8. BÖLÜM
LİNEER BİRLEŞİM ve ORTOGONALLİK

VEKTÖRLERİN LİNEER BİRLEŞİMİ

8.1. Tanım: $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\overrightarrow{A_1}, \overrightarrow{A_2}, \dots, \overrightarrow{A_n}$ vektörleri için

$$\vec{B} = a_1\overrightarrow{A_1} + a_2\overrightarrow{A_2} + \cdots + a_n\overrightarrow{A_n}$$

ifadesine $\overrightarrow{A_1}, \overrightarrow{A_2}, \dots, \overrightarrow{A_n}$ nin lineer birleşimi (doğrusal kombinasyonu) denir. Bu yazım

$$\vec{B} = \sum_{k=1}^{n} a_k \overrightarrow{A_k}$$

biçiminde de yazılabilir. Burada $\overrightarrow{A_1}, \overrightarrow{A_2}, \dots, \overrightarrow{A_n}$ vektörlerinin lineer bileşeni $\vec{B}$ vektörüdür denir.

Örnek: $\overrightarrow{A_1} = (2,6), \overrightarrow{A_2} = (0,2), \vec{B} = (-2,4)$ ise $\vec{B}$ vektörünü, $\overrightarrow{A_1}, \overrightarrow{A_2}$ vektörlerinin lineer birleşimi olarak yazınız.

Çözüm: Her x,y $\in \mathbb{R}$ için $\overrightarrow{A_1}$ vektörünü, $\overrightarrow{A_2}, \vec{B}$ vektörlerinin lineer birleşimi ise

$$\vec{B} = a_1\overrightarrow{A_1} + a_2\overrightarrow{A_2}$$

olarak yazılabilmelidir.

$$(-2,4) = a_1(2,6) + a_2(0,2)$$
$$(-2,4) = (2a_1 + 0 \cdot a_2, 6a_1 + 2a_2)$$
$$2a_1 = -2 \ \wedge 6a_1 + 2a_2 = 4$$
$$a_1 = -1 \ \wedge a_2 = 5$$

$$\begin{aligned}\vec{B} &= a_1\overrightarrow{A_1} + a_2\overrightarrow{A_2} \\ &= -1(2,6) + 5(0,2) \\ &= (-2,4)\end{aligned}$$

Örnek: $\vec{x} = (22, a, 10), \vec{A} = (7,1,3), \vec{B} = (8,1,4)$ ve $\vec{x}$, $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ nin lineer birleşimi ise a nedir?

Çözüm: $\vec{x} = a_1\vec{A} + a_2\vec{B}$

$$(22, a, 10) = a_1(7,1,3) + a_2(8,1,4)$$
$$(22, a, 10) = (7a_1 + 8a_2, a_1 + a_2, 3a_1 + 4a_2)$$

$$\left.\begin{array}{r} 7a_1 + 8a_2 = 22 \\ a_1 + a_2 = a \\ 3a_1 + 4a_2 = 10 \end{array}\right\} a_1 = 2, a_2 = 1$$

$$a = a_1 + a_2 = 2 + 1 = 3$$

8.1. Teorem: $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ bir düzlemde sıfır vektöründen farklı ve birbirine paralel olmayan iki vektör iseler, aynı düzlemdeki her vektör $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ nin lineer birleşimi (doğrusal kombinasyonu) yazılabilir.

Örnek: $\vec{A} = (a-2, 1), \vec{B} = (-1, a)$ ise $\{\vec{A}, \vec{B}\}$ kümesinin $\mathbb{R}^2$ de lineer birleşimi olması için a'ne olamamalıdır?

Çözüm: $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ paralel olurlarsa lineer birleşimi olabilir. Buna göre paralel değilse,

$$\frac{a-2}{-1} \neq \frac{1}{a} \text{ ise } a \neq 1$$

olur.

LİNEER BİRLEŞİM KÜMESİ

8.2. Tanım: $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\overrightarrow{A_1}, \overrightarrow{A_2}, \dots, \overrightarrow{A_n}$ vektörleri için

$$\vec{B} = a_1\overrightarrow{A_1} + a_2\overrightarrow{A_2} + \cdots + a_n\overrightarrow{A_n}$$

olsun. $\{a_1\overrightarrow{A_1} + a_2\overrightarrow{A_2} + \cdots + a_n\overrightarrow{A_n} : a_i \in \mathbb{R}, \overrightarrow{A_i} \in V\}$ kümesine lineer birleşim kümesi denir.

Örnek: $\mathbb{R}^2$ de $\overrightarrow{A_1} = (1, -2), \overrightarrow{A_2} = (-1, 3)$ vektörlerinin lineer birleşim kümesini bulunuz.

Çözüm:
$$\begin{aligned} \vec{B} &= a_1\overrightarrow{A_1} + a_2\overrightarrow{A_2} \\ &= a_1(1,-2) + a_2(-1,3) \\ &= (a_1, -2a_1) + (-a_2, 3a_2) \\ &= (a_1 - a_2, -2a_1 + 3a_2) \end{aligned}$$

$$\vec{B} = \{a_1\overrightarrow{A_1} + a_2\overrightarrow{A_2} : a_1, a_2 \in \mathbb{R}\} = \{(a_1 - a_2, -2a_1 + 3a_2) : a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$$

8.2. Teorem: Bir V vektör uzayının $\overrightarrow{A_1}, \overrightarrow{A_2}, \dots, \overrightarrow{A_n}$ vektörlerinin bütün lineer bileşimlerinin kümesi $\{a_1\overrightarrow{A_1} + a_2\overrightarrow{A_2} + \cdots + a_n\overrightarrow{A_n} :\ a_i \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{A_\imath} \in V\}$, V'nin bir alt uzayıdır.

İspat: V'nin $\overrightarrow{A_1}, \overrightarrow{A_2}, \dots, \overrightarrow{A_n}$ vektörlerinin kümesi S olsun. S'nin bütün lineer bileşenlerinin kümesi, $L(S) = \{a_1\overrightarrow{A_1} + a_2\overrightarrow{A_2} + \cdots + a_n\overrightarrow{A_n} :\ a_i \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{A_\imath} \in V\}$ dir. Bu L(S) kümenin V'nin alt uzayı olduğunu göstermeliyiz.

i) $A, B \in L(S)$ için $A + B \in L(S)$ dir. Buna göre L(S)'deki herhangi iki lineer bileşimin toplamı yine L(S)'de bir lineer bileşimdir. Dolayısıyla L(S) toplama işlemine göre kapalıdır.

ii) $c \in \mathbb{R}, A \in L(S)$ için $cA \in L(S)$ dir. Yani L(S)'deki bir lineer birleşimin bir skalerle çarpımı yine L(S)'deki bir lineer bileşimdir. Dolayısıyla L(S) skalerle çarpma işlemine göre de kapalıdır. O halde L(S), V'nin bir alt uzayıdır.

VEKTÖRLERİN ÜRETTİĞİ (GERDİĞİ, DOĞURDUĞU) KÜME

8.3. Tanım: $\overrightarrow{A_1}, \overrightarrow{A_2}, \dots, \overrightarrow{A_n} \in V$ olsun. $\overrightarrow{A_1}, \overrightarrow{A_2}, \dots, \overrightarrow{A_n}$ vektörlerinin lineer (doğrusal) bileşimlerinin oluşturduğu

$$U = \{a_1\overrightarrow{A_1} + a_2\overrightarrow{A_2} + \cdots + a_n\overrightarrow{A_n} :\ a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}\}$$

kümesine $\overrightarrow{A_1}, \overrightarrow{A_2}, \dots, \overrightarrow{A_n}$ vektörlerinin ürettiği (gerdiği, doğurduğu) küme, $\{\overrightarrow{A_1}, \overrightarrow{A_2}, \dots, \overrightarrow{A_n}\}$ kümesine de U kümesini üreteci denir. U, V vektör uzayının bir alt uzayıdır.

Örnek: $\mathbb{R}^3$ de $(1, -1,\ 0)$ ve $(2, 0, 3)$ vektörlerinin ürettiği (gerdiği, doğurduğu) alt uzayı bulunuz.

Çözüm: $(1, -1,\ 0)$ ve $(2, 0, 3)$ vektörlerinin ürettiği alt uzay

$$\{a_1(1, -1,\ 0) + a_2(2, 0, 3) : a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$$

dir. Alt uzayının herhangi bir vektörü (x, y, z) olsun. x, y, z arasındaki bağıntı alt uzayının denklemini verir.

$$\begin{aligned}(x, y, z) &= a_1(1, -1,\ 0) + a_2(2, 0, 3)\\ &= (a_1, -a_1,\ 0) + (2a_2, 0, 3a_2)\\ &= (a_1 + 2a_2, -a_1, 3a_2)\end{aligned}$$

$x = a_1 + 2a_2, y = -a_1, z = 3a_2$

$a_1 = -y, a_2 = \frac{z}{3}$

değerleri $x = a_1 + 2a_2$ de yerine yazılırsa,

$x = -y + 2\frac{z}{3}$

$3x + 3y - 2z = 0$

elde edilir ki bu denklemde üretilen alt uzayının denklemidir.

Örnek: $\overrightarrow{A_1} = (1,3), \overrightarrow{A_2} = (-2,4)$ vektörleri $\mathbb{R}^2$ de ürettiği vektörleri bulunuz.

Çözüm: $\vec{B} = a_1\overrightarrow{A_1} + a_2\overrightarrow{A_2} \in \mathbb{R}^2$ alalım.

$(b_1, b_2) = a_1(1,3) + a_2(-2,4)$

$(b_1, b_2) = (a_1 - 2a_2, 3a_1 + 4a_2)$

$\left.\begin{aligned} a_1 - 2a_2 &= b_1 \\ 3a_1 + 4a_2 &= b_2 \end{aligned}\right\}$ sistemini bulalım.

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 10 \neq 0, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & -2 \\ b_2 & 4 \end{vmatrix} = 4b_1 + 2b_2, \; \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & b_1 \\ 3 & b_2 \end{vmatrix} = b_2 - 3b_1$

$a_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{4b_1 + 2b_2}{10}, \quad a_1 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{b_2 - 3b_1}{10}$

Her $(b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$ için $a_1$ve a_2 bulunabilir ki b_1 ve b_2, $\mathbb{R}^2$ de üretirler.

$\vec{B} = a_1\overrightarrow{A_1} + a_2\overrightarrow{A_2}$ de yerlerine yazarsak;

$\vec{B} = \frac{4b_1 + 2b_2}{10} \cdot (1,3) + \frac{b_2 - 3b_1}{10} \cdot (-2,4)$

bulunur. b_1 ve b_2 vektör bileşenleri olup skalerdir.

Mesela $b_1 = 4$ ve $b_2 = 2$ için

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \frac{4 \cdot 4 + 2 \cdot 2}{10} \cdot (1,3) + \frac{2 - 3 \cdot 4}{10} \cdot (-2,4) \\ &= 2 \cdot (1,3) + (-1) \cdot (-2,4) \\ &= (2,6) + (2,-4) \end{aligned}$$

$\overrightarrow{u_1} = (2,6), \overrightarrow{u_2} = (2,-4)$

üretilen vektörlerdir. Şimdi bu üretilmenin genelini bulalım.

$\mathbb{R}^2$ düzleminin $\vec{B}$ vektörünü her $(b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$ için

$$\vec{B} = \frac{4b_1+2b_2}{10}\cdot(1,3) + \frac{b_2-3b_1}{10}\cdot(-2,4)$$

ifadesi gereğince $\vec{B} = \vec{u_1} + \vec{u_2}$ den,

$$\vec{u_1} = \left(\frac{2b_1+b_2}{5}, \frac{6b_1+3b_2}{5}\right), \vec{u_2} = \left(\frac{-b_1+3b_2}{5}, \frac{2b_2-6b_1}{5}\right)$$

biçiminde elde edilir.

8.4. Tanım: V bir vektör uzayı ve V nin $\vec{A_1}, \vec{A_2}, \dots, \vec{A_n}$ vektörlerinin kümesinde S olsun. L(S) alt uzayına, S kümesinin ürettiği (gerdiği, doğurur) alt uzay denir. Eğer V vektör uzayındaki her $\vec{A}$ vektörü S'deki vektörlerin bir lineer bileşimi olarak yazılabiliyorsa yani kısaca, $\vec{A} \in V$ için $\vec{A} \in L(S)$ ise S kümesi V vektör uzayını üretir denir ve $L(S) = V$ şeklinde yazılır.

Örnek: $\mathbb{R}^2$ de (1, 0) vektörünün ürettiği alt uzayı nedir?

Çözüm: $\mathbb{R}^2$ de (1, 0) vektörünün üretiği alt uzay (1, 0) vektörünün bütün lineer bileşimlerinin kümesidir.

$$L(\{1,0\}) = \{c(1,0) : c \in \mathbb{R}\} = \{(c,0) : c \in \mathbb{R}\}$$

Bu küme $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere (c, 0) şeklindeki bütün noktaların kümesidir. Biraz dikkat edersek bu kümenin noktaları $y = 0$ doğrusunu, bir başka deyişle, x – eksenini oluştururlar. O halde $\mathbb{R}^2$ nin (1, 0) vektörü tarafından ürettiği alt uzayı x - eksenidir. Ayrıca x - ekseni üzerindeki her noktanın, (1, 0) vektörü cinsinden yazılabileceği de açıktır yani, x - ekseni üzerindeki herhangi bir nokta $A = (a, 0)$ ise $(a,0) = a(1,0)$ şeklinde yazılabilir.

