6. BÖLÜM
LİNEER ÇARPIM ve İZDÜŞÜM

VEKTÖRLERİN İÇ ÇARPIMI (SKALER ÇARPIM)

Buraya kadar anlatılan konularda vektörlerin kümesinde işlemlerinde sonuç olarak yine bir vektör elde ediyorduk. Burada ilk önce iç çarpımla (skaler çarpımla) reel sayıya eşlemeye çalışacağız. Daha sonra iki vektörün dış çarpımı (vektörel çarpımı) ile bu iki çarpımın karışımı olan karma çarpımdan bahsedeceğiz. Fonksiyonel Analiz derslerinde iç çarpım konusunda farklı bilgi verilecektir.

6.1. Tanım: $\vec{A}=(a_1,a_2,\dots,a_n),\vec{B}=(b_1,b_2,\dots,b_n)$ vektörleri verilsin,

$$(\cdot): V\times V\to\mathbb{R}$$
$$(\vec{A},\vec{B})\to\vec{A}\cdot\vec{B}=a_1b_1+a_2b_2+\dots+a_nb_n$$

biçiminde tanımlanan fonksiyonuna iç çarpım veya skaler çarpım işlemi denir. Bu çarpıma iç çarpım adı da verilir. $\vec{A}\cdot\vec{B}$ veya $<\vec{A},\vec{B}>$ sembolleri ile de gösterilir.

Örnek: $\vec{A}=(4,3),\vec{B}=(-2,5)$ ise $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ vektörlerinin iç çarpımını bulunuz.

Çözüm: $\vec{A}\cdot\vec{B}=a_1b_1+a_2b_2=4\cdot(-2)+3\cdot5=7$

Örnek: $\vec{A}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$, $\vec{B}=(\sin\alpha,2\cos\alpha)$ vektörlerinin iç çarpımı nedir?

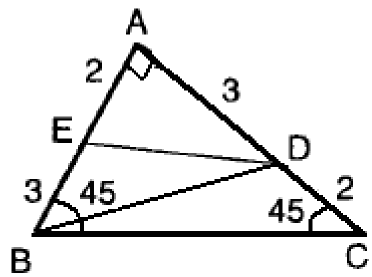
Çözüm:
$$\vec{A}\cdot\vec{B}=\cos\alpha\cdot\sin\alpha+\sin\alpha\cdot2\cos\alpha$$
$$=3\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$
$$=\frac{3}{2}\sin2\alpha$$

Örnek: $A(4,3),B(-1,6),C(-3,4),D(1,-5)$ noktaları veriliyor. Bu noktaların oluşturduğu $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$ iç çarpımının değeri nedir?

Çözüm: $\overrightarrow{AB} = \vec{B} - \vec{A} = (-1-4, 6-3) = (-5,3)$
$\overrightarrow{CD} = \vec{D} - \vec{C} = (1-(-3), -5-4) = (4,-9)$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = (-5,3)(4,-9) = (-5)\cdot 4 + 3\cdot(-9) = -47$

Örnek:



Şekilde ABC ikizkenar dik üçgeni verilmiştir. $\|AE\| = \|DC\| = 2$ birim ve $\|EB\| = 3$ birimdir. $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DB}$ iç çarpımının değeri nedir?

Çözüm:
$\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DB}$
$= (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE})(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB})$
$= \overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{CB}$
$= 3\cdot 2\cdot \cos 180 + 3\cdot 5\sqrt{2}\cdot \cos 45 + 2\cdot 2\cdot \cos 0 + 2\cdot 5\sqrt{2}\cdot \cos 45$
$= 6\cdot(-1) + 15\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + 4\cdot 0 + 10\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$
$= 19$

Örnek: $\vec{A} = (\log_3 x, \cot\alpha)$, $\vec{B} = (2, 3\tan\alpha)$ ve $\vec{A}\cdot\vec{B} = 1$ ise x nedir?

Çözüm: $\vec{A}\cdot\vec{B} = 1$
$(\log_3 x, \cot\alpha)\cdot(2, 3\tan\alpha) = 1$
$2\log_3 x + 3\cot\alpha\tan\alpha = 1$
$2\log_3 x + 3\underbrace{\cot\alpha\tan\alpha}_{1} = 1$
$2\log_3 x = -2$
$\log_3 x = -1$
$x = 3^{-1}$

Örnek: $\vec{A} = 10e_1 + 12e_2, \vec{B} = (a+2)e_1 - e_2$ ve $\vec{A} \cdot \vec{B} = 18$ ise a'nın değeri nedir?

Çözüm: $\vec{A} \cdot \vec{B} = 18$
$10 \cdot (a+2) + 12 \cdot (-1) = 18$
$a = 1$

Örnek: $\vec{A} = (6,7), \vec{B} = (-7,6)$ ise $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ vektörlerinin iç çarpımını bulunuz.

Çözüm: $\vec{A} \cdot \vec{B} = a_1b_1 + a_2b_2 = 6 \cdot (-7) + 6 \cdot 7 = 0//$

Bu örnekte görüldüğü gibi $\vec{A} \neq 0$ ve $\vec{B} \neq 0$ olmasına rağmen sonuç 0'dır.

Örnek: $P_n(\mathbb{R})$, derecesi n veya n'den küçük olan polinomların uzayında iç çarpım; $p(x), q(x) \in P_n(\mathbb{R})$ için

$$<p(x),q(x)> = \int_0^1 p(x) \cdot q(x)\,dx$$

biçiminde tanımlanır. Burada $P_2(\mathbb{R})$ de $p(x) = 2x^2 + x + 5, q(x) = 3x + 1$ vektörlerinin iç çarpımlarını hesaplayınız.

Çözüm:

$$\begin{aligned} <p(x),q(x)> &= \int_0^1 (2x^2+x+5)\cdot(3x+1)\,dx \\ &= \int_0^1 (6x^3+5x^2+16x+5)\,dx \\ &= 6\frac{x^4}{4}+5\frac{x^3}{3}+16\frac{x^2}{2}+5x\Big|_0^1 \\ &= \frac{97}{6} \end{aligned}$$

Örnek: $A, B \in M_{n\times n}, A = (a_{ij})_{n\times n}, B = (b_{ij})_{n\times n}$ olmak üzere;

$$<A \cdot B> = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ij}\right)$$

biçiminde $M_{n\times n}$ vektör uzayında iç çarpım tanımlanır. $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 3\end{bmatrix}$ matrislerinin iç çarpımlarını hesaplayınız.

Çözüm: $$<A\cdot B>=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{ij}\right)$$
$$=\sum_{i=1}^{n}(a_{i1}b_{i1}+a_{i2}b_{i2})$$
$$= a_{11}b_{11}+a_{12}b_{12}+a_{21}b_{21}+a_{22}b_{22}$$
$$= 1\cdot 2+2\cdot 0+3\cdot 1+4\cdot 3$$
$$= 17$$

6.1. Sonuç: $M_{n\times n}$ vektör uzayında $A, B \in M_{n\times n}$ için iç çarpım
$$< A, B >= iz(AB^t)$$
dir. Gerçekten AB^t çarpımında köşegen üzerindeki elemanların toplamı olduğundan
$$<A\cdot B>=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{ij}\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{ij}^{t}\right)=iz(AB^t)$$
bulunur.

6.2. Sonuç: V bir iç çarpım uzayı, $\vec{x} \in V$ olsun. $\vec{x}$ vektörünün uzunluğu
$$\|\vec{A}\| = \sqrt{< \vec{A},\vec{A} >}$$
biçiminde tanımlanan bir sayıdır.

Örnek: $\mathbb{R}^n$ de $\vec{A} = (2,1,3)$ vektörünün uzunluğunu hesaplayınız.

$$\|\vec{A}\| = \sqrt{< (2,1,3),(2,1,3) >}= \sqrt{2\cdot 2+1\cdot 1+3\cdot 3} = \sqrt{12}\ \text{br}$$

Örnek: $P_2(\mathbb{R})$ deki $p(x) = x + 2$ vektörünün uzunluğunu hesaplayınız.

Çözüm:
$$\|\vec{A}\| = \sqrt{< (x+2),(x+2) >}$$
$$=\int_0^1 (x+2)^2dx$$

$$=\int_0^1 (x^2+4x+4)dx$$

$$=\frac{x^3}{3}+4\frac{x^2}{2}+4x\Big|_0^1$$

$$=\frac{19}{3}\,\text{br}$$

6.1. Teorem (Simetri Özelliği): Her $\vec{A},\vec{B}\in V$

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=\vec{B}\cdot\vec{A}$$

dir. Bu teoreme vektörlerin iç çarpımında simetri özelliği denir.

İspat: $\vec{A}=(a_1,a_2,\dots,a_n),\vec{B}=(b_1,b_2,\dots,b_n)$ vektörleri verilsin,

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n=b_1a_1+b_2a_2+\cdots+b_na_n=\vec{B}\cdot\vec{A}$$

dir.

6.2. Teorem (İki Lineerlik Özelliği):

i) Her $\vec{A},\vec{B}\in V, k\in\mathbb{R}$ için $k(\vec{A}\cdot\vec{B})=(k\vec{A}\cdot\vec{B})=(\vec{A}\cdot k\vec{B})$

ii) Her $\vec{A},\vec{B},\vec{C}\in V$ için $(\vec{A}+\vec{B})\cdot\vec{C}=(\vec{A}\cdot\vec{C})+(\vec{B}\cdot\vec{C})$

iii) Her $\vec{A},\vec{B},\vec{C}\in V$ için $\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C})=(\vec{A}\cdot\vec{B})+(\vec{A}\cdot\vec{C})$

dir. Bu teoreme vektörlerin iç çarpımında iki lineer özelliği denir.

