5. BÖLÜM
KONUM VEKTÖRLERİ

KONUM (YER) VEKTÖR KAVRAMI

Vektörlerin analitik düzlemde gösterimi birçok işlemi sağlamaktadır. Bu bölümde konum (yer) vektörü tanımlanacaktır. Ama iki ve üç boyutlu uzay ($\mathbb{R}^2$ ve $\mathbb{R}^3$ de) üzerinde yer vektörü üzerinde işlemler analiz edilecektir.

5.1. Tanım: Analitik düzlemde başlangıç noktası orijin olan vektöre konum (yer) vektörü denir. $\vec{A}$ vektörü $a_1, a_2, \dots, a_n$ reel sayılarından oluşan sıralı n-liler olup $\vec{A} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ olarak gösterilir.

a_1 'e vektörün birinci ya da x_1 bileşeni
a_2 'ye vektörün ikinci ya da x_2 bileşeni
...
a_n 'ye vektörün ikinci ya da x_n bileşeni

Bu gösterim $\vec{A} = [a_1 \ \ a_2 \ \ \dots \ \ a_n] = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ matrisleri biçiminde de yapılmaktadır.

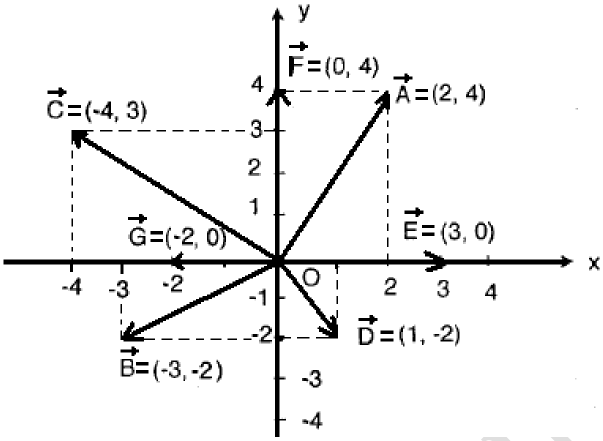
Düzlemde $\vec{A}$ vektörü a_1, a_2 reel sayılarından oluşan ikililer için $\vec{A} = (a_1, a_2)$ olarak gösterilir.

a_1 'e vektörün birinci ya da x bileşeni (apsis)
a_2 'ye vektörün ikinci ya da y bileşenidir (ordinattır).

Düzlemde $\vec{A}$ vektörü a_1, a_2, a_3 reel sayılarından oluşan üçlüler için $\vec{A} = (a_1, a_2, a_3)$ olarak gösterilir.

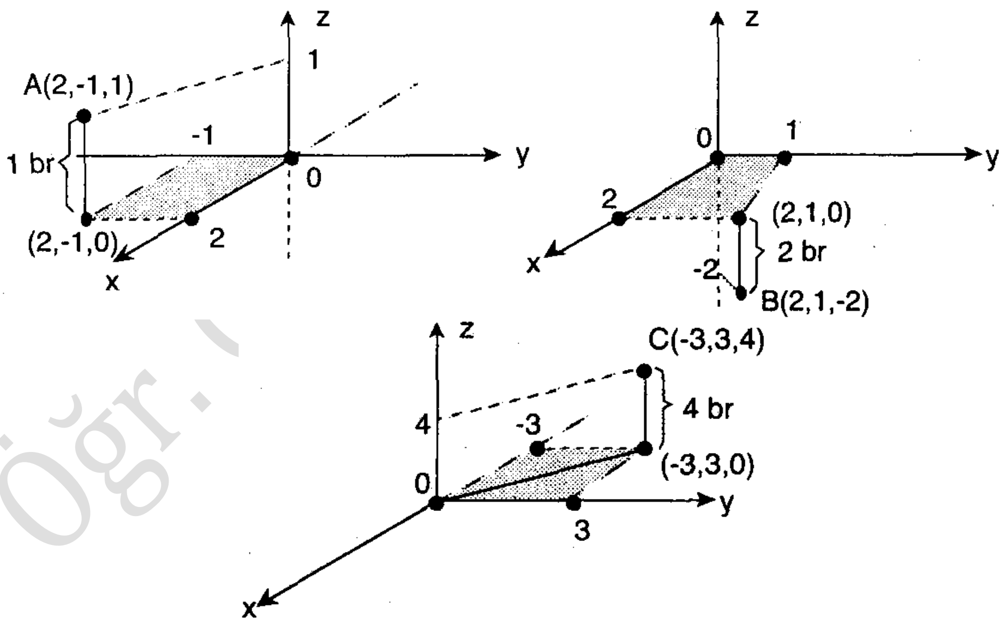
a_1 'e vektörün birinci ya da x bileşeni (apsis)
a_2 'ye vektörün ikinci ya da y bileşeni (ordinat)
a_3 'ye vektörün ikinci ya da z bileşenidir (koddur).

Örnek: İki boyutlu analitik düzlemde $\vec{A} = (2,4)$, $\vec{B} = (-3,-2)$, $\vec{C} = (-4,3)$, $\vec{D} = (1,-2)$, $\vec{E} = (3,0)$, $\vec{F} = (0,4)$ konum (yer) vektörlerinin grafiği



şeklindedir.

Örnek: Üç boyutlu analitik düzlemde $\vec{A} = (2,-1,\ 1)$, $\vec{B} = (2,\ 1,-2)$, $\vec{C} = (-3,3,\ 4)$ konum (yer) vektörlerinin grafiği



şeklindedir. //

Herhangi bir vektör konum (yer) vektörü değilse vektörün uzunluğunu ve yönünü değiştirmemek kaydıyla orijine taşıyarak konum vektörü haline getirebiliriz.

İKİ VEKTÖRÜN EŞİTLİĞİ

5.2. Tanım: $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ iki vektörünün koordinatları birbirine eşitse eşit vektörler denir ve $\vec{A} = \vec{B}$ ile gösterilir.

$\vec{A} = (a_1, a_2, \dots, a_n), \vec{B} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$
$a_1 = b_1 \wedge a_2 = b_2 \wedge \dots \wedge a_n = b_n$

Örnek: $\vec{A} = (2a, b+2, c+1)$, $\vec{B} = (4, -1, -6)$ vektörleri eşit vektörler ise $a+b+c$ nin değeri nedir?

Çözüm: $2a = 4, b + 2 = -5, c + 1 = -6$
$a = 2, b = -7, c = -7$
$a + b + c = 2 - 7 - 7 = -12$

Örnek: $\vec{A} = (4^{a+1}, 9^{b-1})$, $\vec{B} = (8^{a-1}, 3^{b+1})$ vektörleri eşit vektörler olduğuna göre $a+b$ nin değeri nedir?

