i+1}(1)1}a_{f_{i+1}(2)2}\cdots a_{f_{i+1}(n)n}+(-1)^{i}a_{f_i(1)1}a_{f_i(2)2}\cdots a_{f_i(n)n}]$$

olur.

Örnek: $\begin{vmatrix}5 & 2\\ -1 & 3\end{vmatrix}$ ve $\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 5 & 2\end{vmatrix}$ determinantlarını bulunuz.

Çözüm: $\begin{vmatrix}5 & 2\\ -1 & 3\end{vmatrix}=5.3-2.(-1)=17$ ve $\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 5 & 2\end{vmatrix}=(-1).2-5.3=-17$

$$\begin{vmatrix}5 & 2\\ -1 & 3\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 5 & 2\end{vmatrix}$$

Örnek: 3×3 matrisin determinantının 1. ve 2. satırı yer değişirse

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$$

olur.

2.9. Teorem: A matrisinin iki satırdaki veya sütundaki terimler eşit ise determinantın değeri sıfırdır.

İspat: A matrisinin determinantının i-inci ve j-inci satırlarının terimleri eşit ve A matrisinin determinantı $\det A$ olsun. i-inci ve j-inci satırları yer değiştirilirse 2.8. Teoremden $-\det A$ olur. i-inci ve j-inci satırlarının terimlerinin determinantları eşit olacağından

$$\det A = -\det A$$
$$\det A = 0$$

olur.

Örnek: $\begin{vmatrix} 3a & m & n+p \\ 3a & n & m+p \\ 3a & p & m+n \end{vmatrix}$ determinantını bulunuz.

Çözüm: Determinantta 1. sütunda 3a çarpanı olduğundan

$$\begin{vmatrix} 3a & m & n+p \\ 3a & n & m+p \\ 3a & p & m+n \end{vmatrix} = 3a\begin{vmatrix} 1 & m & n+p \\ 1 & n & m+p \\ 1 & p & m+n \end{vmatrix}$$

bulunur. 2. sütunu 3. sütuna eklenirse,

$$3a\begin{vmatrix} 1 & m & m+n+p \\ 1 & n & m+n+p \\ 1 & p & m+n+p \end{vmatrix}$$

elde edilir. 3. sütunda $m+n+p$ çarpanı ortak olduğundan,

$$3a(m+n+p)\begin{vmatrix} 1 & m & 1 \\ 1 & n & 1 \\ 1 & p & 1 \end{vmatrix} = 0$$

olur. (1. ve 3. sütun eşit olduğundan determinantın değeri 0 dır.)

2.2. Sonuç: A matrisinin iki satırdaki veya sütundaki terimler orantılı ise determinantın değeri sıfırdır.

Örnek: $\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 8 & 4 & -2 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ determinantının değeri nedir?

Çözüm: Determinantın 1. satırının 2 katı 2. satırdır.

$$\left|\begin{matrix} 4 & 2 & -1 \\ 8 & 4 & -2 \\ 5 & 1 & 0 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 4 & 2 \\ 8 & 4 \\ 5 & 1 \end{matrix} = (0-20-8)-(-20-8+0)=0$$

Örnek: 3×3 matrisin determinantının 2. satır, 1. satırın k katı ise,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

olur.

2.10. Teorem: $A_{n\times n}$ matrisinin ise determinantın aynı numaralı satırları ve sütunları yer değiştirirse, determinantın değeri değişmez. Yani, $\det A = \det A^T$ dir.

İspat: $A_{n\times n}$ bir matris ise

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{k=1}^{n!} (-1)^{k+1} a_{f_k(1)1} . a_{f_k(2)2} \dots a_{f_k(n)n} \\ &= \sum_{k=1}^{n!} (-1)^{k+1} a_{1f_k(1)} . a_{2f_k(2)} \dots a_{nf_k(n)} \\ &= \det A^T \end{aligned}$$

dir.

2.11. Teorem: A ve B matrisleri için

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$$

dir.