Örnek: $\mathbb{R}^2$ de (1, 0) ve (1, 1) vektörlerinin ürettiği alt uzayı bulunuz.

Çözüm: (1, 0), (1,1) vektörlerinin ürettiği alt uzay, bu vektörlerin bütün lineer bileşimlerinin kümesi

$$L(\{(1,0),(1,1)\}) = \{a(1,0) + b(1,1) : a, b \in \mathbb{R}\} = \{(a+b, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$$

dir. Şimdi $\mathbb{R}^2$ nin herhangi bir vektörünün (1, 0) ve (1, 1) vektörlerinin lineer bileşimi olarak yazılıp yazılamayacağına bakalım:

$(x, y) \in \mathbb{R}^2$ olsun.

$$(x,y) = a(1,0) + b(1,1) \qquad (1)$$

$$(x,y) = (a+b, b)$$

iki vektörün eşitliğinden $x = a + b, y = b$ buradan $a = x - y$ ve $b = y$ bulunur. Bu değerleri (1) de yerine yazalım,

$$(x,y) = (x-y)(1,0) + y(1,1)$$

olur. Böylece $\mathbb{R}^2$ nin herhangi bir (x, y) vektörü (1, 0), (1,1) vektörlerinin lineer bileşimi olarak yazılabiliyor. O halde {(1, 0), (1, 1)} kümesi $\mathbb{R}^2$ yi üretir yani, $L(\{(1,0),(1,1)\}) = \mathbb{R}^2$ olur. Mesela $(3,7) \in \mathbb{R}^2$ nin (1, 0), (1, 1) in lineer bileşimi olarak yazıldığını görelim:

$$(3,7) = (-4)(1,0) + 7(1,1)$$

olur.

Örnek: $P_2(\mathbb{R})$ derecesi 2 veya 2 den küçük bütün polinomların oluşturduğu bir vektör uzayı olmak üzere $P_2(\mathbb{R})$ de $x, 1+x$ vektörlerinin ürettiği alt uzayı bulunuz.

Çözüm: $\{x, 1+x\}$ kümesinin ürettiği $P_2(\mathbb{R})$ nin alt uzayını aramalıyız. Bunun için $x, 1+x$ vektörlerinin bütün lineer bileşimlerini bulalım,

$$\begin{aligned} P(x) &= L(\{x, 1+x\}) \\ &= \{ax + b(1+x) : a, b \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(a+b)x + b) : a, b \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

P (x) kümesi, $p(x) = (a+b)x + b, a, b \in \mathbb{R}$ şeklindeki 1. dereceden polinomların kümesi olur ve

$$P(x) \subseteq P_1(x) \qquad (1)$$

yazılır.

Şimdi de $P_1(\mathbb{R})$ nin herhangi bir vektörünün $x, 1+x$ vektörlerinin lineer bileşimi olarak yazılabileceğini gösterelim:

$$q(x) = \alpha x + \beta \in P_1(\mathbb{R}), \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

alalım.

$$\alpha x + \beta = ax + b(1+x) = (a+b)x + b$$

iki polinomun eşitliğinden $\alpha = a + b, \beta = b$ buradan $a = \alpha - \beta, b = \beta$ bulunur. $\alpha x + \beta = (\alpha - \beta)x + \beta(1+x)$ buradan

$$P_1(x) \subseteq P(x) \qquad (2)$$

olur. (1) ve (2) eşitliklerinden $P(x) = P_1(x)$ yazılır. Böylece $x, 1+x$ vektörlerinin oluşturduğu alt uzay, $L(\{x, 1+x\}) = P_1(\mathbb{R})$ olur. //

Buraya kadar verilen vektör kümesinin ürettiği alt uzayları bulmaya çalıştık. Şimdi de verilen alt uzayları üreten vektörleri bulmaya örnek verelim.

Örnek: $\mathbb{R}^2$ nin $3x - y = 0$ alt uzayını üreten bir vektör bulunuz.

Çözüm: $\mathbb{R}^2$ nin $3x - y = 0$ alt uzayı,

$$W = \{(x,y) : y = 3x, x \in \mathbb{R}\} = \{(x, 3x) : x \in \mathbb{R}\}$$

kümesidir. Buna göre $3x - y = 0$ alt uzayının her elemanı, $(x, 3x) = x(1, 3)$, $x \in \mathbb{R}$ şeklindeki vektörlerdir. Buna göre $(1, 3)$ vektörünün uygun bir reel sayı ile çarpımıdır. O halde $(1, 3)$ vektörü $3x - y = 0$ alt uzayını üretir.

Örnek: $\mathbb{R}^3$ ün $x + y + z = 0$ alt uzayını üreten vektörlerin kümesini bulunuz.

Çözüm: $\mathbb{R}^3$ ün $x + y + z = 0$ alt uzayı,

$$W = \{(x, y, z) : x + y + z = 0, x, y, z \in \mathbb{R}\}$$
$$= \{(x, y, -x - y) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

kümesidir. O halde $x + y + z = 0$ alt uzayının her elemanı, $(x, y, -x - y)$ $x, y \in \mathbb{R}$ şeklinde yazılabilir. Burada x ve y'nin keyfi her gerçel değeri için W kümesinin bir elemanı elde edilir.

$x = 0, y = 1$ için $(0, 1, -1) \in W$

$x = 1, y = 2$ için $(1, 2, -3) \in W$

bulunur. Buna göre $A = (0, 1, -1)$ ve $B = (1, 2, -3)$ vektörleri W kümesinin yani $x + y + z = 0$ alt uzayının elemanlarıdır. İşte bu vektörler verilen alt uzayı üretirler. Bunu görmek için, W kümesinden herhangi bir öğe alıp bu öğenin $(0, 1, -1)$ ve $(1 ,2 ,-3)$ vektörlerinin lineer bileşimi şeklinde yazılabileceğini görmeliyiz:

$E \in W$ için $E = (a, b, -a - b)$ alalım.

$$(a, b, -a - b) = c_1A + c_2B$$

olacak şekilde c_1 ve c_2 reel sayılarını bulmalıyız.

$$(a, b, -a - b) = c_1(0, 1, -1) + c_2(1, 2, -3)$$
$$(a, b, -a - b) = (c_2, c_1 + 2c_2, -c_1 - 3c_2)$$

iki vektörün eşitliğinden

$$a = c_2,\ \ b = c_1 + 2c_2,\ \ -a - b = -c_1 - 3c_2$$

elde edilir. Buradan $c_1 = b - 2a, c_2 = a$ bulunur ve

$$(a, b, -a - b) = (b - 2a)(0, 1, -1) + a(1, 2, -3)$$

eşitliği elde edilir. Buna göre W vektör uzayının her bir elemanı, (0, 1, –1) ve (1, 2, –3) vektörlerinin uygun bir lineer bileşimidir. O halde bu vektörler W alt uzayını üretirler.

LİNEER BAĞIMLI VE BAĞIMSIZ VEKTÖRLER

8.5. Tanım: $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\overrightarrow{A_1}, \overrightarrow{A_2}, \dots, \overrightarrow{A_n}$ vektörleri için

$$a_1\overrightarrow{A_1} + a_2\overrightarrow{A_2} + \cdots + a_n\overrightarrow{A_n} = \vec{0}$$

eşitliği varken,

i) $a_1, a_2, \dots, a_n$ den biri sıfırdan farklı ise $\overrightarrow{A_1}, \overrightarrow{A_2}, \dots, \overrightarrow{A_n}$ vektörlerinin lineer bağımlı vektörler,

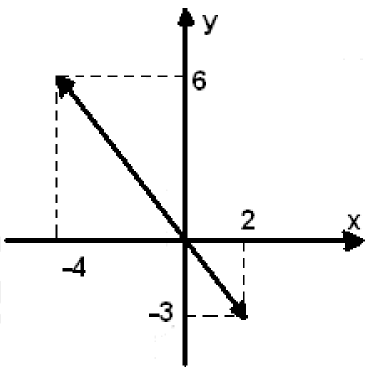
ii) Yalnız $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$ için sağlanıyorsa $\overrightarrow{A_1}, \overrightarrow{A_2}, \dots, \overrightarrow{A_n}$ vektörlerinin lineer bağımsız vektörler denir.

Örnek: $\overrightarrow{A_1} = (2,-3), \overrightarrow{A_2} = (-4,6)$ ise $\overrightarrow{A_1}$ ve $\overrightarrow{A_2}$ vektörlerinin lineer bağımlı veya lineer bağımsız olup olmadığını bulunuz ve grafiğini çiziniz.

Çözüm: $a_1\overrightarrow{A_1} + a_2\overrightarrow{A_2} = \vec{0}$

$$a_1(2,-3) + a_2(-4,6) = (0,0)$$
$$(2a_1, -3a_1) + (-4a_2, 6a_2) = (0,0)$$
$$(2a_1 - 4a_2, -3a_1 + 6a_2) = (0,0)$$
$$2a_1 - 4a_2 = 0 \ \wedge -3a_1 + 6a_2 = 0$$

denklem sistemleri elde edilir. Bu iki denklemin sonsuz çözümü vardır. Başka bir ifadeyle a ve b sayılarından en az biri sıfırdan farklı iken denklem sistemi sağlanır. O halde $\overrightarrow{A_1}$ ve $\overrightarrow{A_2}$ vektörlerinin lineer bağımlıdır. Bu iki vektörün grafiği aşağıdaki gibidir.

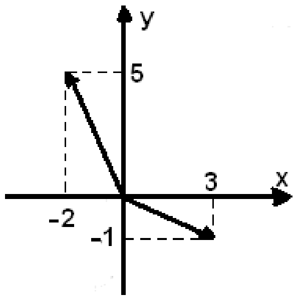


Örnek: $\overrightarrow{A_1} = (1,-3), \overrightarrow{A_2} = (-2,5)$ ise $\overrightarrow{A_1}$ ve $\overrightarrow{A_2}$ vektörlerinin lineer bağımlı veya lineer bağımsız olup olmadığını bulunuz ve grafiğini çiziniz.

Çözüm: $a_1\overrightarrow{A_1} + a_2\overrightarrow{A_2} = \vec{0}$

$$a_1(1,-3) + a_2(-2,5) = (0,0)$$
$$(a_1, -3a_1) + (-2a_2, 5a_2) = (0,0)$$
$$(a_1 - 2a_2, -3a_1 + 5a_2) = (0,0)$$
$$a_1 - 2a_2 = 0 \ \wedge -3a_1 + 5a_2 = 0$$

denklem sistemleri elde edilir. Bu iki denklem çözülürse $a_1 = a_2 = 0$ olduğu bulunur. O halde $\overrightarrow{A_1}$ ve $\overrightarrow{A_2}$ vektörlerinin lineer bağımsızdır. Bu iki vektörün grafiği aşağıdaki gibidir.



8.1. Not: Yukarıdaki iki örnekten görüldüğü gibi iki vektör lineer bağımlı ise bu iki vektör aynı doğrultuda, iki vektör lineer bağımsız ise iki vektör aynı doğrultuda değildir.

Örnek: $P_2(\mathbb{R})$ de $E = \{1, 1+x, 1-x, x^2\}$ kümesinin lineer bağımlı olup olmadığını bulunuz.

Çözüm: $a \cdot 1 + b(1+x) + c(1-x) + dx^2 = 0$ alalım.

$$dx^2 + (b-c)x + (a+b+c) = 0$$

olur. Bir polinomun sıfır polinom olması için her teriminin katsayısının sıfır olması gerekir. Buna göre,

$$d = 0,\ \ b - c = 0, a + b + c = 0$$

denklem sistemi elde edilir. Sistemin sıfır çözümden $(a = b = c = d = 0)$ başka çözümleri varsa, E kümesi lineer bağımlıdır. $a = -2, b = 1, c = 1, d = 0$ sistemin bir çözümüdür. Sıfır çözümden başka bir çözüm bulduğumuz için E kümesi lineer bağımlıdır.

8.3. Teorem: E ve F, $E \subseteq F$ olacak şekilde V vektör uzayının sonlu iki alt kümesi olsun.

i) E lineer bağımlı ise F de lineer bağımlıdır.
ii) F lineer bağımsız ise E de lineer bağımsızdır.