Çözüm: $\vec{A} = \vec{B}$
$(4^{a+1}, 9^{b-1}) = (8^{a-1}, 3^{b+1})$
$4^{a+1} = 8^{a-1} \wedge 9^{b-1} = 3^{b+1}$
$2^{2a+2} = 2^{3a-3} \wedge 3^{2b-2} = 3^{b+1}$
$2a + 2 = 3a - 3 \wedge 2b - 2 = b + 1$
$a = 5 \wedge b = 3$
$a + b = 8$

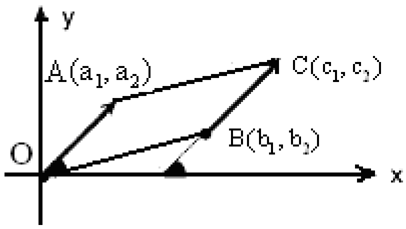
KONUM VEKTÖRLERİN GÖSTERİMİ

5.1. Teorem: $\mathbb{R}^n$ de $B(b_1, b_2, \dots, b_n)$, $C(c_1, c_2, \dots, c_n)$ noktaları arasında olun $\overrightarrow{BC}$ vektörünün yer vektörü $\overrightarrow{OA} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ ise

$$\overrightarrow{OA} = (a_1, a_2, \dots, a_n) = (c_1 - b_1, c_2 - b_2, \dots, c_n - b_n)$$

şeklindedir.

İspat: Biz ispatı $B(b_1, b_2)$, $C(c_1, c_2)$ $\overrightarrow{OA} = (a_1, a_2) = (c_1 - b_1, c_2 - b_2)$ için yapacağız. Benzer şekilde genelleme yapılır.



İki boyutlu analitik düzlemde $B(b_1, b_2)$, $C(c_1, c_2)$ noktaları verilmiştir. $\overrightarrow{BC}$ vektörünün birleşenini bulalım:

$\overrightarrow{BC}$ nin yer vektörü $\overrightarrow{OA} = (a_1, a_2)$ olsun. OACB paralel kenarının karşılıklı köşelerinin koordinatları arasındaki uzunluk eşit olduğundan

$$\left.\begin{aligned} 0 + c_1 &= b_1 + a_1 \\ 0 + c_2 &= b_2 + a_2 \end{aligned}\right\} \text{ise} \quad \left.\begin{aligned} a_1 &= c_1 - b_1 \\ a_2 &= c_2 - b_2 \end{aligned}\right\}$$

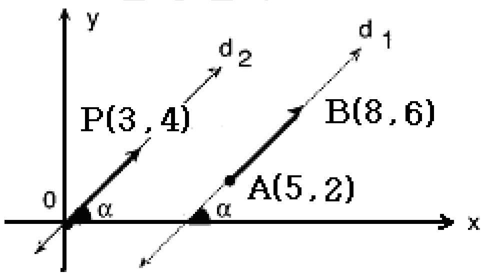
bulunur. Buna göre $\overrightarrow{OA} = (a_1, a_2) = (c_1 - b_1, c_2 - b_2)$ dir.

Örnek: $\mathbb{R}^2$ de (İki boyutlu analitik düzlemde) A(5, 2) ve B(8, 6) noktalarından geçen $\overrightarrow{AB}$ vektörünü konum vektörünü bulunuz.

Çözüm: $\overrightarrow{AB}$ vektörünü konum vektörünü $\vec{P}$ vektörü olsun.

$$\vec{P} = \overrightarrow{AB} = \vec{B} - \vec{A} = (8-5, 6-2) = (3, 4)$$

dür. Bunun grafiği,



biçimindedir.

5.1. Sonuç: $B(b_1, b_2, \dots, b_n)$, $C(c_1, c_2, \dots, c_n)$ noktaları arasında olan $\overrightarrow{BC}$ vektörü

$$\overrightarrow{BC} = \vec{C} - \vec{B}$$

biçimindedir.

5.1. Not: Uzayda bir vektör başlangıç noktası keyfi alındığı zaman bitim noktası tarafımızdan belirlenecek iki noktayı birleştiren doğru parçası olarak bilinir.

Örnek: Aşağıda başlangıç veya bitim noktası verilen $\overrightarrow{PQ} = \vec{A}$ vektörünün diğer noktasını bulunuz.

a) $\vec{A} = \left(\frac{3}{4}, \frac{2}{3}\right), Q\left(1, -\frac{2}{3}\right)$
b) $\vec{A} = (5, -3, 4), P(2, 2, -3)$

Çözüm:
a) $\vec{A} = \overrightarrow{PQ} = \vec{Q} - \vec{P}$

$$\left(\frac{3}{4}, \frac{2}{3}\right) = \left(1, -\frac{2}{3}\right) - (p_1, p_2)$$
$$\left(\frac{3}{4}, \frac{2}{3}\right) = \left(1 - p_1, -\frac{2}{3} - p_2\right)$$
$$\frac{3}{4} = 1 - p_1, \frac{2}{3} = -\frac{2}{3} - p_2$$
$$p_1 = -\frac{1}{4}, p_2 = \frac{4}{3}$$
$$P(p_1, p_2) = \left(-\frac{1}{4}, -\frac{4}{3}\right)$$

b) $\vec{A} = \overrightarrow{PQ} = \vec{Q} - \vec{P}$

$$(5, -3, 4) = (q_1, q_2, q_3) - (2, 2, -3)$$
$$(5, -3, 4) = (q_1 - 2, q_2 - 2, q_3 - 3)$$
$$5 = q_1 - 2, -3 = q_2 - 2, 4 = q_3 - 3$$
$$q_1 = 7, q_2 = -1, q_3 = 1$$
$$Q(q_1, q_2, q_3) = Q(7, -1, 1)$$

Örnek: $\overrightarrow{AB} = (4, -5)$ vektörü ve $A(-7, 1)$ ise B noktasının koordinatları nedir?

Çözüm: $A(-7, 1)$ ve $B(x,\ y)$ ise $\overrightarrow{AB} = \vec{B} - \vec{A}$ olduğundan sıralı ikilileri elde edilir. Sıralı ikililerde toplama ve eşitlik tanımı gereği,

$$(4, -5) = (x + 7,\ y - 1)$$
$$x + 7 = 4, y - 1 = -5$$
$$x = -3, y = -4$$
$$B(x, y) = B(-3, -4)$$

bulunur.

Örnek: $A(x-1, 3x+y)$ ve $B(2,-3)$ olan noktaları için $\overrightarrow{AB}$ konum vektörü $\overrightarrow{AB} = (4, 2)$ ise A noktasının değerini bulunuz.

Çözüm: $\overrightarrow{AB} = \vec{B} - \vec{A}$

$$(4,\ 2) = (2,-3) - (x-1, 3x+y)$$

sıralı ikili elde edilir. Sıralı ikililerde toplama ve eşitlik tanımı gereği,

$$(4,\ 2) = (2-x+1, -3-3x-y)$$
$$3-x = 4, -3-3x-y = 2$$
$$x = -1, y = 2$$

$$A(x-1, 3x+y) = A(-1-1, 3(-1)+2) = A(-2,-1)$$

bulunur.

Örnek: $\overrightarrow{AB} = (4,-5,16)$ vektörü ve $A(-7,1,2)$ ise B noktasının koordinatları nedir?