İspat: Bu teoremin doğruluğunu 3×3 boyutundaki matrislerin determinantı için gösterelim. Teorem $n \times n$ boyutundaki matrislerin determinantı için genelleştirilir.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{ ve } B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

olsun. Bu takdirde

$$AB=\begin{bmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

dir. Buna göre

$$\begin{aligned}
\det(AB) &= \begin{vmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} \\ a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{vmatrix} \\
&= a_{11}a_{21}\underbrace{\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{11} & b_{12} \end{vmatrix}}_{0} + a_{11}a_{22}\underbrace{\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}}_{\det B} + a_{12}a_{21}\underbrace{\begin{vmatrix} b_{21} & b_{22} \\ b_{11} & b_{12} \end{vmatrix}}_{-\det B} + a_{12}a_{22}\underbrace{\begin{vmatrix} b_{21} & b_{22} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}}_{0} \\
&= (a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})\det B \\
&= \det A \det B
\end{aligned}$$

olur. //

A ve B matrislerinin determinantları i-inci satıra (sütuna) göre sırasıyla

$$\det A=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik} \text{ ve } \det B=\sum_{k=1}^{n} b_{ik}B_{ik}$$

için 2.3. teoreme göre A.B matrisinin determinantı

$$\det(A\cdot B)=\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}A_{ij}B_{jk}\right)$$

olur.

Örnek: $A=\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ ve $B=\begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$ matrislerinde $\det A\cdot B = \det A\cdot \det B$ yi gerçekleyiniz.

Çözüm: $A\cdot B=\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 48 & 58 \\ 14 & 27 \end{bmatrix}$

$$\det A\cdot B=\begin{vmatrix}48 & 58\\ 14 & 27\end{vmatrix}=48\cdot 27-14\cdot 58=484$$

$$\begin{vmatrix}5 & 4\\ 1 & 3\end{vmatrix}=5\cdot 3-1\cdot 4=11 \text{ ve } \begin{vmatrix}8 & 6\\ 2 & 7\end{vmatrix}=8\cdot 7-2\cdot 6=44$$

olduğundan $11\cdot 44 = 484$ olup $\det A\cdot B = \det A\cdot \det B$ dir.

2.4. Sonuç: A bir matris ve $m\in\mathbb{N}$ ise

$$\det A^m = (\det A)^m$$

dir.

Örnek: $A=\begin{bmatrix}5 & 4\\ 1 & 2\end{bmatrix}$ ise $\det A$ ve $\det A^2$ yi bulunur.

Çözüm: $\det A=\begin{vmatrix}5 & 4\\ 1 & 2\end{vmatrix}=5\cdot 2-1\cdot 4=6$

$$A^2=\begin{bmatrix}5 & 4\\ 1 & 2\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}5 & 4\\ 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}29 & 28\\ 7 & 8\end{bmatrix}$$

$$\det A^2=\begin{vmatrix}29 & 28\\ 7 & 8\end{vmatrix}=29\cdot 8-28\cdot 7=36$$

olduğundan $6^2 = 36$ olup $\det A^2 = (\det A)^2$ dir.

2.12. Teorem: Bir A matrisinde herhangi bir satırdaki veya sütundaki her eleman iki elemanın toplamı biçiminde yazılabiliyorsa determinant aynı sıradan iki determinantın toplamı biçiminde yazılabilir.

İspat: Bir A matrisinde i-inci satır $a_{ik} = x_{ik} + y_{ik}, (1\le i,k\le n)$ olacak şekilde tanımlansın. Bu takdirde,

$$\begin{aligned}\det A &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik}\\ &= \sum_{k=1}^{n}(x_{ik}+y_{ik})A_{ik}\\ &= \sum_{k=1}^{n}x_{ik}A_{ik}+\sum_{k=1}^{n}y_{ik}A_{ik}\end{aligned}$$

elde edilir.

Örnek: 3×3 matrisin 1. satırı iki sayının toplamı biçiminde yazılırsa,

$$\begin{vmatrix} x_{11}+y_{11} & x_{12}+y_{12} & x_{13}+y_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

biçiminde olur.