İspat: $E \subseteq F$ olacak şekilde
$E = \{\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \dots, \overrightarrow{x_k}\}$ ve $F = \{\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \dots, \overrightarrow{x_k}, \overrightarrow{x_{k+1}}, \dots, \overrightarrow{x_n}\}$
kümelerini alalım.

i) E kümesi lineer bağımlı olduğundan $a_1\overrightarrow{x_1} + a_2\overrightarrow{x_2} + \cdots + a_k\overrightarrow{x_k} = \vec{0}$ eşitliğini sağlayan hepsi aynı anda sıfır olmayan yani, en az biri sıfırdan farklı olan $a_1, a_2, \dots, a_k$ skalerleri vardır. $a_{k+1}, a_{k+2}, \dots, a_n$ olmak üzere

$$a_1\overrightarrow{x_1} + a_2\overrightarrow{x_2} + \cdots + a_k\overrightarrow{x_k} + a_{k+1}\overrightarrow{x_{k+1}} + a_{k+2}\overrightarrow{x_{k+2}} + \cdots + a_n\overrightarrow{x_n} = \vec{0}$$

eşitliği sağlanır ve $a_1, a_2, \dots, a_k$ skalerlerinden en az biri sıfırdan farklı olduğundan $a_{k+1}, a_{k+2}, \dots, a_n$ vektörleri lineer bağımlıdır, yani F kümesi lineer bağımlıdır.

ii) F kümesi lineer bağımsız olsun. E kümesi için iki durum vardır; ya lineer bağımlıdır ya da lineer bağımsızdır. E kümesi lineer bağımlı olamaz. Çünkü bu durumda (i) den F'nin de lineer bağımlı olması gerekirdi. O halde E lineer bağımsızdır.

8.1. Sonuç: Bir V vektör uzayında {0} kümesi lineer bağımlıdır. Çünkü $1 \cdot \vec{0} = \vec{0}$ olur. Burada $\vec{x} = \vec{0} \in V, a = 1 \in \mathbb{R}$ alınarak lineer bağımlılık sağlanır. O halde sıfır vektörü içeren her küme lineer bağımlıdır.

8.4. Teorem: Bir V vektör uzayında $E = \{\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \dots, \overrightarrow{x_k}\}$ kümesinin lineer bağımlı olması için gerekli ve yeterli şart, E'deki bir vektörün, diğer vektörlerin lineer bileşimi olmasıdır.

İspat: $E = \{\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \dots, \overrightarrow{x_k}\}$ kümesi lineer bağımlı olsun. $a_1\overrightarrow{x_1} + a_2\overrightarrow{x_2} + \cdots + a_k\overrightarrow{x_k} = \vec{0}$ eşitliğini sağlayacak ve en az biri sıfırdan farklı olacak şekilde $a_1, a_2, \dots, a_k$ skalerleri vardır. $1 \le j \le k$ için $c_j \neq 0$ olsun. Bu durumda

$$\overrightarrow{x_j} = -\frac{a_1}{a_j}\overrightarrow{x_1} - \frac{a_2}{a_j}\overrightarrow{x_1} - \cdots - \frac{a_k}{a_j}\overrightarrow{x_k}$$

yazılır ve $\overrightarrow{x_j}$ vektörü diğer vektörlerin bir lineer bileşimi olur.

Tersine olarak $\overrightarrow{x_j}$ vektörü diğer vektörlerin lineer bileşimi olsun:

$$\overrightarrow{x_j} = a_1\overrightarrow{x_1} + \cdots + a_{j-1}\overrightarrow{x_{j-1}} + a_{j+1}\overrightarrow{x_{j+1}} + \cdots + a_k\overrightarrow{x_k}$$

bu eşitlikten

$$a_1\overrightarrow{x_1} + \cdots + a_{j-1}\overrightarrow{x_{j-1}} + (-1)\overrightarrow{x_j} + a_{j+1}\overrightarrow{x_{j+1}} + \cdots + a_k\overrightarrow{x_k} = \vec{0}$$

elde edilir. Bu eşitliği sağlayan katsayılardan en az biri sıfırdan farklı olduğu için ($\overrightarrow{x_j}$ nin katsayısı (-1)) $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \dots, \overrightarrow{x_k}$ vektörleri lineer bağımlıdır.

Örnek: $E = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (1,1,1)\}$ kümesinin lineer bağımlı olduğunu gösteriniz.

Çözüm: E kümesinin lineer bağımlı olduğunu göstermek için 8.4. Teorem gereğince, vektörlerden birinin diğerlerinin lineer bileşimi olduğu gösterilmelidir,

$$(1,0,0) = a(0,1,0) + b(0,0,1) + c(1,1,1)$$

alalım.

$(1,0,0) = (c, a + c, b + c)$

olup, buradan $a = -1, b = -1, c = 1$ bulunur. Bu şekilde E kümesindeki vektörlerden biri diğerlerinin lineer bileşimi olarak yazıldı. E kümesi lineer bağımlıdır.

8.2. Sonuç: $\mathbb{R}^3$ de $\vec{A} = (a_1, a_2, a_3)$, , $\vec{B} = (b_1, b_2, b_3)$, $\vec{C} = (c_1, c_2, c_3)$ vektörlerinin lineer bağımlı (geometrik olarak düzlemsel) olma şartı;

$$\det(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

dır. Gerçekten, lineer bağımlı iki vektör çakışıktır. Çakışık iki vektör

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = k$$

olduğundan

$$\det(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}) = \begin{vmatrix} kb_1 & kb_2 & kb_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

olur.

8.3. Sonuç: $\mathbb{R}^3$ de $\vec{A} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{B} = (b_1, b_2, b_3)$, $\vec{C} = (c_1, c_2, c_3)$ vektörlerinin lineer bağımsız olma şartı;

$$\det(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

dır.

Örnek: $\mathbb{R}^2$ de $\vec{A} = (8, -4)$, $\vec{B} = (2, 3)$ vektörleri lineer (doğrusal) bağımlı mıdır?

$$\begin{vmatrix} 8 & -4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 32 \neq 0$$

olduğundan doğrusal bağımsızdır.

Örnek: $\mathbb{R}^2$ de $\vec{A} = (5, 3)$, $\vec{B} = (-10, 4)$ vektörleri doğrusal bağımlı mıdır?

$$\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -10 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

olduğundan doğrusal bağımlıdır.

Örnek: $\mathbb{R}^3$ de $\vec{A} = (2, a-1, 0)$, $\vec{B} = (b+3, 1, 5)$ ve $\vec{C} = (2, 4, 0)$ vektörleri lineer (doğrusal) bağımlı olması için a ne olmalıdır?

Çözüm: $\begin{vmatrix} 2 & a-1 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$$10a - 50 = 0$$
$$a = 5$$

8.4. Sonuç: Vektörlerden biri diğerinin lineer birleşimleri olarak yazılabilirse, vektörler lineer bağımlıdır.

Örnek: $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{x_3}$ vektörleri için $\overrightarrow{x_1} = a_1\overrightarrow{x_2} + a_2\overrightarrow{x_3}$ yazalım. İki yana $-\overrightarrow{x_1}$ ekleyelim.

$$\vec{0} = a_1\overrightarrow{x_2} + a_2\overrightarrow{x_3} - \overrightarrow{x_1}$$

$a_1 = a_2 = 0$ olabilir, ancak $-1 \neq 0$ olduğundan $a_3 = -1 \neq 0$ yazılabilir ki tanıma göre vektörler lineer bağımlı olurlar.

8.5. Sonuç: $\{\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \dots, \overrightarrow{x_k}\}$ vektörler kümesinin bir alt kümesi lineer bağımlı ise, bu vektörler de lineer bağımlı olurlar.

8.6. Sonuç: $\{\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \dots, \overrightarrow{x_k}\}$ vektörler kümesi lineer bağımlısız ise, bunun herhangi bir alt kümesi de lineer bağımsız olur.

8.5. Teorem: $\mathbb{R}^n$ de en az $n+1$ tane vektör daima lineer bağımlıdır.

İspat: $\mathbb{R}^n$ de $k > n$ olmak üzere k, sayıda $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \dots, \overrightarrow{x_k}$ vektörleri verilsin. $a_1, a_2, \dots, a_k$ skalerler olmak üzere,

$$a_1\overrightarrow{x_1} + a_2\overrightarrow{x_2} + \cdots + a_k\overrightarrow{x_k} = \vec{0} \qquad (1)$$

olacak şekilde denklemin a bilinmeyenlerine göre çözümünü araştıralım. $\mathbb{R}^n$ de $\overrightarrow{x_i}$ (i= 1, 2, ... , k) vektörünü bileşenleri türünden

$$\overrightarrow{x_i} = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in})$$

olarak yazalım. Şimdi (1) denkleminde her vektörü bileşenleri türünden yazarsak,

$$a_1(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n}) + a_2(x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n}) + \cdots + a_k(x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{kn}) = (0,0,\dots,0)$$

veya

$$(a_1x_{11} + a_2x_{21} + \cdots + a_kx_{k1}) + (a_1x_{12} + a_2x_{22} + \cdots + a_kx_{k2}) + \cdots + (a_kx_{1n} + a_2x_{2n} + \cdots + a_kx_{kn}) = (0,0,\dots,0)$$

olur. Şimdi iki sıralı n-linin eşitliğini ve $a_1, a_2, \dots, a_k$ lerin bilinmeyenler olduğunu gözönüne alarak, aşağıdaki k bilinmiyenli n denklemden oluşan homojen lineer denklem sistemini elde ederiz.

$$\begin{aligned} a_1x_{11} + a_2x_{21} + \cdots + a_kx_{k1} &= 0 \\ a_1x_{12} + a_2x_{22} + \cdots + a_kx_{k2} &= 0 \\ \dots \\ a_kx_{1n} + a_2x_{2n} + \cdots + a_kx_{kn} &= 0 \end{aligned}$$

Burada $k > n$ bilinmeyen sayısı denklem sayısından fazla olduğundan sistemin katsayılar matrisinin rankı bilinmeyen sayısından küçüktür. Bu nedenle daima sıfırdan farklı bir çözümü vardır. O halde, verilen k sayıdaki $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \dots, \overrightarrow{x_k}$ vektörleri kümesi $\mathbb{R}^n$ de lineer bağımlı bir kümedir. //

Bu teoreme göre örneğin, $\mathbb{R}^3$ deki 4 veya daha fazla, $\mathbb{R}^4$ deki 5 veya daha fazla vektör lineer bağımlıdır.

Örnek: $\mathbb{R}^3$ de $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)$ vektörlerine standart birim vektörler denir. $\mathbb{R}^3$ deki standart birim vektörler lineer bağımsız mıdır?

Çözüm:

$$c_1\,e_1 + c_2\,e_2 + c_3\,e_3 = (0,0,0)$$
$$c_1(1,0,0) + c_2(0,1,0) + c_3(0,0,1) = (0,0,0)$$
$$(c_1, c_2, c_3) = (0,0,0)$$

buradan

$$c_1 = c_2 = c_3 = 0$$

olur.

8.6. Teorem: Basamak biçimindeki bir matrisin sıfır olmayan satırları lineer bağımsızdır.

İspat: Basamak biçimindeki bir matrisin sıfır olmayan satırları $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ olsun. $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ kümesinin lineer bağımsız olduğunu göstereceğiz. Varsayalım ki, $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ kümesi lineer bağımlı olsun. Bu durumda vektörlerden biri diğerlerinin lineer bileşimi olarak, örneğin, v_1 kendinden sonra gelenlerin bir lineer bileşimi olarak yazılır.

$$v_1 = a_2 v_2 + a_3 v_3 + \cdots + a_n v_n \qquad (1)$$

Burada v_1 in i. bileşeninin sıfır olmayan ilk bileşen olduğunu kabul edelim. $v_1, v_2, \ldots, v_n$ vektörlerinin oluşturduğu matris, basamak biçiminde olduğundan $v_1, v_2, \ldots, v_n$ vektörlerinin i. bileşenleri sıfırdır. Bu durum, (1) eşitliğinde v_1 in i. bileşeninin sıfır olmaması ile çelişir. O halde $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ kümesi lineer bağımsızdır.

Örnek: $\mathbb{R}$ üzerinde 2×2 tipindeki matrisler kümesi $M_{2\times2}$ nin matris toplamı ve skaler ile matris çarpımına göre vektör uzayı olduğunu biliyoruz. $A, B, C \in M_{2\times2}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

vektörlerinin lineer bağımlı olup olmadıklarını araştırınız.

Çözüm: $a_1 A + a_2 B + a_3 C = 0$ olsun.

$$a_1 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + a_3 \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_1 \\ 0 & a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -a_2 & 0 \\ a_2 & a_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_3 & 3a_3 \\ 2a_3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_1 - a_2 + a_3 & a_1 + 3a_3 \\ a_2 + 2a_3 & a_1 + a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

İki matrisin eşitliğinden

$$a_1 - a_2 + a_3 = 0, a_1 + 3a_3 = 0, a_2 + 2a_3 = 0, a_1 + a_2 = 0$$

homojen lineer denklem sistemi çözülürse;

$$a_1 = a_2 = a_3 = 0$$

sıfır çözüm elde edilir. O halde A, B, C matrisleri lineer bağımsızdır.

VEKTÖR UZAYININ TABANI ve BOYUTU

8.6. Tanım: V vektör uzayındaki $\overrightarrow{A_1}, \overrightarrow{A_2}, \ldots, \overrightarrow{A_n}$ vektörleri

i) V'yi üretiyor (geriyor, doğuruyor)

ii) ve lineer bağımsız iseler

$\{\overrightarrow{A_1}, \overrightarrow{A_2}, \ldots, \overrightarrow{A_n}\}$ kümesine V'nin tabanı denir.

$\{e_1, e_2\}$ kümesi $\mathbb{R}^2$ nin, $\{e_1, e_2, e_3\}$ kümesi $\mathbb{R}^3$ ün birer tabanıdır. Bu tabanlara $\mathbb{R}^2$ ve $\mathbb{R}^3$ ün temel tabanı denir.