Çözüm: $A(-7,1,2)$ ve $B(x,y,z)$ ise $\overrightarrow{AB} = \vec{B} - \vec{A}$ olduğundan

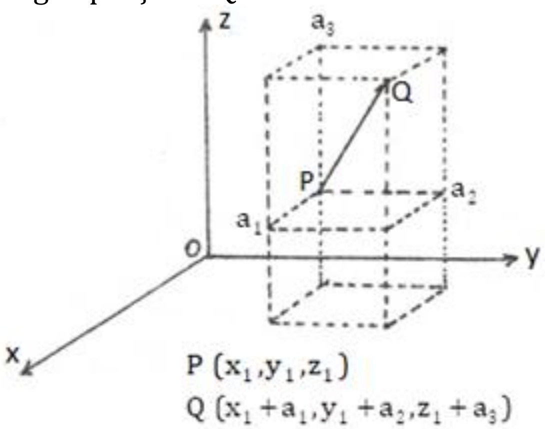
$$(4,\ -5,16) = (x,y,z) - (-7,1,2)$$

sıralı üçlüleri elde edilir. Sıralı üçlülerde toplama ve eşitlik tanımı gereği,

$$(4,\ -5,16) = (x+7, y-1, z-2)$$
$$x+7 = 4, y-1 = -5, z-2 = 16$$
$$x = -3, y = -4, z = 18$$
$$B(x,y,z) = B(-3,-4,18)$$

bulunur.

Örnek: $P(x_1, y_1, z_1)$ başlangıç noktası olarak seçilirse birim noktası Q olan öyle bir noktanın koordinatları $P(x_1+a_1, y_1+a_2, z_1+a_3)$ olup bu iki noktayı birleştiren doğru parçası $\overrightarrow{PQ}$ vektörüdür.



5.2. Not: Vektörler üç boyutlu uzayda olduğu gibi düzlemde (iki boyutlu uzay) ya da bir doğru (bir boyutlu uzay) üzerinde göstermek veya koordinatlarını belirlemek mümkündür.

Üçten büyük $(n > 3)$ boyutlu uzaylarda da vektörler bileşenleri ve diğer cebirsel özellikleri ile tanımlanabilirler. Fakat geometrik olarak şekil üzerinde gösterilemezler.

KONUM VEKTÖRLERİNDE SIFIR VEKTÖRÜ

5.2. Teorem: Sıfır vektör bütün bileşenleri sıfır olan vektördür ve $\vec{O} = (0,0,\dots,0)$ şeklindedir.

İspat: 4.6. tanımda $\vec{O}$ sıfır vektörü $\vec{O} = \overrightarrow{AA}$ şeklinde tanımlanmıştır. $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ noktası için 4.2. sonuca göre

$$\vec{O} = \overrightarrow{AA} = (x_1 - x_1, x_2 - x_2, \dots, x_n - x_n) = (0,0,\dots,0)$$

bulunur.

KONUM VEKÖRLERİNDE TOPLAMA İŞLEMİNİN TERSİ

5.3. Teorem: $\vec{A} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ konum vektörünün toplama işlemine göre tersi $-\vec{A} = (-a_1, -a_2, \dots, -a_n)$ dir.

İspat: $\vec{A} = \overrightarrow{OA} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ konum vektörü olduğuna göre,

$$\vec{A} = \overrightarrow{OA} = \vec{A} - \vec{O} = (a_1 - 0, a_2 - 0, \dots, a_n - 0)$$
$$-\vec{A} = \overrightarrow{OA} = \vec{O} - \vec{A} = (0 - a_1, 0 - a_2, \dots, 0 - a_n)$$
$$-\vec{A} = (-a_1, -a_2, \dots, -a_n)$$

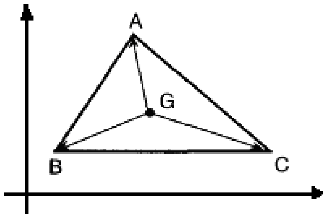
elde edilir.

Örnek: $\vec{A} = (2 - a, b + 4)$ vektörünün tersi $-\vec{A} = (a - 2, -b - 4)$ dir.

Örnek: $\vec{A} = (7 + a, -b + 2, c - 8)$ vektörünün tersi $\vec{A} = (-7 - a, b - 2, 8 - c)$ dir.

KONUM VEKÖRLERİNDE AĞIRLIK MERKEZİ

5.4. Teorem: ABC üçgenin kenarortaylarının kesim noktası (üçgenin ağırlık merkezi) G ve $\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GB}, \overrightarrow{GC}$ birer vektörler olsun.



$A(x_1,y_1), B(x_2,y_2), C(x_3,y_3)$ ise ağırlık merkezinin koordinatları

$$G = \left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$

dir.

İspat: 4.2. Uyarı ii özelliği gereği $\overrightarrow{GA}, +\overrightarrow{GB}, +\overrightarrow{GC} = \vec{0}$ dir.

$$\overrightarrow{GA} = \vec{A} - \vec{G}\,,\ \overrightarrow{GB} = \vec{B} - \vec{G}\,,\ \overrightarrow{GC} = \vec{C} - \vec{G}$$
$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$
$$\vec{A} - \vec{G} + \vec{B} - \vec{G} + \vec{C} - \vec{G} = \vec{0}$$
$$\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = 3\vec{G}$$
$$\vec{G} = \frac{1}{3}(\vec{A} + \vec{B} + \vec{C})$$

bulunur. $\vec{G} = (x_0,y_0)$ olarak alınırsa,

$$\vec{G} = \frac{1}{3}(\vec{A} + \vec{B} + \vec{C})$$
$$(x_0,y_0) = \frac{1}{3}((x_1,y_1) + (x_2,y_2) + (x_3,y_3))$$
$$(x_0,y_0) = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3, y_1 + y_2 + y_3)$$
$$x_0 = \frac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \ y_0 = \frac{y_1+y_2+y_3}{3}$$
$$G = \left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$

elde edilir.

Örnek: $A(3,1), B(5,7), C(7,-2)$ noktalarının oluşturduğu üçgenin ağırlık merkezini bulunuz.

Çözüm: $x_0 = \frac{x_1+x_2+x_3}{3} = \frac{3+5+7}{3} = 5$

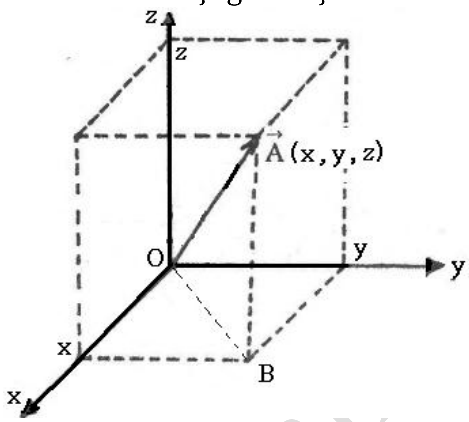
$$y_0 = \frac{y_1+y_2+y_3}{3} = \frac{1+7-2}{3} = 2$$

olduğundan ağırlık merkezinin koordinatları $\vec{G} = (x_0,y_0) = (5,2)$ dir.

KONUM VEKTÖRLERİN UZUNLUĞU (NORMU)

5.5. Teorem: $\vec{A} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ konum vektörünün normu $\|\vec{A}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$ dir.

