7. BÖLÜM
LİNEER DÖNÜŞÜMLER

LİNEER DÖNÜŞÜM KAVRAMI

7.1. Tanım: V, W birer vektör uzayı ve $\mathbf{T} : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ bir fonksiyon olsun.

i) Her $x, y \in V$ için $T(x + y) = T(x) + T(y)$

ii) $\alpha \in \mathbb{R}$ ve her $x \in V$ için $T(\alpha x) = \alpha T(x)$

şartlarını sağlanıyorsa T ye V_1 den W ye bir lineer (doğrusal) dönüşüm denir. Bu dönüşüm,

Her $x, y \in V$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için $T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$

biçiminde de olur.

Örnek: $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x) = T(x_1, x_2) = (2x_1, 4x_2)$ bir lineer dönüşüm müdür?

Çözüm: i) $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ve $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$ için

$$\begin{aligned} T(x,y) &= T(x_1 + y_1, x_2 + y_2) \\ &= (2(x_1 + y_1), 4(x_2 + y_2)) \\ &= (2x_1 + 2y_1, 4x_2 + 4y_2) \\ &= (2x_1, 4x_2) + (2y_1, 4y_2) \\ &= T(x_1, x_2) + T(y_1, y_2) \\ &= T(x) + T(y) \end{aligned}$$

ii)
$$\begin{aligned} T(\alpha x) &= T(\alpha x_1, \alpha x_2) \\ &= (\alpha 2x_1, \alpha 4x_2) \\ &= \alpha(2x_1, 4x_2) \\ &= \alpha T(x_1, x_2) \\ &= \alpha T(x) \end{aligned}$$

olduğundan f lineer (doğrusal) dönüşümdür.

Örnek: $X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in V_1$ matris, $T(x) = x$ dönüşümü bir lineer dönüşüm müdür?

Çözüm: Her $X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $Y=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \in V_1$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için

$$T(\alpha X+\beta Y)=T\left(\alpha\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}\right)$$
$$=T\left(\begin{bmatrix} \alpha x_1+\beta y_1 \\ \alpha x_2+\beta y_2 \\ \vdots \\ \alpha x_n+\beta y_n \end{bmatrix}\right)$$
$$=\begin{bmatrix} \alpha x_1+\beta y_1 \\ \alpha x_2+\beta y_2 \\ \vdots \\ \alpha x_n+\beta y_n \end{bmatrix}$$
$$=\alpha\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$
$$=\alpha T(X)+\beta T(Y)$$

olduğundan f lineer (doğrusal) dönüşümdür.

Örnek: $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x) = T(x_1, x_2) = (x_1^2, x_2)$ dönüşüm lineerdir.

Çözüm:
$T(x+y) = T(x_1 + y_1, x_2 + y_2) = ((x_1 + y_1)^2, x_2 + y_2)$
$T(x) + T(y) = T(x_1, x_2) + T(y_1, y_2) = (x_1^2, x_2) + (y_1^2, y_2)$

olduğundan

$$T(x+y) \neq T(x)+T(y)$$

bulunur.

Örnek: Türev dönüşümü bir lineer dönüşümdür.

Çözüm: f, g $\in$V için

$$D(f+g)=(f+g)'=f'+g'=Df+Dg$$

olur.

Bir fonksiyonun sabit ile çarpımının türevi, türevin bu sabitle çarpımına eşit olduğundan, $c \in \mathbb{R}, f \in V$ için

$$D(cf)=(c\,f)'=c\,f'=cDf$$

O halde D türev dönüşümü bir lineer dönüşümdür.

Örnek: $f(x)=f(x-y)+f(y)$ ve $f(3)=6$ ise;

a) $f(5)$

b) $f^{-1}(18)$

kaçtır?

Çözüm: $f(x)=f(x-y)+f(y)$ ve $f(3)=6$ olduğundan $f(x)=mx$ biçiminde bir lineer dönüşümdür.

a) $f(3)=6$ ise $3m=6$ olup $m=2$ dir.
$m=2$ ise $f(x)=2x$ olup $f(5)=10$ dir.

b) $f(x)=2x$ ise $f^{-1}(x)=\frac{x}{2}$ olup $f^{-1}(18)=\frac{18}{2}=9$

7.1. Teorem: $T : V \to W$ bir lineer dönüşüm olsun.

$$T(0)=0$$

dir. Yani her lineer dönüşümde 0 vektörünün görüntüsü sıfırdır.

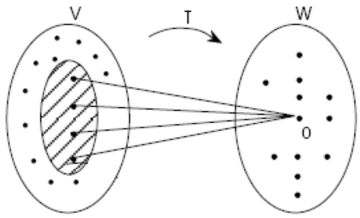
İspat: $x \in V$ ve T lineer olduğu için

$$T(x+0)=T(x)+T(0)$$
$$T(x)=T(x)+T(0)$$

buradan $T(0)=0$ olur.

BİR LİNEER DÖNÜŞÜMÜN ÇEKİRDEĞİ ve GÖRÜNTÜ UZAYI

7.2. Tanım: V, W birer vektör uzayı, $T : V \to W$ lineer dönüşüm olsun. V'nin T altındaki görüntü kümesine T lineer dönüşümünün görüntü uzayı denir ve Gör T ile gösterilir. W'nin sıfır vektörünün görüntüsüne de T'nin çekirdeği denir ve Çek T ile gösterilir.



$$\text{Çek } T = \{x \in V : T(x) = 0\}$$

Örnek: $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $T(x_1, x_2) = (x_1, 2x_2, x_1 - x_2)$ doğrusal dönüşümün çekirdeğini bulunuz.

Çözüm: $T(x_1, x_2) = (0,0,0)$
$(x_1, 2x_2, x_1 - x_2) = (0,0,0)$
$x_1 = 0, 2x_2 = 0, x_1 - x_2 = 0$
$(x_1, x_2) = (0,0)$

$\text{Çek } T = \{x \in V : T(x_1, x_2) = (0,0)\}$

Örnek: $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $T(x_1, x_2) = x_1 - 4x_2$ doğrusal dönüşümün çekirdeğini bulunuz.