Örnek: $A = \{(2,-1),(1,0)\}$ kümesinin
a) $\mathbb{R}^2$ vektör uzayının bir tabanı olduğunu gösteriniz.
b) (2, 4) vektörünü A tabanına göre ifade ediniz.

Çözüm: a) $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ olduğundan vektörler doğrusal bağımsızdırlar. A kümesi $\mathbb{R}^2$ nin bir tabanıdır.

b) $(2,4) = a(2,-1) + b(1,0)$
$(2,4) = (2a + b, -a)$
$a = 4 \wedge b = 10$
elde edilir.

Örnek: $\{(2,1,0),(0,-7,4),(1,-3,2)\}$ kümesi $\mathbb{R}^3$ ün bir tabanı mıdır?

Çözüm: $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 4 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 0$ olduğundan vektörler doğrusal bağımlıdır. Lineer bağımlı üç vektör $\mathbb{R}^3$ de taban oluşturamaz.

Örnek: $\vec{A} = (-2,3), \vec{B} = (1,1)$ vektörleri $\mathbb{R}^2$ de bir taban belirtirler mi?

Çözüm: a) $\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 - 3 \neq 0$ lineer bağımsızdırlar.

b) $\vec{x} = a_1\vec{A} + a_2\vec{B}$
$\vec{x} = a_1(-2,3) + a_2(1,1)$
$(x_1, x_2) = (-2a_1 + a_2, 3a_1 + a_2)$

$$\left.\begin{aligned} -2a_1 + a_2 &= x_1 \\ 3a_1 + a_2 &= x_2 \end{aligned}\right\}$$
sisteminde

$$\Delta=\begin{vmatrix}-2 & 3\\ 3 & 1\end{vmatrix}=-5\neq 0,\ \Delta_1=\begin{vmatrix}x_1 & 3\\ x_2 & 1\end{vmatrix}=x_1-x_2,\ \Delta_2=\begin{vmatrix}-2 & x_1\\ 3 & x_2\end{vmatrix}=-2x_2-3x_1$$

$$a_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{x_1-x_2}{-5},\ a_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{2x_2+3x_1}{5}$$

olduğundan

$$\vec{x}=\frac{x_1-x_2}{-5}(-1,3)+\frac{2x_2+3x_1}{5}(1,1)$$

yazılabilir ki, $\mathbb{R}^2$ nin her $\vec{x}=(x_1,x_2)$ vektörü $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ nin lineer birleşimleri olarak yazıalbilir. Buna göre $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ vektörleri $\mathbb{R}^2$ yi üretirler, o halde tabandırlar.

8.7. Sonuç:

1. $\vec{e_1}=(1,0)$ ve $\vec{e_2}=(0,1)$ vektörleri $\mathbb{R}^2$ nin temel tabanıdır.

2. $\vec{e_1}=(1,0,0)$, $\vec{e_2}=(0,1,0)$ ve $\vec{e_3}=(0,0,1)$ vektörleri $\mathbb{R}^3$ nin temel tabanıdır.

Örnek: $E=\{1,x,x^2\}$ kümesi $P_2(\mathbb{R})$ vektör uzayı için bir taban mıdır?

Çözüm: $\{1,x,x^2\}$ kümesi lineer bağımsızdır. Çünkü kümenin elemanlarından hiçbiri diğerlerinin lineer bileşimi şeklinde yazılamaz.

$\{1,x,x^2\}$ kümesi $P_2(\mathbb{R})$ kümesini üretir. Gerçekten, $p(x)\in P_2(\mathbb{R})$ ise $a_0,a_1,a_2\in\mathbb{R}$ için $p(x)=a_0 1+a_1x+a_2x^2$ dir. Böylece $\{1,x,x^2\}$ kümesi hem lineer bağımsız hem de $P_2(\mathbb{R})$ yi gerer. O halde $P_n(\mathbb{R})$ için bir tabandır. Bu tabana $P_2(\mathbb{R})$ nin standart tabanı denir.

$\{1,x,x^2,x^3\}$ kümesi $P_3(\mathbb{R})$ nin standart tabanı,
$\{1,x,x^2,x^3,x^4\}$ kümesi $P_4(\mathbb{R})$ nin standart tabanı ...
$\{1,x,x^2,\dots,x^n\}$ kümesi de $P_n(\mathbb{R})$ nin standart tabanıdır.

8.7. Teorem: Sonlu sayıda olan bir vektör uzayının herhangi iki tabanındaki vektörlerin sayısı aynıdır.

İspat: $E=\{\vec{x_1},\vec{x_2},\dots,\vec{x_n}\}$ ve $F=\{\vec{y_1},\vec{y_2},\dots,\vec{y_m}\}$ kümeleri V'nin farklı iki tabanı olsun. E ve F kümeleri taban oldukları için lineer bağımsızdırlar. E kümesi bir taban ve F'de lineer bağımsız olduğu için 8.6. Teorem gereğince $m\leq n$ dir.

Benzer şekilde, F taban ve E'de lineer bağımsız olduğu için $n \leq m$ olur. Böylece $m = n$ elde edilir. Sonuç olarak, sonlu sayıda bir vektör uzayının birçok tabanı vardır ve her tabandaki vektörlerin sayısı aynıdır.

8.7. Tanım: Bir V vektör uzayının herhangi bir tabanındaki vektörlerin sayısına V'nin boyutu denir ve Boy V ile gösterilir.

Örnek: $A = \{(2,-1),(1,0)\}$ kümesinde $\mathbb{R}^2$ vektör uzayının boyutu nedir?

Çözüm: $\mathbb{R}^2$ vektör uzayında 2 tane vektör bulunduğundan boyutu 2'dir.

8.8. Sonuç: Bir uzayın sonsuz sayıda tabanı bulunabilir. Ancak boyut kesinlikle bir tek reel sayıdır.

$\mathbb{R}$ nin boyutu 1 ise Boy $\mathbb{R} = 1$
$\mathbb{R}^2$ nin boyutu 2 ise Boy $\mathbb{R}^2 = 2$
$\mathbb{R}^3$ nin boyutu 3 ise Boy $\mathbb{R}^3 = 3$
...
$\mathbb{R}^n$ nin boyutu n ise Boy $\mathbb{R}^n = n$

dir.

Örnek: $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı 2×3 tipindeki matrislerin vektör uzayı $M_{2\times 3}$ için

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

vektörleri bir taban oluşturur. Buradan boy $M_{2\times 3} = 6$ olduğu görülür. //

Buraya kadar sonlu boyutlu vektör uzaylarını inceledik. Sonlu boyutlu olmayan vektör uzayları da vardır. Bu tür vektör uzayları sonlu kümeler tarafından üretilemez.

Mesela, bütün polinomların oluşturduğu $P(\mathbb{R})$ vektör uzayı, sonlu boyutlu değildir. Çünkü hiçbir sonlu küme $P(\mathbb{R})$ yi üretemez.

8.2. Not: $P(\mathbb{R})$ vektör uzayı ile $P_1(\mathbb{R})$ vektör uzayını farklı farklı şeylerdir, birbiri ile karıştırmayınız!

8.8. Teorem: V, n-boyutlu bir vektör uzayı ve $E = \{\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \dots, \overrightarrow{x_n}\}$ kümesi de V'nin bir tabanı olsun. Bu durumda V'deki her $\vec{x}$ vektörü tabandaki vektörlerinin bir lineer bileşimi olarak tek türlü yazılır.

İspat: E kümesi V vektör uzayını gerdiği için V'deki her $\vec{x}$ vektörü E'deki vektörlerin bir lineer bileşimi olarak yazılır. Bu yazılışın tek türlü olduğunu gösterelim. Varsayalım ki $\vec{x}$ vektörü

$$\vec{x} = a_1\overrightarrow{x_1} + a_2\overrightarrow{x_2} + \cdots + a_n\overrightarrow{x_n} \quad (1)$$

$$\vec{x} = b_1\overrightarrow{x_1} + b_2\overrightarrow{x_2} + \cdots + b_n\overrightarrow{x_n} \quad (2)$$

şeklinde iki türlü yazılsın. (1) ve (2) denklemlerini taraf tarafa çıkartalım.

$$\vec{0} = (a_1 - b_1)\overrightarrow{x_1} + (a_2 - b_2)\overrightarrow{x_2} + \cdots + (a_n - b_n)\overrightarrow{x_n}$$

elde edilir. E kümesi lineer bağımsız olduğundan

$$a_1 - b_1 = 0,\ a_2 - b_2 = 0, \dots, a_n - b_n = 0$$

$$a_1 = b_1,\ a_2 = b_2, \dots, a_n = b_n$$

olur. Bu ise V'deki her $\vec{x}$ vektörü tabandaki vektörlerinin bir lineer bileşimi olarak tek türlü yazıldığını gösterir.

Örnek: $\mathbb{R}^2$ nin { (1, 2), (1, –1) } tabanına göre (2 , –5) vektörünün koordinatlarını bulunuz.

Çözüm: (2, –5) vektörü tabandaki vektörlerin lineer bileşimi olarak yazılabileceğinden

$$(2, -5) = a_1(1,2) + a_2(1,-1)$$

olacak şekilde a_1 ve a_2 skalerleri vardır.

$$(2, -5) = (a_1 + a_2, 2a_1 - a_2)$$

buradan $a_1 = -1, a_2 = 3$ bulunur. Böylece (2, –5) vektörünün verilen tabana göre koordinatları –1, 3 olur.

$\mathbb{R}^2$ nin standart tabanına göre (2, –5) vektörünün koordinatlarının 2, –5 olduğunu görünüz.

8.9. Sonuç: V, n-boyutlu bir vektör uzayı ve $E = \{\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \dots, \overrightarrow{x_n}\}$ kümesi de V'nin bir alt kümesi olsun.

i) E kümesi lineer bağımsız ise V'nin bir tabanıdır.
ii) E kümesi V'yi üretirse, V'nin bir tabanıdır.

Örnek: $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı 2×2 tipindeki matrislerin vektör uzayı $M_{2\times2}$ olduğuna göre

i) $E=\left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\right\}$ kümesinin $M_{2\times 2}$ için bir taban olduğunu

ii) $A \in M_{2\times 2}$, $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{bmatrix}$ vektörünün bu tabana göre koordinatlarını bulunuz.

Çözüm: i) Boy $M_{2\times 2} = 4$ ve E kümesinin eleman sayısı da 4 olduğu için E'nin sadece lineer bağımsız olduğunu veya sadece $M_{2\times 2}$ yi ürettiğini görmek yeterli olacaktır. E'nin lineer bağımsızlığına bakalım;

$$a_1\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{bmatrix}+a_2\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}+a_3\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}+a_4\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}a_1+a_3+a_4 & a_2+a_3-a_4\\ a_1 & -a_1+2a_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

iki matrisin eşitliğinden,

$$a_1 + a_3 + a_4 = 0, a_2 + a_3 - a_4 = 0, a_1 = 0, -a_1 + 2\,a_3 = 0$$

bulunur. Buradan, $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$ tek çözüm elde edilir. O halde E kümesi lineer bağımsızdır.

ii) a_1, a_2, a_3, a_4 skalerler olmak üzere,

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{bmatrix}=a_1\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{bmatrix}+a_2\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}+a_3\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}+a_4\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

lineer bileşimini yazalım.

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1+a_3+a_4 & a_2+a_3-a_4\\ a_1 & -a_1+2a_3\end{bmatrix}$$

iki matrisin eşitliğinden

$$a_1 + a_3 + a_4 = 1, a_2 + a_3 - a_4 = 2, a_1 = 3, -a_1 + 2\,a_3 = 5$$

bulunur. Buradan $a_1 = 3, a_2 = -8, a_3 = 4, a_4 = -6$ çıkar. O halde $\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{bmatrix}$ vektörünün verilen tabana göre koordinatları (3, –8, 4, –6) dır. //

Bundan böyle, n-boyutlu bir vektör uzayında n tane vektörün taban oluşturup oluşturmadığını kontrol etmek için bu vektörlerin sadece lineer bağımsızlığını veya sadece vektör uzayını ürettiklerini aramak yeterlidir.

Örnek: $\mathbb{R}^2$ için bir taban bulunuz.

Çözüm: Boy $\mathbb{R}^2 = 2$ olduğu için $\mathbb{R}^2$ deki lineer bağımsız herhangi iki vektör daima bir taban oluşturur.

$\{(1,1),(1,0)\},\{(-1,2),(1,0)\},\{(3,5),(1,2)\}$

kümelerinin herbiri $\mathbb{R}^2$ için bir tabandır.

Örnek: $\mathbb{R}^3$ için bir taban bulunuz.

Çözüm: Boy $\mathbb{R}^3 = 3$ olduğu için $\mathbb{R}^3$ deki lineer bağımsız herhangi üç vektör daima bir taban oluşturur, buna göre,

$\{(1,0,3),(0,2,1),(1,3,0)\}$

kümesi bir tabandır.

Örnek: $E = \{x+1, x^2, x^2+1\}$ kümesi $P_2(\mathbb{R})$ için bir taban mıdır?

Çözüm: Boy $P_2(\mathbb{R}) = 3$ olduğundan verilen 3 vektörün lineer bağımsızlığını aramak yeterli olacaktır.