İspat: (Bu teoremi üç boyutlu analitik düzlem için yapacağız.)
$\vec{A} = (x, y, z)$ konum vektörü aşağıdaki şekilde olsun.



OB doğrusunun uzunluğunu Pisagor teoreminden $|OB| = \sqrt{x^2 + y^2}$ dir. $OB \perp AB$ olduğuna göre,

$$|OA|^2 = |OB|^2 + |BA|^2$$
$$|OA|^2 = x^2 + y^2 + z^2$$
$$\|OA\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

bulunur.

Örnek: $A(2, -4)$ ve $B(1, 5)$ noktaları arasında bulunan $\overrightarrow{AB}$ vektörünün konum vektörünü ve normunu bulunuz.

Çözüm: Konum vektörü

$$\overrightarrow{AB} = \vec{B} - \vec{A} = (1 - 2, 5 - (-4)) = (-1, 9)$$

şeklindedir. Normu ise,

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(-1)^2 + 9^2} = \sqrt{82}$$

dir.

Örnek: $A(2, -4, 8)$ ve $B(1, 5, -3)$ noktaları arasında bulunan $\overrightarrow{AB}$ vektörünün konum vektörünü ve normunu bulunuz.

Çözüm: Konum vektörü

$$\overrightarrow{AB} = \vec{B} - \vec{A} = (1-2, 5-(-4), -3-8) = (-1, 9, -11)$$

şeklindedir. Normu ise,

$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{(-1)^2 + 9^2 + (-11)^2} = \sqrt{203}$$

bulunur.

Örnek: $\vec{A} = (a-1, a+2)$ vektörünün uzunluğu $\sqrt{17}$ birimdir. a sayısının değeri nedir?

Çözüm: $\|\vec{A}\| = \sqrt{17}$ olduğuna göre,

$$\|\vec{A}\| = \sqrt{(a-1)^2 + (a+2)^2} = \sqrt{17}$$
$$(a-1)^2 + (a+2)^2 = 17$$
$$a^2 - 2a + 1 + a^2 + 4a + 4 = 17$$
$$a^2 + a - 6 = 0$$
$$a = -2 \text{ ve } a = 3$$

bulunur.

5.3. Not: Norm tanımdan görüyoruz ki $\|\vec{A}\| = 0$ olması ancak $\vec{A} = 0$ olması halinde mümkündür. Aksi halde daima $\vec{A} > 0$ dır.

KONUM VEKTÖRLERİN İŞLEMLERİ

5.6. Teorem: $\vec{A} = (a_1, a_2, \dots, a_n), \vec{B} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ konum vektörlerinin toplamı ve farkı,

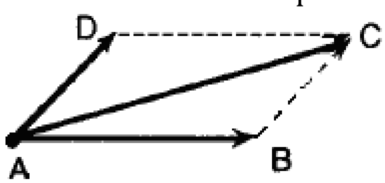
$$\vec{A} + \vec{B} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$$
$$\vec{A} - \vec{B} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, \dots, a_n - b_n)$$

dir.

İspat: (Bu teoremi iki boyutlu analitik düzlem için yapacağız.)
$\vec{A} = (a_1, a_2), \vec{B} = (b_1, b_2)$ konum vektörlerinin toplamı ve farkı,

$$\vec{A} + \vec{B} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$
$$\vec{A} - \vec{B} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2)$$

İki boyutlu uzayda 4.7. tanımda iki vektörün toplamı verilmiştir.

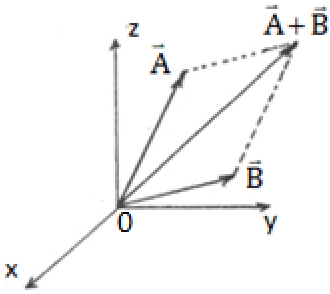


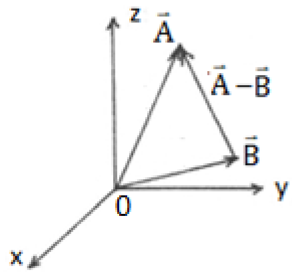
Dikkat edilirse AD doğrusuna paralel BC doğrusuna olması B noktasının apsisine D noktasının apsisinin toplanması ile C noktasının apsisi elde edilecektir. Yine B noktasının ordinatına D noktasının ordinatının toplanması ile C noktasının ordinatı elde edilecektir. Benzer şekilde üç boyutlu uzayda da geçerlidir. Öyleyse,

$\vec{A}+\vec{B}=(a_1+b_1, a_2+b_2)$

Benzer şekilde $\vec{A}-\vec{B}=(a_1-b_1, a_2-b_2)$ elde edilir.

$\vec{A}$ ve $\vec{B}$ gibi uzayda iki vektörün eşitliği, toplamı ve farkı aşağıdaki şekillerde görülmektedir.





Örnek: $\vec{A}=(3,4,6), \vec{B}=(-5,7,-2)$ vektörleri arasında $\vec{C}=4\vec{B}-2\vec{A}$ olacak şekilde $\vec{C}$ vektörünü elde ediniz.

Çözüm: $\vec{C}=(a,b,c)$ ise $\vec{C}=4\vec{B}-2\vec{A}$

$(a,b,c)=4(3,4,6)-2(-5,7,-2)$

$(a,b,c)=(12,16,24)-(-10,14,-4)$

$(a,b,c)=(22,2,28)$

Örnek: $A(2a,3), B(k,m), C(5,-1)$ olup $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ toplam vektörünün uzunluğu 5 ise a'nın değeri nedir?

Çözüm: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}|=5$

$\sqrt{(2a-5)^2+(3-(-1))^2}=5$

$(2a-5)^2+16=25$

$(2a-5)^2=9$

$2a-5=3 \wedge 2a-5=-3$

$a=4 \wedge a=1$

5.7. Teorem: $\vec{A} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ konum vektörü ve $k \in \mathbb{R}^+$için

$$k\vec{A} = (ka_1, ka_2, \dots, ka_n)$$

dir.

Teoremin ispatı 5.6. teoreme benzer şekilde yapılır.

Örnek: $\vec{A} = (5, -4, 6)$ ve $\vec{B} = (2, 4, 5)$ ise

i) $3\vec{A} + 2\vec{B}$

ii) $\vec{A} - 3\vec{B}$

vektörlerini bulunuz?

Çözüm:

i) $3\vec{A} + 2\vec{B} = 3(5, -4, 6) + 2(2, 4, 5) = (15, -12, 18) + (4, 8, 10) = (19, -4, 28)$

ii) $\vec{A} - 3\vec{B} = (5, -4, 6) - 3(2, 4, 5) = (5, -4, 6) - (6, 12, 15) = (-1, -16, -9)$

Örnek: $\vec{A} = (3, 4), \vec{B} = (-5, 7)$ vektörleri arasında $\vec{C} = 4\vec{B} - 2\vec{A}$ olacak şekilde $\vec{C}$ vektörünü elde ediniz.