Çözüm: $T(x_1, x_2) = x_1 - 4x_2 = 0$ olmalıdır.
$x_2 = t$ alınırsa $x_1 = 4t$ olur.
$T(x_1, x_2) = 0$ ise $(x_1, x_2) = (4t, t), t \in \mathbb{R}$
$\text{Çek } T = \{(4t, t) : t \in \mathbb{R}\} = \{(0,0), (4,1), (8,2), \ldots\}$

7.2. Teorem: $T : V \to W$ bir lineer dönüşüm ise Çek T, V'nin bir alt uzayıdır.

İspat: Çek T nin V'nin bir alt uzayı olması için, daha önce gördüğümüz alt uzay olma koşullarını sağlamalıdır yani

$x, y \in \text{Çek } T$ için $x + y \in \text{Çek } T$
$x \in \text{Çek } T, c \in \mathbb{R}$ için $cx \in \text{Çek } T$

olmalıdır. $x, y \in \text{Çek } T$ olsun. T bir lineer dönüşüm olduğundan

$T(x + y) = T(x) + T(y) = 0 + 0 = 0$ ise $x + y \in \text{Çek } T$
$c \in \mathbb{R}, T(cx) = cT(x) = c \cdot 0 = 0$ ise $cx \in \text{Çek } T$

dir. Böylece Çek T, V'nin bir alt uzayıdır.

7.3. Teorem: $T : V \to W$ lineer dönüşüm ise Gör $T = T(V)$, W'nin bir alt uzayıdır.

İspat: Gör T nin W'nin alt uzayı olması için alt uzay olma koşulları sağlanmalıdır.

i) $y_1, y_2 \in$ Gör T iken $y_1, +y_2 \in$ Gör T

ii) $c \in \mathbb{R}$ iken $cy_1 \in$ Gör T

olmalıdır. T bir lineer dönüşüm olduğu için $T(0) = 0, 0 \in$ Gör T, Gör T $\neq \emptyset$ olur.

$y_1, y_2 \in$ Gör T ise $T(x_1) = y_1$ ve $T(x_2) = y_2$ olacak şekilde $x_1, x_2 \in V$ vardır.

$y_1 + y_2 \in T(x_1) + T(x_2)$ dir. Buna göre $y_1 + y_2 \in$ Gör T dir.

$c \in \mathbb{R}$ için $cy_1 = cT(x_1) = T(cx_1)$ dir. Buna göre $cy_1 \in$ Gör T, böylece Gör T, W'nin bir alt uzayı olur.

7.4. Teorem: $T : V \to W$ lineer dönüşümünün bire-bir olması için gerekli ve yeterli şart Çek $T = \{0\}$ olmasıdır.

İspat: T lineer dönüşümü bire-bir ise Çek $T = \{0\}$ olduğunu gösterelim. $x \in$ Çek T olsun. $T(x) = 0$ dır. Çek T nin tanımından $T(0) = 0$ olur. T lineer olduğundan $T(x) = T(0)$ olur. T bire-bir olduğundan $x = 0$ ve Çek $T = \{0\}$ bulunur.

Tersine olarak, Çek $T = \{0\}$ ise T nin bire-bir olduğunu gösterelim:
$x_1, x_2 \in V$ için $T(x_1) = T(x_2)$ olsun.

$$T(x_1) - T(x_2) = 0$$
$$T(x_1 - x_2) = 0$$
$$x_1 - x_2 \in \text{Çek } T$$

dir. Böylece $x_1 - x_2 = 0$ ve $x_1 = x_2$ olup T bire-birdir.

Örnek: $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$$T(x,y) = (x, x+y, x-y)$$

lineer dönüşümünün bire-bir olduğunu gösteriniz ve Çek T yi bulunuz.

Çözüm: Çek $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid T(x,y) = 0\}$

$$T(x,y) = (x, x+y, x-y) = (0,0,0)$$

$$x = 0, y = 0$$

olur. Buna göre Çek $T = \{0\}$ bulunur. O halde dönüşümü bire-birdir.

Örnek: $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$$T(x,y) = (x+y, x+z)$$

lineer dönüşümün bire-bir olup olmadığını araştırınız.

Çözüm: Çek $T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid T(x,y,z) = 0\}$

$$T(x,y,z) = (x+y, x+z) = 0$$

$$x+y = 0,\ x+z = 0$$

sistemin sonsuz çözümü vardır. $x = 1, y = -1, z = -1$ için $(1,-1,-1) \in$ Çek T dir. Buna göre T dönüşümü bire-bir değildir. Buna göre farklı iki elemanın görüntüleri aynı olabilir. Mesela;

$(1,2,3) \neq (2,1,2)$ olmasına rağmen,

$T(1,2,3) = T(2,1,2)$

$(3,4) = (3,4)$

bu da T'nin bire-bir olmadığını gösterir.

LİNEER DÖNÜŞÜMÜN ÖZELLİKLERİ

7.5. Teorem: $T : V \to W$ ve u ile v, V'de tanımlı birer vektör olmak üzere, doğrusal dönüşüm T şu özellikleri sağlamaktadır

i) $T(0) = 0$

ii) $T(-u) = -T(u)$

iii) $T(u-v) = T(u) - T(v)$

iv) $u = c_1u_1 + c_2u_2 + \cdots + c_nu_n$ için

$$T(c_1u_1 + c_2u_2 + \cdots + c_nu_n) = c_1T(u_1) + c_2T(u_2) + \cdots + c_nT(u_n)$$

İspat:

i) $T(0 \cdot u) = 0 \cdot T(u) = 0$

ii) $T(-u) = T((-1)u) = (-1)T(u) = -T(u)$

iii) $T(u-v) = T(u + (-1)v) = T(u) + (-1)T(v) = T(u) - T(v)$

4. $u = c_1u_1 + c_2u_2 + \cdots + c_nu_n$ için

$$T(c_1u_1 + c_2u_2 + \cdots + c_nu_n) = c_1T(u_1) + c_2T(u_2) + \cdots + c_nT(u_n)$$

olduğu aşikardır.

LİNEER DÖNÜŞÜMLERLE İŞLEMLER

7.3. Tanım: $T, S : V \to W$ birer lineer dönüşüm olsun.

i) T ve S dönüşümlerinin toplam ve farkı

$$T, S : V \to W$$
$$(T \pm S)(x) = T(x) \pm S(x)$$

şeklinde tanımlanır.

ii) $c \in \mathbb{R}$ skaleri ile T nin çarpımı,

$$cT : V \to W$$
$$(cT)(x) = cT(x)$$

şeklinde tanımlanır.