Örnek: $\begin{vmatrix} 9 & 4 & 8 \\ 5 & 0 & 1 \\ -1 & 7 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5+4 & 3+1 & 6+2 \\ 5 & 0 & 1 \\ -1 & 7 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 6 \\ 5 & 0 & 1 \\ -1 & 7 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \\ -1 & 7 & 3 \end{vmatrix}$

Örnek: $\begin{vmatrix} 1907 & 1908 \\ 1910 & 1909 \end{vmatrix}$ determinantını bulunuz.

Çözüm: $\begin{vmatrix} 1907 & 1908 \\ 1910 & 1909 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1907 & 1908 \\ 1907+3 & 1908+1 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 1907 & 1908 \\ 1907 & 1908 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1907 & 1908 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 0 + 1907 \cdot 0 + 1907 \cdot 1 - 3 \cdot 1908$$

$$= -3817$$

2.13. Teorem: Bir A matrisinde bir satırdaki veya sütundaki tüm elemanları $k \in \mathbb{R} - \{0\}$ ile çarpılır ve başka satıra (sütuna) karşılıklı olarak eklenirse determinantın değeri değişmez.

İspat: Bir A matrisinde i-inci satır verilsin, j-inci terimin c katı i-inci katı toplanırsa 2.4. teoremden,

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (a_{ik} + c a_{jk}) A_{ik}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik} + c \sum_{k=1}^{n} a_{jk} A_{ik}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik} + c.0$$
$$= \det A$$

elde edilir.

Örnek: 3×3 matrisin determinantında 3. satırın c katı 1. satır ile toplanırsa,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}+ca_{31} & a_{12}+ca_{32} & a_{13}+ca_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

elde edilir.

Örnek: $\begin{vmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ determinantın değerini bulunuz.

Çözüm: 1. satırın 2 katı 3. satıra ilave edilirse,

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1+2.4 & 0+2.3 & 2+2.(-1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 9 & 6 & 0 \end{vmatrix}$$

olur. Bu determinant 1. satıra göre açılırsa,

$$4\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 9 & 0 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 9 & 6 \end{vmatrix} = 25$$

bulunur.

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^4 & y^4 & z^4 \end{bmatrix}$ matrisinin determinantını bulunuz.

Çözüm: 1. sütun 2. ve 3. sütundan çıkarılırsa,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1-1 & 1-1 \\ x & y-x & z-x \\ x^2 & y^2-x^2 & z^2-x^2 \end{bmatrix}$$

olur. 1. satıra göre determinant açılırsa,

$$\det A = 1(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} y-x & z-x \\ y^2-x^2 & z^2-x^2 \end{vmatrix}$$
$$= (y-x)(z^2-x^2)-(z-x)(y^2-x^2)$$
$$= (y-x)(z-x)(z+x)-(z-x)(y-x)(y+x)$$
$$= (y-x)(z-x)(z+x-y-x)$$
$$= (y-x)(z-x)(z-y)$$

bulunur.

Örnek: $A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{bmatrix}$ matrisinin determinantını bulunuz.

Çözüm: 1. sütunda a, 2. sütunda b, 3. sütunda c çarpanları olduğundan,

$$\det A = abc\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

bulunur. Elde edilen determinantta 1. sütun 2. ve 3. sütundan çıkarılırsa,

$$\det A = abc\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix}$$

olur. 1. satıra göre determinant açılırsa,

$$\det A = abc(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} b-a & c-a \\ b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix}$$
$$= abc[(b-a)(c^2-a^2)-(c-a)(b^2-a^2)]$$
$$= abc(b-a)(c-a)(c+a-b-a)$$
$$= abc(b-a)(c-a)(c-b)$$

bulunur.

2.14. Teorem: Bir $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ alt ya da üst üçgen matrisi ise,

$$\det A = a_{11}\cdot a_{22}\cdots a_{nn}$$

dir.

İspat: A bir üst üçgen matris olsun.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\det A = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}\begin{vmatrix} a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\vdots$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn}$$

olur.