Çözüm: $\vec{C} = (a, b)$ ise $\vec{C} = 4\vec{B} - 2\vec{A}$

$(a, b) = 4(3, 4) - 2(-5, 7)$

$(a, b) = (12, 16) - (-10, 14)$

$(a, b) = (22, 2)$

Örnek: W konum vektörlerin kümesi olmak üzere $(W, +, \cdot)$ sistemi $\mathbb{R}^3$ de bir vektör uzayı olduğunu gösteriniz.

Çözüm: V1) $(W, +)$ sistemi değişmeli grup olduğunu gösterelim.

G1) Her $\vec{A}, \vec{B} \in W$ için iki konum vektörünün toplama işlemi tanımlı olduğundan kapalıdır.

G2) Her $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C} \in W$ için

$$\vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C}$$

dir. Gerçekten, $\vec{A} = (a_1, a_2, a_3), \vec{B} = (b_1, b_2, b_3), \vec{C} = (c_1, c_2, c_3)$ olsun.

$\vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) = (a_1, a_2, a_3) + [(b_1, b_2, b_3) + (c_1, c_2, c_3)]$

$$= (a_1,a_2,a_3) + (b_1 + c_1, b_2 + c_2, b_3 + c_3)$$
$$= (a_1 + (b_1 + c_1), a_2 + (b_2 + c_2), a_3 + (b_3 + c_3))$$
$$= ((a_1 + b_1) + c_1, (a_2 + b_2) + c_2, (a_3 + b_3) + c_3)$$
$$= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3) + (c_1, c_2, c_3)$$
$$= [(a_1,a_2,a_3) + (b_1,b_2,b_3)] + (c_1,c_2,c_3)$$
$$= (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C}$$

olup birleşme özelliği vardır.

G3) Her $\vec{A} \in W$ için

$$\vec{A} + \vec{0} = \vec{A}$$

dir. Gerçekten, $\vec{A} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{0} = (0,0,0)$

$$\vec{A} + \vec{0} = (a_1, a_2, a_3) + (0,0,0)$$
$$= (a_1 + 0, a_2 + 0, a_3 + 0)$$
$$= (a_1, a_2, a_3)$$
$$= \vec{A}$$

O halde $\vec{0}$ vektörü birim elemandır.

G4) Her $\vec{A} \in W$ için

$$\vec{A} + (-\vec{A}) = \vec{0}$$

olacak şekilde $-\vec{A}$ toplama işlemine göre ters eleman vardır. Gerçekten, $\vec{A} = (a_1, a_2, a_3)$ için,

$$\vec{A} + (-\vec{A}) = (a_1, a_2, a_3) + (-a_1, -a_2, -a_3)$$
$$= (a_1 - a_1, a_2 - a_2, a_3 - a_3)$$
$$= (0,\ 0,\ 0)$$

dir. Olup ters eleman özelliği vardır.

G5) Her $\vec{A}, \vec{B} \in W$ için

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$$

dir. Gerçekten, $\vec{A} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{B} = (b_1, b_2, b_3)$ olsun.

$$\vec{A} + \vec{B} = (a_1,a_2,a_3) + (b_1,b_2,b_3)$$
$$= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$
$$= (b_1 + a_1, b_2 + a_2, b_3 + a_3)$$
$$= (b_1,b_2,b_3) + (a_1,a_2,a_3)$$
$$= \vec{B} + \vec{A}$$

olup değişme özelliği vardır.

Buna göre vektörlerde toplama işlemine göre $(W,+)$ sistemi değişmeli gruptur.

V2) Her $a \in \mathbb{R}$ ve her $\vec{A},\vec{B} \in W$ vektörleri için $a \cdot (\vec{A} + \vec{B}) = a \cdot \vec{A} + a \cdot \vec{B}$ dir.

Gerçekten,

$$
\begin{aligned}
a \cdot (\vec{A} + \vec{B}) &= a \cdot [(a_1,a_2,a_3) + (b_1,b_2,b_3)] \\
&= a \cdot (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3) \\
&= (a \cdot (a_1 + b_1), a \cdot (a_2 + b_2), a \cdot (a_3 + b_3)) \\
&= (a \cdot a_1 + a \cdot b_1, a \cdot a_2 + a \cdot b_2, a \cdot a_3 + a \cdot b_3) \\
&= (a \cdot a_1, a \cdot a_2, a \cdot a_3) + (a \cdot b_1, a \cdot b_2, a \cdot b_3) \\
&= a \cdot (a_1,a_2,a_3) + a \cdot (b_1,b_2,b_3) \\
&= a \cdot \vec{A} + a \cdot \vec{B}
\end{aligned}
$$

dir.

V3) Her $a, b \in \mathbb{R}$ ve her $\vec{A} \in W$ vektörü için $(a + b)\vec{A} = (a \cdot \vec{A} + b \cdot \vec{A})$ dir.

Gerçekten,

$$
\begin{aligned}
(a + b) \cdot \vec{A} &= (a + b) \cdot (a_1,a_2,a_3) \\
&= ((a + b) \cdot a_1, (a + b) \cdot a_2, (a + b) \cdot a_3) \\
&= (a \cdot a_1 + b \cdot a_1, a \cdot a_2 + b \cdot a_2, a \cdot a_3 + b \cdot a_3) \\
&= (a \cdot a_1, a \cdot a_2, a \cdot a_3) + (b \cdot a_1, b \cdot a_2, b \cdot a_3) \\
&= a \cdot (a_1,a_2,a_3) + b \cdot (a_1,a_2,a_3) \\
&= a \cdot \vec{A} + b \cdot \vec{A}
\end{aligned}
$$

dir.

V4) Her $a, b \in \mathbb{R}$ ve her $\vec{A} \in W$ vektörü için $a \cdot (b \cdot \vec{B}) = (a \cdot b) \cdot \vec{A}$ dir.

Gerçekten,

$$
\begin{aligned}
a \cdot (b \cdot \vec{A}) &= a \cdot (b \cdot (a_1,a_2,a_3)) \\
&= a \cdot (b \cdot a_1, b \cdot a_2, b \cdot a_3) \\
&= (a \cdot (b \cdot a_1), a \cdot (b \cdot a_2), a \cdot (b \cdot a_3)) \\
&= ((a \cdot b) \cdot a_1, (a \cdot b) \cdot a_2, (a \cdot b) \cdot a_3) \\
&= (a \cdot b) \cdot (a_1,a_2,a_3) \\
&= (a \cdot b) \cdot \vec{A}
\end{aligned}
$$

dir.

V5) Her $\vec{A} \in W$ vektörü için $1 \cdot \vec{A} = \vec{A}$ dir.

Gerçekten,

$$1 \cdot \vec{A} = 1 \cdot (a_1,a_2,a_3) = (1 \cdot a_1, 1 \cdot a_2, 1 \cdot a_3) = (a_1,a_2,a_3) = \vec{A}$$

dir.

Buna göre $(W,+,\cdot)$ sistemi bir vektör uzayıdır.

VEKTÖRÜN ÇAKIŞIK (AYNI DOĞRULU) OLMASI

5.3. Tanım: Sıfır vektöründen farklı olan iki vektörden biri diğerinin bir reel sayı ile çarpımına eşit ise bu iki vektöre, aynı doğrultulu (çakışık) vektörler denir. Şu halde

$k \neq 0$ ise $\vec{B} = k \cdot \vec{A}$

dir. (Buna göre bir vektör k skaleriyle çarpılırsa ona çakışık yeni vektör elde edilir.)