7.4. Tanım: $T : V \to W$, $S : W \to U$ birer lineer dönüşüm olsunlar. T ile S'nin bileşke fonksiyonu

$$S \circ T : V \to U$$
$$(S \circ T)(x) = S(T(x))$$

biçiminde tanımlanır.

Örnek: $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$T(x,y) = (2x, x+y, y)$, $S(x,y) = (x-y, 3y, x)$

lineer dönüşümleri verilsin.

i) $(3T + S)(1,2)$

ii) $(T - 4S)(1,1)$

değerini hesaplayınız.

Çözüm:

i) $$(3T+S)(1,2) = 3T(1,2) + S(1,2)$$
$$= 3(2,3,2) + (-1,6,1)$$
$$= (6,9,6) + (-1,6,1)$$
$$= (5,15,7)$$

ii) $$(T - 4S)(1,1) = T(1,1) - 4S(1,1)$$
$$= (2,2,1) - 4(0,3,1)$$
$$= (2,-10,-3)$$

bulunur.

Örnek: $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$T(x,y,z) = (z, x, 0)$, $S(x,y,z) = (0, x, y)$

lineer dönüşümleri veriliyor.

i) $T \circ T = T^2$ olmak üzere, Çek T^2 ve Gör T^2 yi bularak birer taban yazınız.

ii) $(S \circ T)(1,2,3)$ değerini bulunuz.

Çözüm:

i) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$T(x,y,z) = (z,x,0)$

olduğuna göre önce $T^2(x,y,z)$ yi bulalım:

$T^2(x,y,z) = T(T(x,y,z)) = T(z,x,0) = (0,z,0)$

olur.

Çek $T^2 = \{(x,y,z) \mid T^2(x,y,z) = 0\}$

$T^2(x,y,z) = (0,z,0) = (0,0,0)$

buradan $z = 0$ bulunur. O halde

Çek $T^2 = \{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3 \mid x,y \in \mathbb{R}\}$

kümesi olur. Bu kümede xy- düzlemidir.

Çek T^2 için bir taban bulalım:

$(x,y,0) = x(1,0,0) + y(0,1,0)$ yazılırsa $\{(1,0,0),(0,1,0)\}$ kümesi Çek T2 için bir taban olur. Buradan Boy Çek $T^2 = 2$ olur.

Gör T^2 yi bulalım: Gör $T^2 = T^2(\mathbb{R}^3)$ yazabiliriz.

Gör $T^2 = \{(0,z,0) \mid z \in \mathbb{R}\}$ olup, y-eksenidir. $\{(0,1,0)\}$ kümesi Gör T^2 için bir tabandır.

ii) $(S \circ T)(1,2,3) = S(T(1,2,3) = S(3,1,0) = (0,3,1)$

bulunur.

LİNEER DÖNÜŞÜMLERİN MATRİS GÖSTERİMİ

7.5. Tanım: V, W birer vektör uzayı , $T : V \to W$ doğrusal dönüşüm, $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ve $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$ olmak üzere,

$$y_1 = a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{n1}x_n$$
$$y_2 = a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{n2}x_n$$
$$\dots$$
$$y_m = a_{1m}x_1 + a_{2m}x_2 + \cdots + a_{nm}x_n$$

şeklinde olsunlar. Bu takdirde

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & & \ddots & \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{n} \end{bmatrix}$$

matrisine T doğrusal dönüşümün matrisi denir. Bu dönüşüm,

$$T(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & & \ddots & \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{n} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

formunda yazılır.

Örnek: $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $T(x) = T(x_1,x_2) = (2x_1 - 3x_2, 4x_2, -5x_1 + 6x_2)$ lineer dönüşümüne karşılık gelen matrisi bulunuz.

Çözüm: T dönüşümünün matrisi;

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 0 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

şeklindedir.

Örnek:
$T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T(x) = T(x_1,x_2,x_3) = (5x_1 - 2x_2 + x_3, 3x_1 + 8x_2 + 10x_3)$ doğrusal dönüşümüne karşılık gelen matrisini ve $T(1,-1,0)$ bulunuz.

Çözüm: T dönüşümünün matrisi;

$$A=\begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 8 & 10 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

$$T(1,-1,0)=\begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 8 & 10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 7 \\ 8 \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

7.1. Not: Her doğrusal dönüşüme bir matris, her matrise bir doğrusal dönüşüm karşılık gelir. Sütun sayısı tanım kümesini boyutunu, satır sayısı ise değer kümesinin boyunu belirler.

7.1. Sonuç: T doğrusal dönüşüm ve bu dönüşümün matrisi A olsun. $k \in \mathbb{R}$ için $k \cdot T$ dönüşümünün matrisi $k \cdot A$ dir.

Örnek: $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $T(x_1, x_2) = (4x_1 + 3x_2, 2x_1 + x_2, 7x_1 - 2x_2)$ doğrusal dönüşümüne karşılık gelen 5A matrisini bulunuz.

Çözüm: T dönüşümünün matrisi;

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \\ 7 & -2 \end{bmatrix}_{3\times 2} \quad \text{ise} \quad 5A = \begin{bmatrix} 20 & 15 \\ 10 & 5 \\ 35 & -10 \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

şeklindedir.

7.2. Sonuç: T_1 ve T_2 doğrusal dönüşüm ve T_1'nin matrisi A, T_2'nin matrisi B olsun. Bu takdirde $T_1 \pm T_2$ dönüşümün matrisi $A \pm B$ dir.

Örnek: $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x_1, x_2) = (4x_1 + 3x_2, 8x_1 + 5x_2$ ve $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x_1, x_2) = (3x_1 + 2x_2, x_1)$ ise $T_1 + T_2$ doğrusal dönüşümüne karşılık gelen matrisi bulunuz.

Çözüm: T_1 ve T_2 dönüşümüne karşılık gelen matris;

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 5 \end{bmatrix} \text{ ve } B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 9 & 5 \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

7.3. Sonuç: T_1 ve T_2 doğrusal dönüşüm ve T_1'nin matrisi A, T_2'nin matrisi B olsun. Bu takdirde $T_1 \circ T_2$ dönüşümün matrisi $A \cdot B$ dir.