2.15. Teorem: $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ kare matrislerinde,

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

dir.

İspat: 2.11. Teorem gereği,

$$\det A \cdot B = \det A \cdot \det B$$

olduğundan $B = A^{-1}$ seçilirse,

$$\det A \cdot A^{-1} = \det A \cdot \det A^{-1}$$

$$1 = \det A \cdot \det A^{-1}$$

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

bulunur.

2.4. Not: 1. $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ kare matrislerinin çarpmaya göre tersinin olması için $\det A \neq 0$ olmalıdır.

2. $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ kare matrislerinde $\det A = 0$ ise A matrisi tekil (singüler) matris olur. Eğer $\det A \neq 0$ ise A matrisi **regüler** matris olur.

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 3 & -9 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$ matrisi veriliyor. $c \cdot I_2 + A$ matrisini süngüler olması için c'nin değerleri ne olmalıdır?

Çözüm: $c.I_2 + A = c.\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -9 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -9 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c+3 & -9 \\ -4 & c+3 \end{bmatrix}$$

olur. Burada $\det(c \cdot I_2 + A) = 0$ olması için,

$$\det(c \cdot I_2 + A) = (c+3)^2 - 36 = 0$$

$$c = 9 \text{ ve } c = -3$$

olmalıdır.

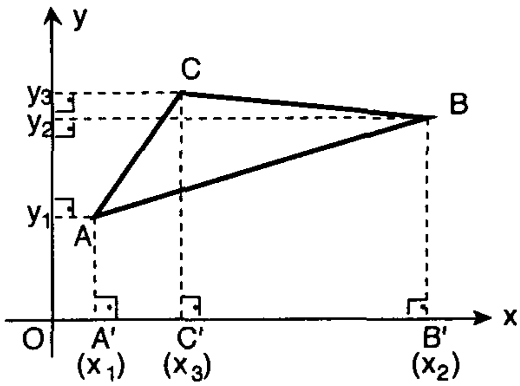
DETERMİNANTLA ÜÇGENİN ALANININ BULUNMASI

2.16. Teorem: Köşe koordinatları $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$ olan ABC üçgeninin alanı,

$$A(ABC) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

biçimindedir.

İspat: $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$ üç nokta olmak üzere ABC üçgeninin alanını,



$$A(ABC) = \frac{1}{2}|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)|$$

olduğu Analitik Geometri derslerinde Doğrunun Analitiği konusunda gösterildi.

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)$$

olduğundan istenen elde edilir.

Örnek: Köşeleri $A(2,\ 4), B(-1,\ 3), C(5,\ 0)$ olan ABC üçgeninin alanı kaç birim karedir?

Çözüm: Burada $x_1 = 2,\ y_1 = 4, x_2 = -1,\ y_2 = 3,\ x_3 = 5, y_3 = 0$ olduğundan,

$$A(ABC) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{15}{2} br^2$$

elde edilir.

EK MATRİS

2.20. Tanım: $A_{n \times n}$ bir kare matrisi olmak üzere A'nın her a_{ij} elemanları yine o elemanların kofaktörleri (eş çarpanları) konularak bulunan matrisin transpozuna A nın ek matrisi denir. Ek A ile gösterilir.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{21} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n} \quad \text{ise}$$

$$\text{Ek}\,A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}^{T}=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

Örnek: $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ matrisinin ek matrisini bulunuz.

Çözüm: $A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=7 \qquad A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=1$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=-5 \qquad A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=3$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=6 \qquad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=-4$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}=-5 \qquad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}=-10$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=11$$

$$\text{Ek}\,A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}^{T}=\begin{bmatrix} 7 & 1 & -5 \\ 3 & 6 & -4 \\ -5 & 10 & 11 \end{bmatrix}^{T}=\begin{bmatrix} 7 & 3 & -5 \\ 1 & 6 & -10 \\ -5 & -4 & 11 \end{bmatrix}$$

Örnek: $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ matrisinin ek matrisini bulunuz.

Çözüm: (Bu çözümde $|\ |$ sembolünü kullanacağız. Bu sembol determinantı gösteriyor. Mutlak değer ile karıştırmamak gerekir.)