$a_1(x+1) + a_2\, x^2 + a_3(x^2+1) = 0$

$(a_2 + a_3)x^2 + a_1x + (a_1 + a_3) = 0$

bir polinomun sıfır polinom olması için her teriminin katsayısı sıfır olmalıdır,

$a_2 + a_3 = 0, a_1 = 0, a_1 + a_3 = 0$

$a_1 = a_2 = a_3 = 0$

bulunur. O halde E kümesi $P_2(\mathbb{R})$ için bir tabandır.

Örnek: $D : P_3(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$

i) Çek D ve Gör D yi bulunuz.

ii) Çek D ve Gör D için birer taban yazınız.

Çözüm:

Çek $D = \{p(x) \in P_3(\mathbb{R}) \mid D(p(x) = 0\}$

$= \{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in P_3(\mathbb{R}) \mid a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 = 0\}$

$a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 = 0$ Polinom özdeşliğinden $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ dır. Buna göre Çek $D = \{p(x) = a_0 \mid a_0 \in \mathbb{R}\}$ sabit polinomların kümesidir. Çek D, $P_3(\mathbb{R})$ nin bir alt uzayıdır ve Boy Çek D $= 1$ olduğu görülür.

Gör $D \subseteq P_2(\mathbb{R})$ dir.

Gör $D = \{p(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 \in P_2(\mathbb{R}) \mid a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$ dir.

Gör D kümesi $P_2(\mathbb{R})$ nin bir alt uzayıdır. Aslında Gör D $= P_2(\mathbb{R})$ dir, dolayısıyla bir tabanı $\{1, x, x^2\}$ kümesidir. Buradan Boy Gör D $= 3$ tür.

8.9. Teorem: $T : V \to W$ bir lineer dönüşüm olsun. Eğer V sonlu boyutlu ise,

Boy V $=$ Boy Çek T $+$ Boy Gör T

dir.

Bu teoremin ispatı okuyucuya bırakılmıştır.

Örnek: $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$T(x, y, z) = x + 2y + 3z$$

verilsin.

i) Çek T, Gör T için birer taban yazınız.

ii) Boy Çek T, Boy Gör T yi belirtiniz.

Çözüm: i) Çek T $= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid T(x_1, x_2, x_3) = 0\}$

Çek T $= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0\}$

Çek T $= \left\{ \left(x_1, x_2, -\frac{x_1+2x_2}{3}\right) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\right\}$

bulunur. Çek T için bir taban bulalım.

$x_1 = 1, x_2 = 0$ için $x_3 = -\frac{1}{3}$ ve $\left(1, 0, -\frac{1}{3}\right) \in$ Çek T

$x_1 = 0, x_2 = 1$ için $x_3 = -\frac{2}{3}$ ve $\left(0, 1, -\frac{2}{3}\right) \in$ Çek T

ve çekirdeğin herhangi bir elemanı

$$\left(x_1, x_2, -\frac{x_1+2x_2}{3}\right) = x_1\left(1, 0, -\frac{1}{3}\right) + x_2\left(0, 1, -\frac{2}{3}\right)$$

yazılabildiğinden,

$$\left\{\left(1, 0, -\frac{1}{3}\right), \left(0, 1, -\frac{2}{3}\right)\right\}$$

kümesi Çek T yi üretmektedir. Böylece $\left\{\left(1,0,-\frac{1}{3}\right), \left(0,1,-\frac{2}{3}\right)\right\}$ kümesi Çek T için bir tabandır. Bu ise Boy Çek T $= 2$ olduğunu gösterir.

$\varnothing \neq T(\mathbb{R}^3) \subseteq \mathbb{R}$ olduğundan Boy $T(\mathbb{R}^3) = 1$ dir. Böylece;

Boy $\mathbb{R}^3 =$ Boy Çek T $+$ Boy Gör T

$3 = 2 + 1$

eşitliği elde edilir.

Örnek: $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$

$$T(x, y, z, u) = (x + y, z + u, x + z)$$

lineer dönüşümü verilsin.

i) Gör T, Çek T yi bularak birer taban yazınız.

ii) Boy Gör T, Boy Çek T yi belirtiniz.

Çözüm:

$$\begin{aligned}\text{i) Gör T} &= T(\mathbb{R}^4)\\ &= \{T(x,y,z,u) \mid (x,y,z,u) \in \mathbb{R}^4\}\\ &= \{(x+y, z+u, x+z) \mid x,y,z,u \in \mathbb{R}\}\end{aligned}$$

dir. $(x+y, z+u, x+z) \in$ Gör T vektörünü

$$(x+y, z+u, x+z) = x(1,0,1) + y(1,0,0) + z(0,1,1) + u(0,1,0)$$

şeklinde yazabiliriz.

$$(1,0,1), (1,0,0), (0,1,1), (0,1,0)$$

vektörlerinin kümesi lineer bağımlıdır ($\mathbb{R}^3$ teki 4 vektör). Satırları bu vektörler olan matrisi yazarak basamak biçime indirgeyelim. Böylece Gör T yi geren lineer bağımsız kümeyi, yani Gör T nin bir tabanını bulmuş oluruz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

bulunur. O halde $\{(1, 0, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1\}$ kümesi Gör T yi geren lineer bağımsız kümedir. Bir başka deyişle Gör T nin tabanıdır. Buradan Gör T $= \mathbb{R}^3$ olur ve boy Gör T $= 3$ tür.

$$\text{Çek T} = \{(x,y,z,u) \in \mathbb{R}^4 \mid T(x,y,z,u) = 0\}$$

$$T(x,y,z,u) = (x+y, z+u, x+z) = (0,0,0)$$

$$x+y = 0, z+u = 0, x+z = 0$$

sistemin katsayılar matrisinin rankı 3, bilinmeyen sayısı 4 olduğundan 1 bağımsız değişkene bağlı çözümleri vardır. Bağımsız değişken u alınırsa u'ya bağlı çözümler $x = u, y = -u, z = -u$ olur.

$$\text{Çek T} = \{(u, -u, -u, u) \mid u \in \mathbb{R}\} = \{u(1,-1,-1,1) \mid u \in \mathbb{R}\}$$

bulunur. Buna göre $\{(1,-1,-1,1)\}$ kümesi Çek T nin bir tabanıdır. Buradan Boy Çek T $= 1$ dir. Böylece

$$\text{Boy } \mathbb{R}^4 = \text{Boy Gör T} + \text{Boy Çek T}$$

$$4 = 3 + 1$$

eşitliği elde edilmiş olur.

8.10. Teorem: $T: V \to W$ bir lineer dönüşüm olsun. $E = \{\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \dots, \overrightarrow{x_n}\}$ kümesi V için bir taban ve $\vec{x}$, V'deki herhangi bir vektör ise

$$T(x) \in L(\{T(\overrightarrow{x_1}), T(\overrightarrow{x_2}), \dots, T(\overrightarrow{x_n})\})$$

dir.

İspat: $\vec{x} \in V$ olsun. $E = \{\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \dots, \overrightarrow{x_n}\}$ kümesi V'nin bir tabanı olduğundan $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\vec{x} = a_1\overrightarrow{x_1} + a_2\overrightarrow{x_2} + \cdots + a_n\overrightarrow{x_n}$$

dir. T lineer olduğundan

$$\begin{aligned} T(\vec{x}) &= T(a_1\overrightarrow{x_1} + a_2\overrightarrow{x_2} + \cdots + a_n\overrightarrow{x_n}) \\ &= a_1T(\overrightarrow{x_1}) + a_2T(\overrightarrow{x_2}) + \cdots + a_nT(\overrightarrow{x_n}) \in L(\{T(\overrightarrow{x_1}), T(\overrightarrow{x_2}), \dots, T(\overrightarrow{x_n})\}) \end{aligned}$$

O halde, $T: V \to W$ lineer dönüşüm ise V'nin her $\vec{x}$ vektörünün $T(\vec{x})$ görüntüsü V'nin bir tabanındaki vektörlerin görüntülerinin bir lineer bileşimidir. Bu nedenle, bir lineer dönüşüm için bir tabandaki vektörlerin görüntülerinin verilmesi yeterlidir.

Örnek: $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineer dönüşüm olsun.
$T(1,0) = (1,2), T(1,1) = (3,-1)$ ise $T(x,y)$
yi bulunuz.

Çözüm: {(1, 0), (1, 1)} kümesinin $\mathbb{R}^2$ için bir taban olduğunu aşikardır.

(x, y) vektörü bu tabandaki vektörlerin bir lineer bileşimi olarak yazalım.

$$(x,y) = a(1,0) + b(1,1)$$
$$(x,y) = (a+b, b)$$
$$a + b = x, b = y$$

bulunur. Buradan $a = x - y, b = y$ olur.

$$(x,y) = (x-y)(1,0) + y(1,1)$$

T lineer olduğundan

$$T(x,y) = (x-y)\,T(1,0) + y\,T(1,1)$$
$$T(x,y) = (x-y)(1,2) + y(3,-1)$$
$$T(x,y) = (x-y, 2x-2y) + (3y, -y)$$
$$T(x,y) = (x+2y, 2x-3y)$$

bulunur. Buradan;

$$T(4,5) = (4 + 2\cdot 5, 2\cdot 4 - 3\cdot 5) = (14, -7)$$

olur.

BİR MATRİSİN SATIR VE SÜTUN UZAYLARI

8.8. Tanım:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \vdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}$$

şeklinde verilen $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ matrisinin satırları,

$x_1=(a_{11},a_{12},\cdots,a_{1n})$
$x_2=(a_{21},a_{22},\cdots,a_{2n})$
...
$x_m=(a_{m1},a_{m2},\cdots,a_{mn})$

8.9. Tanım: $\mathbb{R}^n$ vektör uzayındaki vektörler olarak düşünülürse, $\{x_1,x_2,\ldots,x_m\}$ kümesi, $\mathbb{R}^n$ nin bir alt uzayını üretir. Bu alt uzaya $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ matrisinin satır uzayı denir. $\mathbb{R}^m$ vektör uzayındaki vektörler olarak düşünülürse, $\{y_1,y_2,\ldots,y_n\}$ kümesi, $\mathbb{R}^m$ nin bir alt uzayını gerer. Bu alt uzaya da $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ matrisinin sütun uzayı denir.

Örnek: $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 4 \\ 3 & 8 & 2 & 5 \\ 4 & 0 & 6 & 3 \end{bmatrix}$

A matrisinin satır vektörleri

$(2,-1,1,4),(3,8,2,5),(4,0,6,3)$

dir. A'nın satır uzayı $\mathbb{R}^4$ deki bu 3 vektörün gerdiği uzaydır. Daha önce gördüğümüz gibi bu 3 vektörün gerdiği satır uzayı

$L\{(2,-1,1,4),(3,8,2,5),(4,0,6,3)\}$

dır. A nın sütun vektörleri

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} -1 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

dir. A nın sütun uzayı da $\mathbb{R}^3$ deki bu 4 vektörün gerdiği uzaydır. Bu sütun uzayı

$L\{(2,3,4),(-1,8,0),(1,2,6),\ (4,5,3)\}$

dir.

8.10. Sonuç: i) A matrisinin herhangi iki satırını kendi aralarında değiştirdiğimizde A'nın satır uzayı değişmez.

ii) A matrisinin herhangi bir satırını sıfırdan farklı bir sayı ile çarptığımızda A'nın satır uzayı değişmez.

iii) A matrisinin herhangi bir satırını sıfırdan farklı bir sayı ile çarpıp, diğer bir satırına eklediğimizde A'nın satır uzayı değişmez.

O halde A matrisine sonlu sayıda ilkel satır işlemleri uygulandığında A'nın satır uzayının değişmeyeceği açıktır. İlkel satır işlemleriyle A'dan elde edilen basamak matrisinin A'nın bir denk matrisi olduğunu biliyoruz.

8.11. Sonuç: $A=[a_{ij}]_{m\times n}$, $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ matrisleri denk matrisler ise bunların satır uzayları birbirine eşit olacağından $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ matrisi verildiğinde bunun basamak biçimi $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ ise A ve B matrislerinin satır uzayları eşittir. Ayrıca basamak matrisin sıfırdan farklı satırları, satır uzayı için bir taban oluşturur. Bu aynı zamanda $\mathbb{R}^n$ de verilen vektörler tarafından üretilen (oluşturulan) alt uzay için taban bulma yöntemidir.

Örnek: $E=\{(1,2,-1,-6),(3,-1,2,11),(2,5,-4,-20)\}$ kümesinin ürettiği $\mathbb{R}^4$ ün V alt uzayı için bir taban bulunuz.

Çözüm: E kümesinin ürettiği V alt uzayı, satırları E'deki vektörler olan $A=[a_{ij}]_{3\times 4}$ matrisinin satır uzayıdır. Bu satır uzayı için bir taban arayalım. Bu tabanı bulmak için;

i) Satırları verilen vektörler olan matris oluşturulur,

ii) Bu matris, ilkel satır işlemleri ile basamak biçime indirgenir,

iii) Basamak matrisin sıfırdan farklı olan satırları, V alt uzayı için bir tabandır.