İspat: i) Her $\vec{A},\vec{B}\in V$, $\vec{A}=(a_1,a_2,\dots,a_n),\vec{B}=(b_1,b_2,\dots,b_n)$, $k\in\mathbb{R}$ verilsin,

$$\begin{aligned}k(\vec{A}\cdot\vec{B})&=k[(a_1,a_2,\dots,a_n)\cdot(b_1,b_2,\dots,b_n)]\\&=k(a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2+\cdots+a_n\cdot b_n)\\&=(k\cdot a_1\cdot b_1+k\cdot a_2\cdot b_2+\cdots+k\cdot a_n\cdot b_n)\\&=(k\vec{A}\cdot\vec{B})\end{aligned}$$

ii) Her $\vec{A},\vec{B},\vec{C}\in V$, $\vec{A}=(a_1,a_2,\dots,a_n),\vec{B}=(b_1,b_2,\dots,b_n),\vec{C}=(c_1,c_2,\dots,c_n)$ olsun.

$$\begin{aligned}(\vec{A}+\vec{B})\cdot\vec{C}&=[(a_1,a_2,\dots,a_n)+(b_1,b_2,\dots,b_n)]\cdot(c_1,c_2,\dots,c_n)\\&=(a_1+b_1,a_2+b_2,\dots,a_n+b_n)\cdot(c_1,c_2,\dots,c_n)\\&=(a_1+b_1)c_1+(a_2+b_2)c_2+\cdots+(a_n+b_n)c_n\\&=(a_1c_1+a_2c_2+\cdots+a_nc_n)+(b_1c_1+b_2c_2+\cdots+b_nc_n)\\&=(a_1,a_2,\dots,a_n)(c_1,c_2,\dots,c_n)+(b_1,b_2,\dots,b_n)(c_1,c_2,\dots,c_n)\\&=(\vec{A}\cdot\vec{C})+(\vec{B}\cdot\vec{C})\end{aligned}$$

iii özelliği ii özelliğine benzer şekilde yapılır.

6.3. Teorem: $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ vektörler ve k ve ℓ bir skaler olmak üzere skaler çarpıma ait eşitlikleri aşağıdaki şekilde yazabiliriz.

i) $k(\vec{A}+\vec{B}) = k\vec{A} + k\vec{B}$

ii) $(k+\ell)\cdot\vec{A} = k\cdot\vec{A} + \ell\cdot\vec{A}$

iii) $k(\vec{A}\cdot\vec{B}) = (k\vec{A})\cdot\vec{B}$

iv) $k\cdot(\ell\cdot\vec{A}) = (k\cdot\ell)\cdot\vec{A}$

Bu teoremin ispatı okuyucuya bırakılmıştır.

6.4. Teorem (Pozitif Tanımlılık Özelliği): Her $\vec{A}\in V$ için

i) $\vec{A}\cdot\vec{A} \geq 0$

ii) $\vec{A}\cdot\vec{A} = 0 \Leftrightarrow \vec{A} = 0$

İspat: Her $\vec{A}\in V, \vec{A} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ ise,

i) $\vec{A}\cdot\vec{A} = a_1\cdot a_1 + a_2\cdot a_2 + \cdots + a_n\cdot a_n$
$= a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2$
≥ 0

ii) $\vec{A}\cdot\vec{A} = 0$
$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = 0$
$a_1^2 = 0 \wedge a_2^2 = 0 \wedge \dots \wedge a_n^2 = 0$
$a_1 = 0 \wedge a_2 = 0 \wedge \dots \wedge a_n = 0$
$\vec{A} = (a_1, a_2, \dots, a_n) = (0,0,\dots,0) = \vec{0}$ //

İç çarpımın simetri, iki lineerlilik ve pozitif tanımlılık aksiyomlarını verdikten sonra iç çarpımın diğer teoremlerini verelim.

6.5. Teorem: Her $\vec{A}\in V$ için

i) $\vec{A}\cdot\vec{A} = \|\vec{A}\|^2$

ii) $\vec{A}\cdot 0 = 0$

iii) $\vec{A}\cdot 1 = \vec{A}$

dir.

İspat: i) Her $\vec{A} \in V$ için

$$\vec{A} \cdot \vec{A} = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = \|\vec{A}\|^2$$

dir.

(ii) ve (iii) benzer şekilde gösterilir.

Örnek: $\vec{A} = (4, 3)$ vektörünün uzunluğunu (normunu) iç çarpım yöntemiyle bulunuz.

Çözüm: $\vec{A} \cdot \vec{A} = 4^2 + 3^2 = 25$ ise $\|\vec{A}\| = 5$

Örnek: $(\vec{A} + \vec{B}) = (0, 4\sqrt{2})$, $\|\vec{A}\| = 3$ birim ve $\vec{A} \cdot \vec{B} = 11$ olduğuna göre $\|\vec{B}\|$ normunu bulunuz.

Çözüm:

$$(\vec{A} + \vec{B}) \cdot (\vec{A} + \vec{B}) = 0^2 + (4\sqrt{5})^2 = 80 \qquad (1)$$

$$\begin{aligned}(\vec{A} + \vec{B}) \cdot (\vec{A} + \vec{B}) &= (\vec{A} + \vec{B}) \cdot \vec{A} + (\vec{A} + \vec{B}) \cdot \vec{B} \quad \text{(iki lineer özelliği)} \\ &= \vec{A} \cdot \vec{A} + \vec{B} \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{B} \cdot \vec{B} \quad \text{(iki lineer özelliği)} \\ &= \|\vec{A}\|^2 + 2\vec{A} \cdot \vec{B} + \|\vec{B}\|^2 \quad \text{(simetri özelliği)} \\ &= 3^2 + 2 \cdot 11 + \|\vec{B}\|^2 \qquad (2)\end{aligned}$$

bulunur. (1) ve (2) eşitliğinden

$$80 = 3^2 + 2 \cdot 11 + \|\vec{B}\|^2$$

$$\|\vec{B}\| = 7$$

elde edilir.

Örnek: $\|\vec{A}\| = 4$ birim, $\|B\| = 6$ birim ve $\vec{A} + \vec{B} = (-2, 8)$ ise $\vec{A} \cdot \vec{B}$ ifadesinin değerini bulunuz.

Çözüm: $(\vec{A} + \vec{B}) \cdot (\vec{A} + \vec{B}) = \|\vec{A}\|^2 + 2\vec{A} \cdot \vec{B} + \|\vec{B}\|^2$ olduğunu yukarıdaki örnekte gösterildi. Buna göre,

$$(\vec{A} + \vec{B}) \cdot (\vec{A} + \vec{B}) = 4^2 + 2\vec{A} \cdot \vec{B} + 6^2 \qquad (1)$$

$$(\vec{A} + \vec{B}) \cdot (\vec{A} + \vec{B}) = (-2, 8) \cdot (-2, 8) = (-2) \cdot (-2) + 8 \cdot 8 = 68 \qquad (2)$$

dir. (1) ve (2) eşitliğinden

$$68 = 4^2 + 2\vec{A}\cdot\vec{B} + 6^2$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = 8$$

bulunur.

Örnek: $\vec{A}\cdot\vec{B} = 2$, $\vec{A} - \vec{B} = (-1, 5)$, $\|\vec{B}\| = 5$ birim olduğuna göre $\|\vec{A}\|$ normunu bulunuz.

Çözüm:

$$(\vec{A} - \vec{B})\cdot(\vec{A} - \vec{B}) = (-1, 5)\cdot(-1,5) = 26 \qquad (1)$$

$$\begin{aligned}(\vec{A} - \vec{B})\cdot(\vec{A} - \vec{B}) &= (\vec{A} - \vec{B})\cdot\vec{A} - (\vec{A} - \vec{B})\cdot\vec{B} \quad \text{(iki lineer özelliği)}\\ &= \vec{A}\cdot\vec{A} - \vec{B}\cdot\vec{A} - \vec{A}\cdot\vec{B} + \vec{B}\cdot\vec{B} \quad \text{(iki lineer özelliği)}\\ &= \|\vec{A}\|^2 - 2\vec{A}\cdot\vec{B} + \|\vec{B}\|^2 \quad \text{(simetri özelliği)} \quad (2)\end{aligned}$$

bulunur. (1) ve (2) eşitliğinden,

$$\|\vec{A}\|^2 - 2\cdot 2 + 5^2 = 26$$

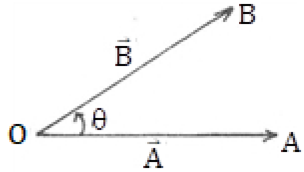
$$\|\vec{A}\| = \sqrt{5}\ \text{br}$$

elde edilir.

İki vektörün skaler çarpımının geometrik bir anlamı da vardır. Bunu açıklamadan önce iki vektör arasındaki açıyı tanımlayalım.

İKİ VEKTÖR ARASINDAKİ AÇI

6.2. Tanım: $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ gibi iki vektörü $\overrightarrow{OA}$ ve $\overrightarrow{OB}$ yönlendirilmiş doğru parçaları ile gösterelim. $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ vektörleri arasındaki açı ile $\overrightarrow{OA}$ ve $\overrightarrow{OB}$ doğru parçaları arasındaki $(0 \leq \theta \leq \pi)$ açısı anlaşılacaktır.



6.3. Sonuç: Eğer iki vektör arasındaki açı θ ise

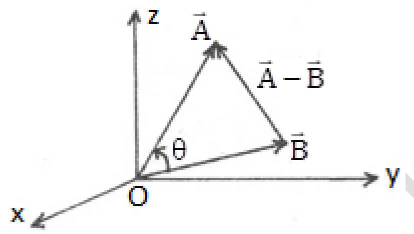
1) $\theta = 0$ veya $\theta = \pi$ radyan ise bu iki vektör birbirine paraleldir.
2) $\theta = \frac{\pi}{2}$ ise vektörler birbirine diktir.

Şimdi de skaler çarpımın geometrik anlamını verelim.

6.6. Teorem: $\vec{A},\vec{B} \in V$ ve bu iki vektör arasındaki açı θ olsun. Bu iki vektör arasındaki açı,

$$\cos\theta = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{\|\vec{A}\|\|\vec{B}\|}$$

dir.