$A_{11} = (-1)^{1+1}|3| = 3 \qquad A_{12} = (-1)^{1+2}|-1| = 1$
$A_{21} = (-1)^{2+1}|1| = -1 \qquad A_{22} = (-1)^{2+2}|2| = 2$

$$\text{Ek}\, A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

2.5. Not: 2×2 matrisin ek matrisini bulmak için kısaca şu formülü kullanabiliriz.

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ ise } \text{Ek}\, A = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

BİR MATRİSİN ÇARPMAYA GÖRE TERSİNİN DETERMİNANTLA YOLUYLA BULUNMASI

Bir matrisin çarpmaya göre tersini Echelon (Eşhelon) yoluyla bulunmasını matrisler konusunda görmüştük. Şimdi de determinantla bulunmasını göstereceğiz.

2.17. Teorem: $A_{n\times n}$ kare matris ve $\det A \neq 0$ olan matrisinin tersi,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{Ek}\, A$$

şeklindedir.

İspat: 2.3. teoremde A matrisinin determinantı i-inci satıra (sütuna) göre açılımı

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik}$$

ve 2.4. teoremde j-inci satıra göre yazılırsa,

$$\sum_{k=1}^{n} a_{jk} A_{ik} = 0$$

olduğunu biliyoruz.

$$A \cdot \text{Ek}\, A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \det A & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det A & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \det A \end{bmatrix}$$

$$= \det A \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \det A \cdot I_n$$

yani, $\det A \cdot I_n = A \cdot Ek\ A$ olur. Elde edilen bu eşitliğin iki tarafı A^{-1} ile çarpılırsa

$$A^{-1} \cdot \det A \cdot I_n = A^{-1} \cdot A \cdot Ek\ A$$
$$\det A \cdot (A^{-1} \cdot I_n) = (A^{-1} \cdot A) \cdot Ek\ A$$
$$\det A \cdot A^{-1} = I_n \cdot Ek\ A$$
$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \mathrm{Ek}\ A$$

bulunur.

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ matrisinin tersini bulunuz.

Çözüm: Bu matrisin determinantını bulalım.

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{matrix} = (24-10+0)-(0+10-9) = 13$$

Ek matris örneğinde bu matrisin ekini bulmuştuk. Buna göre,

$$A^{-1} = \frac{1}{13} \begin{bmatrix} 7 & 3 & -5 \\ 1 & 6 & -10 \\ -5 & -4 & 11 \end{bmatrix}$$

elde edilir.

2.3. Sonuç: $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ matrisinin tersi $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ şeklindedir.

Örnek: $A=\begin{bmatrix}8 & 4\\ 1 & 2\end{bmatrix}$ matrisinin tersini bulunuz.

Çözüm: $A^{-1}=\dfrac{1}{8.2-1.4}\begin{bmatrix}2 & -4\\ -1 & 8\end{bmatrix}=\dfrac{1}{12}\begin{bmatrix}2 & -4\\ -1 & 8\end{bmatrix}$

Örnek: $A=\begin{bmatrix}4 & 7\\ 1 & 2\end{bmatrix}$ ve $B=\begin{bmatrix}5 & -3\\ 10 & 8\end{bmatrix}$ matrisleri veriliyor. $A\cdot C=B$ eşitliğini sağlayan C matrisini bulunuz.

Çözüm: $\det A=\begin{vmatrix}4 & 7\\ 1 & 2\end{vmatrix}=1\neq 0$ olmak üzere,

$$A\cdot C=B$$
$$A^{-1}(A\cdot C)=A^{-1}B$$
$$(A^{-1}A)\cdot C=A^{-1}B$$
$$C=A^{-1}B$$

olacağından

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\text{Ek } A$$
$$A^{-1}=\frac{1}{1}\begin{bmatrix}2 & -7\\ -1 & 4\end{bmatrix}$$
$$C=\begin{bmatrix}2 & -7\\ -1 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & -3\\ 10 & 8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-60 & -62\\ 35 & 35\end{bmatrix}$$

elde edilir.

