3. BÖLÜM
LİNEER DENKLEM SİSTEMLERİ

LİNEER (DOĞRUSAL) DENKLEM SİSTEMLERİ KAVRAMI

Matris ve determinantlar sayesinde pek çok bilinmeyenli doğrusal denklemler rahatlıkla çözülebilmektedir. Bunun için pek çok yöntem vardır. Ama biz burada üç önemli yöntem olan Ters Matris Yöntemi, Cramer Yöntemi ve Gauss Jordan Yöntemlerini vereceğiz. Diğer yöntemleri Nümerik Analiz derslerine havale edeceğiz. Lineer denklemler birer doğru denklemleridir. Ama biz burada bu doğru denklemlerinin kesişim noktaları olan çözüm yöntemlerinden bahsedeceğiz. Bu doğru denklemlerinin diğer analizleri bir kısmı vektörler konusunda, bir kısmı Çok Değişkenli Fonksiyonlar derslerine havale edeceğiz.

3.1. Tanım: Genel olarak $x_1, x_2, \dots, x_n$ bilinmeyen a_{ij} ve b_{ij} $(i, j \in \mathbb{N})$ ler birer reel sayı olmak üzere,

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\}$$

ifadesine lineer (doğrusal) denklem sistemi denir. Bu lineer denklem sistemini şu şekilde yazabiliriz.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

elde ettiğimiz bu matrisleri

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},\quad X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

şeklinde bulunur. Buna göre $AX = B$ yazılabilir.

Bir lineer denklem sisteminde;

i) Ya tek çözüm vardır.

ii) Ya sonsuz çözümü vardır

iii) Ya da çözüm yoktur.

Eğer lineer denklem sistemi (i) ve (ii) durum söz konusu ise tutarlı ve eğer (iii) durum söz konusu ise tutarsız adı verilir.

TERS MATRİS YÖNTEMİ

Bir lineer denklem sistemini $AX = B$ şeklinde yazarsak, A'ya katsayılar matrisi, B'ye sabitler matrisi ve X'e bilinmeyenler matrisi diye adlandırılır. Burada $X = A^{-1}B$ olduğu aşikârdır. Aşikâr olan bu yazımla denklem çözümü yapılır.

Örnek: $2x + y = 14$
$x - 2y = -3$

lineer denklem sisteminin çözümünü bulunuz.

Çözüm: Bu lineer denklem sistemini matrislere çevirirsek,

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 14 \\ -3 \end{bmatrix}$$

buluruz. Burada

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix},\ X=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} 14 \\ -3 \end{bmatrix}$$

alınabilir. Şimdi A matrisinin tersini bulalım. Bu tür matrislerin tersini şu formülle bulduğumuzu biliyoruz;

$$A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}=\frac{1}{-5}\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

dir. Şimdi $X = A^{-1}B$ yi bulalım:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 14 \\ -3 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 28-3 \\ 14+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$x = 5$ ve $y = 4$

olarak bulunur.

Örnek: $2x + y - z = 15$
$x - y + z = -2$
$3x + 2y + 2z = 5$

lineer denklem sisteminin çözümünü bulunuz.

Çözüm: Bu lineer denklem sistemini matrislere çevirirsek,

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

yazılır. Burada

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix},\ X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

dır. Burada A matrisinin tersini bulalım. Önce A'nın determinantını bulalım.

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -12$$

Şimdi de Ek A'yı bulalım.

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -4 \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \qquad A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 5$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -4 \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 7 \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3 \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3$$

$$\text{Ek } A = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 5 \\ -4 & 7 & -1 \\ 0 & -3 & -3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -4 & -4 & 0 \\ 1 & 7 & -3 \\ 5 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Buna göre

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\text{Ek }A=-\frac{1}{12}\begin{bmatrix}-4 & -4 & 0\\ 1 & 7 & -3\\ 5 & -1 & -3\end{bmatrix}=\frac{1}{12}\begin{bmatrix}4 & 4 & 0\\ -1 & -7 & 3\\ -5 & 1 & 3\end{bmatrix}$$

dir. Şimdi $X = A^{-1}B$'yi bulalım:

$$\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\frac{1}{12}\begin{bmatrix}4 & 4 & 0\\ -1 & -7 & 3\\ -5 & 1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\ -2\\ 5\end{bmatrix}=\frac{1}{12}\begin{bmatrix}20-8\\ -5+14+15\\ -25-2+15\end{bmatrix}=\frac{1}{12}\begin{bmatrix}12\\ 24\\ -12\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 2\\ -1\end{bmatrix}$$

$$x = 5,\ \ y = 4 \text{ ve } z = -1$$

olur.