İspat: $O\overset{\Delta}{A}B$ üçgenine kosinüs teoremini uygulayarak,

$$\|\overrightarrow{BA}\|^2 = \|\overrightarrow{OA}\|^2 + \|\overrightarrow{OB}\|^2 - 2\|\overrightarrow{OA}\|\|\overrightarrow{OB}\|\cos\theta \qquad (1)$$

yazılır. Burada $\overrightarrow{BA} = \vec{A} - \vec{B}$, $\overrightarrow{OA} = \vec{A}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{B}$ olduğu dikkate alınırsa,

$$\|\vec{A} - \vec{B}\|^2 = \|\vec{A}\|^2 + \|\vec{B}\|^2 - 2\|\vec{A}\|\|\vec{B}\|\cos\theta$$

elde edilir. Skaler çarpının özelliklerinden dolayı,

$$\begin{aligned}\|\vec{A} - \vec{B}\|^2 &= (\vec{A} - \vec{B})(\vec{A} - \vec{B}) \\ &= \vec{A}\cdot\vec{A} - \vec{A}\cdot\vec{B} - \vec{B}\cdot\vec{A} + \vec{B}\cdot\vec{B} \\ &= \|\vec{A}\|^2 - 2\vec{A}\cdot\vec{B} + \|\vec{B}\|^2 \qquad (2)\end{aligned}$$

(1) ve (2) eşitliklerinden

$$\|\vec{A}\|^2 - 2\vec{A}\cdot\vec{B} + \|\vec{B}\|^2 = \|\vec{A}\|^2 + \|\vec{B}\|^2 - 2\|\vec{A}\|\|\vec{B}\|\cos\theta$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = \|\vec{A}\|\|\vec{B}\|\cos\theta$$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{\|\vec{A}\|\|\vec{B}\|}$$

eşitliği elde edilir. //

Sıfırdan farklı $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ gibi iki vektör arasındaki açı, skaler çarpımdan elde edilen eşitlikten

$$\cos\theta = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{\|\vec{A}\|\|\vec{B}\|}$$

ifadesi ile verilebilir. Bu eşitliği uzayda vektörlerin bileşenleri cinsinden

$$\cos\theta = \frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$$

olarak yazılabilir.

Örnek: $\vec{A}=(2,-1,-2)$ ve $\vec{B}=(1,2,2)$ vektörleri arasındaki açıyı bulunuz?

Çözüm:

$$\cos\theta = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{\|\vec{A}\|\,\|\vec{B}\|} = \frac{(2,-1,-2)\cdot(1,2,2)}{\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}\sqrt{1^2+2^2+2^2}} = \frac{2\cdot1+(-1)2+(-2)2}{3\cdot8} = \frac{8}{9}$$

$$\theta = \arccos\frac{8}{9} = 27^0 27'$$

Örnek: $\vec{A}=(3,4),\vec{B}=(1,2)$ vektörleri arasındaki açının kosünüsünü bulunuz.

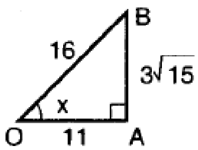
Çözüm:

$$\cos\theta = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{\|\vec{A}\|\|\vec{B}\|} = \frac{(3,\ 4)\cdot(1,\ 2)}{\sqrt{3^2+4^2}\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{3\cdot1+4\cdot2}{5\sqrt{5}} = \frac{11\sqrt{5}}{25}$$

$$\theta = \arccos\frac{11\sqrt{5}}{25} = 10^0 30'$$

Örnek: AOB üçgeninde $\|\overrightarrow{AB}\|=5, \|\overrightarrow{OB}\|=8$ ve $m(AOB)=x^0$ dir. $0<x<\frac{\pi}{2}$ ve $\sin x<\frac{3\sqrt{15}}{16}$ ise $\|\vec{A}+\vec{B}\|$ nedir?

Çözüm:



$\sin x = \frac{3\sqrt{15}}{16}$ ise $\cos x = \frac{11}{16}$ dür.

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = \|\vec{A}\|\cdot\|\vec{B}\|\cos x$$
$$\vec{A}\cdot\vec{B} = 5\cdot8\cdot\frac{11}{16} = \frac{55}{2}$$

$$\|\vec{A}+\vec{B}\|^2 = \|\vec{A}\|^2 + \|\vec{B}\|^2 + 2\cdot\vec{A}\cdot\vec{B}$$
$$\|\vec{A}+\vec{B}\|^2 = 5^2 + 8^2 + 2\cdot\frac{55}{2}$$
$$\|\vec{A}+\vec{B}\| = 12$$

Örnek: $M_{2\times 2}$ vektör uzayındaki $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 2 & 3\end{bmatrix}$ vektörleri arasındaki açıyı bulunuz.

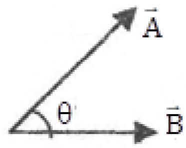
Çözüm: 6.1. Sonuçta $<A,B>= iz(AB^t)$ olduğundan

$$AB^t=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 0 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 8\\ 0 & -3\end{bmatrix} \text{ ise } iz(AB^t) = -1-3=-4$$
$$AA^t=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 6\\ -2 & 1\end{bmatrix} \text{ ise } iz(AA^t) = 5+1=6$$
$$BB^t=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 0 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -2\\ -2 & 13\end{bmatrix} \text{ ise } iz(BB^t) = 1+13=14$$
$$\cos\theta = \frac{iz(AB^t)}{iz(AA^t)iz(BB^t)} = \frac{-4}{\sqrt{6}\sqrt{14}} = \frac{-2}{\sqrt{21}}$$

bulunur.

Karl Hermann Amandus Schwarz
25 Ocak 1843, Jerzmanowa, Polonya-30 Kasım 1921, Berlin, Almanya

6.7. Teorem (Cauchy-Schwarz Eşitsizliği): $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ iki vektör olsun.



$$|\vec{A}\cdot\vec{B}| \leq \|\vec{A}\|\cdot\|\vec{B}\|$$

dir.

İspat: İki vektör arasındaki açı $\cos\theta = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{\|\vec{A}\|\|\vec{B}\|}$ olduğunu biliyoruz. $|\cos\theta| \leq 1$, $\vec{A}\perp\vec{B} \Leftrightarrow \vec{A}\cdot\vec{B} = 0$ dir.

$$\left|\frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{\|\vec{A}\|\|\vec{B}\|}\right| < 1$$

$$|\vec{A}\cdot\vec{B}| \leq \|\vec{A}\|\cdot\|\vec{B}\|$$

olur.

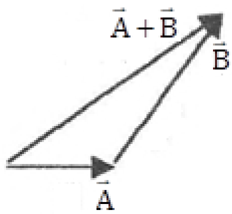
6.8. Teorem:

a) $\|\vec{A}+\vec{B}\| \leq \|\vec{A}\| + \|\vec{B}\|$ (Üçgen Eşitsizliği)

b) $\|\vec{A}-\vec{B}\| \leq \|\vec{B}-\vec{A}\|$

c) $\|\vec{A}-\vec{B}\| \geq \big|\|\vec{A}\| - \|\vec{B}\|\big|$

İspat: a)



$$\|\vec{A}+\vec{B}\| = \sqrt{(\vec{A}+\vec{B})(\vec{A}+\vec{B})}$$

$$\|\vec{A}+\vec{B}\|^2 = (\vec{A}+\vec{B})(\vec{A}+\vec{B}) = \|\vec{A}\|^2 + 2\vec{A}\vec{B} + \|\vec{B}\|^2$$

Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden

$$\|\vec{A}+\vec{B}\|^2 \leq \|\vec{A}\|^2 + 2\|\vec{A}\|\|\vec{B}\| + \|\vec{B}\|^2$$

$$\|\vec{A}+\vec{B}\|^2 \leq (\|\vec{A}\| + \|\vec{B}\|)^2$$

$$\|\vec{A}+\vec{B}\| \leq \|\vec{A}\| + \|\vec{B}\|$$

bulunur.

b) $\|\vec{A}-\vec{B}\|^2 = (\vec{A}-\vec{B})(\vec{A}-\vec{B})$

$$
\begin{aligned}
&= \vec{A}\cdot\vec{A} - \vec{A}\cdot\vec{B} - \vec{B}\cdot\vec{A} + \vec{B}\cdot\vec{B}\\
&= \vec{B}\cdot\vec{B} - \vec{B}\cdot\vec{A} - \vec{A}\cdot\vec{B} + \vec{A}\cdot\vec{A}\\
&= (\vec{B}-\vec{A})(\vec{B}-\vec{A})\\
&= \|\vec{B}-\vec{A}\|^2
\end{aligned}
$$

$$\|\vec{A}-\vec{B}\| \le \|\vec{B}-\vec{A}\|$$

c)
$$
\begin{aligned}
\|\vec{A}-\vec{B}\|^2 &= (\vec{A}-\vec{B})(\vec{A}-\vec{B})\\
&= \vec{A}\cdot\vec{A} - \vec{A}\cdot\vec{B} - \vec{B}\cdot\vec{A} - \vec{B}\cdot\vec{B}\\
&= \|\vec{A}\|^2 - 2\vec{A}\cdot\vec{B} + \|\vec{B}\|^2 \quad \text{(Schwarz eşitsizliğinden)}\\
&\ge \|\vec{A}\|^2 - 2\|\vec{A}\|\cdot\|\vec{B}\| + \|\vec{B}\|^2\\
&\ge \left(\|\vec{A}\| - \|\vec{B}\|\right)^2
\end{aligned}
$$

$$\|\vec{A}-\vec{B}\| \ge \left|\|\vec{A}\| - \|\vec{B}\|\right|$$

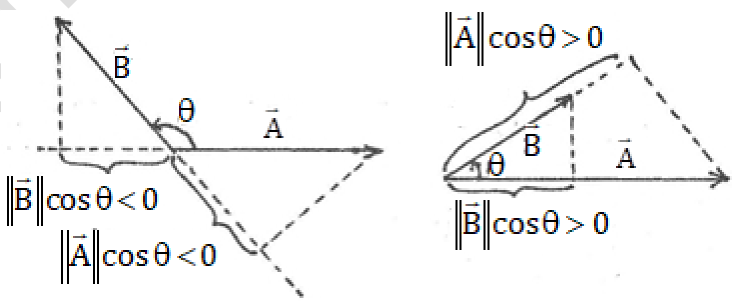
6.4. Sonuç: Üçgen ve Cauchy-Schwarz eşitsizliklerinde eşitlik durumu aşağıdaki hallerde gerçeklenir:

i) $\|\vec{x}+\vec{y}\| = \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$ için gerek ve yeter şart $\exists\ \alpha \ge 0, \vec{x} = \alpha\vec{y}$,

ii) $|<\vec{x},\vec{y}>| = \|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|$ için gerek ve yeter şart $\exists\ \alpha \in \mathbb{R}, \vec{x} = \alpha\vec{y}$.