Örnek: $A=\begin{bmatrix}5 & 1\\ 3 & 2\end{bmatrix}$ ve $B=\begin{bmatrix}3 & 5\\ 1 & 2\end{bmatrix}$ matrisleri veriliyor. $A^{-1}X\cdot B=I_2$ eşitliğini sağlayan X matrisini bulunuz.

Çözüm: $\det A=\begin{vmatrix}5 & 1\\ 3 & 2\end{vmatrix}=7\neq 0$ ve $\det A=\begin{vmatrix}3 & 5\\ 1 & 2\end{vmatrix}=1\neq 0$ olmak üzere,

$$A^{-1}X\cdot B=I_2$$
$$A(A^{-1}X\cdot B)=A\cdot I_2$$
$$(A\cdot A^{-1})X\cdot B=A$$

$$X \cdot B = A$$
$$X \cdot B \cdot B^{-1} = A \cdot B^{-1}$$
$$X = A \cdot B^{-1}$$

olacağından,

$$B^{-1} = \frac{1}{\det B}.\text{Ek}\, B$$
$$B^{-1} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$
$$X = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -22 \\ -4 & -9 \end{bmatrix}$$

elde edilir.

BİR MATRİSİN RANKI

2.21. Tanım: $A_{n\times n}$ kare matrisinin determinantı sıfırdan farklı olan ve boyutu en büyük olan matrisin türüne A matrisinin rankı denir ve rank A ile gösterilir.

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \\ -1 & 7 & 3 \end{bmatrix}$ matrisinin rankını bulunuz.

Çözüm: $\det A = \left|\begin{matrix} 4 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \\ -1 & 7 & 3 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 4 & 1 \\ 5 & 0 \\ -1 & 7 \end{matrix}$

$$= (0 - 1 + 70) - (0 + 7 + 15)$$
$$= 49 \neq 0$$

dır. Bu matris 3×3 boyutunda olduğundan rankı rank $A = 3$ dür.

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ -2 & -6 & -4 \end{bmatrix}$ matrisinin rankını bulunuz.

Çözüm: $\det A = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ -2 & -6 & -4 \end{vmatrix} \begin{matrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \\ -2 & -6 \end{matrix}$

$= (-48 - 4 - 12) - (-12 - 48 - 4)$
$= 0$

olduğundan bu matrisin rankı rank $A < 3$ dür. Şimdi 2×2 boyutundaki alt matrislerin herhangi birinin sıfırdan farklı olup olmadığına bakalım. Burada 3. satır ve 3. sütunu atalım. $A_1 = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ alalım. $\det A_1 = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 11 \neq 0$ olduğundan bu matrisin rankı rank $A = 2$ dir.

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & -2 & 8 \end{bmatrix}$ matrisinin rankını bulunuz.

Çözüm: A, matrisi 3×4 boyutunda olduğundan rank $A \leq 3$ olur. A matrisinin alt kare matrislerinden en büyüğü 3×3 boyutundan matrislerdir. Bunlardan birinin determinantı sıfırdan farklı olup olmadığına bakalım. Eğer böyle sıfır olmayan determinant bulamazsak 2×2 boyutundaki alt matrislere bakacağız.

Burada 4. sütunu atarak oluşan $A_1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & -2 \end{bmatrix}$ matrisini inceleyelim.

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

dır. Bu matris 3×4 boyutunda olduğundan rankı rank $A = 3$ dür.

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & c & 4 \\ 5 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ matrisinin hangi c değeri için rankı 3 olamaz?

Çözüm: det $A = 0$ ise rank $A < 3$ olur.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & c & 4 \\ 5 & 0 & -1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 2 & 1 \\ 3 & c \\ 5 & 0 \end{matrix}$$
$$= (-c + 20 + 0) - (0 + 0 + 3)$$
$$= 0$$

ise $c = 23$ olur.