Örnek: $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T_1(x_1, x_2) = (9x_1 - 3x_2, 2x_1 + 4x_2)$,
$T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T_2(x_1, x_2) = (6x_1 + 5x_2, x_1 - x_2)$
ise $T_1 \circ T_2$ doğrusal dönüşümüne karşılık gelen matrisi bulunuz.

Çözüm: T_1 ve T_2 dönüşümüne karşılık gelen matris;

$$A=\begin{bmatrix}9 & -3\\ 2 & 4\end{bmatrix} \text{ ve } B=\begin{bmatrix}6 & 5\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$

$$A\cdot B=\begin{bmatrix}9 & -3\\ 2 & 4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}6 & 5\\ 1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}51 & 48\\ 20 & 6\end{bmatrix}$$

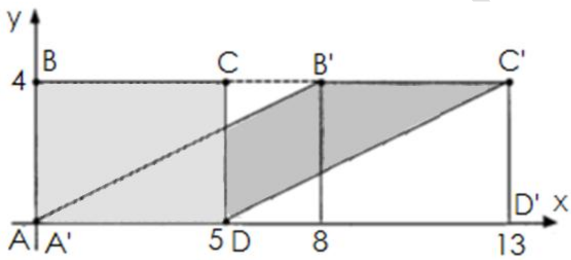
şeklindedir.

Örnek: $A(0,0), B(0,4), C(5,4), D(5,0)$ olan dörtgenin $\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ dönüşümünün matrisi altındaki görüntüsünü bulunuz.

Çözüm: Noktalara dönüşüm matrisini uygulayalım.

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0 & 0 & 5 & 5\\ 0 & 4 & 4 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 8 & 13 & 5\\ 0 & 4 & 4 & 0\end{bmatrix}$$

Dönüşümün görüntüsü $A'(0,0), B'(8,4), C'(13,4), D'(5,0)$ noktalarıdır.



Örnek: $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ doğrusal dönüşümünün matrisi $A=\begin{bmatrix}3 & -1\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ dir. $5x - 10y + 3 = 0$ doğrusunun bu dönüşüm matrisi altındaki görüntüsü nedir?

Çözüm: Doğru üzerindeki herhangi bir (x, y) noktasının dönüşüm matrisindeki görüntüsü $[x, y]$ olsun.

$$\begin{bmatrix}X\\ Y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -1\\ 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3x-y\\ 2x+y\end{bmatrix}$$

$$X = 3x - y \text{ ve } Y = 2x + y$$

olur. x ve y değerleri çekilirse

$$x = \frac{X+Y}{5} \text{ ve } y = \frac{2X+3Y}{5}$$

bulunur. Doğru denkleminde yerine konursa,

$$5x - 10y + 3 = 0$$

$$5\left(\frac{X+Y}{5}\right) - 10\left(\frac{2X+3Y}{5}\right) + 3 = 0$$

$$5X + 7Y + 3 = 0$$

elde edilir.

LİNEER DÖNÜŞÜMÜN TERSİ

7.6. Tanım: V,W birer vektör uzayı, $T : V \rightarrow W$ doğrusal dönüşüm ve bu dönüşüme karşılık gelen matrisin determinantı $\det A \neq 0$ olsun. Bu takdirde bu dönüşüm üzerinde tanımlı olan $T^{-1} : W \rightarrow V$ doğrusal dönüşüme ters doğrusal dönüşüm denir. Bu ters dönüşüme karşılık gelen matris A^{-1} olur.

Örnek: $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x_1, x_2) = (7x_1 + 4x_2, 3x_1 + 2x_2)$ doğrusal dönüşümü için A^{-1} ters dönüşümünü bulunuz.

Çözüm: T dönüşümüne karşılık gelen matris;

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \text{ ise } \det A = \begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

olduğundan,

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3/2 & 7/2 \end{bmatrix}$$

bulunur. Buna göre;

$$T^{-1}(\vec{x}) = A^{-1} \cdot \vec{x}$$

$$T^{-1}(\vec{x}) = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -\frac{3}{2} & \frac{7}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - 2x_2 \\ -\frac{3}{2}x_1 + \frac{7}{2}x_2 \end{bmatrix}$$

elde edilir.

7.2. Not: A^{-1} bulunamazsa veya dönüşüm 1-1 ve örten değilse, tersi yoktur.

ÖTELEME DÖNÜŞÜMÜ

7.7. Tanım: $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T\,(x,y) = (x + a, y + b)$ doğrusal dönüşümü mevcutsa (x,y) vektörü (a, b) vektörü kadar ötelenmesi $(x + a, y + b)$ dir denir. Öteleme dönüşümü uzunlukları, açıları ve alanları değişmez.

Örnek: $(4,-6)$ öteleme vektörü, $(5,-3)$ vektörünü hangi vektöre dönüştürür?

Çözüm: $(5,-3)$ vektörü $(4,-6)$ vektörü kadar ötelenmiş.

$$(5+4,-2-6)=(9,-8)$$

Örnek: $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $T(x,y)=(x+5,y-8)$ ötelemesinin tersini bulunuz.

Çözüm: $x+5=X, y-8=Y$ olarak seçilirse $x=X-5, y=Y+8$ dir.

$$T^{-1}(X,Y)=(X-5,Y+8)$$

Örnek: $T_1(x,y)=(x-4,y+3)$, $T_2(x,y)=(x+1,y+2)$ ötelemeleri için $T_1\circ T_1$ ve $T_1\circ T_2$ ötelemelerini bulunuz.

Çözüm:
$$\begin{aligned}(T_1\circ T_1)(x,y)&=(x-4,y+3)\circ(x-4,y+3)\\&=(x-4-4,y+3+3)\\&=(x-8,y+6)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(T_1\circ T_2)(x,y)&=(x-4,y+3)\circ(x+1,y+2)\\&=(x+1-4,y+2+3)\\&=(x-3,y+5)\end{aligned}$$

7.4. Sonuç: Öteleme dönüşümü bir şekli düzlemde bozmadan kaydırır. Bu nedenle;

i) Uzaklıklar
ii) Açılar
iii) Paralellikler
iv) Oranlar
v) Alanları

korurular.

7.6. Teorem: xOy koordinat sisteminin $\vec{A}=(\alpha,\beta)$ vektörü yardımıyla ötelenmesi, eksenlerin kaydırmayla XOY koordinat sistemine

$$\overrightarrow{A'}=T_{\vec{A}}(x_1,y_1)=(x_1+\alpha,y_1+\beta)=(X_1,Y_1)$$

olur.