3.1. Sonuç: A katsayılar matrisi, B sabitler matrisi ve X bilinmeyenler matrisi ise;

1. A bir kare matris ise

i) $\det A \neq 0$ olduğunda $X = A^{-1}B$ dir.

ii) $\det A = 0$ olduğunda denklemlerin çözümü yoktur.

2. A bir kare matris değilse;

i) $m > n$ olduğunda n tane denklemden oluşan bir sistemin çözümü bulunur. Bulunan bu çözüm geri kalan denklemleri sağlarsa ilk sistemin de çözümü olur.

ii) $m < n$ olduğunda $n - m$ tane bilinmeyen $x_1 = \lambda_1, x_2 = \lambda_2, \cdots, x_{n-m} = \lambda_{n-m}$ gibi parametre olarak seçilirse ve geri kalan m tane bilinmeyen $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{n-m}$ lere bağımlı olur.

CRAMER YÖNTEMİ

Gabriel Cramer

31 Temmuz 1704, Cenevre, İsviçre - 4 Ocak 1752, Bagnols-sur-Ceze, Fransa

3.1. Teorem: Verilen bir lineer denklem sistemi $AX = B$ biçiminde yazıldıktan sonra,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \cdots, \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix}$$

olarak adlandırılsınlar. Bu takdirde,

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}, \dots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$$

dır.

İspat: 2.17. Teoremde

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{Ek}\, A$$

olarak gösterildi. $AX = B$ denkleminde $X = A^{-1}B$ olacağından,

$$X = \frac{1}{\det A} (\text{Ek}\, A) \cdot B$$

yazılabilir. Buna göre,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

dir. Buradan,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} b_1A_{11} + b_2A_{21} + \cdots + b_nA_{n1} \\ b_1A_{12} + b_2A_{22} + \cdots + b_nA_{n2} \\ \vdots \\ b_1A_{1n} + b_2A_{2n} + \cdots + b_nA_{nn} \end{bmatrix}$$

$$x_1 = \frac{1}{\det A} (b_1A_{11} + b_2A_{21} + \cdots + b_nA_{n1})$$

$$x_2 = \frac{1}{\det A} (b_1A_{12} + b_2A_{22} + \cdots + b_nA_{n2})$$

$$\vdots$$

$$x_n = \frac{1}{\det A} (b_1A_{1n} + b_2A_{2n} + \cdots + b_nA_{nn})$$

eşitlikleri elde edilir. Ayrıca,

$$b_1A_{11}+b_2A_{21}+\cdots+b_nA_{n1}=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\Delta_1$$

$$b_1A_{12}+b_2A_{22}+\cdots+b_nA_{n2}=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\Delta_2$$

$$\vdots$$

$$b_1A_{1n}+b_2A_{2n}+\cdots+b_nA_{nn}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix}=\Delta_n$$

olduğundan;

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}, x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}, \dots, x_n=\frac{\Delta_n}{\Delta}$$

bulunur.

3.2. Sonuç: i) $\Delta \neq 0$ ise denklemin tek çözümü vardır ve bu çözüm

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}, x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}, \dots, x_n=\frac{\Delta_n}{\Delta}$$

dir.

ii) $\Delta = 0$ ve $\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_n$ lerden en az biri sıfırdan farklı ise sistemin çözümü yoktur.

iii) $\Delta = 0$ ise $\Delta_1 = \Delta_2 = \cdots = \Delta_n = 0$ ise sistemin sonsuz çözümü vardır.

Örnek: $x + y = 5$
$x - y = -3$
lineer denklem sisteminin çözümünü bulunuz.