ÇÖZÜMLÜ ALIŞTIRMALAR

1. $\begin{vmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & k & 6 \end{vmatrix}$

determinantı –2'ye eşit olması için k'nın değeri aşağıdakilerden hangisi olmalıdır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Cevap: Sarrus yöntemini uygularsak,

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & k & 6 \end{vmatrix}\begin{matrix} 4 & 5 \\ 1 & 2 \\ 0 & k \end{matrix} = -2$$
$$(48 + 0 + 2k) - (0 + 12k + 30) = -2$$
$$48 + 2k - 12k - 30 = -2$$
$$k = 2$$

bulunur.

Cevap: B

2. $\begin{vmatrix} \cos 15 & \sin 15 \\ \sin 15 & \cos 15 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \sin 15 & \cos 15 \\ -\sin 15 & \cos 15 \end{vmatrix}$

determinantının çarpımı aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ E) 1

Cevap: $\begin{vmatrix} \cos 15 & \sin 15 \\ \sin 15 & \cos 15 \end{vmatrix} = \cos^2 15 - \sin^2 15 = \cos 30 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ve

$$\begin{vmatrix} \sin 15 & \cos 15 \\ -\sin 15 & \cos 15 \end{vmatrix} = \sin 15 \cdot \cos 15 - (-\sin 15 \cdot \cos 15) = 2\sin 15 \cos 15 = \sin 30 = \frac{1}{2}$$

olduğuna göre,

$$\begin{vmatrix} \cos 15 & \sin 15 \\ \sin 15 & \cos 15 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \sin 15 & \cos 15 \\ -\sin 15 & \cos 15 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

elde edilir.

Cevap: C

3. $\begin{vmatrix} -5 & 2 & 3 \\ 1 & -4 & 3 \\ 1 & 2 & x \end{vmatrix} = 0$ denkleminde x'in değeri nedir?

A)–3 B)–2 C) –1 D) 1 E) 2

Çözüm: $\begin{vmatrix} -5 & 2 & 3 \\ 1 & -4 & 3 \\ 1 & 2 & x \end{vmatrix} \begin{matrix} -5 & 2 \\ 1 & -4 \\ 1 & 2 \end{matrix} = 0$

$(20x + 6 + 6) - (-12 - 30 + 2x) = 0$
$20x + 12 + 42 - 2x = 0$
$18x = -54$
$x = -3$

Cevap: A

4. $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ olmak üzere $\det(A - \lambda I_2) = 0$ eşitliğini sağlayan λ değerleri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 0 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm:

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 3 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$

dir. $\det(A - \lambda I) = 0$ olduğuna göre,

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(4-\lambda)(2-\lambda)-3=0$$
$$\lambda^2-6\lambda+5=0$$
$$\lambda=1, \lambda=5$$

bulunur.

Cevap: E

5. $A=\begin{bmatrix}4 & 7\\ 1 & 2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$ olmak üzere, AX = B eşitliğini sağlanıyorsa X matrisinin elemanlarının en büyüğü nedir?

A) 3 B) 4 C) 6 D) 7 E) 8

Çözüm: AX = B ise $X = A^{-1}1 \cdot B$

$$A=\begin{bmatrix}4 & 7\\ 1 & 2\end{bmatrix} \text{ ise } \det A=\begin{vmatrix}4 & 7\\ 1 & 2\end{vmatrix}=1$$

$$A^{-1}=\frac{1}{4\cdot 2-7\cdot 1}\begin{bmatrix}2 & -7\\ -1 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -7\\ -1 & 4\end{bmatrix}$$

$$X=A^{-1}\cdot B=\begin{bmatrix}2 & -7\\ -1 & 4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5 & -12\\ 5 & 7\end{bmatrix}$$

olur.

Cevap: D

6. $\begin{vmatrix}3856 & 3857\\ 3854 & 3855\end{vmatrix}$ determinantının değeri nedir?