Bu teoremin ispatı okuyucuya bırakılmıştır.

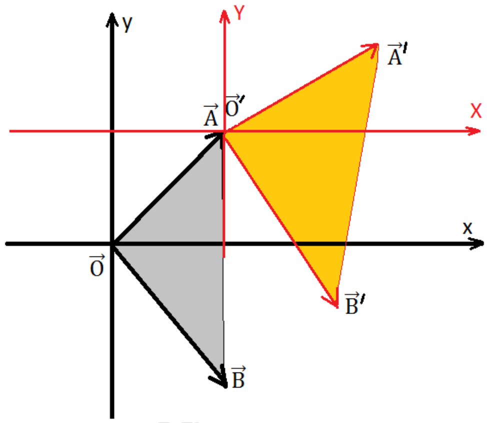
Örnek: $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x,y) = (x+1, y+1)$ ötelemesinin uzaklığı, açıları, paralelliği, oranları ve alanları koruduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$\vec{O} = [0,0]$ ise $\overrightarrow{O'} = T_{\vec{0}}(0{,}0) = (0+1, 0+1) = (1,1)$

$\vec{A} = [1,-2]$ ise $\overrightarrow{A'} = T_{\vec{A}}(1,-2) = (1+1,-2+1) = (2,-1)$

$\vec{B} = [2,1]$ ise $\overrightarrow{B'} = T_{\vec{B}}(2,1) = (2+1, 1+1) = (3,2)$



a) $|AB| = \sqrt{(2-1)^2 + (1+2)^2} = \sqrt{10}$

$|A'B'| = \sqrt{(3-2)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{10}$

O halde öteleme dönüşümü uzaklıkları korur.

b) $\cos\theta = \dfrac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{\|\vec{A}\|\|\vec{B}\|} = \dfrac{2-2}{\sqrt{10}\sqrt{10}} = 0$ ve $\theta = 90^0$

$\overrightarrow{O'A'} = (2-1, -1-1) = (1,-2) = \vec{A}$

$\overrightarrow{O'B'} = (3-1, 2-1) = (2,1) = \vec{B}$

$\cos\theta = \dfrac{\overrightarrow{O'A'}\cdot\overrightarrow{O'B'}}{\|O'A'\|\|O'B'\|} = \dfrac{2-2}{\sqrt{10}\sqrt{10}} = 0$ ve $\theta = 90^0$

O halde öteleme dönüşümü açıları korur.

c) $m(AB) = \frac{1+2}{2-1} = 1$, $m(T_A T_B) = \frac{2+1}{3-2} = 3$ olduğundan $AB//O'A'O'B'$ olup paralelliği korur.

d) $\dfrac{|OA|}{|O'A'|} = \dfrac{|OB|}{|O'B'|} = \dfrac{|AB|}{|A'B'|}$

$\dfrac{\sqrt{1^2+4}}{\sqrt{1+4}} = \dfrac{\sqrt{4+1}}{\sqrt{4+1}} = \dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}}$

olup öteleme dönüşümü oranları korur.

e) $A(AOB) = \dfrac{|OA||OB|}{2} = \dfrac{\sqrt{5}\sqrt{5}}{2} = \dfrac{5}{2}\ br^2$

$A(O'A'B') = \dfrac{|O'A'||O'B'|}{2} = \dfrac{\sqrt{5}\sqrt{5}}{2} = \dfrac{5}{2}\ br^2$

olup öteleme dönüşümü alanları korur.

7.5. Sonuç: $O(0,0) = O'(\alpha, \beta)$ ötelemesi yapılırsa, düzlemde $P(x, y)$ eski koordinatları, $P(X, Y)$ yeni eksenlere göre koordinatları olmak üzere,

$x = X + \alpha, y = Y + \beta$

kuralı vardır.

Örnek: xOy sisteminin $\overrightarrow{O'} = (1, -1)$ vektörü ile ötelenmişi XOY sistemidir. Buna göre,

a) $P(1, 5)$ noktasının yeni sisteme göre koordinatlarını

b) $x^2 - 2x - y = 0$ denklemi ile verilen eğrinin yeni sisteme göre denklemini yazınız.

Çözüm: $\alpha = 1, \beta = -1$ olup

$x = X + \alpha, y = Y + \beta$

$X = x - \alpha, Y = y - \beta$

ve

$x = 1, y = 5$

$X = x - \alpha = 1 - 1 = 0, Y = y - \beta = 5 - (-1) = 6$

$P(1, 5)$ iken $P'(0, -6)$

bulunur.

b) $x = X + \alpha = X + 1, y = Y + \beta = Y - 1$ denklemde yerine yazılırsa

$(X + 1)^2 - 2(X + 1) - (Y - 1) = 0$

$X^2 + 2X + 1 - 2X - 2 - Y + 1 = 0$

$X^2 - Y = 0$

$Y = X^2$

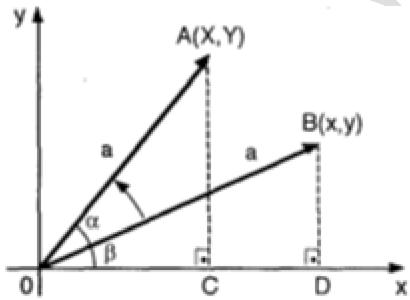
bulunur.

DÖNME DÖNÜŞÜMÜ

7.8. Tanım: $K' = A \cdot K$ dönüşümünde $A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ ve $a^2 + b^2 = 1$ dönüşümene dönme dönüşümü denir.

7.7. Teorem: $M = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ matrisi olmak üzere, $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tanımlı tüm vektörleri (bu vektörün matris formu X olsun), orijine göre saat yönünün tersine α açısı kadar döndürme MX ile mümkündür. Burada M'ye dönme matrisi denir.

İspat: Dönme açısı $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ olan başlangıç noktası etrafındaki pozitif yöndeki bir dönmede $B(x, y)$ noktasının görüntüsü $A(X, Y)$ ve $|OA| = |OB| = a$ olsun.