Çözüm: Bu lineer denklem sistemini matrislere çevirirsek,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}$$

bulunur. Burada

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix},\ X=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}5\\ -3\end{bmatrix}$$

dir. Önce A matrisinin determinantını alacağız.

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-2$$

Şimdi A matrisinin 1. sütunu kaldırılarak yerine B matrisinin elemanları yazılır. Sonra onunda determinantı alınır.

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}5 & 1\\ -3 & -1\end{vmatrix}=-2$$

Daha sonra da A matrisinin 2. sütunu kaldırılarak yerine B matrisinin elemanları yazılır. Sonra onunda determinantı alınır.

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}1 & 5\\ 1 & -3\end{vmatrix}=-8$$

Elde ettiğimiz bu değerler, x ve y nin değerlerini şu şekilde verir.

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{-2}{-2}=1\ ,\ x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{-8}{-2}=4$$

Örnek:
$$\begin{aligned} x+2y+3z&=3\\ 2x+4y+5z&=4\\ 3x+5y+6z&=-1\end{aligned}$$

lineer denklemini çözünüz.

Çözüm: Lineer denklem sistemini matrislere çevirelim.

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 5\\ 3 & 5 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\ 4\\ -1\end{bmatrix}$$

bulunur. Burada

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 5\\ 3 & 5 & 6\end{bmatrix},\ X=\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}3\\ 4\\ -1\end{bmatrix}$$

dir. Önce A matrisinin determinantını alacağız.

$$\Delta=\left|\begin{matrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 5\\ 3 & 5 & 6\end{matrix}\right|\begin{matrix}1 & 2\\ 2 & 4\\ 3 & 5\end{matrix}=(24+30+30)-(36+25+24)=-1$$

Şimdi A matrisinin 1. sütunu kaldırılarak yerine B matrisinin elemanları yazalım. Sonra onunda determinantı alalım.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 5 \\ -1 & 5 & 6 \end{vmatrix}\begin{matrix} 3 & 2 \\ 4 & 4 \\ -1 & 5 \end{matrix} = (72-10+60)-(-12+75+48) = 11$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & -1 & 6 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{matrix} = (24+45-6)-(36-5+36) = -4$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \\ 3 & 5 & -1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{matrix} = (-4+24+30)-(36+20-4) = -2$$

Elde ettiğimiz bu değerler, x, y ve z nin değerlerini şu şekilde verir.

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{11}{-1} = -11\ ,\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-4}{-1} = 4,\ \ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-2}{-1} = 2$$

Örnek: $2x + 3y + 4z = 4$
$x + ay + 2z = 5$
$4x + by + 8z = 10$

denkleminin sonsuz çözümü olması için a ile b arasında ki denklem nedir?

Çözüm: Cramer metoduna göre denklem sisteminin sonsuz çözümü olması için

$$\Delta = 0 \text{ ve } \Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$$

olması gerekir. $\Delta_1 = 0$ dan,

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 5 & a & 2 \\ 10 & b & 8 \end{vmatrix} = 0$$

$$-2a + 3b = 15$$

bulunur.

ECHELON (EŞELON) ve GAUSS JORDAN YÖNTEMİ

3.2. Tanım: Bir $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ matrisi verilsin. Aşağıdaki tanımlanan işlemlere elementer satır (sütun) işlemleri denir.

i) $i \neq j$ olmak üzere S_i ve S_j satırları (sütunları) yer değiştirilebilir, $S_i \leftrightarrow S_j$ dir.

ii) $i \neq j$ ve $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} - \{0\}$ olmak üzere S_i ve S_j satırları (sütunları) için S_i satırı (sütunu) yerine

$$\alpha_1 S_i + \alpha_2 S_j$$

yazılabilir, $\alpha_1 S_i + \alpha_2 S_j \to S_i$ dir. (Burada kompleks sayı durumu söz konusu olduğunda kompleks sayı da alınabilir.)

Bu şekilde bir Bir $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ matrisinin yazılmasına Echelon (Eşelon) yöntemini adı verilir.

