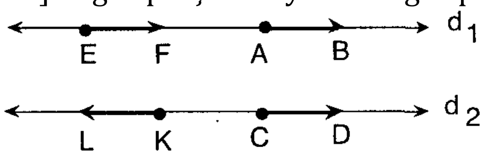
4. BÖLÜM
VEKTÖRLER ve VEKTÖR UZAYI

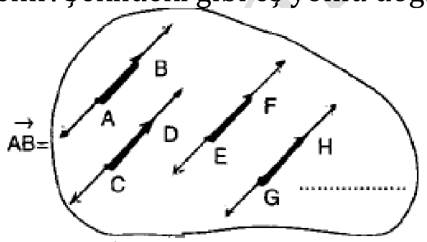
VEKTÖR KAVRAMI

4.1. Tanım: Bir d doğrusu ve bu doğru üzerinde başlangıç noktası A ve bitim noktası B olan [AB] doğru parçasına yönlü doğru parçası denir.



$d_1//d_2$ iki yönlü doğru parçası şekildeki gibi aynı yönlü yada zıt yönlü olabilir.

4.2. Tanım: Aynı yönlü ve uzunlukları eşit olan doğru parçalarına eş yönlü doğru parçaları denir. Şekildeki gibi eş yönlü doğru parçaları olsunlar.



Bu eş yönlü doğru parçaları [AB], [CD], [EF], [GH] ... olsunlar. Eş yönlü doğru parçaları paralellik bağıntısı denklik bağıntısıdır. Denklik bağıntısının şartları gerçeklemek aşikârdır. Bu denklik bağıntısı kümesi denklik sınıflarını verir.

$[AB] = \{[AB], [CD], [EF], [GH], \ldots\}$

4.3. Tanım: Birbirine eş yönlü doğru parçalarının denklik sınıflarından her birine vektör denir. Başlangıç noktası A ve bitim noktası B olan vektör $\overrightarrow{AB}$ ile gösterilir. Buna göre her vektörün

- belirli bir doğrultuda bir yönü
- ve büyüklüğü (şiddeti)

vardır. Fizikte belirli bir doğrultuda bir yönü ve büyüklüğü olan doğrulara vektör olarak tanımlanır.

Bir vektörün başlangıç veya etki noktası, bitim noktası ve yönü daima bulunur. Fizikte bazı büyüklükler vektörle ifade edilir. Kuvvet, hız, ivme, basınç, yer değiştirme, çizgisel ve açısal momentumları, elektrik alanı ve manyetik alanı gibi kavramlar vektörel büyüklüklerdir. Zira hepsinin de bir etki noktası doğrultusu yönü ve şiddeti vardır. Bu şartları içeren bütün teknik büyüklükler, vektörlerle ifade edilirler. İş, güç, enerji, sıcaklık, basınç gibi büyüklükler, kütle, uzunluk, zaman, yol uzunluğu, sürat, elektriksel potansiyel enerji, alan ve hacim yönü olmadığından skaler büyüklük adı verilir.

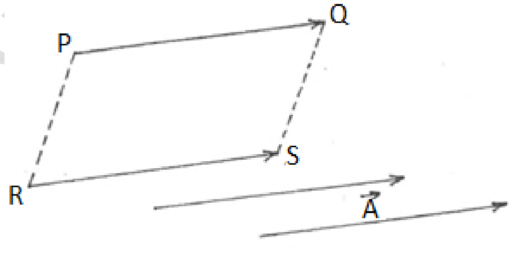
Örneğin, bir kuvvet vektörü kuvvetin etkidiği yönü gösterir, uzunluğu da kuvvetin gücünün bir ölçüsüdür. Bir hız vektörü hareketin yönünü gösterir, uzunluğu da hareket eden cismin süratidir.

Mesela; 3 km yol ile 4 km yolun toplamı 7 km yol olup bu uzunluğa skaler büyüklük denir. 3 km doğu ile 4 km güneyin toplamı 5 km güney doğu olup buna vektörel büyüklük denir.

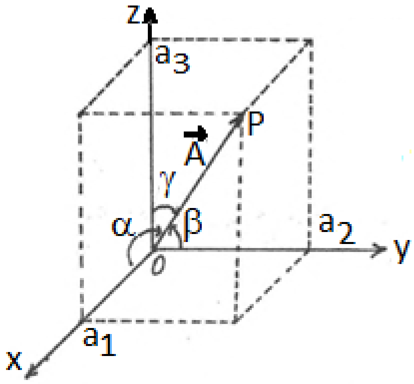
Skaler ve vektörel ifadeler başta fizik ve mühendislikte olmak üzere bilimlerin ve analizin bütün dallarında geniş bir uygulama alanına sahiptir.

P ve Q gibi iki nokta göz önüne alalım. Bu iki nokta P'den Q'ya ya da Q'dan P'ye gitmek suretiyle iki farklı şekilde bir doğru boyunca birleştirilebilir. P'den başlayarak Q'ya gidilirse $\overrightarrow{PQ}$, Q'dan başlayarak P'ya gidilirse $\overrightarrow{QP}$ vektörünü elde edilir. Bu da bize; vektör iki noktayı birleştiren doğru parçasını gösterir.

$\overrightarrow{PQ}$ nün büyüklüğü $\|\overrightarrow{PQ}\|$ ile gösterilir. Herhangi bir vektör büyüklüğü, doğrultusu ve yönü aynı kalmak üzere kendisine paralel olarak uzayın neresine götürülürse götürülsün yeni bir vektör elde edilemez.

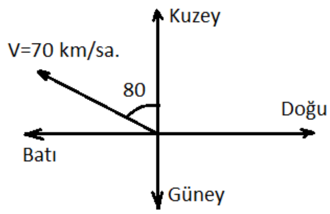


Şekildeki vektörlerin hepsi birbirine eşit olup aynı $\vec{A}$ vektörü ile tanımlanmıştır.

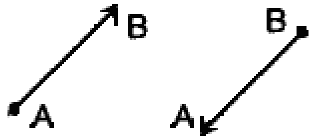


Örnek: 80^0 kuzey-batı yönünde 50 km/sa lik hızı, yönlü doğru parçasının grafiğini çiziniz.

Çözüm:



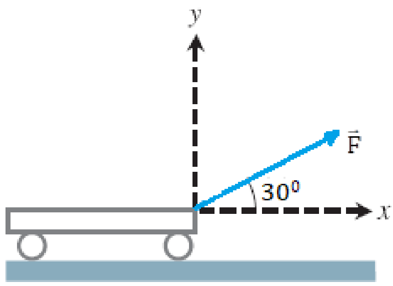
4.4. Tanım: $\overrightarrow{AB}$ ile $\overrightarrow{BA}$ vektörleri ters vektörler denir. $\overrightarrow{BA}$ ters vektörü yerine $-\overrightarrow{AB}$ vektörü de yazılabilir.



4.5. Tanım: AB doğru parçasının uzunluğu r birim ise negatif olmayan r reel sayısına $\overrightarrow{AB}$ vektörünün uzunluğu (normu) denir ve $\|\overrightarrow{AB}\|$ ile gösterilir. Şu halde $\|\overrightarrow{AB}\| = \text{r}$ dir.

4.1. Not: Reel sayıların uzunluğu mutlak değer olduğunu hatırlayalım.

Örnek: Bir yük taşıma arabası, düzgün yatay bir zemin üzerinde zeminle 30^0'lik açı yapan 20 lb'lik (point kuvvetlik) bir $\vec{F}$ kuvvetiyle çekiliyor. Arabayı ileri doğru çeken etkin kuvveti bulunuz.



Çözüm: $\vec{F}$'nin iki boyutlu bir vektördür. Arabayı öne doğru çeken kuvvet yatayla (pozitif x-ekseni) 30^0'lik açı yapan 20 lb'lik bir $\vec{F}$ vektörü ile temsil edilmektedir. $\vec{F}$'nin etkin kuvveti,

$$\|\vec{F}\| cos\, 30 = 20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{10}\, lb.$$

ile verilen yatay bileşenidir.

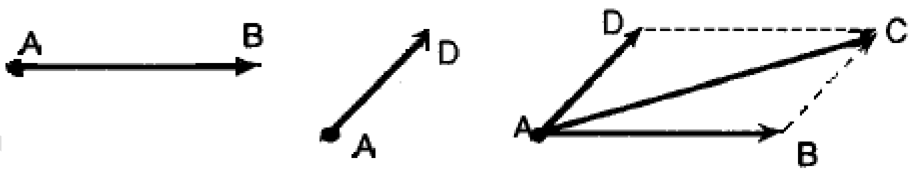
4.6. Tanım: Başlangıç ve bitiş noktaları aynı olan vektöre sıfır vektörü denir ve $\vec{O}$ ile gösterilir.