VEKTÖRLERDE İZDÜŞÜM

6.3. Tanım: $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ iki vektör, $\|\vec{B}\|\cos\theta < 0$ ifadesine $\|\vec{B}\|$ nün $\vec{A}$ vektörü üzerine dik izdüşümü denir. Bu aynı zamanda $\vec{B}$ nün $\vec{A}$ üzerindeki izdüşüm vektörünün bileşenine (Cebirsel ölçüsüne) denktir.



İki vektör arasındaki açının kosinüsü teoreminden aşağıdaki sonuç çıkarılır.

6.5. Sonuç: i) $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ vektörleri aynı doğrultuda ve aynı yönlü ise $\alpha = 0$ ve $\cos 0 = 1$ olacağından,

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \|\vec{A}\|\|\vec{B}\|$$

dir.

ii) $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ vektörleri aynı doğrultuda ve ters yönlü ise $\alpha = 180$ ve $\cos 180 = -1$ olacağından,

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = -\|\vec{A}\|\|\vec{B}\|$$

dir.

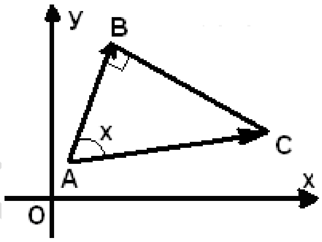
iii) $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ vektörleri birbirlerine dik ($\vec{A} \perp \vec{B}$) ise $\alpha = 90$ ve $\cos 90 = 0$ olacağından,

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{0}$$

dir.

iv) $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$ ise $\vec{A} \perp \vec{B}$ ya da $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ vektörlerinden en az biri $\vec{0}$ dır.

Örnek: ABC dik üçgendir.



A(2,7) ve B(5,11) olduğuna göre $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ ifadesinin değerini bulunuz.

Çözüm: $m(BAC) = x^0$ olduğuna göre

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \cdot \|\overrightarrow{AC}\| \cos x$$

dir. Şekle göre $\cos x = \dfrac{\|\overrightarrow{AB}\|}{\|\overrightarrow{AC}\|}$ olduğundan

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \cdot \|\overrightarrow{AC}\| \cos x = \|\overrightarrow{AB}\| \cdot \|\overrightarrow{AC}\| \cdot \frac{\|\overrightarrow{AB}\|}{\|\overrightarrow{AC}\|} = \|\overrightarrow{AB}\|^2$$

bulunur. O halde,

$$\|\vec{A}\| = \sqrt{(5-2)^2 + (11-7)^2} = 5 \text{ br}$$

olduğundan

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\|^2 = 5^2 = 25$$

dir.

Örnek: $\vec{A} = 8\vec{e_1} - 2\vec{e_2}$, $\vec{B} = \vec{e_1} + (m-2)\vec{e_2}$ vektörleri dik olduğuna göre m'nin değeri nedir?

Çözüm: iii özelliği gereği $\vec{A} \perp \vec{B}$ ise $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{0}$ olduğuna göre,

$$(8,-2) \cdot (1, m-2) = 0$$
$$8 - 2m + 4 = 0$$
$$m = 6$$

bulunur.

Örnek: $\mathbb{R}^2$ de $\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$ ve $\vec{c} = (1,1)$ vektörleri veriliyor $b_1 + b_2 = 5$ ve $(5 \cdot \vec{a}) \perp (\vec{a} - \vec{c})$ ise $\vec{a} \cdot \vec{b}$ skaler çarpımının değeri ne olur?

Çözüm: $\vec{a} - \vec{c} = [a_1 - 1, a_2 - 1]$ ve $5\vec{b} = [5b_1, 5b_2]$ ve $(5 \cdot \vec{a}) \perp (\vec{a} - \vec{c})$ ise skaler çarpım sıfır olmalıdır. O halde

$$(5 \cdot \vec{a}) \perp (\vec{a} - \vec{c}) = 0$$
$$5 \cdot b_1(a_1 - 1) + 5b_2(a_2 - 1) = 0$$
$$5a_1 \cdot b_1 - 5b_1 + 5a_2 \cdot b_2 - 5b_2 = 0$$
$$5a_1 \cdot b_1 + 5a_2 \cdot b_2 - 5(b_1 + b_2) = 0$$
$$5a_1 \cdot b_1 + 5a_2 \cdot b_2 - 25 = 0$$
$$a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 = 25$$
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 25$$

6.9. Teorem:

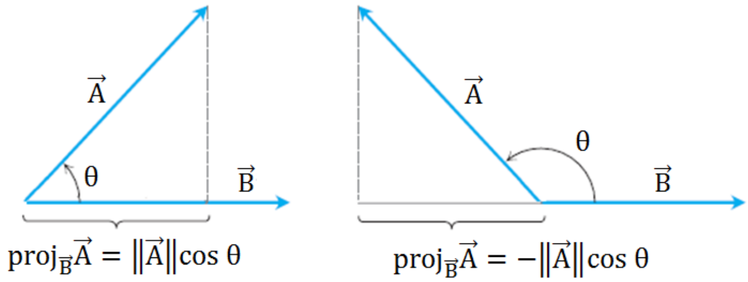
i) $\vec{A}$ vektörünün $\vec{B}$ üzerine izdüşüm vektörü; $\text{proj}_{\vec{B}}\vec{A} = \left(\frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{\|\vec{B}\|}\right)\vec{B}$ dir.

ii) $\vec{A}$ vektörünün $\vec{B}$ üzerine skaler bileşeni; $\|\vec{A}\| \cos\theta = \frac{A \cdot \vec{B}}{\|\vec{B}\|} = \vec{A}\frac{\vec{B}}{\|\vec{B}\|}$ dir.

İspat: i) $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ arasındaki θ açısı dar açı ise $\text{proj}_{\vec{B}}\vec{A}$ nun uzunluğu $\|A\| \cos\theta$ ve yönü $\frac{\vec{B}}{\|\vec{B}\|}$ dir. θ açısı geniş açı ise $\text{proj}_{\vec{B}}\vec{A}$ nun uzunluğu yönü $-\|\vec{u}\| \cos\theta$ ve yönü $-\frac{\vec{B}}{\|\vec{B}\|}$ dır. Her iki durumda

$$\text{proj}_{\vec{B}}\vec{A} = (\|\vec{A}\| \cos\theta)\frac{\vec{B}}{\|\vec{B}\|}$$

$$= \left(\frac{\|\vec{A}\|\cdot\|\vec{B}\|}{\|\vec{B}\|}\cos\theta\right)\frac{\vec{B}}{\|\vec{B}\|}$$
$$= \left(\frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{\|\vec{B}\|}\right)\frac{\vec{B}}{\|\vec{B}\|}$$
$$= \left(\frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{\|\vec{B}\|^2}\right)\vec{B}$$



(ii) benzer şekilde gösterilir.

Örnek: $\vec{A} = 6\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$ nin $\vec{B} = \vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}$ üzerine izdüşüm vektörü-nü ve $\vec{A}$ nın $\vec{B}$ yönündeki skaler bileşenini bulunuz.

Çözüm: $\vec{A}$ nun $\vec{B}$ üzerine izdüşüm vektörü:

$$\text{proj}_{\vec{B}}\vec{A} == \left(\frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{\|\vec{B}\|^2}\right)\vec{B} = \frac{6-6-4}{1^2+(-2)^2+(-2)^2}(\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}) = -\frac{4}{9}\vec{i} + \frac{8}{9}\vec{j} + \frac{8}{9}\vec{k}$$

$\vec{A}$ nın $\vec{B}$ üzerine skaler bileşeni:

$$\|\vec{A}\|\cos\theta = \vec{A}\frac{\vec{B}}{\|\vec{B}\|} = (6\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k})\left(\frac{1}{3}\vec{i} - \frac{2}{3}\vec{j} - \frac{2}{3}\vec{k}\right) = 2 - 2 - \frac{4}{3} = -\frac{4}{3}$$

Örnek: $\vec{A} = 5\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ nin $\vec{B} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ üzerine izdüşüm vektörünü ve $\vec{u}$ nun $\vec{v}$ yönündeki skaler bileşenini bulunuz.

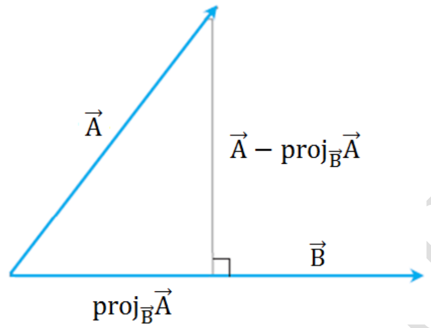
Çözüm: $\vec{A}$ nın $\vec{B}$ üzerine izdüşüm vektörü:

$$\text{proj}_{\vec{B}}\vec{A} = \left(\frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{\|\vec{B}\|^2}\right)\vec{B} = \frac{5-4+1}{5^2+4^2+1^2}(\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}) = \frac{1}{21}\vec{i} - \frac{3}{21}\vec{j} + \frac{1}{21}\vec{k}$$

$\vec{A}$ nın $\vec{B}$ üzerine skaler bileşeni:

$$\|\vec{A}\|\cos\theta = \vec{A}\frac{\vec{B}}{\|\vec{B}\|} = (5\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + \vec{k})\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\vec{\imath} - \frac{2}{\sqrt{6}}\vec{\jmath} + \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{k}\right) = \frac{5}{\sqrt{6}} - \frac{4}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{4}{\sqrt{6}}$$

6.10. Teorem: $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ iki vektör olsun. $\vec{B}$ ye paralel vektör $\mathrm{proj}_{\vec{B}}\vec{A}$ ve $\vec{B}$ ye dik vektör $\vec{A} - \mathrm{proj}_{\vec{B}}\vec{A}$ dir.



İspat: $\mathrm{proj}_{\vec{B}}\vec{A}$ vektörü $\vec{A} - \mathrm{proj}_{\vec{B}}\vec{A}$ vektörüne dik olması için skaler (iç) çarpım sıfır olmalıdır.

$$(\mathrm{proj}_{\vec{B}}\vec{A}) \cdot (\vec{A} - \mathrm{proj}_{\vec{B}}\vec{A}) = \left(\frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{\|\vec{B}\|^2}\right)\vec{B}\left(\vec{A} - \left(\frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{\|\vec{B}\|^2}\right)\vec{B}\right)$$
$$= \left(\frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{\|\vec{B}\|^2}\right)(\vec{A}\vec{B}) - \left(\frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{\|\vec{B}\|^2}\right)(\vec{B}\vec{B})$$
$$= \frac{(\vec{A}\cdot\vec{B})^2}{\|\vec{B}\|^2} - \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{\|\vec{B}\|^2}\|\vec{B}\|^2$$
$$= 0$$

Örnek: $\vec{A} = 4\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + 3\vec{k}$ ve $\vec{B} = \vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + 2\vec{k}$ verilsin. $\vec{A}$ vektörü üzerinden izdüşümü ve bu izdüşüme dik (ortogonal) vektörü bulunuz.