Buna göre satırları verilen vektörler olan matris

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & -6\\ 3 & -1 & 2 & 11\\ 2 & 5 & -4 & -20\end{bmatrix}$$

olur. Bu matrise ilkel satır işlemlerini uygulayarak basamak biçime indirgeyelim.

$$B=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & -6\\ 0 & 1 & -2 & -8\\ 0 & 0 & 1 & 3\end{bmatrix}$$

bulunur. A ve B matrislerinin satır uzayları aynı olduğundan B'nin sıfırdan farklı satırları, A matrisinin satır uzayı için bir taban oluşturur, yani,

$$\{(1,2,-1,-6),(0,1,-2,-8),(0,0,1,3)\}$$

kümesi $\mathbb{R}^4$ ün V alt uzayı için bir tabandır. Ayrıca satır uzayının boyutu $\text{Boy V} = 3$ tür.

8.10. Tanım: $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ matrisinin satır uzayının boyutuna A'nın satır rankı, sütun uzayının boyutuna da A'nın sütun rankı denir.

Örnek: $\mathbb{R}^3$ teki $\begin{bmatrix}1\\3\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\-1\\5\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\2\\-4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-6\\11\\-20\end{bmatrix}$ vektörlerinin ürettiği V alt uzayı için bir taban bulunuz.

Çözüm: Bunun için satırları verilen vektörler olan matrisi oluşturalım:

$$C = \begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\ 2 & -1 & 5\\ -1 & 2 & -4\\ -6 & 11 & -20\end{bmatrix}$$

İlkel satır işlemleri ile basamak biçime indirgeyelim:

$$D = \begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\ 0 & 1 & -1/7\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

C ve D matrislerinin satır uzayları aynıdır. D nin sıfırdan farklı satırları, C'nin satır uzayı için bir taban oluşturur, yani, $\{(1,3,2),(0,1,-1/7),(0,0,1)\}$ kümesi $\mathbb{R}^3$ ün V alt uzayı için bir tabandır. Ayrıca satır uzayının boyutu $\text{Boy V} = 3$ tür.

8.11. Teorem: Bir $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ matrisinin satır rankı ve sütun rankı birbirine eşittir.

Bu teoremin ispatı okuyucuya bırakılmıştır.

8.12. Teorem: $\mathbb{R}^n$ de $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_n}\}$ gibi verilen n tane vektörün lineer bağımsız olup olmaları için

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

olmalıdır.

İspat: $\mathbb{R}^n$ de $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_n}\}$ vektörlerinin kümesi E olsun. E kümesinin lineer bağımsız olması için

$$a_1\overrightarrow{v_1} + a_2\overrightarrow{v_2} + \cdots + a_n\overrightarrow{v_n} = 0$$

eşitliğinin ancak $a_1 = a_2 = \cdots a_n = 0$ olmasıyla sağlandığını biliyoruz. $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_n} \in \mathbb{R}^n$ için

$$\overrightarrow{v_1} = (a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n})$$
$$\overrightarrow{v_2} = (a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2n})$$
$$\dots$$
$$\overrightarrow{v_n} = (a_{n1}, a_{n2}, \cdots, a_{nn})$$

olsun.

$$a_1\overrightarrow{v_1} + a_2\overrightarrow{v_2} + \cdots + a_n\overrightarrow{v_n} = 0$$

eşitliğinde her vektörü bileşenleri türünden yazarsak,

$$a_1(a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n}) + a_2(a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2n}) + \cdots + a_n(a_{n1}, a_{n2}, \cdots, a_{nn}) = 0$$

burada $a_1, a_2, \dots, a_n$ ler bilinmeyenler olduğuna göre,

$$a_{11}a_1 + a_{21}a_2 + \cdots + a_{n1}a_n = 0$$
$$a_{12}a_1 + a_{22}a_2 + \cdots + a_{n2}a_n = 0$$
$$\dots$$
$$a_{1n}a_1 + a_{2n}a_2 + \cdots + a_{nn}a_n = 0$$

homojen lineer denklem sistemi elde edilir. Sistemin tek çözümünün sıfır çözüm olması için katsayılar matrisinin determinantının sıfırdan farklı olması gerektiğini biliyoruz. O halde $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_n}$ vektörlerinin lineer bağımsız olmaları için

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

olmalıdır.

Örnek: (1, 2, 5), (1, 2, 4), (3, 1, 2) vektörlerinin lineer bağımsız olup olmadığını araştırınız.

Çözüm:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$$

olduğundan verilen vektörler lineer bağımsızdır.

ORTOGONALLİK ve ORTONORMAL KÜMELER

8.11. Tanım: V iç çarpım ve $\vec{A},\vec{B} \in V$ olsun. Eğer $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$ ise $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ ye ortogonal (dik) vektörler denir. İki vektör arasındaki açı,

$$\cos\theta = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{\|\vec{A}\|\|\vec{B}\|}$$

ifadesinde $\cos\theta = 0$ ise $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ ortogonal vektörler, $\cos\theta = \pm 1$ buna göre $\vec{A} \cdot \vec{B} = \pm\|\vec{A}\|\|\vec{B}\|$ ise $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ vektörleri paralel vektörlerdir.

Örnek: $\vec{A} = (2,3)$ ve $\vec{B} = (-3,2)$ vektörleri için

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (2,3) \cdot (-3,2) = 2(-3) + 3 \cdot 2 = 0$$

olduğundan vektörler ortogonaldir.

8.12. Tanım: V bir iç çarpım uzayı. $E \subset V$ olsun. E içindeki farklı her vektör çifti ortogonal ise E ye ortogonal vektör kümesi denir. Ayrıca ortogonal E kümesindeki her vektörün uzunluğu 1 ise E'ye ortonormal bir küme denir.

Örnek: $\vec{A} = (1,0,3), \vec{B} = (0,2,0)$ ve $\vec{C} = (-3,0,1)$ vektörlerinin ortogonal olduğunu gösteriniz ve ortonormal kümeyi bulunuz.

Çözüm: $\vec{A} \cdot \vec{B} = (1,0,3) \cdot (0,2,0) = 0$

$$\vec{B} \cdot \vec{C} = (0,2,0) \cdot (-3,0,1) = 0$$

$$\vec{C} \cdot \vec{A} = (-3,0,1) \cdot (1,0,3) = 0$$

O halde $\vec{A},\vec{B},\vec{C}$ vektörleri ortogonal vektörlerdir. Şu halde;

$$\{(1,0,3),(0,2,0),(-3,0,1)\}$$

kümesi de ortogonal kümedir. Şimdi $\vec{A},\vec{B},\vec{C}$ vektörlerinin birim vektörlerini bulalım.

$$\|\vec{A}\| = \sqrt{(1,0,3)(1,0,3)} = \sqrt{1+0+9} = \sqrt{10}$$

$$\vec{A} = \frac{1}{\sqrt{10}}(1,0,3) = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, 0, \frac{3}{\sqrt{10}}\right)$$

$\vec{A}$ nın birim vektördür. Benzer şekilde,

$$\vec{B} = \frac{1}{2}(0,2,0) = (0,1,0), \quad \vec{C} = \frac{1}{\sqrt{10}}(-3,0,1) = \left(\frac{-3}{\sqrt{10}}, 0, \frac{1}{\sqrt{10}}\right)$$

birim vektörlerdir.

$$\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{10}}, 0, \frac{3}{\sqrt{10}}\right), (0,1,0), \left(\frac{-3}{\sqrt{10}}, 0, \frac{1}{\sqrt{10}}\right)\right\}$$

kümesi ortonormal bir kümedir.

8.13. Teorem: V, n boyutlu iç çarpım uzayı olsun. V'de sıfırdan farklı ortogonal vektörlerin $E = \{\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \ldots, \overrightarrow{x_n}\}$ kümesi lineer bağımsızdır.

İspat: $E = \{\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \ldots, \overrightarrow{x_n}\}$ V içinde ortogonal bir küme olsun.

$$< \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2} > = 0, i \neq j, \qquad i, j = 1, 2, \ldots, n$$

dır. Şimdi,

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b \text{ ise, } 1 \leq i \leq n \text{ için} < x_i, 0 >$$

olduğundan

$$\begin{aligned} 0 &= < x_i, a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n > \\ &= a_1 < x_i, x_1 > + a_2 < x_i, x_2 > + \ldots + a_n < x_i, x_n > \\ &= a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0 + \ldots + a_i < x_i, x_i > + a_n \cdot 0 \end{aligned}$$

elde edilir.

$x_i \neq 0$ olduğu için $a_i = 0, i = 1, 2, \ldots, n$ dir. Buna göre E kümesi lineer bağımsızdır.

8.13. Tanım: V, n boyutlu bir vektör uzayı olsun. V'de sıfırdan farklı $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \ldots, \overrightarrow{x_n}$ vektörleri ortogonal ise bu vektörlerin kümesi V için bir ortogonal tabandır. Eğer $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \ldots, \overrightarrow{x_n}$ vektörleri ortonormal ise bu vektörlerin kümesi V için bir ortonormal tabandır.

Örnek: $E = \{(0,2,5), (-2,1,0), (1,0,1)\}$ vektör kümesi $\mathbb{R}^3$ ün ortogonal bir tabanı mıdır?

Çözüm: Bir vektör uzayı için ortogonal taban olması demek tabandaki vektörlerin ortogonal olması demektir.

$$E = \{(0,2,5), (-2,1,0), (1,0,1)\}$$

kümesi $\mathbb{R}^3$ için bir tabandır ($\mathbb{R}^3$ te lineer bağımsız üç vektör). Bu tabanın ortogonal olup olmadığını araştıralım:

$$< (0,2,5), (-2,1,0) > = 0 \,.(-2) + 2 \,.\, 1 + 5 \,.\, 0 = 2 \neq 0$$

olduğu için E kümesi $\mathbb{R}^3$ ün bir ortogonal tabanı değildir.

Örnek: $E = \{x, 1 + x\}$ kümesi $P_1(\mathbb{R})$ nin ortogonal bir tabanı mıdır?

Çözüm: E kümesi $P_1(\mathbb{R})$ için bir tabandır. Ortogonal taban olması için E'nin ortogonal bir küme olması gerekir, buna göre

$$< x, 1 + x >= 0$$

olmalıdır.

$$< x,1+x >= \int_0^1 x(1+x)\,dx = \int_0^1 (x+x^2)\,dx = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 = \frac{5}{6} \neq 0$$

olduğundan E kümesi $P_1(\mathbb{R})$ nin ortogonal bir tabanı değildir.

8.14. Teorem: V, n boyutlu bir iç çarpım uzayı olsun. V'nin bir $E = \{\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \dots, \overrightarrow{x_n}\}$ tabanı ortonormal bir tabana dönüştürülebilir.

Teoremin ispatı okuyucuya bırakılmıştır. //

Sonlu boyutlu V vektör uzayının, herhangi bir tabanından yararlanarak bir ortonormal tabanını bulmak için izlenen yönteme Gram - Schmidt ortonormalleştirme yöntemi denir. $E = \{\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \dots, \overrightarrow{x_n}\}$ kümesi V nin herhangi bir tabanı ise E kümesini, Gram - Schmidt ortonormalleştirme yöntemini kullanarak V için ortonormal bir taban bulalım:

$E = \{\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \dots, \overrightarrow{x_n}\}$, V'nin bir tabanı olmak üzere

i) $\overrightarrow{y_1} = \overrightarrow{x_1}$ alalım.

ii) $$\overrightarrow{y_n} = \overrightarrow{x_n} - \frac{<\overrightarrow{x_n},\overrightarrow{y_1}>}{<\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{y_1}>}\overrightarrow{y_1} - \frac{<\overrightarrow{x_n},\overrightarrow{y_2}>}{<\overrightarrow{y_2},\overrightarrow{y_2}>}\overrightarrow{y_2} - \dots - - \frac{<\overrightarrow{x_n},\overrightarrow{y_{n-1}}>}{<\overrightarrow{y_{n-1}},\overrightarrow{y_{n-1}}>}\overrightarrow{y_{n-1}}$$

denkleminden sırasıyla $\overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{y_2}, \dots, \overrightarrow{y_n}$ vektörleri bulunur. $\{\overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{y_2}, \dots, \overrightarrow{y_n}\}$ kümesi V'nin ortogonal bir tabanıdır.

iii) $\overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{y_2}, \dots, \overrightarrow{y_n}$ vektörlerinin birim vektörleri sırasıyla $\overrightarrow{z_1}, \overrightarrow{z_2}, \dots, \overrightarrow{z_n}$ ise $S = \{\overrightarrow{z_1}, \overrightarrow{z_2}, \dots, \overrightarrow{z_n}\}$ kümesi V'nin bir ortonormal tabanıdır.

Örnek: Gram-Schmidt ortonormalleştirme yöntemiyle $\mathbb{R}^3$ için bir ortonormal taban bulunuz.