$\vec{O} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{CC} = \ldots$

Şu halde sıfır vektörünün normu $\|\overrightarrow{AA}\| = \|\vec{0}\| = 0$ dır.

VEKTÖRLERDE TOPLAMA İŞLEMİ

4.7. Tanım: Yönleri aynı olmayan $\overrightarrow{AB}$ ve $\overrightarrow{AD}$ iki vektörünün oluşturduğu ABCD paralelkenarında $\overrightarrow{AC}$ vektörüne $\overrightarrow{AB}$ ve $\overrightarrow{AD}$ vektörlerinin toplamı denir.



Şekle göre $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ dir. Burada $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ olduğuna göre,

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$

yazılabilir. Buradan şu tespiti yapmak doğru olur.

Doğrultuları aynı olmayan $\overrightarrow{DE}$ ve $\overrightarrow{EF}$ iki vektörünün toplamı,

$$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF}$$

dir.

4.2. Not: a) $\overrightarrow{AB}$ ve $\overrightarrow{BC}$ iki vektörünün yönleri aynı ise

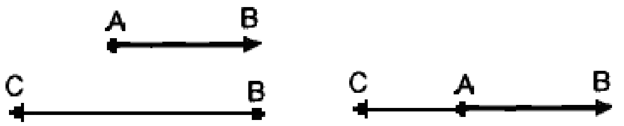
$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$

dir.

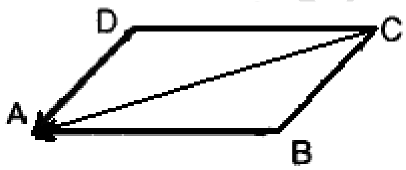
b) $\overrightarrow{AB}$ ve $\overrightarrow{BC}$ iki vektörünün yönleri zıt (ters) ise

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$

dir.



Örnek: $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{DA}$ birer vektör olsunlar.



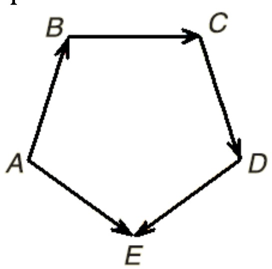
Şekildeki gibi ABCD paralel kenarında $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA}$ ifadesini bulunuz.

Çözüm: ABCD paralel kenarında $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$ olduğundan

$$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CA}$$

bulunur.

Örnek: Birinin bitim noktası öbürünün başlangıç noktası olan $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DE}$ vektörlerinin toplamı

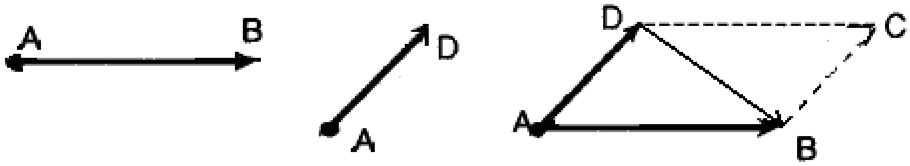


$$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE}$$

vektörüdür.

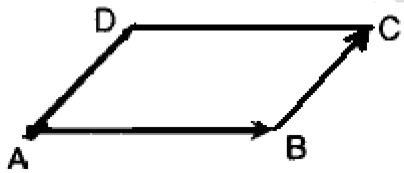
VEKTÖRLERDE FARK İŞLEMİ

4.8. Tanım: Yönleri aynı olmayan $\overrightarrow{AB}$ ve $\overrightarrow{AD}$ iki vektörünün oluşturduğu ABCD paralelkenarında $\overrightarrow{DB}$ vektörüne $\overrightarrow{AB}$ ve $\overrightarrow{AD}$ vektörlerinin farkı denir.



Buna göre $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$ dir.

Örnek:



Şekildeki gibi ABCD paralel kenar oluşturan $\overrightarrow{AB}$ ve $\overrightarrow{BC}$ vektörlerinde,

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$$

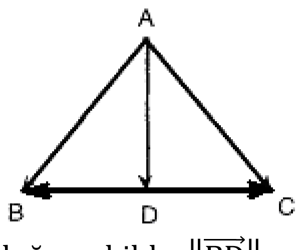
yi bulunuz.

Çözüm: ABCD paralel kenarında $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ olur. Buna göre,

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$$

bulunur.

Örnek:



Verilen vektörlerin oluşturduğu şekilde $\|\overrightarrow{BD}\| = \|\overrightarrow{CD}\|$ olduğuna göre $\overrightarrow{AD}$ yi $\overrightarrow{AB}$ ve $\overrightarrow{AC}$ türünden bulunuz.

Çözüm: ABD üçgeninde $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$

ACD üçgeninde $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}$

Her iki eşitlik taraf tarafa toplanırsa,

$$2\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CD}$$

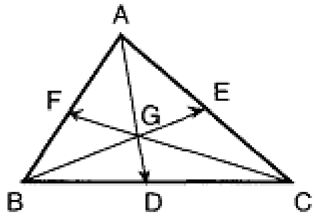
bulunur. $\|\overrightarrow{BD}\|=\|\overrightarrow{CD}\|$ olduğundan,

$$2\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\underbrace{\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CD}}_{0}$$

$$\overrightarrow{AD}=\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}$$

bulunur.

Örnek: ABC üçgeninde G, ağırlık merkezi olduğuna göre,



$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}$ toplamını bulunuz.

Çözüm: Önceki örnekten dolayı,

$$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$$
$$\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})$$
$$\overrightarrow{CF}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})$$

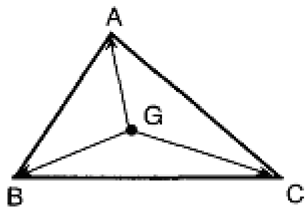
bulunur. Her üç eşitliği taraf tarafa toplarsak,

$$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\frac{1}{2}(\underbrace{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}}_{0}+\underbrace{\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}}_{0}+\underbrace{\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CB}}_{0})$$

$$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=0$$

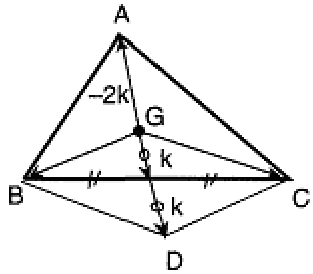
elde edilir.

Örnek: ABC üçgeninin ağırlık merkezi G'dir.



$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}$ toplamı nedir?

Çözüm: BDCG paralel kenarından



$$\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{GD}$$

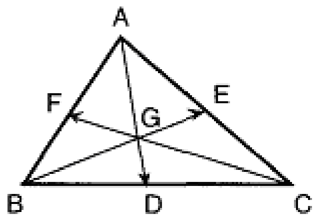
dir. Ayrıca $\overrightarrow{GD} = -\overrightarrow{GA}$ olduğundan

$$\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = -\overrightarrow{GA}$$

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

bulunur.

4.3. Not:



ABC üçgeninde [AD], [BE], [CF] kenarortay ve G ağırlık merkezi olmak üzere;

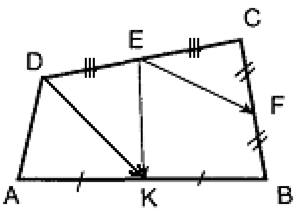
i) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \vec{0}$

ii) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

iii) $\overrightarrow{GD} + \overrightarrow{GE} + \overrightarrow{GF} = \vec{0}$

dir.

Örnek: Şekildeki ABCD dörtgeninde, E, F ve K noktaların orta noktalarıdır.



$\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EK}$ toplamını bulunuz.

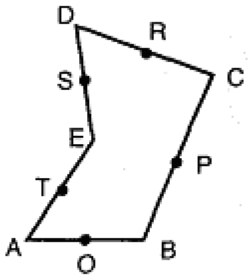
Çözüm: $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CF}$

$\overrightarrow{EK} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DF}$

Her iki eşitlik taraf tarafa toplanırsa,

$$\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{EK}=\underbrace{\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{ED}}_{0}+\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{DF}$$
$$\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{EK}=\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{DF}$$
elde edilir.

Örnek: Şekildeki ABCDE çokgeninde O, P, R, S,T noktaları kenarların orta noktalarıdır.



$\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{RD}+\overrightarrow{SE}+\overrightarrow{TA}$ toplamının sonucu nedir?