3.3. Tanım: Bir A matrisine elementer satır (sütun) işlemleri uygulandığında elde edilen B matrisi, A matrisine denktir denir. Bir $A \approx B$ ile gösterilir.

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 3 & 7 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ matrisini Echelon yöntemi uygulayarak $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 48 \\ 0 & 1 & -20 \\ 0 & 0 & -113 \end{bmatrix}$ matrisi elde ediniz.

Çözüm: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 3 & 7 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$, $-3S_1 + S_2 \to S_1$ uygulanırsa

$\approx \begin{bmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -20 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$, $-2S_1 + S_3 \to S_2$ uygulanırsa

$\approx \begin{bmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -20 \\ 0 & -5 & -13 \end{bmatrix}$, $2S_2 + S_1 \to S_1$ uygulanırsa

$\approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 48 \\ 0 & 1 & -20 \\ 0 & -5 & -13 \end{bmatrix}$, $5S_2 + S_3 \to S_3$ uygulanırsa

$\approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 48 \\ 0 & 1 & -20 \\ 0 & 0 & -113 \end{bmatrix} = B$

bulunur. //

Şimdi bu yöntemle lineer denklem sistemlerini çözmeye Gauss Jordan yöntemi adı verilir.

3.2. Teorem (Gauss Jordan): Bir $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ için $AX = B$ matrisinde $X = A^{-1}B$ çözümünün oluşması $X = \left[a_{ij}^{-1} \vdots b_{ij}\right]_{m\times n}$ biçimindedir.

İspat: 1.1. tanımında Matris kavramı "Birden fazla doğruların baş katsayılarında oluşan sayıların oluşturduğu tablolar" şeklinde verilmiştir. Doğrusal denklemlerin çözümü yapılırken "Yok etme metodu" kullanılmıştı. Bu yok etme metoduna göre bir doğru bir α_1 sayı ile çarpılıp diğer bir doğru α_2 sayı ile çarpılıp birbirleriyle toplanabilir. Bu işlemlerin yapılmasına yok etme metodu ile matrislerde elementer satır (sütun) işlemlerinin aynı olduğunu gösterir. Bu ise Echelon yönteminin gerçekleştiğini gösterir.

Örnek: $3x + y = 9$
$2x - 3y = -5$
lineer denklem sisteminin çözümünü bulunuz.

Çözüm: Bu lineer denklem sistemini matrislere çevirirsek,

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ -5 \end{bmatrix}$$

bulunur. Bu matrisleri Echelon formuna çevirirsek,

$$X = \left[\begin{array}{cc:c} 3 & 1 & 9 \\ 2 & -3 & -5 \end{array}\right] \quad , \quad 2S_2 - S_1 \to S_1 \text{ uygulanırsa}$$

$$\approx \left[\begin{array}{cc:c} 1 & -7 & -19 \\ 2 & -3 & -5 \end{array}\right] \quad , \quad -2S_1 + S_2 \to S_2 \text{ uygulanırsa}$$

$$\approx \left[\begin{array}{cc:c} 1 & -7 & -19 \\ 0 & 11 & 33 \end{array}\right] \quad , \quad \frac{1}{11}S_2 \to S_2 \text{ uygulanırsa}$$

$$\approx \left[\begin{array}{cc:c} 1 & -7 & -19 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \quad , \quad 7S_2 + S_1 \to S_2 \text{ uygulanırsa}$$

$$\approx \left[\begin{array}{cc:c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

olur. Buna göre,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

olacağından $x = 2$ ve $y = 3$ olarak denklem çözülmüş olur.

Örnek: $2x + 3y + z = 19$
$4x - 2y + 3z = 16$
$x + y + z = 9$
lineer denklem sisteminin çözümünü bulunuz.