Çözüm: $\vec{A}$ nın $\vec{B}$ üzerine izdüşüm vektörü:

$$\mathrm{proj}_{\vec{B}}\vec{A} = \left(\frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{\|\vec{B}\|^2}\right)\vec{B} = \frac{4-4+6}{1^2+(-2)^2+2^2}(\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + 2\vec{k}) = \frac{2}{3}\vec{\imath} - \frac{4}{3}\vec{\jmath} + \frac{4}{3}\vec{k}$$

$\vec{B}$ vektörüne dik vektörü:

$$(\mathrm{proj}_{\vec{B}}\vec{A}) \cdot (\vec{A} - \mathrm{proj}_{\vec{B}}\vec{A}) = (4\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}) - \left(\frac{2}{3}\vec{i} - \frac{4}{3}\vec{j} + \frac{4}{3}\vec{k}\right) = \frac{10}{3}\vec{i} + \frac{10}{3}\vec{j} + \frac{5}{3}\vec{k}$$

DIŞ ÇARPIM (VEKTÖREL ÇARPIM)

6.4. Tanım: $\mathbb{R}^3$ de $\vec{A} = (a_1, a_2, a_3)$ ve $\vec{B} = (b_1, b_2, b_3)$ gibi iki vektör olsun.

$$(\times): V \times V \to V$$

$$(\vec{A}, \vec{B}) \to \vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

olarak tanımlanan yeni bir vektöre dış çarpım (vektörel çarpım) denir. Bu vektörel çarpıma bazen çapraz çarpım ya da dış çarpımda olarak adlandırılmıştır.

Örnek: $\vec{A} = (2, 1, 3)$ ve $\vec{B} = (1, -2, 1)$ ise $\vec{A} \times \vec{B}$ i bulunuz

Çözüm: $\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 7\vec{i} + \vec{j} - 5\vec{k}$

6.11. Teorem: $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ vektörler ve k, ℓ bir skaler olmak üzere vektörel çarpım için aşağıdaki eşitlikler vardır;

i) $\vec{A} \times \vec{B} = -(\vec{B} \times \vec{A})$, (Ters değişme özelliği)
ii) $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) \neq (\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C}$, (Birleşme Özelliği yoktur)
iii) $\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} \times \vec{B}) + (\vec{A} \times \vec{C})$, (Dağılma özelliği)
iv) $k(\vec{A} \times \vec{B}) = (k\vec{A}) \times \vec{B} = \vec{A} \times (k\vec{B})$
v) $(k \cdot \vec{A}) \times (\ell \cdot \vec{B}) = (k \cdot \ell)(\vec{A} \times \vec{B})$
vi) $\vec{A} \times \vec{A} = \vec{0}$
vii) $\vec{0} \times \vec{A} = \vec{0}\vec{0} \times \vec{A} = \vec{0}$

İspat:
i) $\vec{A} = (a_1, a_2, a_3)$ ve $\vec{B} = (b_1, b_2, b_3)$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = -(\vec{B} \times \vec{A})$$

Benzer şekilde diğer şıklar da gösterilir. //

6.12. Teorem: $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ vektörler olmak üzere iç çarpım (Skaler çarpımın) için aşağıdaki eşitlikler vardır;

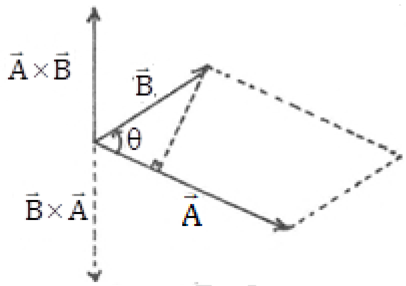
i) $\vec{A}\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = a_1(a_2b_3 - a_3b_2) + a_2(a_3b_1 - a_1b_3) + a_3(a_1b_2 - a_2b_1) = 0$

ii) $\vec{B}\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{0}$

dir.

Bu teoremin ispatı okuyucuya bırakılmıştır. //

Bu teorem gösteriyor ki $\vec{A}\times\vec{B}$ vektörü hem $\vec{A}$, hem de $\vec{B}$ vektörüne diktir.



Vektörel çarpımın geometrik anlamı

6.6. Sonuç: $\vec{A}\times\vec{B}$ iki vektörün vektörel çarpımı, $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ vektörlerinin her ikisine de dik ve $\vec{A}$ dan $\vec{B}$ ye doğru çevrilmekte olan bir vidanın ilerleme yönünde olan yeni bir vektördür. $\vec{B}\times\vec{A}$ vektörü ise, $\vec{B}$ den $\vec{A}$ ya doğru çevrilmekte olan bir vidanın ilerleme yönünde yani $\vec{A}\times\vec{B}$ nin zıt yönünde olan bir vektördür.

Örnek: $\vec{A} = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$ ve $\vec{B} = -2\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}$ vektörlerini göz önüne alalım. Hem $\vec{A}$ ya hem de $\vec{B}$ vektörlerine dik olan bir vektör bulunuz.

Çözüm: $\vec{A}\times\vec{B}$ vektörü hem $\vec{A}$ ya hem de $\vec{B}$ ye dik olan vektördür.

$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 5 \end{vmatrix} = -2\vec{i} - 11\vec{j} + 8\vec{k}$$

Örnek: $\vec{A} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ ve $\vec{B} = 2\vec{i} - 2\vec{j}$ vektörlerine dik olan birim vektörleri bulunuz?

Çözüm: $$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$$

vektörü hem $\vec{A}$, hem de $\vec{B}$ vektörüne diktir.

$$\vec{A_e} = \frac{\vec{A}}{\|\vec{A}\|} = \frac{-2\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}}{\sqrt{(-2)^2+2^2+2^2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}(-\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$$

vektörü hem $\vec{A}$, hem de $\vec{B}$ ye dik birim vektördür. Bu özelliği sağlayan ikinci bir $-\vec{A_e}$ birim vektörü vardır.

$$\vec{A_e} = -\frac{\sqrt{3}}{3}(-\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) = \frac{\sqrt{3}}{3}(\vec{i} - \vec{j} - \vec{k})$$

olur.

Örnek: $\vec{A} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$ ve $\vec{B} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ vektörlerin her ikisine birden dik olan bir birim vektör bulunuz.

Çözüm: $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ vektörlerinin her ikisine birden dik olan vektör; $\vec{A} \times \vec{B}$ vektörüdür. Bu vektörü birim vektör haline getirmek için,

$$\frac{\vec{A}\times\vec{B}}{\|\vec{A}\times\vec{B}\|}$$

ifadesini oluşturmak gerekir.

$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -\vec{i} + 7\vec{j} + 5\vec{k}$$

$$\|\vec{A} \times \vec{B}\| = \sqrt{(-1)^2 + 7^2 + 5^2} = 5\sqrt{3}$$

$$\frac{\vec{A}\times\vec{B}}{\|\vec{A}\times\vec{B}\|} = -\frac{1}{5\sqrt{3}}\vec{i} + \frac{7}{5\sqrt{3}}\vec{j} + \frac{1}{5\sqrt{3}}\vec{k}$$

6.7. Sonuç: $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ vektörleri verilsin. $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ vektörünün paralel olması için $\vec{A} \times \vec{B} = 0$ olmalıdır.

Örnek: Aşağıdaki her bir $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ vektörünün paralel olduklarını gösteriniz.

a) $\vec{A} = 2\vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k}$ ve $\vec{B} = 4\vec{i} + 6\vec{j} - 2\vec{k}$
b) $\vec{A} = 6\vec{i} - 3\vec{j} + 9\vec{k}$ ve $\vec{B} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$

Çözüm: İki vektörün paralel olması için $\vec{A} \times \vec{B} = 0$ olmalıdır.

a) $\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & -3 & 9 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = (-6+6)\vec{i} + (4-4)\vec{j} + (12-12)\vec{k} = 0$

b) $\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & -3 & 9 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = (-9+9)\vec{i} + (18-18)\vec{j} + (-6+6)\vec{k} = 0$

6.13. Teorem: $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ vektör olmak üzere $\vec{A} \times \vec{B}$ vektörünün büyüklüğü

$$\|\vec{A} \times \vec{B}\| = \|\vec{A}\|\|\vec{B}\| \sin\theta$$

biçimindedir.

İspat: $\vec{A} \times \vec{B}$ vektörünün büyüklüğünü bulalım. Bunun için önce,

$$\|\vec{A} \times \vec{B}\|^2 = \|\vec{A}\|^2 \|\vec{B}\|^2 - (\vec{A} \cdot \vec{B})^2$$

eşitliğini göstermek yetecektir.

$$\|\vec{A} \times \vec{B}\|^2 = (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2$$

ve

$$\|\vec{A}\|^2 \|\vec{B}\|^2 - (\vec{A} \cdot \vec{B})^2 = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) + (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2$$

bu iki ifade açıldığında ikinci taraflar birbirine eşit olduğundan birinci taraflar da eşit olur. O halde

$$\|\vec{A} \times \vec{B}\|^2 = \|\vec{A}\|^2 \|\vec{B}\|^2 - (\vec{A} \cdot \vec{B})^2$$

dir. Aralarındaki açı θ olan $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ vektörlerinin skaler çarpım özelliğinden

$$\|\vec{A} \times \vec{B}\|^2 = \|\vec{A}\|^2 \|\vec{B}\|^2 (1 - \cos^2\theta) = \|\vec{A}\|^2 \|\vec{B}\|^2 \sin^2\theta$$

bulunur. Buradan

$$\|\vec{A} \times \vec{B}\| = \|\vec{A}\|\|\vec{B}\| \sin\theta$$

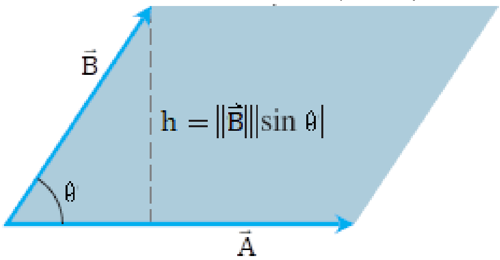
elde edilir.