$k > 0$ ve $\vec{B} = k \cdot \vec{A}$ ise $\vec{A}, \vec{B}$ aynı yönlüdür.
$k < 0$ ve $\vec{B} = k \cdot \vec{A}$ ise $\vec{A}, \vec{B}$ ters yönlüdür.

5.8. Teorem: $\vec{A} = (a_1, a_2, \dots, a_n), \vec{B} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ vektörleri çakışık vektörleri ise

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n} = k$$

şeklindedir.

İspat: $\vec{A}, \vec{B}$ çakışık iki vektör ise,

$$\vec{A} = k \cdot \vec{B}$$

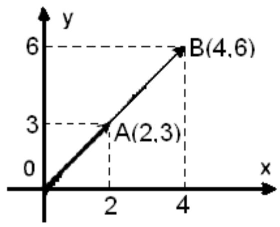
olacak şekilde $k \neq 0$ reel sayısı mevcuttur. Buna göre,

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) = k \cdot (b_1, b_2, \dots, b_n)$$
$$(a_1, a_2, \dots, a_n) = (k \cdot b_1, k \cdot b_2, \dots, k \cdot b_n)$$
$$a_1 = k \cdot b_1 \wedge a_2 = k \cdot b_2 \wedge \dots \wedge a_n = k \cdot b_n$$
$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n} = k$$

dir.

Örnek: $\vec{A} = (2,3), \vec{B} = (4,6)$ çakışık vektörlerinin grafiğini çiziniz.

Çözüm: $(2,3) = 2 \cdot (4,6)$ çakışık iki vektör olduğundan grafikleri



biçimindedir.

Örnek: $\vec{A} = (3, m, 6), \vec{B} = (n, 5, 1)$ vektörleri çakışık ise m ve n'nin değeri nedir?

Çözüm: $\frac{3}{n} = \frac{m}{5} = \frac{6}{1}$ ise $m = 5 \wedge n = 3$

Örnek: $\vec{A} = (m + 2, -6), \vec{B} = (-1, m - 3)$ vektörleri çakışık ise m'nin değerleri nedir?

Çözüm: $\frac{m+2}{-1} = \frac{-6}{m-3}$

$(m + 2)(m - 3) = 6$

$m^2 - m - 12 = 0$

$(m - 4)(m + 3) = 6$

$m = 4 \wedge m = 3$

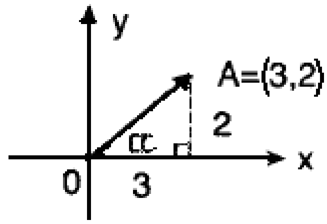
Örnek: $\vec{A} = (3, 0), \vec{B} = (k + 1, 3), \vec{C} = (k + 1, 3)$ vektörleri veriliyor. $\overrightarrow{AB} // \vec{C}$ ise k ve m nin değeri nedir?

Çözüm: $\overrightarrow{AB} = \vec{B} - \vec{A} = (k + 1, 3) - (3,0) = (k - 2, 3)$

$\frac{k-2}{2} = \frac{3}{2}$ ise $k = 5$

Örnek: $\vec{A} = (2, -1), \overrightarrow{OA} = (3, 2)$ olduğuna göre, M'den geçen ve $\overrightarrow{OA}$ vektörüne dik olan doğrunun denklemi nedir?

Çözüm: $\overrightarrow{OA} = (3, 2)$ vektörü



biçimindedir. Bu vektörün eğimi $m_1 = \tan\alpha = \frac{3}{2}$ dir. İki doğrunun dik olma şartı $m_1 \cdot m_2 = -1$ olduğundan,

$$\frac{3}{2} \cdot m_2 = -1$$
$$m_2 = -\frac{2}{3}$$

olarak bulunur. Eğitimi ve bir noktası bilinen doğrunun denklem formülünden,

$$y - (-1) = -\frac{2}{3} \cdot (x - 2)$$
$$3x + 2y - 4 = 0$$

doğru denklemi elde edilir.

BİRİM VEKTÖR

5.4. Tanım: Uzunluğu (normu) 1 birim olan vektöre, birim vektör denir.

$$\vec{A} = (a_1, a_2, .., a_n) \text{ birim vektör}$$
$$\|\vec{A}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2} = 1$$

biçimindedir.

Örnek: $\vec{A} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ vektörü birim vektör müdür?

Çözüm: $\|\vec{A}\| = \sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2} = 1$ olup $\vec{A}$ vektörü birim vektördür.

Örnek: $\vec{A} = (-1, 1)$ vektörü birim vektör müdür?

Çözüm: $\|\vec{A}\| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ olup $\vec{A}$ vektörü birim vektör değildir.

Örnek: $\vec{A} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ vektörü birim vektör müdür?

Çözüm: $\|\vec{A}\| = \sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = 1$ olup $\vec{A}$ vektörü birim vektördür.

5.9. Teorem: $\vec{A} = (a_1, a_2, .., a_n)$ vektörü ile aynı doğrultuda (çakışık) olan birim vektörler;

i) Aynı yönlü olan birim vektör;

$$\overrightarrow{A_e} = \frac{\vec{A}}{\|\vec{A}\|} = \frac{(a_1,a_2,\dots,a_n)}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_2^2}}$$

$$= \left(\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}}, \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}}, \dots, \frac{a_n}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}}\right)$$

ii) Ters yönlü olan birim vektör;

$$-\overrightarrow{A_e} = -\frac{\vec{A}}{\|\vec{A}\|} = -\frac{(a_1,a_2,\dots,a_n)}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}}$$

$$= \left(\frac{-a_1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}}, \frac{-a_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}}, \dots, \frac{-a_n}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}}\right)$$

biçimindedir.

İspat: i) $\vec{A} = (a_1, a_2, .., a_n)$ vektörü ile aynı doğrultuda (çakışık) olan birim vektör $\overrightarrow{A_e}$ olsun. Aynı yönlü olan birim vektör,

$$\overrightarrow{A_e} = k \cdot \vec{A}$$

dir. $\overrightarrow{A_e}$ birim vektör olduğundan $\|\overrightarrow{A_e}\| = 1$ dir. Buna göre,

$$\|\overrightarrow{A_e}\| = \|k \cdot \vec{A}\| = |k| \cdot \|\vec{A}\| = 1$$

$$|k| = \frac{1}{\|\vec{A}\|}$$

$$k = \frac{1}{\|\vec{A}\|} \text{ ve } k = -\frac{1}{\|\vec{A}\|}$$

olur. $\vec{A} = (a_1, a_2, .., a_n)$ için $\|\vec{A}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$ olduğundan $\vec{A}$ ile aynı yönlü birim vektör,

$$\overrightarrow{A_e} = \frac{\vec{A}}{\|\vec{A}\|} = \frac{(a_1,a_2,\dots,a_n)}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}}$$

$$= \left(\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}}, \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}}, \dots, \frac{a_n}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}}\right)$$

$\vec{A}$ ile ters yönlü olan birim vektör;

$$-\overrightarrow{A_e} = -\frac{\vec{A}}{\|\vec{A}\|} = -\frac{(a_1,a_2,\ldots,a_n)}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}}$$

$$= \left(\frac{-a_1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}}, \frac{-a_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}}, \ldots, \frac{-a_n}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}}\right)$$

biçimindedir.