OAC üçgenine göre;

$\cos(\alpha + \beta) = \dfrac{|OC|}{a}$ ise $X = |OC| = a\cos(\alpha + \beta)$

$\sin(\alpha + \beta) = \dfrac{|AC|}{a}$ ise $Y = |AC| = a\sin(\alpha + \beta)$

dir. Buna toplam ve fark formüllerinden;

$X = a\cos\alpha\cos\beta - a\sin\alpha\sin\beta$ (1)

$Y = a\sin\alpha\cos\beta - a\cos\alpha\sin\beta$ (2)

dir. Öte yandan OBD üçgenine göre;

$\cos\beta = \dfrac{|OD|}{a}$ ise $X = |OD| = a\cos\beta$ (3)

$\sin\beta = \dfrac{|BD|}{a}$ ise $Y = |BD| = a\sin\beta$ (4)

dir. (3) ve (4) denklemini (1) ve (2) denkleminde yerine yazılırsa,

$X = x\cos\alpha - y\sin\alpha$

$Y = x\sin\alpha - y\cos\alpha$

bulunur. Bu doğru denklemleri matris formunda yazılırsa,

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

elde edilir.

7.3. Not: Düzlemde dönme dönüşümü, uzunluk, açı ve alanları değiştirmez.

Örnek: $(2,-4)$ noktasının düzlemde $\alpha = \frac{\pi}{3}$ radyanlık dönmesini bulunuz.

Çözüm: $$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1-2\sqrt{3} \\ -2\sqrt{3}-2 \end{bmatrix}$$

7.6. Sonuç: K'_α ve K'_β dönmeleri verildiğinde $K'_\alpha \circ K'_\beta$ bileşke dönüşümü $K'_\alpha \circ K'_\beta = K'_{\alpha+\beta}$ olup dönme matrisi
$$\begin{bmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{bmatrix}$$
dır.

Örnek: $K'_{\pi/3}$ ve $K'_{\pi/6}$ veriliyor.

a) $K'_{\pi/3} \circ K'_{\pi/6}$ dönüşümü altında görüntüsü $\overrightarrow{X'} = (-1,4)$ olan vektör nedir?

b) Bu dönme altında
$$A = \{x + x^2 - y = 2 : (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$$
kümesinin görüntüsü ne olur?

a) $K'_{\pi/3} \circ K'_{\pi/6} = K'_{\pi/3+\pi/6} = K'_{\pi/2}$ olup dönme matrisi

$$\begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & -\sin\frac{\pi}{2} \\ \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

dir. Buna göre dönüşümü altında görüntüsü olan vektör;

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$x = 4$ ve $y = -1$ ise $\vec{X} = (4, 1)$

olur.

b) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$$

$y = -X$ ve $x = Y$

olur.

$x + x^2 - y = 2$

$Y + Y^2 - (-X) = 2$

$Y + Y^2 + X = 2$

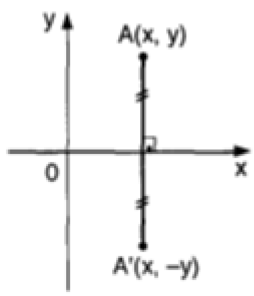
O halde istenen küme;

$A = \{y + y^2 + x = 2 : \ (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$

dir.

SİMETRİ DÖNÜŞÜMÜ

1. $A(x,y)$ noktasının Ox eksenine göre simetriği $A'(x,-y)$ olup bu simetri dönüşümünün matrisi;



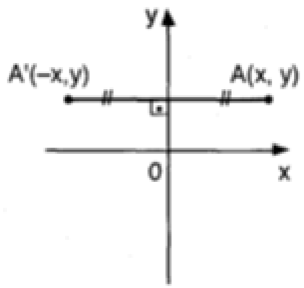
$$M_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

dir. Gerçekten;

$$\begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

dir.

2. A(x,y) noktasının Oy eksenine göre simetriği A′(−x,y) olup bu simetri dönüşümünün matrisi;



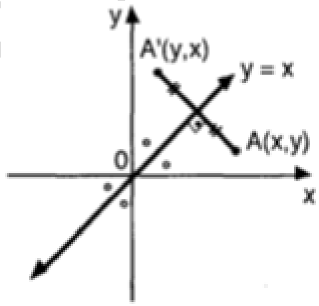
$$M_y = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dir. Gerçekten;

$$\begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

dir.

3. A(x,y) noktasının y = x doğrusuna göre simetriği A′(y,x) olup bu simetri dönüşümünün matrisi;



$$M_{y=x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

dir. Gerçekten;

$$\begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

dir.

4. A(x,y) noktasının $y = -x$ doğrusuna göre simetriği $A'(-y,-x)$ olup bu simetri dönüşümünün matrisi;

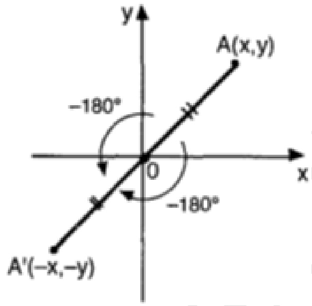
$$M_{y=-x} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

dir. Gerçekten;

$$\begin{bmatrix} -y \\ -x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

dir.

5. A(x,y) noktasının orijinine göre (180^0 ve -180^0 lik dönmeler) simetriği $A'(-x,-y)$ olup bu simetri dönüşümünün matrisi;



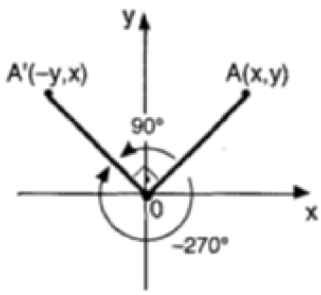
$$M_0 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

dir. Gerçekten;

$$\begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

dir.

6. A(x,y) noktasının 90^0 ve -270^0 lik dönmenin simetriği $A'(-y,x)$ olup bu simetri dönüşümünün matrisi;



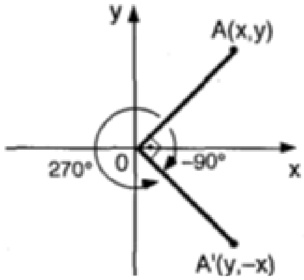
$$M_{90} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

dir. Gerçekten;

$$\begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

dir.