Çözüm: $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}$
$$\frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{AB})=\vec{0}$$
$$\frac{\overrightarrow{BC}}{2}+\frac{\overrightarrow{CD}}{2}+\frac{\overrightarrow{DE}}{2}+\frac{\overrightarrow{AB}}{2}=\vec{0}$$
$$\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{RD}+\overrightarrow{SE}+\overrightarrow{TA}+\overrightarrow{OB}=\vec{0}$$
$$\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{RD}+\overrightarrow{SE}+\overrightarrow{TA}=-\overrightarrow{OB}$$
$$\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{RD}+\overrightarrow{SE}+\overrightarrow{TA}=\overrightarrow{AO}$$

BİR VEKTÖRÜN REEL SAYI İLE ÇARPIMI

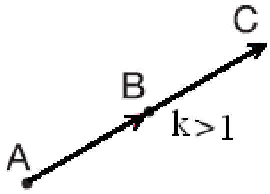
Belirli bir doğrultusu ve bir yönü olmayan büyüklüklere skaler adı verildiğini 4.3. tanımda verilmiştir. Öyleyse her reel (gerçel) sayı bir skalerdir. Buna göre şu tanımı verebiliriz.

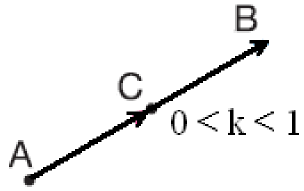
4.9. Tanım: $\overrightarrow{AB}$ ve $\overrightarrow{AC}$ iki vektörü verilsin. Eğer,
$$\|\overrightarrow{AC}\|=k\|\overrightarrow{AB}\|$$
olacak şekilde $k\in\mathbb{R}$ varsa k sayısına $\overrightarrow{AB}$ vektörünü skaler ile çarpımı $\overrightarrow{AC}$ vektörüdür denir.

1. $\overrightarrow{AB}$ ile $\overrightarrow{AC}$ vektörleri aynı doğrultuda ve aynı yönde ise $k\in\mathbb{R}^+$ için

$$\|\overrightarrow{AC}\| = \|k \cdot \overrightarrow{AB}\| = |k|\|\overrightarrow{AB}\|$$
$$\overrightarrow{AC} = k \cdot \overrightarrow{AB}$$

dir.

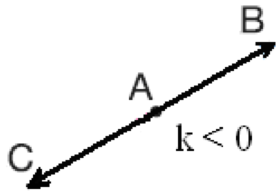




2. $\overrightarrow{AB}$ ile $\overrightarrow{AC}$ vektörleri aynı doğrultuda ve ters yönde ise $k \in \mathbb{R}^-$ için

$$\|\overrightarrow{AC}\| = \|k \cdot \overrightarrow{AB}\| = |k|\|\overrightarrow{AB}\|$$
$$\overrightarrow{AC} = -k \cdot \overrightarrow{AB}$$

dir.



3. $k = 0$ ise $k \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \cdot \overrightarrow{AB} = \vec{0}$ dır.

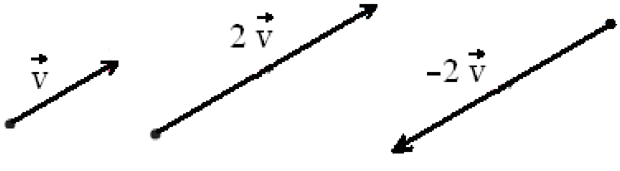
4. $k \in \mathbb{R} - \{0\}$ ise, $r \cdot \vec{0} = \vec{0}$ dır

Örnek: Verilen bir $\vec{v}$ vektörünün normu 5 birimdir. Buna göre,

a) $2 \cdot \vec{v}$
b) $-2 \cdot \vec{v}$

nin normunu bulunuz.

Çözüm: Verilen vektörün çizimleri



şeklindedir. Buna göre,

a) $k = 2 > 0$ olduğundan $\vec{v}$ ile $2 \cdot \vec{v}$ aynı yönde olup

$$\|2 \cdot \vec{v}\| = |2| \cdot \|\vec{v}\| = 2 \cdot 5 = 10 \text{ br'dir.}$$

b) $k = -2 > 0$ olduğundan $\vec{v}$ ile $-2 \cdot \vec{v}$ ters yönde olup

$$\|-2 \cdot \vec{v}\| = |-2| \cdot \|\vec{v}\| = 2 \cdot 5 = 10 \text{ br'dir.}$$

4.1. Sonuç: 4.9. tanımda (1) ve (2) ye göre, $k \in \mathbb{R} - \{0\}$ ve sıfırdan farklı bir $\overrightarrow{AB}$ ve $\overrightarrow{CD}$ vektörü için

$$k \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$$
$$\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{CD}$$

dir.

VEKTÖR UZAYI KAVRAMI

4.10. Tanım: $V \neq \emptyset$ ve V kümesi F cismi üzerinde,

$$\oplus : V \times V \to V$$
$$\otimes : F \times V \to V$$

işlemleri tanımlansın. Eğer $(V, \oplus, \otimes)$ sistemi üzerinde,

V1) $(V, \oplus)$ sistemi değişmeli grup,
V2) Her $a \in F$ ve her $u, v \in V$ kümesi için
$$a \otimes (u \oplus v) = (a \otimes u) \oplus (b \otimes v)$$
V3) Her $a, b \in F$ ve her $v \in V$ kümesi için
$$(a \oplus b) \otimes v = (a \otimes v) \oplus (b \otimes v)$$
V4) Her $a, b \in F$ ve her $v \in V$ kümesi için
$$a \otimes (b \otimes v) = (a \otimes b) \otimes v,$$
V5) Her $v \in V$ için $1 \otimes v = v$,

V1, V2, V3, V4 ve V5 aksiyomlarını sağlıyorsa $(V, \oplus, \otimes)$ sistemi bir vektör uzayı veya lineer uzay denir.

Örnek: Düzlemde V vektörlerin kümesi olmak üzere $(V, +, \cdot)$ sistemi bir vektör uzayı olduğunu gösteriniz.

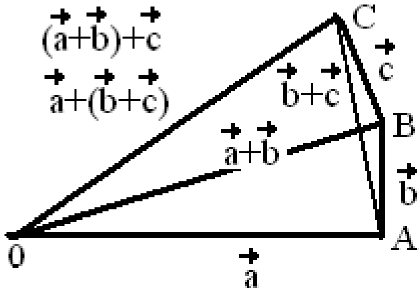
Çözüm: V1) $(V, +)$ sistemi değişmeli grup olduğunu gösterelim.

G1) Her $\vec{a}, \vec{b} \in V$ için
$$\vec{a} + \vec{b} \in V$$
olduğu vektörlerde toplamı işleminden açıktır.

G2) Her $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V$ için
$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$$

olup birleşme özelliği vardır.

Gerçekten, $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{BC} = \vec{c}$ olmak üzere $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{AB}$ ve $\overrightarrow{BC}$ yi çizelim.



ABC üçgeninde $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \vec{b} + \vec{c} = \overrightarrow{AC}$

OAC üçgeninde $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} \Leftrightarrow \vec{a}\,(\vec{b} + \vec{c}) = \overrightarrow{OC}$ (1)

OAB üçgeninde $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} \Leftrightarrow \vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{OA}$

OBC üçgeninde $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} \Leftrightarrow (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \overrightarrow{OC}$ (2)

(1) ve (2) eşitliklerinden, her $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V$ için

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$$

bulunur. Buna göre Vektörler kümesinde toplama işleminin birleşme özelliği vardır.

G3) $\vec{0}$ sıfır vektörüne olmak üzere, her $\vec{a} \in V$ için

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a}$$

olup vektörler kümesinde toplama işlemine göre birim (etkisiz) eleman özelliği vardır.

Gerçekten $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \vec{0}$ olduğunu biliyoruz. $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ olmak üzere

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$$
$$\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$$

olur. Her iki eşitlikten

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$$

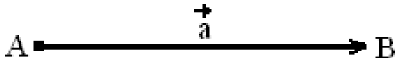
elde edilir. O halde $\vec{0}$ vektörü birim elemandır.

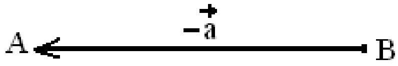
G4) Her $\vec{a} \in V$ için

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = (-\vec{a}) + \vec{a} = \vec{0}$$

olup bir $\vec{a}$ vektörünün toplama işlemine göre tersi $-\vec{a}$ dır.