6.14. Teorem: $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ vektörleri verilsin. $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ vektörünün oluşturduğu paralelkenarın alanı $\|\vec{A}\times\vec{B}\| = \|\vec{A}\|\|\vec{B}\|\sin\theta$ dir.

İspat: 6.13. teoremde $\vec{A}\times\vec{B}$ vektörünün büyüklüğü

$$\|\vec{A}\times\vec{B}\| = \|\vec{A}\|\|\vec{B}\|\sin\theta$$

olarak bulunmuştur. O halde



Paralelkenarın Alanı = Taban . Yükseklik

$$\|\vec{A}\times\vec{B}\| = \|\vec{A}\|\|\vec{B}\|\sin\theta$$

dir.

Örnek: $P(1,2,-1), Q(4,3,-3), R(-2,-1,3)$ köşe noktalar verilen paralelkenarın alanını vektörel çarpımı kullanarak, hesaplayınız.

Çözüm:

$\vec{A} = \overrightarrow{PQ} = Q - P = (4,3,-3) - (1,2,-1) = (3,1,-2)$

$\vec{B} = \overrightarrow{PR} = R - P = (-2,-1,3) - (1,2,-1) = (-3,-3,4)$

$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & -2 \\ -3 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - 6\vec{j} - 3\vec{k}$$

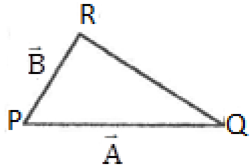
$$\|\vec{A}\times\vec{B}\| = \sqrt{2^2 + (-6)^2 + (-3)^2} = 7$$

$$A(ABC) = \|\vec{A}\times\vec{B}\| = 7\ \text{br}^2$$

6.8. Sonuç: $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ vektörleri verilsin. $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ vektörünün oluşturduğu üçgenin alanı $A(ABC) = \dfrac{\|\vec{A}\times\vec{B}\|}{2}$ dir.

Örnek: Vektörel çarpımı kullanarak, $P(4,0,3), Q(1,2,-1), R(2,1,3)$ köşe noktalar verilen üçgenlerin alanını hesaplayınız.

Çözüm:



$$\vec{A} = \overrightarrow{PQ} = Q - P = (1,2,-1) - (4,0,3) = (-3,-2,4)$$
$$\vec{B} = \overrightarrow{PR} = R - P = (2,1,3) - (4,0,3) = (-2,-1,0)$$

$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & -2 & -4 \\ -2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -4\vec{i}+8\vec{j}-\vec{k}$$

$$\|\vec{A}\times\vec{B}\| = \sqrt{(-4)^2+8^2+(-1)^2} = 9$$

$$A(ABC) = \frac{\|\vec{A}\times\vec{B}\|}{2} = \frac{9}{2}\ br^2$$

6.15. Teorem: $\vec{A} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ ve $\vec{B} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$ vektörleri verilsin. $\vec{A}\times\vec{B}$ varsa

$$\vec{i}\times\vec{i} = \vec{j}\times\vec{j} = \vec{k}\times\vec{k} = 0$$
$$\vec{i}\times\vec{j} = -(\vec{j}\times\vec{i}) = \vec{k}$$
$$\vec{j}\times\vec{k} = -(\vec{k}\times\vec{j}) = \vec{i}$$
$$\vec{k}\times\vec{i} = -(\vec{i}\times\vec{k}) = \vec{j}$$

olur.

İspat:

$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = (y_1z_2 - z_1y_2)\vec{i} + (z_1x_2 - x_1z_2)\vec{j} + (x_1y_2 - y_1x_2)\vec{k} \quad (1)$$

Ayrıca;

$$\begin{aligned}\vec{A}\times\vec{B} &= (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}) \times (x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) \\ &= x_1x_2\vec{i}\times\vec{i} + x_1y_2\vec{i}\times\vec{j} + x_1z_2\vec{i}\times\vec{k} + y_1x_2\vec{j}\times\vec{i} + y_1y_2\vec{j}\times\vec{j} + \\ &\qquad + y_1z_2\vec{j}\times\vec{k} + z_1x_2\vec{k}\times\vec{i} + z_1y_2\vec{k}\times\vec{j} + z_1z_2\vec{k}\times\vec{k}\end{aligned}$$

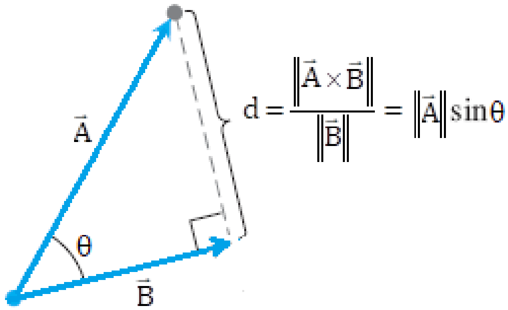
$$= (x_1x_2\vec{i}\times\vec{i} + y_1y_2\vec{j}\times\vec{j} + z_1z_2\vec{k}\times\vec{k}) + (y_1z_2\vec{j}\times\vec{k} + z_1y_2\vec{k}\times\vec{j}) +$$
$$+(x_1y_2\vec{i}\times\vec{j} + y_1x_2\vec{j}\times\vec{i}) + (x_1z_2\vec{i}\times\vec{k} + z_1x_2\vec{k}\times\vec{i}) \qquad (2)$$

olur. Burada (1) ve (2) birbirine eşit olması için

$$\vec{i}\times\vec{i} = \vec{j}\times\vec{j} = \vec{k}\times\vec{k} = 0$$
$$\vec{i}\times\vec{j} = -(\vec{j}\times\vec{i}) = \vec{k}$$
$$\vec{j}\times\vec{k} = -(\vec{k}\times\vec{j}) = \vec{i}$$
$$\vec{k}\times\vec{i} = -(\vec{i}\times\vec{k}) = \vec{j}$$

olması gerekir.

6.16. Teorem: $\vec{A} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ ve $\vec{B} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$ vektörleri verilsin. Bu iki vektör bir noktada kesişiyor ise diğer uçları arasındaki uzaklık



$$d = \frac{\|\vec{A}\times\vec{B}\|}{\|\vec{B}\|}$$

dir.

İspat: 6.14. teorem gereği $\|\vec{A}\times\vec{B}\|$ bu iki vektör arasındaki paralelkenarın alanını verir. $\|\vec{B}\|$, $\vec{B}$ vektörünün uzunluğu olduğundan, d doğrusunun uzunluğu

$$d = \frac{\text{Alan}}{\text{Uzunluk}} = \frac{\|\vec{A}\times\vec{B}\|}{\|\vec{B}\|}$$

olur. //

Bu teorem Analitik geometri derslerinde $d = \|\vec{A}\|\sin\theta$ olarak verilmiştir.

Örnek: $\vec{A} = -2\vec{i} + 5\vec{k}$ ve $\vec{B} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ vektörlerinin uçları arasındaki uzaklığı bulunuz.

$$\text{Çözüm: } \vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -2 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}=\vec{i}+5\vec{j}+2\vec{k}$$

$$d=\frac{\|\vec{A}\times\vec{B}\|}{\|\vec{B}\|}=\frac{\sqrt{1^2+5^2+2^2}}{\sqrt{1^2+1^2+2^2}}=\sqrt{5}\text{ br}$$

KARMA ÇARPIM (ÇAPRAZ ÇARPIM)

6.5. Tanım: $\mathbb{R}^3$ de $\vec{A},\vec{B},\vec{C}$ gibi üç vektör verilmiş olsun. $\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})$ çarpımına bu üç vektörün karma çarpımı (çapraz çarpım) denir. Bir karma çarpım içinde hem skaler hem de vektörel çarpım bulunmaktadır.

Örnek: Aşağıda verilen vektörlerin karma çarpımını bulunuz.

a) $\vec{A}=(2,1,3),\vec{B}=(-1,4,0),\vec{C}=(1,1,2)$
b) $\vec{A}=(-1,5,2),\vec{B}=(1,2,0),\vec{C}=(2,-1,4)$

Çözüm:

$$\text{a) } \vec{A}.(\vec{B}\times\vec{C})=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=3$$

$$\text{b) } \vec{A}.(\vec{B}\times\vec{C})=\begin{vmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix}=-38$$

Örnek: $\vec{A}=2\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k}$, $\vec{B}=-\vec{i}+2\vec{j}+4\vec{k}$ ve $\vec{B}=\vec{i}-3\vec{j}+3\vec{k}$ olmak üzere $\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})$ yi hesaplayınız.

$$\text{Çözüm: } \vec{A}.(\vec{B}\times\vec{C})=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 1 & -3 & 3 \end{vmatrix}=1$$

6.9. Sonuç: Skaler (iç) ve vektörel (dış) çarpımın bilinen özellikleri göz önünde tutulursa, karma çarpım için aşağıdaki eşitlikler yazılabilecektir.

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{B}\cdot(\vec{C}\times\vec{A})=\vec{C}\cdot(\vec{A}\times\vec{B})$$
$$=-\vec{B}\cdot(\vec{A}\times\vec{C})=-\vec{C}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})=-\vec{A}\cdot(\vec{C}\times\vec{B})$$

dir.

6.10. Sonuç: Karma çarpımın koordinatlar cinsinden ifadesi:

$\vec{A}=(a_1,a_2,a_3),\vec{B}=(b_1,b_2,b_3)$ ve $\vec{C}=(c_1,c_2,c_3)$ ise

$$\vec{A}.(\vec{B}\times\vec{C})=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

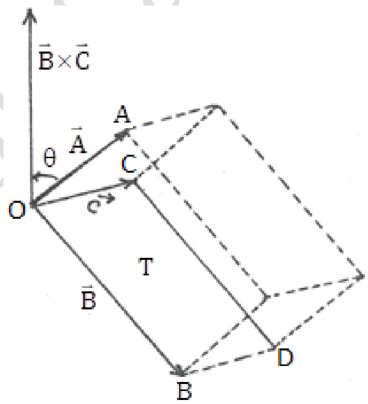
determinant değerine eşit olur. Yani sonuç skalerdir.