7. A(x,y) noktasının 270^0 ve -90^0 lik dönmenin simetriği $A'(y,-x)$ olup bu simetri dönüşümünün matrisi;



$$M_{270} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

dir. Gerçekten;

$$\begin{bmatrix} y \\ -x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

dir.

Örnek: $A(5,-3)$ noktasının,
a) x eksenine göre
b) y eksenine göre
c) $y = x$ doğrusuna göre
d) $y = -x$ doğrusuna göre
e) Orijine göre simetriğine göre
f) 90^0 döndürülmesine göre
g) 270^0 döndürüldüğünde elde edilen noktaları bulunuz.

Çözüm: $A(5,-3)$ noktasının,

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -3 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -5 \\ 3 \end{bmatrix}$

f) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -3 \\ -5 \end{bmatrix}$

g) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix}$

HOMOTETİ DÖNÜŞÜMÜ

7.9. Tanım: $k \in \mathbb{R}$ ve $A(x,y) \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere,

$$H(x,y) = (ky, ky) = k(x,y) \text{ veya } H(\vec{X}) = k\vec{X}$$

dönüşümüne homoteti denir. $O(0,0)$ homoteti merkezi, k sayısı ise homoteti oranıdır. Homoteti dönüşümünün matrisi

$$M=\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$$

dir. Gerçekten,

$$\begin{bmatrix} kx \\ ky \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

dir.

Örnek: $H(\vec{X}) = 2\vec{X}$ homotetisine karşılık gelen matris nedir?

Çözüm: $k = 2$ olup $M=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ dir.

Örnek: $H(\vec{X}) = -3\vec{X}$ homotetisi ile $\vec{A} = (2,1)$ vektör hangi vektöredönüşür.

Çözüm: $H(\vec{A})=\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -6 \\ -3 \end{bmatrix}$

BENZERLİK DÖNÜŞÜMÜ

7.10. Tanım: Bir homoteti ile bir dönmenin birleşkesine benzerlik dönüşümü denir. Buna göre benzerlik dönüşümünün matrisi

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k\cos\alpha & -k\sin\alpha \\ k\sin\alpha & k\cos\alpha \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

Örnek: $H(\vec{X}) = 2\vec{X}$ homotetisi ile $\alpha = \frac{\pi}{3}$ radyanlık K' dönmesi veriliyor.

a) $(H \circ K')(\vec{X})$ matrisini,

b) Bu dönüşüm altında $\vec{X} = (-2, 4)$ vektörünün görüntüsünü bulunuz.

Çözüm:

$$H \circ K' = \begin{bmatrix} 2\cos\frac{\pi}{6} & -3\sin\frac{\pi}{6} \\ 3\sin\frac{\pi}{6} & 3\cos\frac{\pi}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$(H \circ K')(\vec{X}) = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\sqrt{3}-4 \\ -2+4\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

olduğundan $\vec{X} = (-2, 4)$ vektörünün görüntüsü $\vec{X'} = (-2\sqrt{3} - 4, -2 + 4\sqrt{3})$ dür.

ÇÖZÜMLÜ ALIŞTIRMALAR

1. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineer dönüşümün matrisi $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ dir. Bu dönüşüme göre $y^2 = 4x$ parabolün görüntüsü ne olur?

Çözüm: $y^2 = 4x$ parabolündeki her nokta $(\alpha, 2\sqrt{\alpha})$ şeklindedir.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha \\ 2\sqrt{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha - 2\sqrt{\alpha} \\ 2\sqrt{\alpha} \end{bmatrix}$$

olur.

$\left.\begin{array}{r} x = \alpha - 2\sqrt{\alpha} \\ y = 2\sqrt{\alpha} \end{array}\right\}$ elde edilir. $x = \alpha - 2\sqrt{\alpha}$ da $2\sqrt{\alpha}$ yerine y, α yerine $\frac{y^2}{4}$ yazarsak,

$$x = \frac{y^2}{4} - y \Leftrightarrow x = \frac{y^2 - 4y}{4}$$

$$\Leftrightarrow 4x = y^2 - 4y$$
$$\Leftrightarrow y^2 = 4(x+y)$$

bulunur.

2. T_1 ve T_2 bir boyutlu vektör uzayında iki lineer dönüşümdür. $T_1\ (3) = 5, T_2(1) = 3$ olduğuna göre, $(T_1 \circ T_2)(2x + 3)$ nin sonucu nedir?

Çözüm: T_1 ve T_2 lineer oldukları için her $a, b \in \mathbb{R}$ için,
$T_1(ax + by) = aT_1(x) + bT_1(y)$ ve $T_2(ax + by) = aT_2(x) + bT_2(y)$
$T_2(2x + 3) = 2xT_2(1) + 3T_2(1) = 3(2x + 3) = 6x + 9$

$$\begin{aligned}(T_1 \circ T_2)(2x + 3) &= T_1[T_2(2x + 3)] \\ &= T_1(6x + 9) \\ &= 2xT_1(3) + 3T_1(3) \\ &= 2x \cdot 5 + 3 \cdot 5 \\ &= 10x + 15\end{aligned}$$

dir.

3. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineer dönüşümüne karşı gelen matris,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$$

olduğuna göre, T altındaki görüntüsü $(1, \sqrt{3})$ olan $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ in değeri nedir?

Çözüm: $AX = B$ ve $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ olması için

$$\begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$x - \sqrt{3}y = 1$ ve $\sqrt{3}x + y = \sqrt{3}$
$x = 1$ ve $y = 0$

4. $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ve $T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ birer lineer dönüşüm olup

$$T_1(x, y) = (x + y, x - y) \text{ ve } T_2(x, y) = (-y, -x)$$

şeklinde tarif ediliyor. Buna göre $2T_1 - 3T_2$ dönüşüm altında görüntüsü $(-3, 7)$ olan ikili nedir?

Çözüm:

$$2T_1(x,y) - 3T_2(x,y) = 2(x+y, x-y) - 3(-y,-x)$$
$$(-3,7) = (2x+5y, 5x-2y)$$

elde edilir. Buna göre,

$$2x + 5y = 7{,}5x - 2y = -3$$

olacağından $x = 1$ ve $y = -1$ bulunur.

5. $T = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ matrisi A(1,2) noktasını $(-2,3)$ noktasına dönüştürüyorsa B(4, 8) noktasını hangi noktaya dönüştürür?