Çözüm: Bu lineer denklem sistemini matrislere çevirirsek,

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ 16 \\ 9 \end{bmatrix}$$

bulunur. Bu matrisleri Echelon formuna çevirirek,

$$X = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 19 \\ 4 & -2 & 3 & 16 \\ 1 & 1 & 1 & 9 \end{array}\right] \quad , \quad S_3 \leftrightarrow S_1 \text{ uygulanırsa}$$

$$\approx \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 4 & -2 & 3 & 16 \\ 2 & 3 & 1 & 19 \end{array}\right] , -4S_1 + S_2 \to S_2, -2S_1 + S_3 \to S_3 \text{ uygulanırsa}$$

$$\approx \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & -6 & -1 & -20 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] , 6S_3 + S_2 \to S_2, -S_3 + S_1 \to S_1 \text{ uygulanırsa}$$

$$\approx \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & -7 & -14 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \quad , \quad S_3 \leftrightarrow S_2 \text{ uygulanırsa}$$

$$\approx \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -7 & -14 \end{array}\right] \quad , \quad S_3 \leftrightarrow S_2 \text{ uygulanırsa}$$

$$\approx \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \quad , \quad -\frac{1}{7}S_3 \to S_3 \text{ uygulanırsa}$$

$$\approx\left[\begin{array}{ccc:c}1 & 0 & 2 & 8\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 2\end{array}\right] \quad , \quad -2S_3 + S_1 \to S_2, S_2 + S_3 \to S_2 \text{ uygulanırsa}$$

$$\approx\left[\begin{array}{ccc:c}1 & 0 & 0 & 4\\ 0 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 2\end{array}\right]$$

olur. Buna göre,

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\ 3\\ 2\end{bmatrix}$$

olacağından $x=4$, $y=3$ ve $z=2$ olur.

Örnek: $x-5y+2z=3$
$x+2y-5z=10$
lineer denklem sisteminin çözümünü bulunuz.

Çözüm: Bu lineer denklem sistemini matrislere çevirirsek,

$$\begin{bmatrix}1 & -5 & 2\\ 1 & 2 & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\ 10\end{bmatrix}$$

bulunur. Bu matrisleri Echelon formuna çevirirsek,

$$X=\left[\begin{array}{ccc:c}1 & -5 & 2 & 3\\ 1 & 2 & -5 & 10\end{array}\right] \quad , \quad -S_1 + S_2 \to S_2 \text{ uygulanırsa}$$

$$\approx\left[\begin{array}{ccc:c}1 & -5 & 2 & 3\\ 0 & 7 & -7 & 7\end{array}\right] \quad , \quad \frac{1}{7}S_2 \to S_2 \text{ uygulanırsa}$$

$$\approx\left[\begin{array}{ccc:c}1 & 0 & -3 & 8\\ 0 & 1 & -1 & 1\end{array}\right]$$

olur. Bu matrisleri denklem olarak yazarsak,

$$x-3z=9$$
$$y-z=1$$

biçime dönüşür. $z=\lambda$ parametresi seçilirse, $x=8+3\lambda, y=1+\lambda$ olduğundan, denklem çözümü;

$$x=8+3\lambda, y=1+\lambda, z=\lambda, \lambda\in\mathbb{R}$$

dir.

ECHELON (EŞELON) YÖNTEMİYLE TERS MATRİSLERİN BULUNMASI

3.3. Teorem: Bir Bir $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ kare matrisi ile $I = \left[I_{ij}\right]_{n\times n}$ birim matrisinin birleşiminden oluşan $AI = \left[a_{ij} \vdots I_{ij}\right]_{m\times n}$ matrisine Echelon yöntemi uygulanırsa,

$$IA^{-1} = \left[I_{ij} \vdots a_{ij}^{-1}\right]_{m\times n}$$

matrisi elde edilir.

İspat: $AI = B$ matrisi olarak alalım. Burada $B = \left[a_{ij} \vdots I_{ij}\right]_{m\times n}$ yazılmaktadır.

$$B^{-1} = (AI)^{-1} = I^{-1}A^{-1} = IA^{-1}$$

olduğundan,

$$IA^{-1} = \left[I_{ij} \vdots a_{ij}^{-1}\right]_{m\times n}$$

matrisi elde edilir.

3.4. Tanım: Bir $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ matrisini $IA^{-1} = \left[I_{ij} \vdots a_{ij}^{-1}\right]_{m\times n}$ biçiminde yazıma kanonik biçim adı verilir.