6.17. Teorem: $\vec{A},\vec{B},\vec{C}$ vektörlerini olsun. Bu üç vektörün oluşturduğu yüzeylerin hacmi;

$$V=\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})$$

dir.

İspat:



$\vec{A},\vec{B},\vec{C}$ vektörlerinin birbirlerine göre durumları göz önüne alındığında görülüyor ki bu üç vektörün karma çarpımının mutlak değeri vektörler üzerine kurulmuş olan paralel yüzün hacmine eşittir. Bunun geometrik anlamını yukarıdaki şekilde görüldüğü gibi tabanı $\vec{B}$ ve $\vec{C}$ vektörleri üzerine kurulan bir paralelkenar olduğundan $T=\|\vec{B}\times\vec{C}\|$ ve yüksekliği $h=\|\vec{A}\|\cos\theta$ bu da $\vec{A}$ nün $\vec{B}\times\vec{C}$ üzerindeki izdüşümüdür. O halde paralel yüzün hacmi

$$V=T\cdot h=\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})$$

dır.

Yukarıdaki şekilde görülen $\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})>0$ dır. Aksi halde $\vec{B}\times\vec{C}$ ters yönde ise bu takdirde $\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})<0$ dır.

Örnek: $\vec{A}=(2,1,-2),\vec{B}=(-1,4,0)$ ve $\vec{C}=(1,1,2)$ vektörleri üzerine kurulan paralel yüzün hacmi nedir?

Çözüm:

$$V=\vec{A}.(\vec{B}\times\vec{C})=\begin{vmatrix}2 & 1 & -2\\ -1 & 4 & 0\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix}=28\,br^3$$

dur.

Örnek: $P(4,-2,3),Q(6,1,-2),R(-2,1,3)$ ve $S(2,1,3)$ bir paralel yüzün dört köşesi olsun. Bu paralel yüzün hacmini bulunuz.

Çözüm: $\vec{A}=\overrightarrow{PQ},\vec{B}=\overrightarrow{PR}$ ve $\vec{C}=\overrightarrow{PS}$ olsun. O halde paralel yüzün hacmi

$$V=\vec{A}.(\vec{B}\times\vec{C})=\begin{vmatrix}6-4 & 1-(-2) & -2-3\\ -2-4 & 1-(-2) & 3-3\\ 2-4 & 2-(-2) & 3-3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 3 & -5\\ -3 & 3 & 0\\ -2 & 4 & 0\end{vmatrix}=120br^3$$

dır.

6.1. Not: $\vec{A},\vec{B},\vec{C}$ gibi üç vektörün aynı düzlemde olması için gerek ve yeter şart bu üç vektörün karma çarpımının sıfır olmasıdır. Yani $\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})=0$ dır.

Örnek: $\vec{A}=(0,3,5),\vec{B}=(6,4,2)$ ve $\vec{C}=(3,2,1)$ vektörlerinin aynı düzlemde olduğunu gösteriniz?

Çözüm:

$$\vec{A}.(\vec{B}\times\vec{C})=\begin{vmatrix}0 & 3 & 5\\ 6 & 4 & 2\\ 3 & 2 & 1\end{vmatrix}=0$$

O halde $\vec{A},\vec{B},\vec{C}$ vektörleri aynı düzlemdedir.

Örnek: $\vec{A} = (1,1,-3), \vec{B} = (1,2,k)$ ve $\vec{C} = (2,3,0)$ vektörlerinin aynı düzlemde olması için k'ne olmalıdır.

Çözüm: $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ nin aynı düzlemde olması için $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = 0$ olmalıdır.

$$\vec{A}.(\vec{B}\times\vec{C}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & k \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$-9 + 12 - k = 0$
$k = 3$

ÇÖZÜMLÜ ALIŞTIRMALAR

1. $\vec{A} = (2,-3,1)$ ve $\vec{B} = (1,2,-4)$ ise $\|\vec{A}\|$ nin $\vec{B}$ üzerine dik izdüşümünün ve $\|\vec{B}\|$ nin $\vec{A}$ üzerine dik bileşenlerini bulunuz?

Çözüm:
$\|\vec{A}\| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 1^2} = \sqrt{14}$ ve $\|\vec{B}\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-4)^2} = \sqrt{21}$
$\vec{A} \cdot \vec{B} = 2 \cdot 1 + (-3) \cdot 2 + 1 \cdot (-4) = -8$

$$\|\vec{A}\| \cos\theta = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{\|\vec{B}\|} = -\frac{8}{\sqrt{21}}$$

$$\|\vec{B}\| \cos\theta = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{\|\vec{A}\|} = -\frac{8}{\sqrt{21}}$$

olarak bulunur.

2. Aşağıda verilen $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ vektörleri için $\|\vec{A}\|$ nin $\vec{B}$ üzerindeki dik izdüşümünün boyunu ile $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ vektörleri arasındaki açının kosinüsünü bulunuz.

a) $\vec{A} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}, \vec{B} = -3\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$
b) $\vec{A} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}, \vec{B} = 3\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$

Çözüm: $\|\vec{A}\|$ nin $\vec{B}$ üzerindeki dik izdüşümü $\|\vec{A}\| \cos\theta$ dür.

a) $\|\vec{A}\| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{17}, \|\vec{B}\| = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{17}$
$\vec{A} \cdot \vec{B} = 2 \cdot (-3) + (-2) \cdot (-2) + 3 \cdot 2 = 4$

$$\cos\theta = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{\|\vec{A}\|\|\vec{B}\|} = \frac{4}{17} \text{ ve } \cos\theta = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{\|\vec{A}\|\,\|\vec{B}\|} = \frac{4}{17}$$

b) $\|\vec{A}\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{14}$, $\|\vec{B}\| = \sqrt{3^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{14}$
$\vec{A} \cdot \vec{B} = 1 \cdot 1 + (-2) \cdot 1 + 3 \cdot (-2) = -5$
$\cos\theta = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{\|\vec{A}\|\|\vec{B}\|} = -\frac{5}{14}$ ve $\cos\theta = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{\|\vec{A}\|\|\vec{B}\|} = -\frac{5}{14}$

3. $\vec{A} = (3,1,1)$, $\vec{B} = (1,4,-7)$ ve $\vec{C} = (1,-2,-1)$ vektörlerinin birbirlerine dik (ortogonal) olduklarını gösteriniz.

Çözüm: $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0, \vec{B} \cdot \vec{C} = 0, \vec{C} \cdot \vec{A} = 0$ olmalıdır.
$\vec{A} \cdot \vec{B} = 0 \Leftrightarrow (3,1,1) \cdot (1,4,-7) = 3 + 4 - 7 = 0$
$\vec{B} \cdot \vec{C} = 0 \Leftrightarrow (1,4,-7) \cdot (1,-2,-1) = 1 - 8 + 7 = 0$
$\vec{A} \cdot \vec{B} = 0 \Leftrightarrow (1,-2,-1) \cdot (3,1,1) = 3 - 2 - 1 = 0$

4. $\vec{A} = \vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}$, $\vec{B} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}$ vektörlerini göz önüne alarak $\vec{A} - t\vec{B}$ vektörü

i) $\vec{A}$ vektörüne,

ii) $\vec{B}$ vektörüne dik olacak şekilde t sabitini, bulunuz.

Çözüm: i) $\vec{A}(\vec{A} - t\vec{B}) = 0$ olmalıdır.
$(1,3,-4)((1,3,-4) - t(2,-3,5)) = 0$
$(1,3,-4)(1 - 2t, 3 + 3t, -4 - 5t) = 0$
$(1,3,-4)(1 - 2t + 3(3 + 3t) - 4(-4 - 5t) = 0$
$t = -\frac{26}{27}$

ii) $\vec{B}(\vec{A} - t\vec{B}) = 0$ olmalıdır.
$(2,-3,5)((1,3,-4) - t(2,-3,5)) = 0$
$(2,-3,5)(1 - 2t, 3 + 3t, -4 - 5t) = 0$
$(2,-3,5)(2(1 - 2t) - 3(3 + 3t) + 5(-4 - 5t) = 0$
$t = -\frac{27}{38}$

5. $\vec{A} = 4\vec{i} - 2\vec{j} + 5\vec{k}$, $\vec{B} = 2\vec{i} - 4\vec{j} + 3\vec{k}$ vektörlerini göz önüne alarak $k\vec{A} + \vec{B}$vektörü

i) $\vec{A}$ vektörüne,

ii) $\vec{B}$ vektörüne
dik olacak şekilde k sabitini bulunuz.

Çözüm: i) $\vec{A}(k\vec{A}+\vec{B})=0$ olmalıdır.
$(4,-2,5)(k(4,-2,5)+(2,-4,3))=0$
$(4,-2,5)(4k+2,-2k-4,5k+3)=0$
$16k+8+4k+8+25k+15=0$
$k=\frac{31}{40}$

ii) $\vec{B}(k\vec{A}+\vec{B})=0$ olmalıdır.
$(2,-4,3)(k(4,-2,5)+(2,-4,3))=0$
$(2,-4,3)(4k+2,-2k-4,5k+3)=0$
$8k+4+8k+16+15k+9=0$
$k=\frac{29}{31}$

6. $\vec{A}=(-3,4,-5)$, $\vec{B}=(5,-6,7)$ ve $\vec{C}=(1,-2,3)$ vektörlerini göz önüne alalım. $k\vec{A}-\ell\vec{B}-\vec{C}$ vektörü hem $\vec{A}$ ya hem de $\vec{B}$ ye dik olacak biçimde k ve ℓ sabitlerini bulunuz.

Çözüm:
$k\vec{A}-\ell\vec{B}-\vec{C}=k(-3,4,-5)-\ell(5,-6,7)-(1,-2,3)$
$=(-3k-5\ell-1,4k+6\ell+2,-5k-7\ell-3)$

i) $\vec{A}(k\vec{A}-\ell\vec{B}-\vec{C})=0$ olmalıdır.
$(-3,4,-5)(-3k-5\ell-1,4k+6\ell+2,-5k-7\ell-3)=0$
$9k+15\ell+3+16k+24\ell+8+25k+35\ell+15=0$
$50k+74\ell+26=0 \quad (1)$

ii) $\vec{B}(k\vec{A}-\ell\vec{B}-\vec{C})=0$ olmalıdır.
$(5,-6,7)(-3k-5\ell-1,4k+6\ell+2,-5k-7\ell-3)$
$-15k-25\ell-5-24k-36\ell-12-35k-49\ell-21=0$
$74k+110\ell+38=0 \quad (2)$
(1) ve (2) den $k=-2, \ell=1$ olur.