Çözüm: $\mathbb{R}^3$ ün herhangi bir tabanını alalım:

$E = \{(1,1,1),(1,0,2),(1,2,3)\}$ kümesi $\mathbb{R}^3$ için bir tabandır (Neden?). $y_1 = x_1 = (1,1,1)$ alalım.

$$\vec{y_2} = \vec{x_2} - \frac{<\vec{x_2},\vec{y_1}>}{<\vec{y_1},\vec{y_1}>}\vec{y_1} = (1,0,2) - \frac{<(1,0,2),(1,1,1)>}{<(1,1,1,),(,1,1,1)>}(1,1,1)$$

$$\vec{y_2} = (1,0,2) - \frac{3}{3}(1,1,1) = (0,-1,1)$$

$$\vec{y_3} = \vec{x_2} - \frac{<\vec{x_2},\vec{y_1}>}{<\vec{y_1},\vec{y_1}>}\vec{y_1} - \frac{<\vec{x_3},\vec{y_2}>}{<\vec{y_2},\vec{y_2}>}\vec{y_2}$$

$$= (1,2,3) - \frac{<(1,2,3),(1,1,1)>}{<(1,1,1,),(1,1,1)>}(1,1,1) - \frac{<(1,2,3),(0,-1,1)>}{<(0,-1,1,),(0,-1,1)>}(0,-1,1)$$

$$= (1,2,3) - \frac{6}{3}(1,1,1) - \frac{1}{2}(0,-1,1)$$

$$= (1,2,3) - (2,2,2) - \left(0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

$$= \left(-1,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

Böylece, $\left\{(1,1,1),(0,-1,1),\left(-1,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right\}$ kümesi $\mathbb{R}^3$ için ortogonal bir tabandır. Bu tabanın bir ortonormal taban olması için her vektörün birim vektörü bulunur. $\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1), \frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,1), \frac{2}{\sqrt{6}}\left(-1,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ vektörleri sırasıyla $(1,1,1),(0,-1,1),\left(-1,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ vektörlerinin birim vektörleridir. Dolayısıyla

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1), \frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,1), \frac{2}{\sqrt{6}}\left(-1,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right\}$$

kümesi $\mathbb{R}^3$ için bir ortonormal tabandır.

Örnek: $P_1(\mathbb{R})$ nin $\{1, 2+x\}$ tabanını kullanarak $P_1(\mathbb{R})$ için bir ortonormal taban bulunuz.

Çözüm: $\{1, 2+x\}$ kümesi $P_1(\mathbb{R})$ nin bir tabanı olduğuna göre $y_1 = x_1 = 1$ alalım.

$$\vec{y_2} = \vec{x_2} - \frac{<\vec{x_2},\vec{y_1}>}{<\vec{y_1},\vec{y_1}>}\vec{y_1} = 2 + x\frac{<2+x,1>}{<1,1>}1$$

$$= 2 + x\frac{\int_0^1 (2+x)dx}{\int_0^1 dx} = -\frac{1}{2} + x$$

$\left\{1, -\frac{1}{2} + x\right\}$ kümesi ortogonal bir tabandır.

$-\frac{1}{2} + x$ vektörünün birim vektörünü bulalım.

$$\left\|-\frac{1}{2}+x\right\| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}+x\right)\left(-\frac{1}{2}+x\right)}$$
$$= \sqrt{\int_0^1 \left(-\frac{1}{2}+x\right)^2 dx}$$
$$= -\sqrt{3}+2\sqrt{3}x$$

$\{1, -\sqrt{3}+2\sqrt{3}x\}$ kümesi ortonormal bir tabandır.

DOĞRULTMAN VEKTÖRÜ ve DOĞRULTMAN KOSİNÜSLERİ

8.14. Tanım: $ax + by + c = 0$ doğrusunda,

$$\vec{A} = -b\vec{i} + a\vec{j} \text{ veya } \vec{B} = b\vec{i} - a\vec{j}$$

vektörlerine doğrultman vektörleri denir. Benzer şekilde $ax + by + cz + d = 0$ doğrusu içinde tanımlanır.

Örnek: $3x + 2y - 1 = 0$ doğrusunun doğrultman vektörü arasındakiler hangisidir?

Çözüm: $\vec{A} = -2\vec{i} + 3\vec{j}$ veya $\vec{B} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$

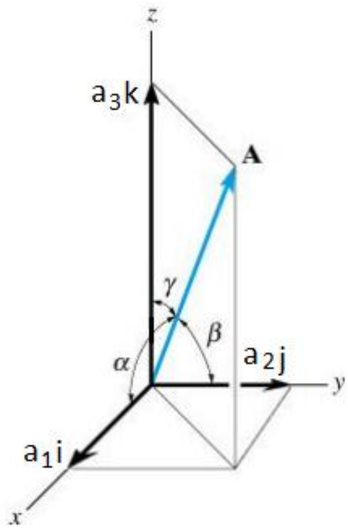
Örnek: $d : 2x - 5y + 3 = 0$ doğrusuna paralel ve dik iki vektör bulunuz.

Çözüm: $a = 2$ ve $b = -5$ olup $\vec{A} = 5\vec{i} + 2\vec{j}$ vektörü doğrunun doğrultman vektörüdür. $\vec{A}//d$ yazılabilir. $\vec{B} = 2\vec{i} + 5\vec{j}$ vektörü doğrya dik vektördür ve $\vec{B} \perp d$ yazılabilir.

8.15. Tanım: Bir uzayda $\vec{A} = (a_1, a_2, a_3)$ vektörü verilsin.

$$\cos\alpha = \frac{a_1}{\|\vec{A}\|}, \cos\beta = \frac{a_2}{\|\vec{A}\|}, \cos\gamma = \frac{a_3}{\|\vec{A}\|}$$

olmak üzere $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ sayı üçlüsüne doğrultman kosinüsleri denir.



$\vec{A}$ ile aynı yöndeki birim vektör $\frac{a_1}{\|\vec{A}\|}, \frac{a_2}{\|\vec{A}\|}, \frac{a_3}{\|\vec{A}\|}$ bileşenlerine sahiptir.

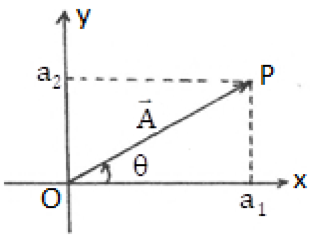
Doğrultman kosinüsler için,

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{x_1^2+y_1^2+z_1^2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}^{\,2}} = 1$$

eşitliği vardır.

Bu durumda bize gösteriyor ki sıfırdan farklı olan her vektör kendi doğrultu ve yönünde bir birim vektöre sahiptir.

Yukarıdaki tanıma göre düzlemde bir $\vec{A}$ vektörünü tanımlayıp, doğrultman kosinüsleri;



$$\vec{A} = \overrightarrow{OP} = (a_1, a_2)$$
$$\vec{A} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

Doğrultman kosinüsleri $\cos\alpha = \frac{a_1}{\|\vec{A}\|}$, $\sin\alpha = \frac{a_2}{\|\vec{A}\|}$ şeklindedir.

Örnek: $\vec{A} = (2, -2, 1)$ vektörünün doğrultman kosinüslerini bulunuz?

Çözüm: $\|\vec{A}\| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{9} = 3$

$$\cos\alpha = \frac{a_1}{\|\vec{A}\|} = \frac{2}{3}, \cos\beta = \frac{a_2}{\|\vec{A}\|} = -\frac{2}{3}, \cos\gamma = \frac{a_3}{\|\vec{A}\|} = \frac{1}{3}$$

elde edilir.

Örnek: $\vec{A} = (1, \sqrt{3})$ vektörünün büyüklüğünü ve doğrultman kosinüslerini bulunuz?

Çözüm: $\vec{A} = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = 2$

$$\cos\alpha = \frac{a_1}{\|\vec{A}\|} = \frac{1}{2}, \cos\beta = \frac{a_2}{\|\vec{A}\|} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

olur.

Örnek: $\vec{A} = (-5, 1, 2)$ vektörünün doğrultman kosinüslerini bulunuz.

Çözüm: $\|\vec{A}\| = \sqrt{(-5)^2 + 1 + 2^2} = \sqrt{30}$

$$\cos\alpha = \frac{a_1}{\|\vec{A}\|} = -\frac{5}{\sqrt{30}}, \cos\beta = \frac{a_2}{\|\vec{A}\|} = \frac{1}{\sqrt{30}}, \cos\gamma = \frac{a_3}{\|\vec{A}\|} = \frac{2}{\sqrt{30}}$$

HİPERDÜZLEM

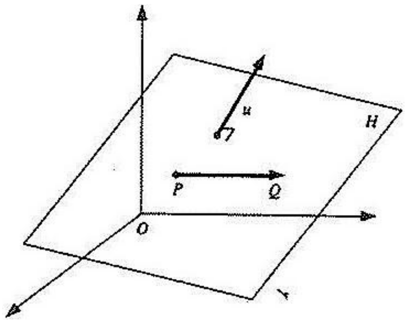
8.16. Tanım: $\mathbb{R}^n$ de $P(a_1, a_2, \dots, a_n)$ noktası verilmiş olsun.

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

lineer denklemi sağlayan $X(x_1, x_2, \dots, x_n)$ noktasının kümesine H hiperdüzlem denir.

Özel olarak $\mathbb{R}^2$ de hiperdüzlem bir doğrudur ve $\mathbb{R}^3$ de hiperdüzlem bir düzlemdir.

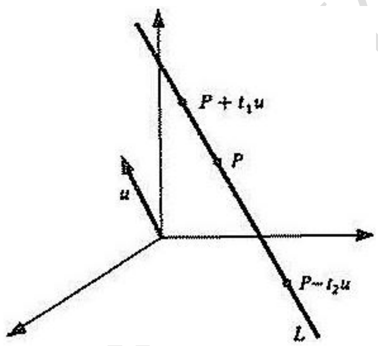
$P, Q \in H$ olmak üzere herhangi $\overrightarrow{PQ}$ doğru parçasının $\vec{u}$ normal vektörüne dik (ortogonal) olması gerekir.



$\mathbb{R}^n$ de $P(a_1, a_2, \dots, a_n)$ noktasından geçen ve sıfırdan farklı $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ vektörü yönünde olan bir L doğrusu

$$X = P + tu \text{ veya } \begin{cases} x_1 = a_1 + u_1 t \\ x_2 = a_2 + u_2 t \\ \quad \dots \\ x_n = a_n + u_n t \end{cases}$$

ifadesini sağlayan $X(x_1, x_2, \dots, x_n)$ noktalarından oluşur, burada t parametresi bütün reel sayıları tarar.



Örnek: $\mathbb{R}^4$ de $P(1, 3, -4, 2)$ noktasından geçen ve $\vec{u} = (4, -2, 5, 6)$ vektörü normal (dik) olan H hiperdüzlemini düşünelim. Bunun denklemi

$$4x - 2y + 5y + 6t = k$$

biçiminde olmalıdır. Bu denklemde P'nin koordinatları x,y,z yerlerine yazılır ve

$$4 \cdot 1 - 2 \cdot 3 + 5(-4) + 6 \cdot 2 = k$$
$$k = -10$$

elde edilir. Böylece H'nın denklemi, $4x - 2y + 5y + 6t = -10$ dir.

Örnek: $\mathbb{R}^4$ de $P(1, 2, 3, -4)$ noktasından geçen ve $\vec{u} = (5,6, -7, 8)$ vektörü yönünde olan L doğrusunu düşünelim. L'nin bir parametrik gösterimi;

$$x_1 = 1 + 5t, x_2 = 2 + 6t, x_3 = 3 - 7t, x_4 = -4 + 8t$$
$$(1 + 5t, 2 + 6t, 3 - 7t, -4 + 8t)$$

$t = 0$ bize P noktasının L üzerinde olması gerektiğini belirtir.

Örnek: $\mathbb{R}^4$ de $P(3,-2,1,-4)$ noktasından geçen ve $\vec{u}=(2,5,-6,-2)$ vektörüne dik olan H hiperdüzleminin deklemini bulunuz.

Çözüm: H hiperdüzlemi $\vec{u}$ ya normal (dik) olduğundan $2x+5y-6z-2t=k$ denklemine sahiptir. P'yi bu denklemde yerine yazarak $k=-2$ buluruz. Böylece H'nın bir denklemi $2x+5y-6z-2t=-2$ olur.

Örnek (Tüketicinin Bütçe Denklemi): Bir tüketicinin gelirini Y ile ifade edelim. Tüketicinin bütçe denklemi, onun her maldan tükettiği miktarların parasal değerlerinin toplamının, gelirine eşit olduğu noktalardan oluşan kümedir. Fiyatlar eksi olmayan sayılar olduğundan $a>0_n$, $a\in\mathbb{R}^n$ dır, $x\in\mathbb{R}^n$ da, tüketicinin her bir maldan tükettiği miktarları göstersin. O halde bütçe denklemi

$$\{x\in\mathbb{R}^n : \langle a,x\rangle = Y, a\in\mathbb{R}^n\}$$

hiperdüzlemi ile gösterilir.

8.17. Tanım: Bir $L\subseteq\mathbb{R}^n$ lineer alt uzayı için

$$L^{\perp}=\{y\in\mathbb{R}^n : \langle y,x\rangle = 0, \forall\, x\in L\}$$

şeklinde tanımlanan küme de bir lineer alt uzay olup L lineer alt uzayının ortogonal tümleyeni olarak adlandırılır. Her $x\in\mathbb{R}^n$ vektörü $x_1\in L, x_1\in L^{\perp}$ olmak üzere $x=x_1+x_2$ şekilde tek türlü bir yazılısa sahiptir ve $\mathrm{Boy}(L)+\mathrm{Boy}(L^{\perp})=n$ dir. Özel olarak L bir hiperdüzlem oldugunda $L^{\perp}$ alt uzayı 1 boyutlu bir doğru olur.