Örnek: $\vec{A} = (-6, 8)$ vektörünü birim vektörlerine çeviriniz.

Çözüm: $\|\vec{A}\| = \sqrt{(-6)^2 + 8^2} = \pm 10$

$$\overrightarrow{A_e} = \frac{\vec{A}}{\|\vec{A}\|} = \frac{(-6,\ 8)}{10} = \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

$$-\overrightarrow{A_e} = -\frac{\vec{A}}{\|\vec{A}\|} = -\frac{(-6,\ 8)}{10} = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$$

Örnek: $\vec{A} = (-6, 3, 2)$ vektörünü birim vektörlerine çeviriniz.

Çözüm: $\|\vec{A}\| = \sqrt{(-6)^2 + 3^2 + 2^2} = \pm 7$

$$\overrightarrow{A_e} = \frac{\vec{A}}{\|\vec{A}\|} = \frac{(-6,\ 3,\ 2)}{7} = \left(-\frac{6}{7}, \frac{3}{7}, \frac{2}{7}\right)$$

$$-\overrightarrow{A_e} = -\frac{\vec{A}}{\|\vec{A}\|} = -\frac{(-6,\ 3,\ 8)}{7} = \left(\frac{6}{7}, -\frac{3}{7}, -\frac{2}{7}\right)$$

TEMEL (STANDART) BİRİM VEKTÖRLER

5.5. Tanım: $\overrightarrow{e_1} = (1, 0, \ldots, 0)$, $\overrightarrow{e_2} = (0, 1, \ldots, 0)$, ... , $\overrightarrow{e_n} = (0, 0, \ldots, 1)$ biçiminde olan vektörlere temel (standart) birim vektörleri denir.

Her vektör temel birim vektörler olarak yazılabilir. Şöyle ki,

$$\begin{aligned}\vec{A} &= (a_1, a_2, \ldots, a_n)\\ &= (a_1, 0, \ldots, 0) + (0, a_2, \ldots, 0) + \cdots + (0, 0, \ldots, a_n)\\ &= a_1(1,0,\ldots,0) + a_2(0,1,\ldots,0) + \cdots + a_n(0,0,\ldots,1)\\ &= a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + \cdots + a_n\overrightarrow{e_n}\end{aligned}$$

dir.

Örnek: $\vec{A} = (4, -2)$ vektörünü temel birim vektörler türünden yazınız.

Çözüm: $\vec{A} = 4\vec{e_1} - 2\vec{e_2}$

Örnek: $\vec{A} = (3, 6, -2)$ vektörünü temel birim vektörler türünden yazınız.

Çözüm: $\vec{A} = 3\vec{e_1} + 6\vec{e_2} - 2\vec{e_3}$

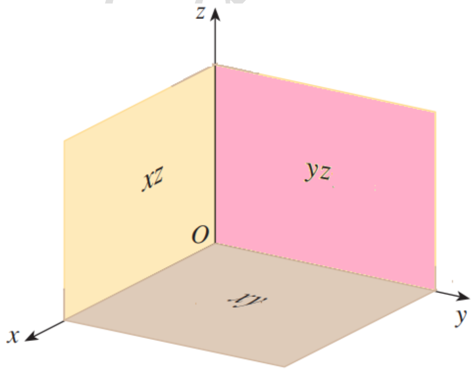
5.4. Not: Bir $\vec{A}$ vektörü uzayda reel sayılarından oluşan bir üçlü olup $\vec{A} = (a_1, a_2, a_3)$ olarak gösterilir.
a_1'e vektörün birinci ya da x bileşeni
a_2'ye vektörün ikinci ya da y bileşeni
a_3'e vektörün üçüncü ya da z bileşeni
olmak üzere sırasıyla

$$\vec{i} = \vec{e_1} = (1, 0, 0)\ , \vec{j} = \vec{e_2} = (0, 1, 0)\ , \vec{k} = \vec{e_3} = (0, 0, 1)$$

olarak göstereceğiz. Bu tanıma göre bileşenleri a_1, a_2, a_3 olan $\vec{A}$ vektörü her zaman,

$$\vec{A} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$$

şeklinde yazılabilir.



Örnek: $\vec{A} = (-8, 6, -2)$ vektörü aynı zamanda $\vec{A} = -8\vec{i} + 6\vec{j} - 2\vec{k}$ şeklinde yazılır.

ÇÖZÜMLÜ ALIŞTIRMALAR

1. $\vec{x} = \vec{i}$, $\vec{y} = -4\vec{i} + 5\vec{j}$ vektörleri verildiğine göre bu vektörlerin skaler çarpımı nedir?

Çözüm: $<\vec{x},\vec{y}>= 1\cdot(-4)+5\cdot 0=-4$

2. $\vec{v}=3\vec{i}-4\vec{j}$ vektörünün boyu kaç birimdir?

Çözüm: Bir vektörün boyunu bulmak için o vektörün normunu bulmalıyız.

$\|\vec{v}\|=\sqrt{3^2+4^2}=5$

3. Bir $\vec{A}$ vektörü $P(2,-1,3)$ ve $Q(-5,-2,4)$ noktalarını birleştiren $\overrightarrow{OP}$ yönlendirilmiş doğru parçasına karşı gelmektedir. Bu vektörün bileşenlerini ve büyüklüğünü bulunuz?

Çözüm: $\vec{A}$ nın bileşenlerine a_1,a_2,a_3 denirse

$$a_1=q_1-p_1=-5-2=-7$$
$$a_2=q_2-p_2=-2-(-1)=-1$$
$$a_3=q_3-p_3=4-3=1$$

O halde $\vec{A}=(a_1,a_2,a_3)=(-7,-1,1)$ olduğundan $\vec{A}$ nün büyüklüğü,

$$\|\vec{A}\|=\sqrt{(-7)^2+(-1)^2+1^2}=\sqrt{51}$$

dir.

4. $\vec{A}=(3,4),\vec{B}=(5,2)$ ve $\vec{C}=(21,16)$ vektörleri veriliyor. $\vec{C}$ vektörünü $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ vektörü türünden ifade ediniz.

Çözüm: $\vec{C}=x\vec{A}+y\vec{B}$

$$(21,16)=x(3,4)+y(5,2)$$
$$(21,16)=(3x+5y,4x+2y)$$
$$3x+5y=21 \wedge 4x+2y=16$$
$$x=2 \wedge y=3$$

Buna göre $\vec{C}=2\vec{A}+3\vec{B}$ bulunur.

5. $\vec{A}=(4,3,-2)$ ve $\vec{B}=(1,2,3)$ ise

i) $\|3\vec{A}+4\vec{B}\|$ ii) $\|2\vec{A}-\vec{B}\|$ iii) $\|\vec{A}\|+\|\vec{B}\|$

bulunuz.