Gerçekten $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ olsun. $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} - \vec{a}$ ve $-\vec{a} \in V$





$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} \Leftrightarrow \vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$$
$$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BB} \Leftrightarrow (-\vec{a}) + \vec{a} = \vec{0}$$

Her iki eşitlikten, her $\vec{a} \in V$ için

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = (-\vec{a}) + \vec{a} = \vec{0}$$

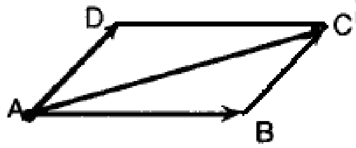
dir. Buna göre $\vec{a}$ vektörünün toplama işlemine göre tersi $-\vec{a}$ vektörüdür.

G5) Her $\vec{a}, \vec{b} \in V$ için

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{a} + \vec{b}$$

olup Vektörler kümesinde toplama işleminin değişme özelliği vardır.

Gerçekten, $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ olmak üzere ABCD paralel kenarını çizelim.



ABC üçgeninde $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AC}$

ADC üçgeninde $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \vec{b} + \vec{a} = \overrightarrow{AC}$

Her iki eşitlikten, her $\vec{a}, \vec{b} \in V$ için

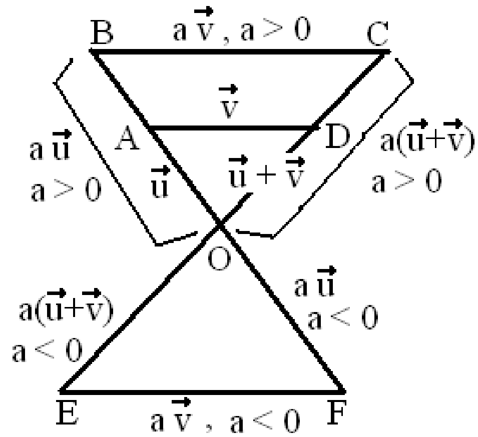
$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{a} + \vec{b}$$

bulunur.

Buna göre vektörlerde toplama işlemine göre $(V, +)$ sistemi değişmeli gruptur.

V2) Her $a \in \mathbb{R}$ ve her $\vec{u}, \vec{v}$ vektörleri için $a \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = a \cdot \vec{u} + a \cdot \vec{v}$ dir.

Gerçekten, $a = 0, \vec{u} = \vec{0}, \vec{v} = \vec{0}$ ise $a \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = a \cdot \vec{u} + a \cdot \vec{v}$ olduğu açıktır.



$a \neq 0, \vec{u} \neq \vec{0}, \vec{v} \neq \vec{0}$ olsun. $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ ve $\overrightarrow{AD} = \vec{v}$ ise $\overrightarrow{OD} = \vec{u} + \vec{v}$ olur.

$a > 0$ için $\|\overrightarrow{OB}\| = a\,\|\overrightarrow{OA}\| = a\vec{u}$ veya mutlak değer olarak gösterirsek, $|\overrightarrow{OB}| = a\,|\overrightarrow{OA}|$ olur.

B noktasından $\overrightarrow{AD}$ vektörüne paralel olarak çizilen ışının OD ışınını kestiği nokta C ise OAD ve OBC üçgenlerin benzerliğinden

$$\frac{|BC|}{|AD|} = \frac{|OC|}{|OD|} = \frac{|OB|}{|OA|} = \frac{a\cdot|OA|}{|OA|} = a$$

bulunur. Bu orantıya göre $|OB| = a \cdot |OA|$ ve $|OC| = a \cdot |OD|$ dir. O halde,

$$\overrightarrow{BC} = a \cdot (\overrightarrow{AD}) \text{ ve } \overrightarrow{OC} = a \cdot (\overrightarrow{OD}) = a(\vec{u} + \vec{v}) \qquad (1)$$

dir. Yine OBC üçgeninden

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = a\vec{u} + a\vec{v} \qquad (2)$$

bulunur. (1) ve (2) den,

$$a \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = a \cdot \vec{u} + a \cdot \vec{v}$$

olduğu görülür.

$a < 0$ için $a \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = a \cdot \vec{u} + a \cdot \vec{v}$ olduğu okuyucuya bırakılmıştır.

($|OF| = |a| \cdot |OA|$ olmak üzere, $\overrightarrow{OA}$ ile ters yönlü $\overrightarrow{OF}$ vektörü çizilmiştir. FE//AD ve $\overrightarrow{OE}$, $\overrightarrow{OD}$ ile ters yönlüdür. OAD ve OFE üçgenlerinin benzerliğinden yararlanınız.)

V3) Her $a, b \in \mathbb{R}$ ve her $\vec{v}$ vektörü için $(a + b) \cdot \vec{v} = a \cdot \vec{v} + b \cdot \vec{v}$ dir.

Gerçekten, $a = 0, b = 0, \vec{v} = \vec{0}$ ise $(a + b) \cdot \vec{v} = a \cdot \vec{v} + b \cdot \vec{v}$ olduğu açıktır.

$a = 0, b = 0, \vec{v} = \vec{0}$ ve $(a + b) \cdot \vec{v}$ ile $(a \cdot \vec{v} + b \cdot \vec{v})$ aynı işaretli ise

$$\|(a+b)\vec{v}\| = |a+b|\,\|\vec{v}\| = \big||a|+|b|\big|\,\|\vec{v}\| \qquad (1)$$
$$\|a\vec{v}+b\vec{v}\| = \|a\vec{v}\| + \|b\vec{v}\| = |a|\|\vec{v}\| + |b|\|\vec{v}\| = \big||a|+|b|\big|\,\|\vec{v}\| \qquad (2)$$

dir. (1) ve (2) eşitliğinden,

$$(a+b)\cdot\vec{v} = a\cdot\vec{v} + b\cdot\vec{v}$$

bulunur. Yine,

$a = 0, b = 0, \vec{v} = \vec{0}$ ve $(a+b)\cdot\vec{v}$ ile $(a\cdot\vec{v} + b\cdot\vec{v})$ zıt işaretli ise

$$\|(a+b)\cdot\vec{v})\| = |a+b|\cdot\|\vec{v}\| = \big||a|-|b|\big|\cdot\|\vec{v}\| \qquad (3)$$
$$\|a\cdot\vec{v}+b\cdot\vec{v}\| = \|a\cdot\vec{v}\| - \|b\cdot\vec{v}\| = |a|\|\vec{v}\| - |b|\|\vec{v}\| = \big||a|-|b|\big|\cdot\|\vec{v}\| \qquad (4)$$

dir. (3) ve (4) eşitliğinden,

$$(a+b)\cdot\vec{v} = a\cdot\vec{v} + b\cdot\vec{v}$$

bulunur.

V4) Her $a, b \in \mathbb{R}$ ve her $\vec{v}$ vektörü için $a\cdot(b\cdot\vec{v}) = (a\cdot b)\cdot\vec{v}$ dir.

Gerçekten, $a = 0, b = 0, \vec{v} = \vec{0}$ ise $a\cdot(b\cdot\vec{v}) = (a\cdot b)\cdot\vec{v}$ olduğu açıktır.

$a \neq 0, b \neq 0, \vec{v} \neq \vec{0}$ ve $a\cdot b$ aynı işaretli $(a\cdot b > 0)$ ise

$$\|a\cdot(b\cdot\vec{v})\| = |a|\cdot\|b\cdot\vec{v}\| = |a|\cdot|b|\cdot\|\vec{v}\| = |a\cdot b|\cdot\|\vec{v}\|$$

bulunur. Yine,

$a \neq 0, b \neq 0, \vec{v} \neq \vec{0}$ ve $a\cdot b$ zıt işaretli $(a\cdot b < 0)$ ise

$$\|a\cdot(b\cdot\vec{v})\| = |a|\cdot\|b\cdot\vec{v}\| = |a|\cdot|b|\cdot\|\vec{v}\| = |a\cdot b|\cdot\|\vec{v}\|$$

bulunur. Buna göre $a\cdot(b\cdot\vec{v}) = (a\cdot b)\cdot\vec{v}$ dir.

V5) Her $\vec{v}$ vektörü için $1\cdot\vec{v} = \vec{v}$ dir.

Gerçekten, $1\cdot\vec{v}$ ile $\vec{v}$ aynı yönlü vektörlerdir. Buna göre,

$$\|1\cdot\vec{v}\| = |1|\cdot\|\vec{v}\| = \|\vec{v}\|$$

dir. Şu halde $1\cdot\vec{v} = \vec{v}$ dir.