A) $(3854)^2$ B) 3856 C) 3857 D) 4 E) 2

Çözüm: 3854 = x olsun.

$$\begin{vmatrix}3856 & 3857\\ 3854 & 3855\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x+2 & x+3\\ x & x+1\end{vmatrix}=(x+2)(x+1)-x(x+3)=2$$

Cevap: E

7. A matrisinin tersi $A^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -3\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ olmak üzere,

$$A\cdot\begin{bmatrix}1\\x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}13\\4\end{bmatrix}$$

olduğuna göre, x'in değeri kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: $A=(A^{-1})^{-1}=\dfrac{1}{1\cdot1-(-3)\cdot0}\begin{bmatrix}1&3\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&3\\0&1\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}1&3\\0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}13\\4\end{bmatrix}$$

$x = 4$

Cevap: D

8. $A=\begin{bmatrix}1&2\\4&3\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1&2\\0&k\end{bmatrix}$ matrisleri

$\det(A+B)=\det A+\det B$

eşitliğini sağlıyor. Buna göre, m kaçtır?

A) 10 B) 8 C) 6 D) 5 E) 4

Çözüm: $A=\begin{bmatrix}1&2\\4&3\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1&2\\0&k\end{bmatrix}$

$$\det A=\begin{vmatrix}1&2\\4&3\end{vmatrix}=1.3-4\cdot3=-9$$

$$\det B=\begin{vmatrix}1&2\\0&k\end{vmatrix}=1\cdot k-0\cdot2=k$$

$$A+B=\begin{bmatrix}1&2\\4&3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&2\\0&k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&4\\4&3+k\end{bmatrix}$$

$$\det(A+B)=\begin{vmatrix}2&4\\4&3+k\end{vmatrix}=2\cdot(3+k)-4\cdot4$$

$k = 6 + 2k - 16$

$k = 10$

Cevap: A

9. $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot A_{2\times2} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

eşitliğini sağlayan $A_{2\times2}$ matrisinin determinantı kaçtır?

A) −1 B) −2 C) 0 D) 1 E) 2

Çözüm: $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ve $C = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ olsun.

$$B \cdot A = C \text{ ise } A = B^{-1}C$$

$$B^{-1} = \frac{1}{\det B} \operatorname{Ek} B = \frac{1}{3\cdot2 - 1\cdot5} \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2$$

Cevap: B

10. $\begin{vmatrix} \log_2 3 & \log_5 2 \\ \log_2 25 & \log_3 8 \end{vmatrix}$ determinantının değeri kaçtır?

A) −1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

Çözüm: $\begin{vmatrix} \log_2 3 & \log_5 2 \\ \log_2 25 & \log_3 8 \end{vmatrix} = \log_2 3 \cdot \log_3 8 - \log_2 25 \cdot \log_5 2$

$$= \frac{\log 3}{\log 2} \cdot \frac{\log 8}{\log 3} - \frac{\log 25}{\log 2} \cdot \frac{\log 2}{\log 5}$$
$$= \log_2 2^3 - \log_5 5^2$$
$$= 3\log_2 2 - 2\log_5 5$$
$$= 1$$

Cevap: C

KAYNAKÇA

1. H. Hilmi Hacısalihoğlu, Lineer Cebir, Gazi Üniversitesi Yayınları, Ankara, 1975.

2. Hüseyin Bilgiç, Lineer Cebir Ders Notları, Kahramanmaraş Sütçü İmam Üniversitesi, Kahramanmaraş, 2015.
3. M. Zeki DERMAN, Ökkeş ÖZKÖSELER, Serdar GÜLMEZ, Matematik III Zafer Yayınları, Ankara, 2005.
4. Ahmet HANÇERLİOĞLU, Faniye ALAN, Üniversiteye Hazırlık Matematik Seti, Tümay Yayınları, İstanbul Yayıncılık, 2006, Ankara.
5. Seymeur LİPSCHUTZ Ph. Dr., Çev. H. Hilmi HACISALİHOĞLU, Schaum Serisinden Lineer Cebir, Japonya.
6. Yrd. Doç. Dr. Nezahat ÇETİN, Öğr. Grv. Dr. Nevin ORHUN, Lineer Cebir, Anadolu Üniversitesi Yayınları: 1074, AÖF Yayınları: 589, 1998, Eskişehir.