Çözüm:

i) $3\vec{A}+4\vec{B}=3(4,3,-2)+4(1,2,3)=(12,9,-6)+(4,8,12)=(16,17,6)$

$\|3\vec{A}+4\vec{B}\| = \sqrt{16^2+17^2+6^2} = \sqrt{581}$

ii) $\vec{A}-\vec{B} = 2(4,3,-2)-(1,2,3) = (8,6,-4)-(1,2,3) = (7,4,-7)$
$\|2\vec{A}-\vec{B}\| = \sqrt{7^2+4^2+(-7)^2} = \sqrt{114}$

iii) $\|\vec{A}\|+\|\vec{B}\| = \sqrt{4^2+3^2+(-2)^2}+\sqrt{1^2+2^2+3^2} = \sqrt{29}+\sqrt{14}$

6. $\vec{B} = (-4,1,2)$ ve $\vec{C} = (3,4,5)$ ise $2\vec{A}+4\vec{B} = 3\vec{C}$ bağıntısını sağlayan $\vec{A}$ vektörünü bulunuz.

Çözüm: $2\vec{A}+4\vec{B} = 3\vec{C}$
$2(a_1,a_2,a_3)+4(-4,1,2) = 3(3,4,5)$
$\vec{A} = (a_1,a_2,a_3) = \left(\frac{25}{4},4,\frac{15}{2}\right)$

7. $\vec{A} = (5,6,-7), \vec{B} = (-2,-3,4)$ ve $\vec{C} = (-3,4,-5)$ ise $\vec{A} = k\vec{B}+\ell\vec{C}$ bağıntısını sağlayan k ve ℓ sayılarını bulunuz. (k ve ℓ bir skalerdir.)

Çözüm: $\vec{A} = k\vec{B}+\ell\vec{C}$
$(5,6,-7) = k(-2,-3,4)+\ell(-3,4,-5)$
$(5,6,-7) = (-2k,-3k,4k)+(-3\ell,4\ell,-5\ell)$
$(5,6,-7) = (-2k-3\ell,-3k+4\ell,4k-5\ell)$
$k = 2$ ve $\ell = 3$

8. $\vec{A} = (2,-4), \vec{B} = (8,-6)$ vektörleri veriliyor. $x\vec{A}+y\vec{B} = (-4,-2)$ eşitliğini sağlayan $x\cdot y$ nedir?

Çözüm: $x\vec{A}+y\vec{B} = (-4,-2)$
$x(2,-4)+y(8,-6) = (-4,-2)$
$(2x+8y,-4x-6y) = (-4,-2)$
$2x+8y = -4, -4x-6y = -2$
$x = 2, y = -1$
$x\cdot y = -2$
bulunur.

9. Dik koordinat sisteminde, $\vec{V} = (t^2+1, t-1)$ konum vektöründe t değiştikçe uç noktasının çizdiği eğrinin denklemi nedir?

Çözüm: x ekseninde $t^2 + 1 = x$ alırsak $t^2 = x - 1$

y ekseninde $t - 1 = y$ ise $t = y + 1$ olup $t^2 = (y + 1)^2$

$$(y+1)^2 = x - 1$$
$$(y+1)^2 - x + 1 = 0$$

olur.

10. $\overrightarrow{AB} = (4, -2, 3), \overrightarrow{AC} = (1, 6, 5)$ olduğuna göre, $\overrightarrow{BC}$ vektörü kaçtır?

Çözüm:
$$\begin{aligned}\overrightarrow{BC} &= \vec{C} - \vec{B}\\ &= (\vec{C} - \vec{A}) + (\vec{B} - \vec{A})\\ &= \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\\ &= (4, -2, 3) - (1, 6, 5)\\ &= (3, -8, -2)\end{aligned}$$

11. Kartezyen koordinat sisteminde $A(0,6), B(-2,3)$ ve $C(m,n)$ noktaları veriliyor. Buna göre, $\overrightarrow{AB}$ vektörü ile aynı yönde ve $\overrightarrow{AC}$ vektörüyle eşit uzunlukta ise $m + n$ kaçtır?

Çözüm:
$$\overrightarrow{AB} = (-2, 3) - (0, 6) = (-2, -3)$$
$$\overrightarrow{AC} = (m, n) - (0,6) = (m, n - 6)$$

ve

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$$
$$(-2, -3) = (m, n - 6)$$
$$m = -2, n = 3$$
$$m + n = -2 + 3 = 1$$

12. Kartezyen koordinat sisteminde $A(2,3), B(1,4)$ ve $C(3, -2)$ noktaları veriliyor. Buna göre, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ vektörü aşağıdakilerden hangisidir?

A) (3,–1) B) (3,–2) C) (1,–1) D) (1, 2) E) (2, 1)

Çözüm:
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} &= (\vec{B} - \vec{A}) + (\vec{C} - \vec{A})\\ &= \vec{B} + \vec{C}\\ &= (1, 4) + (3, -2)\\ &= (4, 2)\end{aligned}$$

KAYNAKÇA

1. H. Hilmi Hacısalihoğlu, Lineer Cebir, Gazi Üniversitesi Yayınları, Ankara, 1975.
2. Hüseyin Bilgiç, Lineer Cebir Ders Notları, Kahramanmaraş Sütçü İmam Üniversitesi, Kahramanmaraş, 2015.
3. M. Zeki DERMAN, Ökkeş ÖZKÖSELER, Serdar GÜLMEZ, Matematik III Zafer Yayınları, Ankara, 2005.
4. Ahmet HANÇERLİOĞLU, Faniye ALAN, Üniversiteye Hazırlık Matematik Seti, Tümay Yayınları, İstanbul Yayıncılık, 2006, Ankara.
5. Seymeur LİPSCHUTZ Ph. Dr., Çev. H. Hilmi HACISALİHOĞLU, Schaum Serisinden Lineer Cebir, Japonya.
6. Yrd. Doç. Dr. Nezahat ÇETİN, Öğr. Grv. Dr. Nevin ORHUN, Lineer Cebir, Anadolu Üniversitesi Yayınları: 1074, AÖF Yayınları: 589, 1998, Eskişehir.
7. Ali Rıza İLDENİZ, İsmet PARILDAR, Kemal ALAGÖZ, Tacim GÖLPINAR, Sayısal 1-2, Modern Matematik, Yıldırım Yayınları, 1986, ANKARA.
8. Doç. Dr. M. Kemal Sağel, Vektörel Analiz, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi döner sermaye işletmesi yayınları, No: 67, 2003, Ankara.
9. Thomas Calculus 2, George B. Thomas Jr., Massachusetts Institute of Technology, Maurice D. Weir, Naval Postgraduate School, Joel Hass, University of California Davis, Frank R. Giordano, Naval Postgraduate School, Çeviren: Recep Korkmaz, Beta Yayıncılık, İstanbul, 2010.
10. Murray R. Spiegel, İleri Matematik, Çev. Prof. Dr. H. Hilmi HACISALİHOĞLU, Schaum Yayınları, Nobel Yayın Dağıtım, 1997, Ankara.