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ -2 & 0 & 4 \\ 6 & 4 & 7 \end{bmatrix}$ matrisinin varsa tersini bulunuz.

Çözüm:

$$AI = \left[\begin{array}{ccc:ccc} 3 & 1 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad , \; S_1 \leftrightarrow S_3 \text{ uygulanırsa}$$

$$\approx \left[\begin{array}{ccc:ccc} -2 & 0 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 6 & 4 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad , \; S_2 + 3S_1 \to S_2, -2S_3 - 3S_1 \to S_3$$

$$\approx \left[\begin{array}{ccc:ccc} -2 & 0 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -5 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 2 & -2 & 0 & -3 \end{array}\right] \quad , \; S_2 \leftrightarrow S_3 \text{uygulanırsa}$$

$$\approx \left[\begin{array}{ccc:ccc} -2 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & -5 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \quad , \; \frac{1}{2} S_2 \leftrightarrow S_2 \text{uygulanırsa}$$

$$\approx\left[\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & -3/2 \\ 0 & 4 & -5 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right],\ S_3+4S_2\to S_3 \text{ uygulanırsa}$$

$$\approx\left[\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & -3/2 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & 1 & -3 \end{array}\right],\ S_2+S_3\to S_2, S_1-4S_3\to S_1$$

$$\approx\left[\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & 0 & 16 & -4 & 13 \\ 0 & -1 & 0 & -5 & 1 & -9/2 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & 1 & -3 \end{array}\right],-\frac{1}{2}S_1\to S_1, -S_2\to S_2, -S_3\to S_3$$

$$\approx\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -8 & 2 & -13/2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -1 & 9/2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -1 & 3/2 \end{array}\right]$$

bulunur. Buna göre,

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} -8 & 2 & -13/2 \\ 5 & -1 & 9/2 \\ 4 & -1 & 3/2 \end{bmatrix}$$

dir.

3.4. Teorem: Bilinmeyen sayısı denklem sayısından daha çok olan bir lineer homojen denklem sistemi sıfırdan farklı bir çözüme sahiptir.

Bu teoremin ispatı okuyucuya bırakılmıştır.

Örnek: $x+2y-3z+w=6$

$$x-3y+z-2w=-6$$
$$2x+y-3z+w=5$$

lineer denklem sistemi 4 bilinmeyenli 3 denklem olduğundan tek çözümü yoktur. Eğer 4. bir denklem verilirse o takdirde tek çözüm olup olmadığı araştırılır.

HOMOGEN (HOMOJEN) LİNEER DENKLEM SİSTEMLERİ

3.5. Tanım: Lineer (doğrusal) denklem sistemlerinin ikinci taraftaki sabitler matrisi bir sıfır matrisi ise denklem sistemine homogen lineer denklem sistemi adı verilir.

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{array}\right\}$$

3.5. Teorem: Homogen denklem sisteminde $\Delta_1 = \Delta_2 = \cdots = \Delta_n = 0$ olduğundan,

i) $\Delta_1 \neq 0$ için sistemin tek çözümü $(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (0,0,0,\cdots,0)$ dır. Buna sistemin apaçık çözümü denir.

ii) $\Delta = 0$ için sistemin sonsuz çözümü vardır.

İspat: i) Homogen denklem sistemi $AX = 0$ yazılacaktır.

i) Eğer $\Delta \neq 0$ ise $A \neq 0$ olacağından $(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (0,0,0,\cdots,0)$ dır.

ii) Eğer $\Delta = 0$ ise A matrisi singülerdir (tekildir). O halde $X \neq 0$ dır. Öyleyse sonsuz çözümü vardır.

Örnek: $4x - 3y = 0$
$2x + 7y = 0$
homogen sistemini çözünüz.

Çözüm: $\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 20 \neq 0$ olduğundan çözüm $(x,\ y) = (0, 0)$ apaçık çözümündür.

Örnek: $3x_1 - 7x_2 + 4x_3 = 0$
$2x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 0$
$x_1 + x_2 = 0$
homogen sistemini çözünüz.

Çözüm: $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -7 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -51 \neq 0$ ise çözüm $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$ apaçık çözümündür.