7. Uzunluğu 2 birim ve yönü $\theta=30^0$ olan düzlemsel $\vec{A}$ vektörünün bileşenlerini bulunuz. (x-ekseni ile yaptığı açı $30°$).

Çözüm: $\|\vec{A}\| = 2$ br, $\theta = 30^0$

$$\cos\alpha = \frac{a_1}{\|\vec{A}\|} \Leftrightarrow \cos 30 = \frac{a_1}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a_1}{2} \Leftrightarrow a_1 = \sqrt{3}$$

$$\sin\alpha = \frac{a_2}{\|\vec{A}\|} \Leftrightarrow \sin 30 = \frac{a_2}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{a_2}{2} \Leftrightarrow a_2 = 1$$

$$\vec{A} = (\sqrt{3}, 1)$$

8. $P(3,2,0), Q(4,5,0), R(2,3,0)$ ve $S(1,-1,2)$ bir paralel yüzün dört köşesi olduğuna göre bu paralel yüzün hacmini bulunuz,

Çözüm: $\vec{A} = \overrightarrow{PQ}, \vec{B} = \overrightarrow{PR}$ ve $\vec{C} = \overrightarrow{PS}$

$$V = \vec{A}.(\vec{B}\times\vec{C}) = \begin{vmatrix} 4-3 & 5-2 & 0-0 \\ 2-3 & 3-2 & 0-0 \\ 1-3 & -1-2 & 2-0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 18\,br^3$$

9. $\vec{A} = \vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{B} = 7\vec{i} + 4\vec{j}$ ve $\vec{B} = -4\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$ vektörlerinin aynı düzlemde olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ nin aynı düzlemde olması için $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = 0$ olmalıdır.

$$\vec{A}.(\vec{B}\times\vec{C}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 7 & 4 & 0 \\ -4 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

olduğundan $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ vektörleri aynı düzlemdedir.

10. $\begin{bmatrix} 8 \\ -2 \end{bmatrix}$ ve $\begin{bmatrix} 4 \\ k \end{bmatrix}$ ikililerine eşlenen vektörlerin birbirine dik olması için x'in değeri nedir?

Çözüm: $\vec{x} = \begin{bmatrix} 8 \\ -2 \end{bmatrix}$ ve $\vec{y} = \begin{bmatrix} 4 \\ x \end{bmatrix}$ için $\vec{x} = 8\vec{i} - 2\vec{j}$ ve $\vec{y} = 4\vec{i} + k\vec{j}$ şeklinde yazılır. İki vektörün birbirine dik olması için $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$ olmalıdır.

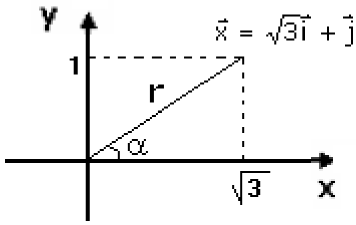
$$\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$$
$$(8\vec{i} - 2\vec{j})(4\vec{i} + k\vec{j}) = 0$$
$$32 - 2k = 0$$

$$k = 16$$

olur.

11. $\vec{x} = \sqrt{3}\vec{i} + \vec{j}$ vektörünün x ekseni ile yaptığı açı kaç derecedir?

Çözüm: Verilen vektörün Kartezyen koordinat düzleminde



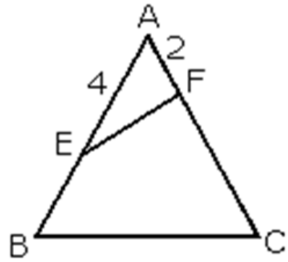
şeklindedir. Bu şekle göre $r = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$, $\sin\alpha = \frac{1}{2}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ olduğuna göre $\alpha = 30^0$ dir.

12. $\mathbb{R}^3$ uzayında herhangi bir $\vec{a} = (a, b, c), \vec{b} = (x, y, z), \vec{c} = (k, k, k)$ vektörleri ile; $(x + y + z = 1)$ ve $\vec{b} \perp (\vec{a} - \vec{c})$ olacak şekilde veriliyor. Buna göre $< \vec{b}, \vec{a} >$ skaler (iç) çarpımının değeri nedir?

Çözüm: $\vec{b} \perp (\vec{a} - \vec{c})$

$$< \vec{b}, (\vec{a} - \vec{c}) >= 0$$
$$< \vec{b}, \vec{a} > - < \vec{b}, \vec{c} >= 0$$
$$< \vec{b}, \vec{a} >=< \vec{b}, \vec{c} >$$
$$< \vec{b}, \vec{a} >=< (x, y, z), (k, k, k) >$$
$$< \vec{b}, \vec{a} >= xk + yk + zk$$
$$< \vec{b}, \vec{a} >= (x + y + z)k$$
$$< \vec{b}, \vec{a} >= 1 \cdot k$$
$$< \vec{b}, \vec{a} >= k$$

13.



Verilen şekilde ABC, bir eşkenar üçgendir. $|AB| = 8, |AE| = 4, |AF| = 2$ olduğuna göre, $(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF})\overrightarrow{AC}$ skaler çarpımının sonucu nedir?

Çözüm:
$$(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF})\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{AC}$$
$$= \|\overrightarrow{AE}\| \cdot \|\overrightarrow{AC}\| \cos 60 + \|\overrightarrow{AF}\| \cdot \|\overrightarrow{AC}\| \cos 60$$
$$= 4 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2}$$
$$= 24$$

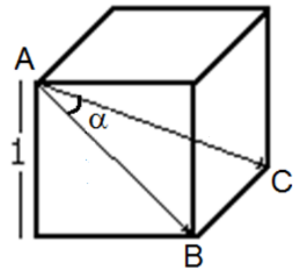
14. $\vec{A} = (a_1, a_2), \vec{B} = (b_1, b_2)$ vektörlerinin toplamlarıyla farkları birbirine dikse arasındaki $\vec{A}$ ile $\vec{B}$ bağıntısı nasıl olur?

Çözüm: Toplamları ve farkları dik ise iç çarpımları 0'dır.
$$\vec{A} + \vec{B} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2), \vec{A} - \vec{B} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2)$$
$$< \vec{A} + \vec{B}, \vec{A} - \vec{B} >$$
$$< (a_1 + b_1, a_2 + b_2), (a_1 - b_1, a_2 - b_2) >$$
$$(a_1 + b_1)(a_1 - b_1) + (a_2 + b_2)(a_2 - b_2) = 0$$
$$a_1^2 - b_1^2 + a_2^2 - b_2^2 = 0$$
$$a_1^2 + a_2^2 = b_1^2 + b_2^2$$
$$\|\vec{A}\| = \|\vec{B}\|$$

15. $\vec{A} = (3,2)$ vektörünün $y = x$ doğrusu üzerindeki izdüşümünün uzunluğu kaç birimdir?

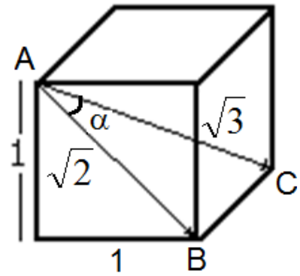
Çözüm: $y = x$ doğrusu üzerinde herhangi bir doğru alalım. Mesela $(1, 1)$ vektörünü alalım. $\vec{A} = (3,2)$ nün $(1, 1)$ vektörü üzerindeki izdüşüm uzunluğu,
$$\frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{\|\vec{B}\|} = \frac{<(3,2),(1,1)>}{\|(1,1)\|} = \frac{3 \cdot 1 + 2 \cdot 1}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{5}{\sqrt{2}}$$
bulunur.

16. Bir küpün bir kenarı 1 br'dir.



$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ kaçtır?

Çözüm: Pisagor teoreminden $\overrightarrow{AB} = \sqrt{2}$ br ve $\overrightarrow{AC} = \sqrt{3}\ br$ dir.



$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= \|\overrightarrow{AB}\| \cdot \|\overrightarrow{AC}\| \cdot \cos \alpha \\ &= \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ &= 2 \text{ br}\end{aligned}$$

olur.

KAYNAKÇA

1. H. Hilmi Hacısalihoğlu, Lineer Cebir, Gazi Üniversitesi Yayınları, Ankara, 1975.
2. Hüseyin Bilgiç, Lineer Cebir Ders Notları, Kahramanmaraş Sütçü İmam Üniversitesi, Kahramanmaraş, 2015.
3. M. Zeki DERMAN, Ökkeş ÖZKÖSELER, Serdar GÜLMEZ, Matematik III Zafer Yayınları, Ankara, 2005.
4. Ahmet HANÇERLİOĞLU, Faniye ALAN, Üniversiteye Hazırlık Matematik Seti, Tümay Yayınları, İstanbul Yayıncılık, 2006, Ankara.
5. Seymeur LİPSCHUTZ Ph. Dr., Çev. H. Hilmi HACISALİHOĞLU, Schaum Serisinden Lineer Cebir, Japonya.
6. Yrd. Doç. Dr. Nezahat ÇETİN, Öğr. Grv. Dr. Nevin ORHUN, Lineer Cebir, Anadolu Üniversitesi Yayınları: 1074, AÖF Yayınları: 589, 1998, Eskişehir.
7. Ali Rıza İLDENİZ, İsmet PARILDAR, Kemal ALAGÖZ, Tacim GÖLPINAR, Sayısal 1-2, Modern Matematik, Yıldırım Yayınları, 1986, ANKARA.

8. Doç. Dr. M. Kemal Sağel, Vektörel Analiz, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi döner sermaye işletmesi yayınları, No: 67, 2003, Ankara.
9. Thomas Calculus 2, George B. Thomas Jr., Massachusetts Institute of Technology, Maurice D. Weir, Naval Postgraduate School, Joel Hass, University of California Davis, Frank R. Giordano, Naval Postgraduate School, Çeviren: Recep Korkmaz, Beta Yayıncılık, İstanbul, 2010.
10. Murray R. Spiegel, İleri Matematik, Çev. Prof. Dr. H. Hilmi HACISALİHOĞLU, Schaum Yayınları, Nobel Yayın Dağıtım, 1997, Ankara.