Buna göre $(V, +, \cdot)$ sistemi bir vektör uzayıdır.

Örnek: Bütün reel (gerçel) sayı dizilerinin kümesi S olsun. Dizilerde toplama ve çarpma işlemlerine göre S kümesinin, $\mathbb{R}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olduğunu gösteriniz.

Çözüm: V1) $(S, +)$ sistemi değişmeli grup olduğunu gösterelim.

G1) Her $(a_n), (b_n) \in S$ için iki dizinin toplaması olduğundan kapalıdır.

G2) Her $(a_n), (b_n), (c_n) \in S$ için iki dizinin toplaması özelliğinden,

$$
\begin{aligned}
(a_n) + ((b_n) + (c_n)) &= (a_n) + (b_n + c_n) \\
&= (a_n + (b_n + c_n)) \\
&= (a_n + b_n) + (c_n) \\
&= ((a_n) + (b_n)) + (c_n)
\end{aligned}
$$

olduğundan, S kümesinde toplama işleminin birleşme özelliği vardır.

G3) Her $(a_n) \in S$ için,
$(a_n) + (0) = (a_n + 0) = (a_n)$ ve $(0) + (a_n) = (0 + a_n) = (a_n)$
olduğundan, S kümesinde toplama işlemine göre etkisiz eleman sıfır dizisidir.

G4) Her $(a_n) \in S$ için,
$(a_n) + (-a_n) = (a_n - a_n) = (0)$ ve $(-a_n) + (a_n) = (-a_n + a_n) = (0)$
olduğundan, S kümesinde (a_n) elemanının toplamının ters elemanı $(-a_n)$ dir.

G5) Her $(a_n), (b_n) \in S$ için,
$(a_n) + (b_n) = (a_n + b_n) = (b_n + a_n) = (b_n) + (a_n)$
olduğundan, S kümesinde toplama işleminin değişme özelliği vardır.

Buna göre diziler kümesi toplama işlemine göre $(S, +)$ sistemi değişmeli gruptur.

V2) Her $\lambda \in \mathbb{R}$ ve her $(a_n), (b_n) \in S$ dizileri için

$$\lambda[(a_n) + (b_n)] = \lambda(a_n + b_n) = (\lambda a_n + \lambda b_n) = (\lambda b_n) + (\lambda a_n) = \lambda(a_n) + \lambda(b_n)$$

dir.

V3) Her $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ve her $(a_n) \in S$ dizileri için

$$(\lambda + \mu)(a_n) = ((\lambda + \mu)a_n) = (\lambda a_n + \mu a_n) = (\lambda a_n) + (\mu a_n) = \lambda(a_n) + \mu(a_n)$$

dir.

V4) Her $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ve her $(a_n) \in S$ için,

$$\lambda(\mu(a_n)) = \lambda(\mu a_n) = (\lambda(\mu a_n)) = ((\lambda\mu)a_n) = (\lambda\mu)(a_n)$$

dir.

V5) Her $(a_n) \in S$ için,

$$1 \cdot (a_n) = (1 \cdot a_n) = (a_n)$$

dir.

Buna göre $(S, +, \cdot)$ sistemi bir vektör uzayıdır.

Örnek:

1) $m \times n$ türünden bütün matrislerin $M_{m \times n}$ kümesi, $\mathbb{R}$ cismi üzerinde bir vektör uzayıdır.

2) [a, b] aralığında tanımlı bütün reel (gerçel) değerli fonksiyonların F[a, b] kümesi, $\mathbb{R}$ cismi üzerinde bir vektör uzayıdır.

3) $\mathbb{Z}_5$ kümesi, $\mathbb{R}$ cismi üzerinde bir vektör uzayıdır.

Bu örneğin çözümü okuyucuya bırakılmıştır.

Örnek: Katsayıları reel (gerçel) sayı olan tüm polinomların $R_{[x]}$ kümesi, $\mathbb{R}$ cismi üzerinde bir vektör uzayıdır.

Çözüm:
V1) $(R_{[x]}, +)$ sistemi değişmeli grup mudur?

Her n. dereceden $P(x), Q(x), R(x) \in R_{[x]}$ polinomları

$$P(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k \;,\; Q(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k \;,\; R(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

olsunlar. Bu takdirde,

G1)

$$\begin{aligned} P(x)+\big(Q(x)+R(x)\big) &= \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \left(\sum_{k=0}^{n} b_k x^k + \sum_{k=0}^{n} c_k x^k\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \sum_{k=0}^{n} (b_k + c_k) x^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} (a_k + (b_k + c_k)) x^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} ((a_k + b_k) + c_k) x^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) x^k + \sum_{k=0}^{n} c_k x^k \\ &= \left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \sum_{k=0}^{n} b_k x^k\right) + \sum_{k=0}^{n} c_k x^k \\ &= (P(x)+Q(x))+R(x) \end{aligned}$$

olduğundan toplama işleminin birleşme özelliği vardır.

G2) Her n. dereceden $P(x) \in R_{[x]}$ polinom olsun. Bu takdirde,

$$P(x) + e(x) = P(x)$$
$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \sum_{k=0}^{n} 0 \cdot x^k = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$
$$\sum_{k=0}^{n} (a_k + 0) x^k = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

olacak şekilde $e(x) = 0$ (sıfır polinomu) vardır. Bu sıfır polinomu toplama işleminin birim elemanıdır.

G3) Her n. dereceden $P(x) \in R_{[x]}$ polinom olsun. Bu takdirde,

$$P(x) + P^{-1}(x) = e(x)$$
$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \sum_{k=0}^{n} (-a_k) x^k = \sum_{k=0}^{n} 0 \cdot x^k$$
$$\sum_{k=0}^{n} (a_k - a_k) x^k = \sum_{k=0}^{n} 0 \cdot x^k$$

olacağından $P^{-1}(x) = -a_n x^n - a_{n-1} x^{n-1} - \cdots - a_1 x - a_0$ polinomu toplama işleminin ters elemanıdır.

G4) Her n. dereceden $P(x), Q(x) \in R_{[x]}$ polinomları

$$\begin{aligned} P(x) + Q(x) &= \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \sum_{k=0}^{n} b_k x^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) x^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} (b_k + a_k) x^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} b_k x^k + \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \\ &= Q(x) + P(x) \end{aligned}$$

olduğundan toplama işleminin değişme özelliği vardır. Buna göre $(R_{[x]}, +)$ sistemi değişmeli gruptur.

V2) Her $\lambda \in \mathbb{R}$, her n. dereceden $P(x), Q(x) \in R_{[x]}$ polinomları verilsin.

$$
\begin{aligned}
\lambda \cdot \big(Q(x) + R(x)\big) &= \lambda\left[\left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right) + \left(\sum_{k=0}^{n} b_k x^k\right)\right] \\
&= \lambda\left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right) + \lambda\left(\sum_{k=0}^{n} b_k x^k\right) \\
&= \lambda \cdot P(x) + \lambda \cdot Q(x)
\end{aligned}
$$

olup sağdan çarpmanın toplama üzerine dağılma özelliği olduğunu gösterir.

V3) Her $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, her n. dereceden $P(x) \in R_{[x]}$ polinomları verilsin.

$$
\begin{aligned}
(\lambda + \mu) \cdot P(x) &= (\lambda + \mu)\left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right) \\
&= \lambda\left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right) + \mu\left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right) \\
&= \lambda \cdot P(x) + \mu \cdot Q(x)
\end{aligned}
$$

V4) Her $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ve her $P(x) \in R_{[x]}$ için,

$$
\lambda\big(\mu\, P(x)\big) = \lambda\left(\mu \sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right) = (\lambda\mu)\left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right) = (\lambda\mu) P(x)
$$

olur.

V5) Her $P(x) \in R_{[x]}$için,

$$
1 \cdot P(x) = 1 \cdot \left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right) = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right) = P(x)
$$

olur. O halde $(R_{[x]}, +, \cdot)$ bir vektör uzayıdır.

Örnek: $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}$

$= \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$

kümesi üzerinde toplama işlemini

$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$

olmak üzere

$x + y = (x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$

çarpma işlemini $\lambda \in \mathbb{R}$ için

$\lambda \cdot x = \lambda \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n)$

olarak Euclid uzayını tanımlayalım.

$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ bir vektör uzayı olduğunu gösteriniz.

Çözüm: V1) $(\mathbb{R}^n, +)$ değişmeli grup mudur?

G1) Fonksiyon olduğundan kapalılık özelliğine bakılmaya gerek yoktur.