8.15. Teorem: Herhangi bir $H\subset\mathbb{R}^n$ hiperdüzlemi, belli bir $\emptyset\neq a\in\mathbb{R}^n$ vektörü ve $b\in\mathbb{R}$ sayısı için $H=\{x\in\mathbb{R}^n : \langle a,x\rangle = b\}$ kümesi ile gösterilebilir. Üstelik bu biçimde verilen her küme bir hiperdüzlemdir.

İspat. H kümesi $\mathbb{R}^n$'de bir hiperdüzlem olsun. Bu durumda H'nin boyutu $n-1$'dir ve $n-1$ boyutlu bir L lineer alt uzayı vardır ve belli bir $x_0\in\mathbb{R}^n$ için $H=L+x_0$ geçerlidir. $\mathrm{Boy}(L)=n-1$ oldugundan $\mathrm{Boy}(L^{\perp})=1$ olur, dolayısıyla bir $\emptyset\neq a\in\mathbb{R}^n$ vektörü için $L^{\perp}=\{\lambda a : \lambda\in\mathbb{R}\}$ geçerlidir.

$$\begin{aligned} x\in H &\Leftrightarrow x-x_0\in\mathbb{R}, \lambda\in\mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \langle \lambda a, x-x_0\rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \langle a, x-x_0\rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \langle a,x\rangle = < a, x_0 > \end{aligned}$$

elde edilir. $b=\langle a,x_0\rangle$ denirse $H=\{x\in\mathbb{R}^n : \langle a,x\rangle = b\}$ bulunur.

8.18. Tanım: Hiperdüzlemlerin $H = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle a,x \rangle = b\}$ yazılışlarındaki $\emptyset \neq a$ vektörüne H hiperdüzleminin bir normal vektörü denir.

Örnek: $\mathbb{R}^2$ uzayında $x + 2y = 4$ denkleminin belirledigi H hiperdüzlemini yazınız. H hiperdüzleminin paralel oldugu L alt uzayını yazınız. $H_1 = (1, -4) + H$ paralel hiperdüzlemini belirleyiniz.

Çözüm:
$H = \{(x;\ y) :\ x + 2y = 4\} = \{(x;\ y): \langle (x,y), (1,2) \rangle = 4$
$L = \{(x;\ y) :\ \langle (x,y), (1,2) \rangle = 0\}$

$$\begin{aligned} H_1 &= (1, -4) + H \\ &= \{x + 1, y - 4): x + 2y = 4\} \\ &= \{(k; t): k - 1 + 2(t + 4) = 4\} \\ &= \{(k; t): k + 2t = -3\} \\ &= \{(x; y): x + 2y = -3\} \\ &= \{(x; y): \langle (x,y), (1,2) \rangle = -3\} \end{aligned}$$

8.12. Sonuç: Aşikar çözüme sahip olmayan bir lineer denklemin çözüm kümesi bir hiperdüzlemdir.

8.19. Tanım: Bir $H = \{x \in \mathbb{R}^n :\ \langle a, x \rangle = b\}$ hiperdüzlemi $\mathbb{R}^n$ uzayında
$H^{\leq} = \{x \in \mathbb{R}^n :\ \langle a, x \rangle \leq b\}$ ya da $H^{<} = \{x \in \mathbb{R}^n :\ \langle a, x \rangle < b\}$
$H^{\geq} = \{x \in \mathbb{R}^n :\ \langle a, x \rangle \geq b\}$ ya da $H^{>} = \{x \in \mathbb{R}^n :\ \langle a, x \rangle > b\}$
olmak üzere iki yarı-uzaya ayırır. Buradaki $H^{\leq}$ ve $H^{\geq}$ uzaylarına H hiperdüzleminin belirledigi kapalı yarı-uzaylar, $H^{<}$ ve $H^{>}$ uzaylarına da H hiperdüzleminin belirledigi açık yarı-uzaylar denir. Kapalı yarı-uzaylar birer kapalı küme ve açık yarı-uzaylar da birer açık kümedir.

8.20. Tanım: Eğer bir $H = \{x : \langle a, x \rangle = b\}$ hiperdüzlemi bir M kümesinin bir sınır noktasını içeriyor ve bu M kümesinin tamamı H hiperdüzleminin tamamen bir tarafında kalıyorsa (H hiperdüzleminin doğurdugu yarı uzaylardan yalnızca biri tarafından kapsanıyorsa) H hiperdüzlemi M kümesi için bir destek hiperdüzlemdir denir.

Başka bir deyişle $\forall\ m \in M$ için $\langle a, m \rangle \leq b$ ya da $\langle a, m \rangle \geq b$ eşitsizliklerinden biri eşitlik haliyle birlikte gerçekleşiyor ise $H = \{x : \langle a, x \rangle = b\}$ hiperdüzlemi M kümesini destekler denir.

ÇÖZÜMLÜ ALIŞTIRMALAR

1. $\overrightarrow{x_1} = (1, p, 0)$, $\overrightarrow{x_2} = (1, 1, 0)$, $\overrightarrow{x_3} = (-3, 2, 4)$ vektörleri lineer bağımlı iseler p nedir?

Çözüm: $a_1\overrightarrow{A_1} + a_2\overrightarrow{A_2} + a_3\overrightarrow{A_3} = \vec{0}$

$$a_1(1, p, 0) + a_2(1, 1, 0) + a_3(-3, 2, 4) = (0, 0, 0)$$

$$\left.\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 &= 0 \\ pa_1 + a_2 + 2a_3 &= 0 \\ 4a_3 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

bulunur. Sistemin en az bir çözümü olmalıdır. Bunun için de katsayılar determinantı sıfır olmalıdır.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ p & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 1 \\ p & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix} = 0$$

$$4 - 4p = 0$$
$$p = 1$$

2. $\vec{A} = (-1, 2), \vec{B} = (k, 8)$ vektörleri $\mathbb{R}^2$ de taban belirtmesi için k ne olmamalıdır?

Çözüm: Lineer bağımsız olma şartından $\begin{vmatrix} -1 & k \\ 2 & 8 \end{vmatrix} \neq 0$ olmalıdır.

$$-8 - 2k \neq 0$$
$$k \neq -4$$

3. $V = \{a_2x^2 + a_1x + a_0 \;:\; a_2, a_1, a_0\}$ ikinci dereceden polinomların kümesinde $P_1(x) = x^2$, $P_2(x) = x - 1$ ve $P_3(x) = 3x$ polinomunun bir taban olduğunu gösteriniz.

Çözüm: i) $P_1(x), P_2(x)$ ve $P_3(x)$ vektörleri lineer bağımsız olduğunu gösterelim.

$$a_1P_1(x) + a_2P_2(x) + a_3P_3(x) = 0$$
$$a_1x^2 + a_2(x - 1) + a_3(3x) = 0$$

$$a_1x^2 + (a_2 + 3a_3)x - a_2 = 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0$$

polinomların eşitliğinden

$$a_1 = 0, (a_2 + 3a_3) = 0, a_2 = 0$$
$$a_1 = a_2 = a_3 = 0$$

olduğundan vektörler lineer bağımsızdır.

ii) $P_1(x)$,$P_2(x)$ ve $P_3(x)$ vektörleri V de üretir olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} b_2x^2 + b_1x + b_0 &= a_1P_1(x) + a_2P_2(x) + a_3P_3(x) \\ &= a_1x^2 + a_2(x-1) + a_3 3x \\ &= a_1x^2 + (a_2 + 3a_3)x - a_2 \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= b_2 \\ a_2 + 3a_3 &= b_1 \\ -a_2 &= 3b_0 \end{aligned}\right\} \text{sisteminde}$$

$$a_1 = b_2, a_2 = -b_0 \text{ ve } a_3 = \frac{b_0+b_1}{3}$$

bulunur. O halde

$$b_2x^2 + b_1x + b_0 = b_2P_1(x) - b_0P_2(x) + \frac{b_0+b_1}{3}P_3(x)$$

yazılabilir ki $P_1(x)$, $P_2(x)$ ve $P_3(x)$ V uzayında üretirler, yani tabandırlar.

4. $4x - 3y + 2 = 0$ doğrusu ile $2x - y + 1 = 0$ doğrusunun arasındaki açının cosinüsü nedir?

Çözüm: $ax + by + c = 0$ doğrusunun doğrultman vektörü $\vec{V} = (-b, a)$ olduğuna göre,

$4x - 3y + 2 = 0$ doğrusunun doğrultman vektörü $\vec{V}_1 = (3,4)$ dir.

$2x - y + 1 = 0$ doğrusunun doğrultman vektörü $\vec{V}_2 = (1,2)$ dir.

Ayrıca $\cos\alpha = \dfrac{\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_1}{\|\vec{V}_1\|\|\vec{V}_1\|}$ olduğuna göre,

$$\cos\alpha = \frac{3\cdot1+4\cdot2}{\sqrt{3^2+4^2}\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{11}{5\sqrt{5}}$$

dir.

5. $\vec{A} = (x, 2, 0)$, $\vec{B} = (1, y, 0)$, $\vec{C} = (2, 0, 1)$ vektörleri lineer bağımlı ise, xy nedir?

Çözüm: Bu üç vektörün lineer bağımlı olması için, bu vektörlerin koordinatlarından meydana gelen determinantın değerinin sıfır olması gerekir.

$$\begin{vmatrix} x & 2 & 0 \\ 1 & y & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(-1)^{3+3} \cdot 1 \begin{vmatrix} x & 2 \\ 1 & y \end{vmatrix} = 0$$

$xy - 2 = 0$
$xy = 2$

6. $\vec{A} = (0,3,1), \vec{B} = (1,2,1), \vec{C} = (x,0,2)$ vektörleri lineer bağımlı iseler x'in değeri nedir?

Çözüm: $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ vektörlerinin doğrusal bağımlı olması için determinantı 0 olmalıdır. Öyleyse,

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ x & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$x = -1$

dir.

7. $(a,b) \in \mathbb{R}^2, (a \neq 0)$ vektörünün (3, 2), (6, 4) vektörlerinin ürettiği alt–uzayın bir elemanı olması için a, b arasında nasıl bir bağıntı bulunmalıdır?

Çözüm: (3, 2), (6, 4) vektörleri doğrusal olduğundan (a, b) vektörü de bu vektörle doğrusal olmak durumundadır.

$$\frac{3}{2} = \frac{6}{4} = \frac{a}{b} \text{ ise } 2a = 3b$$

8. $\vec{A} = (x,5), \vec{B} = (-6,-10)$ vektörleri doğrusal bağımlı olduğuna göre, a kaçtır?

Çözüm: Lineer bağımlı iki vektör birbirlerine paralel veya çakışıktır.

$$\frac{x}{5} = \frac{-6}{-10}$$

$x = -3$

KAYNAKÇA

1. H. Hilmi Hacısalihoğlu, Lineer Cebir, Gazi Üniversitesi Yayınları, Ankara, 1975.
2. Hüseyin Bilgiç, Lineer Cebir Ders Notları, Kahramanmaraş Sütçü İmam Üniversitesi, Kahramanmaraş, 2015.
3. M. Zeki DERMAN, Ökkeş ÖZKÖSELER, Serdar GÜLMEZ, Matematik III Zafer Yayınları, Ankara, 2005.
4. Ahmet HANÇERLİOĞLU, Faniye ALAN, Üniversiteye Hazırlık Matematik Seti, Tümay Yayınları, İstanbul Yayıncılık, 2006, Ankara.
5. Seymeur LİPSCHUTZ Ph. Dr., Çev. H. Hilmi HACISALİHOĞLU, Schaum Serisinden Lineer Cebir, Japonya.
6. Yrd. Doç. Dr. Nezahat ÇETİN, Öğr. Grv. Dr. Nevin ORHUN, Lineer Cebir, Anadolu Üniversitesi Yayınları: 1074, AÖF Yayınları: 589, 1998, Eskişehir.
7. Ali Rıza İLDENİZ, İsmet PARILDAR, Kemal ALAGÖZ, Tacim GÖLPINAR, Sayısal 1-2, Modern Matematik, Yıldırım Yayınları, 1986, ANKARA.
8. Doç. Dr. M. Kemal Sağel, Vektörel Analiz, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi döner sermaye işletmesi yayınları, No: 67, 2003, Ankara.
9. Thomas Calculus 2, George B. Thomas Jr., Massachusetts Institute of Technology, Maurice D. Weir, Naval Postgraduate School, Joel Hass, University of California Davis, Frank R. Giordano, Naval Postgraduate School, Çeviren: Recep Korkmaz, Beta Yayıncılık, İstanbul, 2010.
10. Murray R. Spiegel, İleri Matematik, Çev. Prof. Dr. H. Hilmi HACISALİHOĞLU, Schaum Yayınları, Nobel Yayın Dağıtım, 1997, Ankara.
11. Prof. Dr. F. Nejat EKMEKCİ, Prof. Dr. Yusuf YAYLI, Doç.Dr. İsmail GÖK, Ankara Üniversitesi, Ders Notları, 2021Ankara.