Çözüm: $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$

$$4\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 4\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 12 \end{bmatrix}$$

6. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ olmak üzere,

$$T(x,y) = (x+y, 2x+2y)$$

nin çekirdeği nedir?

Çözüm: $T(x,y) = (0,0)$

$$(x+y, 2x+2y) = (0,0)$$
$$x+y = 0,\ 2x+2y = 0$$
$$\left.\begin{aligned} x+y &= 0 \\ 2x+2y &= 0 \end{aligned}\right\} y = -x$$

Çekirdek

$$\text{çek } T = \{(x,-x) : x \in \mathbb{R}\} = \{(0,0), (1,-1), (2,-2), \ldots\}$$

kümesidir.

7. $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ T_1(x_1,x_2) = (x_1, 2x_2, 2x_1)$

$T_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ T_2(x_1,x_2,x_3) = (x_1 + x_2 - x_3, 0)$

için $T_2 \circ T_1(2,1)$ i bulunuz.

Çözüm:
$$\begin{aligned} T_2 \circ T_1(2,1) &= T_2(T_1(2,1)) \\ &= T_2(2,2,4) \\ &= (2+2-4, 0) \\ &= (0,0) \end{aligned}$$

olur ki bu bize $\vec{x} = (2,1)$ vektörü için $T_1(\vec{x}) = (2,2,4)$ ve $T_2 \circ T_1(\vec{x}) = (0,0)$ olur.

8. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x_1, x_2) = (2x_1, x_1 - x_2)$ dönüşümün matrisi nedir?

Çözüm: T dönüşümünün matrisi;

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

şeklindedir.

9. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $T(x_1, x_2) = (x_1, 2x_2, x_1 - x_2)$ dönüşümün matrisi ve $\vec{x} = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix}$ vektörünün bu dönüşüm altında görüntüsü nedir?

Çözüm: T dönüşümünün matrisi;

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. $T(\vec{x}) = A \cdot \vec{x}$ yazalım.

$$T\left(\begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 10 \\ -7 \end{bmatrix}$$

O halde $\vec{x} = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix}$ vektörünün görüntüsü $T(\vec{x}) = \begin{bmatrix} -2 \\ 10 \\ -7 \end{bmatrix}$ dir.

10. $\mathbb{R}^2$ deki $\vec{x} = (x_1, x_2)$ vektörü ile $\vec{A} = (2,3)$ öteleme vektörü veriliyor. Buna göre düzlemdeki $\vec{y} = (-2,-1)$ vektörü hangi vektöre dönüşür.

Çözüm: $T_{\vec{x}}(x_1, x_2) = (x_1 + 2, x_2 + 3)$

$T_{\vec{y}}(-2,-1) = (-2 + 2, -1 + 3) = (0,2)$

11. O merkezli dönme $K'_{\pi/3} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dir. Bu dönme altında $P(0,-2)$ noktasının görüntüsü ne olur?

Çözüm:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

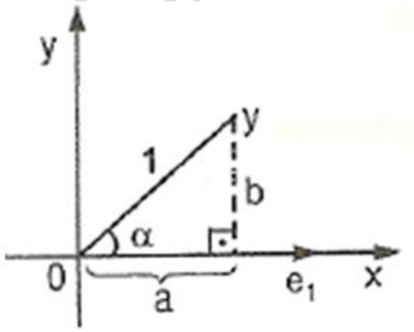
$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \end{bmatrix}$$

O halde $P'(\sqrt{3},-1)$ olur.

12. Eksenler üzerinde $\vec{e}_1$ ve $\vec{e}_2$ birim vektörleri alınmıştır. $\vec{e}_1$ birim vektörü başlangıç noktası etrafında, pozitif yönde α kadar döndürülürse, elde edilen vektörü nedir?

Çözüm:



$\cos\alpha = \frac{a}{1}$ ise $a = \cos\alpha$

$\sin\alpha = \frac{b}{1}$ ise $b = \sin\alpha$

$y = \vec{e}_1 \cos\alpha + \vec{e}_2 \sin\alpha$

KAYNAKÇA

1. H. Hilmi Hacısalihoğlu, Lineer Cebir, Gazi Üniversitesi Yayınları, Ankara, 1975.

2. Hüseyin Bilgiç, Lineer Cebir Ders Notları, Kahramanmaraş Sütçü İmam Üniversitesi, Kahramanmaraş, 2015.
3. M. Zeki DERMAN, Ökkeş ÖZKÖSELER, Serdar GÜLMEZ, Matematik III Zafer Yayınları, Ankara, 2005.
4. Ahmet HANÇERLİOĞLU, Faniye ALAN, Üniversiteye Hazırlık Matematik Seti, Tümay Yayınları, İstanbul Yayıncılık, 2006, Ankara.
5. Seymeur LİPSCHUTZ Ph. Dr., Çev. H. Hilmi HACISALİHOĞLU, Schaum Serisinden Lineer Cebir, Japonya.
6. Yrd. Doç. Dr. Nezahat ÇETİN, Öğr. Grv. Dr. Nevin ORHUN, Lineer Cebir, Anadolu Üniversitesi Yayınları: 1074, AÖF Yayınları: 589, 1998, Eskişehir.
7. Ali Rıza İLDENİZ, İsmet PARILDAR, Kemal ALAGÖZ, Tacim GÖLPINAR, Sayısal 1-2, Modern Matematik, Yıldırım Yayınları, 1986, ANKARA.
8. Doç. Dr. M. Kemal Sağel, Vektörel Analiz, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi döner sermaye işletmesi yayınları, No: 67, 2003, Ankara.
9. Thomas Calculus 2, George B. Thomas Jr., Massachusetts Institute of Technology, Maurice D. Weir, Naval Postgraduate School, Joel Hass, University of California Davis, Frank R. Giordano, Naval Postgraduate School, Çeviren: Recep Korkmaz, Beta Yayıncılık, İstanbul, 2010.
10. Murray R. Spiegel, İleri Matematik, Çev. Prof. Dr. H. Hilmi HACISALİHOĞLU, Schaum Yayınları, Nobel Yayın Dağıtım, 1997, Ankara.
11. Prof. Dr. F. Nejat EKMEKCİ, Prof. Dr. Yusuf YAYLI, Doç. Dr. İsmail GÖK, Ankara Üniversitesi, Ders Notları, 2021Ankara.