G2) $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ için

$$\begin{aligned} x + (y + z) &= (x_1, x_2, \dots, x_n) + ((y_1, y_2, \dots, y_n) + (z_1, z_2, \dots, z_n)) \\ &= (x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1 + z_1, y_2 + z_2, \dots, y_n + z_n) \\ &= (x_1 + (y_1 + z_1), x_2 + (y_2 + z_2), \dots, x_n + (y_n + z_n)) \\ &= ((x_1 + y_1) + z_1, (x_2 + y_2) + z_2, \dots, (x_n + y_n) + z_n) \\ &= ((x_1 + y_1), (x_2 + y_2), \dots, (x_n + y_n)) + (z_1, z_2, \dots, z_n) \\ &= ((x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n)) + (z_1, z_2, \dots, z_n) \\ &= (x + y) + z \end{aligned}$$

olduğundan birleşme özelliği vardır.

G3) $x = (x_1, x_2, \dots, x_n), 0 = (0,0, \dots ,0) \in \mathbb{R}^n$ için

$$\begin{aligned} x + 0 &= (x_1, x_2, \dots, x_n) + (0,0, \dots ,0) \\ &= (x_1 + 0, x_2 + 0, \dots, x_n + 0) \\ &= (x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &= x \end{aligned}$$

dir. Benzer şekilde $0 + x = x$ gösterileceğinden $0 = (0,0, \dots ,0) \in \mathbb{R}^n$ birim (etkisiz) elemanıdır.

G4) $x = (x_1, x_2, \dots, x_n), x^{-1} = (x_1^{-1}, x_2^{-1}, \dots, x_n^{-1}), 0 = (0,0, \dots ,0) \in \mathbb{R}^n$ için

$$\begin{aligned} &x + x^{-1} = 0 \\ &(x_1, x_2, \dots, x_n) + (x_1^{-1}, x_2^{-1}, \dots, x_n^{-1}) = (0,0, \dots ,0) \\ &(x_1 + x_1^{-1}, x_2 + x_2^{-1}, \dots, x_n + x_n^{-1}) = (0,0, \dots ,0) \\ &x_1 + x_1^{-1} = 0, x_2 + x_2^{-1} = 0, \dots, x_n + x_n^{-1} = 0 \\ &x_1^{-1} = -x_1, x_2^{-1} = -x_2, \dots, x_n^{-1} = -x_n \end{aligned}$$

olduğundan $x^{-1} = (x_1^{-1}, x_2^{-1}, \dots, x_n^{-1})$ ifadesi $-x = (-x_1, -x_2, \dots, -x_n)$ olur. Benzer şekilde $x^{-1} + x = 0$ gösterileceğinden $-x = (-x_1, -x_2, \dots, -x_n)$ ters eleman olur.

G2) $x, y \in \mathbb{R}^n$ için

$$\begin{aligned} x + y &= (x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) \\ &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \\ &= (y_1 + x_1, y_2 + x_2, \dots, y_n + x_n) \\ &= (y_1, y_2, \dots, y_n) + (x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned}$$

$$= y + x$$

olup değişmelidir. Buna göre $(\mathbb{R}^n, +)$ değişmeli gruptur.

V2) $\lambda \in \mathbb{R}, x, y \in \mathbb{R}^n$ için

$$\begin{aligned}
\lambda(x + y) &= \lambda((x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n)) \\
&= \lambda(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \\
&= (\lambda(x_1 + y_1), \lambda(x_2 + y_2), \dots, \lambda(x_n + y_n)) \\
&= (\lambda x_1 + \lambda y_1, \lambda x_2 + \lambda y_2, \dots, \lambda x_n + \lambda y_n) \\
&= (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) + (\lambda y_1, \lambda y_2, \dots, \lambda y_n) \\
&= \lambda(x_1, x_2, \dots, x_n) + \lambda(y_1, y_2, \dots, y_n) \\
&= \lambda x + \lambda y
\end{aligned}$$

olur.

V3) $\lambda, \mu \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n$ için

$$\begin{aligned}
(\lambda + \mu)x &= (\lambda + \mu)(x_1, x_2, \dots, x_n) \\
&= \lambda(x_1, x_2, \dots, x_n) + \mu(x_1, x_2, \dots, x_n) \\
&= (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) + (\mu x_1, \mu x_2, \dots, \mu x_n) \\
&= (\lambda x_1 + \mu x_1, \lambda x_2 + \mu x_2, \dots, \lambda x_n + \mu x_n) \\
&= (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) + (\mu x_1, \mu x_2, \dots, \mu x_n) \\
&= \lambda(x_1, x_2, \dots, x_n) + \mu(x_1, x_2, \dots, x_n) \\
&= \lambda x + \mu x
\end{aligned}$$

olur.

V4) $\lambda, \mu \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n$ için

$$\begin{aligned}
(\lambda \cdot \mu)x &= (\lambda \cdot \mu)(x_1, x_2, \dots, x_n) \\
&= ((\lambda \cdot \mu)x_1, (\lambda \cdot \mu)x_2, \dots, (\lambda \cdot \mu)x_n) \\
&= (\lambda(\mu \cdot x_1), \lambda(\mu \cdot x_2), \dots, \lambda(\mu \cdot x_n)) \\
&= \lambda(\mu(x_1, x_2, \dots, x_n)) \\
&= \lambda(\mu \cdot x)
\end{aligned}$$

olur.

V5) $x \in \mathbb{R}^n$ için

$$\begin{aligned}
1 \cdot x &= 1 \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n) \\
&= (1 \cdot x_1, 1 \cdot x_2, \dots, 1 \cdot x_n) \\
&= (x_1, x_2, \dots, x_n) \\
&= x
\end{aligned}$$

olur. O halde $\mathbb{R}^n$ kümesi $\mathbb{R}$ de bir vektör uzayıdır.

Örnek: $\mathbb{C}^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n): \forall\, i = 1,2,\cdots,n, x_i \in \mathbb{C}\}$ tüm sıralı kompleks sayıların kümesi bir önceki örnekte gibi tanımlanmıştır. Bu $\mathbb{C}^n$ kümesi $\mathbb{C}$ de bir vektör uzayıdır.

Bu örneğin çözümü bir önceki örneğe benzediğinden okuyucuya bırakılmıştır.

4.4. Not: Yukarıdaki örneklerde görüldüğü gibi vektör uzayı sadece vektörlerden oluşmamaktadır. Polinomlar, diziler, $\mathbb{Z}_m$ kümesi gibi kavramlarda vektör uzayı aksiyomlarını sağlamaktadır. Buna göre bundan sonra bu kavramları da vektör olarak göstereceğiz.

4.1. Teorem: V bir vektör uzayı olsun. V'de vektörel toplama işleminin etkisiz elemanı tektir.

İspat: V vektör uzayının $\vec{0}$ ve $\overrightarrow{0'}$ gibi iki etkisiz elemanı olsun. 0 bir etkisiz öğe olduğundan $\forall\, \vec{x} \in V$ için

$$\vec{x} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{x} = \vec{x}$$

olur, burada özel olarak $\vec{x} = \overrightarrow{0'}$ alınırsa

$$\overrightarrow{0'} + \vec{0} = \vec{0} + \overrightarrow{0'} = \overrightarrow{0'} \qquad (1)$$

bulunur. Aynı şekilde 0' bir etkisiz eleman olduğundan $\forall\, x \in V$ için

$$\vec{x} + \overrightarrow{0'} = \overrightarrow{0'} + \vec{x} = \vec{x}$$

özel olarak $x = 0$ alınırsa

$$\vec{0} + \overrightarrow{0'} = \overrightarrow{0'} + \vec{0} = \vec{0} \qquad (2)$$

bulunur. (1) ve (2) eşitlikleri karşılaştırılırsa

$$\vec{0} = \overrightarrow{0'}$$

elde edilir. Böylece etkisiz elemanın tek olduğu gösterilmiş olur.