Örnek: $2x_1 + 4x_2 + x_3 = 0$
$x_1 + 12x_2 + 2x_3 = 0$
$3x_1 + 16x_2 + 3x_3 = 0$
homogen sistemini çözünüz.

Çözüm: $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 12 & 2 \\ 3 & 16 & 3 \end{vmatrix} = 0$ olduğundan lineer denklem sisteminin sonsuz çözümü vardır. Verilen denklemlerde $x_3 = t$ seçilirse ilk iki denklemden,

$$x_1 = -\frac{t}{5},\ x_2 = -\frac{3t}{20}$$

olur. Buna göre t'ye bağlı çözüm kümesi;

$$Ç = \left\{\left(-\frac{t}{5},\ -\frac{3t}{20}, t\right) : t \in \mathbb{R}\right\}$$

bulunur.

Örnek: $3x + 2y - z = 0$
$x - y + 2z = 0$
$ax + 3y = 0$
homogen sisteminin sonsuz çözümü olması için a'ne olmalıdır?

Çözüm: $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ a & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0$ için $a = 7$ olur.

3.6. Tanım: W lineer homojen sistemin genel çözümü olsun. Eğer W'deki her w çözüm kümesi $u_1, u_2, \cdots, u_s$ noktaları bir tek lineer birleşimiyle ifade edilebiliyorsa sıfırdan farklı $u_1, u_2, \cdots, u_s$ noktaları W için bir taban (baz) oluşturuluyor denir. Burada s sayısına W'nin boyutu denir. Boy W = s ile gösterilir. (Eğer $W = \{0\}$, ise Boy W = 0 dir.)

$u_1, u_2, \cdots, u_s$ noktalarının çözümleri yapılırken, serbest değişkenlerden birisi 1 ve geri kalanlar 0 alınarak (veya sıfırdan farklı sabit) elde edilir.

Örnek: $x + 2y - 3z + 2w - 4t = 0$
$2x + 4y - 5z + w - 6t = 0$
$5x + 10y - 13z + 4w - 16t = 0$
lineer denklem sisteminde tabanını ve boyutunu bulunuz.

Çözüm: Echelon biçime indirgeyelim.

$-2S_1 + S_2 \to S_2, -5S_2 + S_3 \to S_3$ ve $-2S_2 + S_3 \to S_2$

adımları uyglanarak

$$x + 2y - 3z + 2w - 4t = 0$$
$$z - 3w + 2t = 0$$

bulunur. Echelon biçimde sistem y, s ve t bağımsız değişkenlerine sahiptir. Boy $W = 3$ tür.

1) $y = 1, w = 0, t = 0$ yazarsak $u_1 = (-2, 1, 0, 0, 0)$ olur.

2) $y = 0, w = 1, t = 0$ yazarsak $u_2 = (7, 0, 3, 1, 0)$ olur.

3) $y = 0, w = 0, t = 1$ yazarsak $u_2 = (-2, 0, -2, 0, 1)$ olur.

$\{u_1, u_1, u_1\}$ kümesi W için bir tabandır.

ÇÖZÜMLÜ ALIŞTIRMALAR

1. $8x + 5y = 6, 3x + 4y = 5$

denklem sistemi bir matris formunda yazımı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $x\begin{bmatrix}6\\5\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}5\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8\\3\end{bmatrix}$ B) $x\begin{bmatrix}5\\4\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}8\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\5\end{bmatrix}$

C) $\begin{bmatrix}8\\3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}5\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\5\end{bmatrix}$ D) $x\begin{bmatrix}8\\3\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}6\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\4\end{bmatrix}$

E) $x\begin{bmatrix}8\\3\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}5\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\5\end{bmatrix}$

Çözüm: $8x + 5y = 6, 3x + 4y = 5$ denklem sistemi matris formunda yazılırsa,

$$\begin{bmatrix}8x\\3x\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}5y\\4y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\5\end{bmatrix}$$
$$x\begin{bmatrix}8\\3\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}5\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\5\end{bmatrix}$$

bulunur.