4.2. Teorem: V vektör uzayında her $\vec{x}$ vektörünün tersi tektir.

İspat: V vektör uzayının herhangi bir $\vec{x}$ vektörünün $\overrightarrow{y_1}$ ve $\overrightarrow{y_2}$ gibi iki tane tersi olsun. Bu durumda

$$\vec{x} + \overrightarrow{y_1} = \overrightarrow{y_1} + \vec{x} = \vec{0} \text{ ve } \vec{x} + \overrightarrow{y_2} = \overrightarrow{y_2} + \vec{x} = \vec{0}$$

eşitlikleri sağlanır.

$$\overrightarrow{y_1} = \overrightarrow{y_1} + \vec{0} = \overrightarrow{y_1} + (\vec{x} + \overrightarrow{y_2}) = (\overrightarrow{y_1} + \vec{x}) + \overrightarrow{y_2} = \vec{0} + \overrightarrow{y_2} = \overrightarrow{y_2}$$

elde edilir. $\vec{x}$ vektörünün tersi tek olduğundan bu ters vektör $(-\vec{x})$ ile gösterilir. Şu halde $\vec{x} + (-\vec{x}) = (-\vec{x}) + \vec{x} = \vec{0}$ dır.

4.3. Teorem: V bir vektör uzay ve F bir cisim ise

i) Her $a \in F$ için $a \cdot 0_V = 0_V$

ii) Her $\vec{u} \in V$ için $0_F \cdot \vec{u} = 0_V$

iii) Her $a \in F$ ve her $\vec{u} \in V$ için $(-a) \cdot \vec{u} = -(a\vec{u})$

iv) $a \neq 0_F$ ve $a = 0_V$ ise $\vec{v} = 0_V$

dır.

İspat:

i) $a \cdot 0_V = a \cdot (0_V + 0_V) = a \cdot 0_V + a \cdot 0_V$ olduğundan $a \cdot 0_V = 0_V$ olur.

ii) $0_F = 0$ diyelim. Her $\vec{u} \in V$ için $0 \cdot \vec{u} = (0 + 0) \cdot \vec{u} = 0_V \cdot \vec{u} + 0_V \cdot \vec{u}$ olduğundan $0 \cdot \vec{u} = 0_V$ dir.

iii) $0_V = \big(a + (-a)\big) \cdot \vec{u} = a \cdot \vec{u} + (-a) \cdot \vec{u}$ eşitliğinden istenen elde edilir.

iv) $a \neq 0_F$ ise $a \in F$ nin tersi var ve

$$0_V = a^{-1} \cdot 0_V = a^{-1} \cdot (a \cdot \vec{v}) = (a^{-1} \cdot a) \cdot \vec{v} = 1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$$

dir.

ALT LİNEER UZAY (ALT VEKTÖR UZAYI)

4.4. Teorem: V bir vektör uzayı F cismi üzerinde

$$\oplus : V \times V \to V$$
$$\otimes : F \times V \to V$$

işlemlerine göre bir vektör uzayı olsun. $U \subseteq V$, $U \neq \varnothing$ için U kümesi toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre kapalı ise yani; her $u, v \in U$ ve her $\lambda \in \mathbb{R}$ için,

i) $u \oplus v \in U$

ii) $\lambda \otimes u \in U$

oluyorsa U'ya, V'nin bir alt vektör (lineer) uzayı denir ve alt vektör uzayı vektör uzayı şartlarını sağlar.

İspat: V1) (i) den dolayı $\oplus : U \times U \to U$ işlemi $\oplus : V \times V \to V$ işleminin U üzerine indirgenmişi olduğundan V1 aksiyomu olan değişmeli gruptur. (ii) den dolayı $\otimes : F \times U \to U$ işlemi $\otimes : F \times V \to V$ işleminin A üzerine indirgenmişi olduğundan,

V2) Her $\lambda \in F$ ve her $\vec{u}, \vec{v} \in V$ için

$$\lambda \otimes (\vec{u} \oplus \vec{v}) = (a \otimes \vec{u}) \oplus (b \otimes \vec{v})$$

olduğundan her $\vec{u}_1, \vec{v}_1 \in V$ için,

$$\lambda \otimes (\vec{u}_1 \oplus \vec{v}_1) = (a \otimes \vec{u}_1) \oplus (b \otimes \vec{v}_1)$$
olur.

V3) Her $\lambda, \mu \in F$ ve her $\vec{v} \in V$ için
$$(\lambda \oplus \mu) \otimes \vec{v} = (\lambda \otimes \vec{v}) \oplus (\mu \otimes \vec{v})$$
olduğundan her $\vec{u}_1, \vec{v}_1 \in V$ için,
$$(\lambda \oplus \mu) \otimes \vec{v}_1 = (\lambda \otimes \vec{v}_1) \oplus (\mu \otimes \vec{v}_1)$$
olur.

V4) Her $\lambda, \mu \in F$ ve her $\vec{v} \in V$ için
$$\lambda \otimes (\mu \otimes \vec{v}) = (\lambda \otimes \mu) \otimes \vec{v}$$
olduğundan her $\vec{u}_1, \vec{v}_1 \in V$ için,
$$\lambda \otimes (\mu \otimes \vec{v}_1) = (\lambda \otimes \mu) \otimes \vec{v}_1$$
olur.

V5) Her $v \in V$ için $1 \otimes \vec{v} = \vec{v}$ olacağından $\vec{v}_1 \in U$ için $1 \otimes \vec{v}_1 = \vec{v}_1$ olur.

Örnek: $U = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = 0\}$ kümesi $\mathbb{R}^3$ ün bir alt uzayı mıdır?

Çözüm: U'nun $\mathbb{R}^3$ ün bir alt uzayı olması için
$x, y \in U$ iken $x + y \in U$
$c \in \mathbb{R}, x \in U$ iken $c\,x \in U$
olmalıdır.

i) $x, y \in U$ ise $x = (0, x_2, x_3)$ ve $y = (0, y_2, y_3)$ olur.
$x + y = (0, x_2, x_3) + (0, y_2, y_3) = (0, x_2 + y_2, x_3 + y_3) \in U$

ii) $c \in \mathbb{R}$ ve $x \in U$ iken $c\,x = c(0, x_2, x_3) = (0, cx_2, cx_3) \in U$
elde edilir. Böylece W kümesinin öğeleri alt uzay olma koşullarını sağlar. U, $\mathbb{R}^3$ ün bir alt uzayıdır.

Örnek: $A = \{(x_1, x_2): (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, 2x_1 + 5x_2 = 0\}$ kümesinin $\mathbb{R}^2$ nin bir alt vektör uzayı olduğunu gösteriniz.

Çözüm:
i) $(x_1, x_2) \in A$ ise $2x_1 + 5x_2 = 0$ ve $(y_1, y_2) \in A$ ise $2y_1 + 5y_2 = 0$
$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) \in A$
$(x_1 + y_1, x_2 + y_2) \in A$
$2(x_1 + y_1) + 5(x_2 + y_2) = 0$
olduğundan (i) aksiyomu sağlanır.

ii) $(x_1, x_2) \in A$ ise $2x_1 + 5x_2 = 0$

$k(2x_1 + 5x_2) = 0$

$2kx_1 + 5kx_2 = 0$

$(kx_1, kx_2) \in A$

$k(x_1, x_2) \in A$

olduğundan (ii) aksiyomu sağlanır. Buna göre A kümesi $\mathbb{R}^2$ nin bir alt vektör uzayıdır.

Örnek: $U, W \subset V$ olsun. $U \cap W$ kesişiminin de V'nin bir alt vektör uzayı olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $\vec{u}, \vec{w} \in U \cap W$ varsayalım. Bu takdirde $\vec{u}, \vec{w} \in U$ ve $\vec{u}, \vec{w} \in W$ dir. U ve W alt vektör uzay olduğundan,

$\vec{u} + \vec{w}, \vec{u}\vec{w} \in U$ ve $\vec{u} + \vec{w}, \vec{u}\vec{w} \in W$

dir. Bu da $\vec{u} + \vec{w}, \vec{u}\vec{w} \in U \cap W$ olduğunu gösterir. Bu ise $U \cap W$ kümesi V'nin diğer alt vektör uzayıdır.

Örnek: $U = \{(u, 0) : u \in \mathbb{R}\}$, $\mathbb{R}^2$ nin bir alt vektör uzayıdır.

Çözüm:

i) Her $u, v \in \mathbb{R}$ için $(u, 0) + (v, 0) = (u + v, 0) \in U$

ii) Her $\lambda \in \mathbb{R}$ ve her $u \in \mathbb{R}$ için $\lambda(u, 0) = (\lambda u, 0) \in U$

Örnek: $U = \{ (x, y) \mid y = x + 1, x \in \mathbb{R}\}$ kümesi $\mathbb{R}^2$ nin bir alt uzayı mıdır?

Çözüm: Alt uzay tanımına göre, U alt uzay ise $\mathbb{R}^2$ deki işlemlere göre bir vektör uzayıdır.