Cevap: E

2. $\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\1 & -1 & 1\\1 & 2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\3\\7\end{bmatrix}$

yukarıda matris gösterimi verilen lineer denklem sisteminin çözümünde x kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: Cramer yöntemini kullanalım.

$$\Delta = \left|\begin{array}{ccc} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{array}\right| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{array} = (3+1-2)-(1+2-3) = 2$$

$$\Delta_1 = \left|\begin{array}{ccc} 5 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 7 & 2 & -3 \end{array}\right| \begin{array}{cc} 5 & 1 \\ 3 & -1 \\ 7 & 2 \end{array} = (15+7-6)-(7+10-9) = 8$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{8}{2} = 4$$

Cevap: D

3. $2x + 2y - z = 2$
$x + y + z = 4$
$y - z = -1$

yukarıdaki denklem sisteminin çözümünde x kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: Verilen denklemi matris formunda yazalım.

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Gramer yöntemi uygulanırsa,

$$\Delta = \left|\begin{array}{ccc} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right| \begin{array}{cc} 2 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{array} = (-2+0-1)-(0+2-2) = -3$$

$$\Delta_1 = \left|\begin{array}{ccc} 2 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{array}\right| \begin{array}{cc} 2 & 2 \\ 4 & 1 \\ -1 & 1 \end{array} = (-2-2-4)-(1+2-8) = -3$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-3}{-3} = 1$$

bulunur.

Cevap: A

4. $A=\begin{bmatrix}4 & 3\\ 1 & 2\end{bmatrix}$ ve $B=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & -1\end{bmatrix}$
olmak üzere, matris gösterimi

$$(A+B).\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$$

olan doğrusal denklem sisteminde x kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm:

$$(A+B).\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\left(\begin{bmatrix}4 & 3\\ 1 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & -1\end{bmatrix}\right).\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}6 & 4\\ 4 & 1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}6x+4y\\ 4x+y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}16\\ 9\end{bmatrix}$$

olduğundan matrislerde eşitlik tanımından

$$6x+4y=16,\ 4x+y=9$$
$$-6x-4y=-16,\ 16x+4y=36$$
$$10x=20$$
$$x=2$$

bulunur.

Cevap: B

5. $4x-y=10$
$2x+3y=12$
doğrusal denklem sisteminin matris gösterimi

$$A\cdot\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10\\ 12\end{bmatrix}$$

olarak veriliyor.

$$A\cdot\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}$$

olduğuna göre, $b-3a$ toplamı kaçtır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Çözüm: $A\cdot\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10\\12\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}4 & -1\\2 & 3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10\\12\end{bmatrix} \text{ ise } A=\begin{bmatrix}4 & -1\\2 & 3\end{bmatrix}$$

$$A\cdot\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}4 & -1\\2 & 3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}4\cdot1+(-1)\cdot2\\2\cdot1+3\cdot2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}2\\8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$$

$b-3a=8-3\cdot2=2$

Cevap: C

KAYNAKÇA

1. H. Hilmi Hacısalihoğlu, Lineer Cebir, Gazi Üniversitesi Yayınları, Ankara, 1975.
2. Hüseyin Bilgiç, Lineer Cebir Ders Notları, Kahramanmaraş Sütçü İmam Üniversitesi, Kahramanmaraş, 2015.
3. M. Zeki DERMAN, Ökkeş ÖZKÖSELER, Serdar GÜLMEZ, Matematik III Zafer Yayınları, Ankara, 2005.
4. Ahmet HANÇERLİOĞLU, Faniye ALAN, Üniversiteye Hazırlık Matematik Seti, Tümay Yayınları, İstanbul Yayıncılık, 2006, Ankara.
5. Seymeur LİPSCHUTZ Ph. Dr., Çev. H. Hilmi HACISALİHOĞLU, Schaum Serisinden Lineer Cebir, Japonya.
6. Yrd. Doç. Dr. Nezahat ÇETİN, Öğr. Grv. Dr. Nevin ORHUN, Lineer Cebir, Anadolu Üniversitesi Yayınları: 1074, AÖF Yayınları: 589, 1998, Eskişehir.