Dolayısıyla $\mathbb{R}^2$ nin sıfır vektörünü içermek zorundadır. Fakat $0 = (0, 0) \notin U$ olduğundan ($x = 0$ için $y = 1$), $U = \{ (x, y) \mid y = x + 1, x \in \mathbb{R}\}$ kümesi alt uzay değildir.

4.2. Sonuç: $U \subseteq V$ olsun. U'nun V vektör uzayının bir alt uzayı olması için gerek ve yeter şart her $u, v \in U$ ve her $\lambda, \mu \in F$ için $\lambda u + \mu v \in U$ olmasıdır.

4.11. Tanım: V vektör uzayının bir U alt vektör uzayına göre, V/U vektör uzayına bölüm uzayı denir.

Örnek: Yukarıda verilen $U = \{(u, 0) : u \in \mathbb{R}\}$ alt vektör uzayına göre bölüm uzayını bulunuz.

Çözüm: $(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ elemanı $(v_1, v_2) = (v_1, 0) + (0, v_2)$ şeklinde yazılabileceğinden, $\mathbb{R}/U$ nin her elemanı $(0, v)$ şeklindedir.

$$\begin{aligned}(0, v_1) + U = (0, v_2) + U &\Leftrightarrow (0, v_1 - v_2) \in U \\ &\Leftrightarrow \exists u \in \mathbb{R} \text{ için } (0, v_1 - v_2) = (u, 0) \\ &\Leftrightarrow u = v_1 - v_2 = 0 \\ &\Leftrightarrow v_1 = v_2\end{aligned}$$

olduğundan $\mathbb{R}/U = \{(0, u) + U : v \in \mathbb{R}\}$ bulunur.

ÇÖZÜMLÜ ALIŞTIRMALAR

1. A,B,C üç vektör olsun. $A \cdot B = A \cdot C \Rightarrow B = C$ önermesi için aşağıdakilerden hangisi söylenenilir?

A) Totoloji B) Çelişki C) Olmayan Ergi
D) Gerçerli E) Her zaman doğrudur

Çözüm: $A \cdot B = A \cdot C \Rightarrow B = C$ önermesi her zaman doğru değildir. Çünkü $A = 0$ ise $B \neq C$ olabilir. Bu ise çelişkidir.

Cevap: B

2. ABCD, $A'B'C'D'$ köşegenlerin kesişim noktaları aynı olan iki kare olduğuna göre; $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{DD'}$ vektörel toplamı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\vec{0}$ B) $\overrightarrow{AO}$ C) $\overrightarrow{BO'}$ D) $\overrightarrow{AB}$ E) $\overrightarrow{AC}$

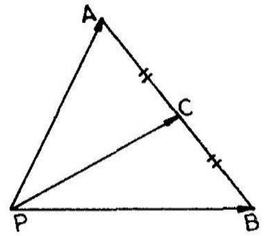
Çözüm: ABCD, $A'B'C'D'$ köşegenlerin kesişim noktaları O olsun,

$$\overrightarrow{AO} = -\overrightarrow{OA'},\ \overrightarrow{BO'} = -\overrightarrow{OB'},\ \overrightarrow{CO'} = -\overrightarrow{OC'},\ \overrightarrow{DO'} = -\overrightarrow{OD'}$$
$$\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO'} + \overrightarrow{CO'} + \overrightarrow{DO'} = -\overrightarrow{OA'} - \overrightarrow{OB'} - \overrightarrow{OC'} - \overrightarrow{OD'}$$
$$\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO'} + \overrightarrow{CO'} + \overrightarrow{DO'} + \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'} + \overrightarrow{OD'} = \vec{0}$$

bulunur.

Cevap: A

3.



Şekilde $|AC| = |CB|$ olduğuna göre $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\vec{0}$ B) $\overrightarrow{PC}$ C) $2\overrightarrow{PC}$ D) $2\overrightarrow{PB}$ E) $2\overrightarrow{PA}$

Çözüm: $\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AC}$

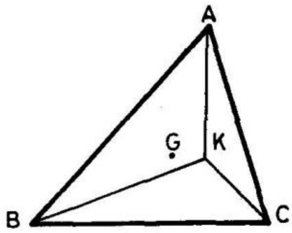
$\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BC}$

$2\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PV} + \underbrace{\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}}_{\vec{0}}$

$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PC} = 2\overrightarrow{PC}$

Cevap: C

4.



ABC üçgeninde G ağırlık merkezidir. $\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC}$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\vec{0}$ B) $\overrightarrow{KG}$ C) $2\overrightarrow{KG}$ D) $3\overrightarrow{KG}$ E) $4\overrightarrow{KG}$

Çözüm: $\overrightarrow{KA} = \overrightarrow{KG} + \overrightarrow{GA}$

$\overrightarrow{KB} = \overrightarrow{KG} + \overrightarrow{GB}$

$\overrightarrow{KG} = \overrightarrow{KG} + \overrightarrow{GC}$

denklemleri taraf tarafa toplanırsa;

$\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} = 3\overrightarrow{KG} + \underbrace{\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}}_{\vec{0}}$

$\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} = 3\overrightarrow{KG}$

bulunur.

Cevap: D

5. Bir doğru üzerinde sırasıyla A, B, C, D noktaları $2\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} = 4\overrightarrow{CD}$ olacak şekilde veriliyor. $\overrightarrow{AD} = k \cdot \overrightarrow{CD}$ ise k'nın değeri nedir?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

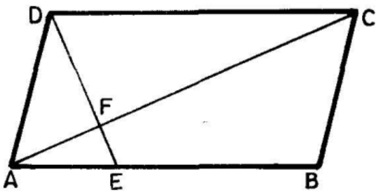
Çözüm: A, B, C ve D aynı doğru üzerindedir.

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$$
$$\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{CD} + 4\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CD}$$
$$\overrightarrow{AD} = 7\overrightarrow{CD}$$
$$k = 7$$

olur.

Cevap: E

6.



Şekilde ABCD paralelkenarında $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AE}$ ve $\overrightarrow{AC} = k \cdot \overrightarrow{AF}$ ise k kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: AFE üçgeni CFD üçgenine benzerdir.

$$\frac{|AF|}{|FC|} = \frac{|AE|}{|DC|}$$
$$\frac{|AF|}{|FC|} = \frac{1}{3}$$
$$|FC| = 3|AF|$$
$$|AC| = 4|AF|$$
$$\overrightarrow{AC} = 4\overrightarrow{AF}$$
$$m = 4$$

Cevap: D

KAYNAKÇA

1. H. Hilmi Hacısalihoğlu, Lineer Cebir, Gazi Üniversitesi Yayınları, Ankara, 1975.
2. Hüseyin Bilgiç, Lineer Cebir Ders Notları, Kahramanmaraş Sütçü İmam Üniversitesi, Kahramanmaraş, 2015.
3. M. Zeki DERMAN, Ökkeş ÖZKÖSELER, Serdar GÜLMEZ, Matematik III Zafer Yayınları, Ankara, 2005.
4. Ahmet HANÇERLİOĞLU, Faniye ALAN, Üniversiteye Hazırlık Matematik Seti, Tümay Yayınları, İstanbul Yayıncılık, 2006, Ankara.
5. Seymeur LİPSCHUTZ Ph. Dr., Çev. H. Hilmi HACISALİHOĞLU, Schaum Serisinden Lineer Cebir, Japonya.
6. Yrd. Doç. Dr. Nezahat ÇETİN, Öğr. Grv. Dr. Nevin ORHUN, Lineer Cebir, Anadolu Üniversitesi Yayınları: 1074, AÖF Yayınları: 589, 1998, Eskişehir.
7. Ali Rıza İLDENİZ, İsmet PARILDAR, Kemal ALAGÖZ, Tacim GÖLPINAR, Sayısal 1-2, Modern Matematik, Yıldırım Yayınları, 1986, ANKARA.
8. Doç. Dr. M. Kemal Sağel, Vektörel Analiz, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi döner sermaye işletmesi yayınları, No: 67, 2003, Ankara.
9. Thomas Calculus 2, George B. Thomas Jr., Massachusetts Institute of Technology, Maurice D. Weir, Naval Postgraduate School, Joel Hass, University of California Davis, Frank R. Giordano, Naval Postgraduate School, Çeviren: Recep Korkmaz, Beta Yayıncılık, İstanbul, 2010.
10. Murray R. Spiegel, İleri Matematik, Çev. Prof. Dr. H. Hilmi HACISALİHOĞLU, Schaum Yayınları, Nobel Yayın Dağıtım, 1997, Ankara.