# 2. BÖLÜM
# NÜMERİK BAYAĞI DENKLEMLER

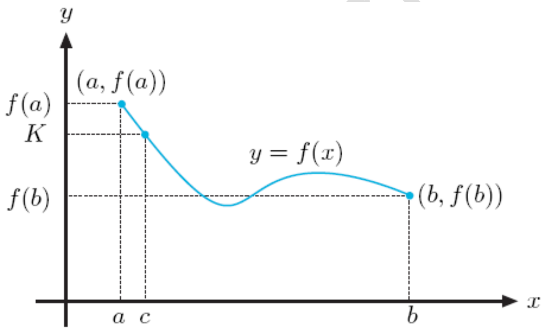


## GİRİŞ

Bu bölümde cebirsel denklemler, rasyonel denklemler, üstel denklemler, logaritmik denklemler, trigonometrik denklemler gibi denklemlerin yaklaşık çözümleri üzerine durulacaktır.

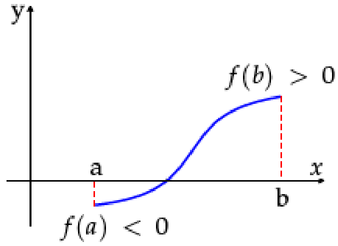
## 1. İKİYE BÖLME YÖNTEMİ

**2.1. Teorem (Ara Değer Teoremi):** f, [a, b] aralığında sürekli bir fonksiyon olsun. $f(a)$ ile $f(b)$ arasında K gibi bir sayı varsa, $f(c)=K$ olacak şekilde en az bir $c\in[a,b]$ vardır.




Bu teoremin ispatı grafikten çok açık olduğundan ispata gerek görülmemiştir.

**2.1. Sonuç:** f, [a, b] aralığında sürekli bir fonksiyon olsun. $x=a$ ve $x=b$ arasında bir çözüm varsa $f(a).f(b)<0$ dir.



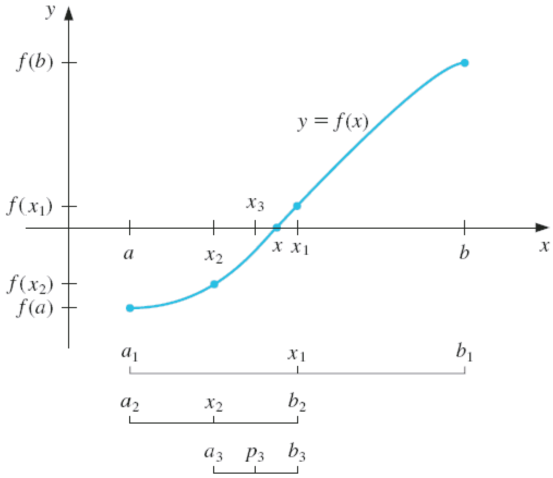

İkiye bölme yöntemi algoritması şu şekildedir.

1. Adım: Verilen veya tahmin edilen bir [a, b] aralığı $f(a).f(b)<0$ olacak şekilde belirlenir.

2. Adım: Fonksiyonun kökünün ilk tahmin $p_1=\dfrac{a+b}{2}$ ile bulunur.

3. Adım: Fonksiyonun kökünü yeni bulunan değere göre hangi alt aralıkta olduğunu bulmak için aşağıdaki hesaplar yapılır;

- $f(p_1)f(a)<0$ ise kök $[a,\ p_1]$ arasındadır. O halde yeni kök tahmini yapmak için 2. Adıma dönülür.
- $f(p_1)f(b)<0$ ise kök $[p_1,\ b]$ arasındadır. O halde yeni kök tahmini yapmak için 2. Adıma dönülür.




**Örnek:** $f(x)=x^3-2x-1$ denkleminin bir kökünü ikiye bölme yöntemiyle bulunuz.

Çözüm: Öncelikle denklemin kökünün hangi aralıkta olduğunu bulalım.

$$f(1)=1^3-2.1-1=-2 \text{ ve } f(2)=2^3-2.2-1=3$$

olup $f(1)f(2)<0$ olacağından denklemin kökü [1, 2] aralığındadır.

$$x_1=\frac{a+b}{2}=\frac{1+2}{2}=1{,}5$$

olur. Buna göre $f(1{,}5)=(1{,}5)^3-2.(1{,}5)-1=-0{,}625$ olduğundan kök $[1{,}5;2]$ aralığında aranmalıdır.

$$x_2=\frac{x_1+b}{2}=\frac{1{,}5+2}{2}=1{,}75$$

olur. Buna göre $f(1{,}75)=(1{,}75)^3-2.(1{,}75)-1=0{,}839375$ olduğundan kök $[1{,}5;1{,}75]$ aralığında aranmalıdır.

$$x_3=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{1,5+1,75}{2}=1,625$$

olur. Buna göre $f(1,625)=(1,625)^3-2.(1,625)-1=0,0415625$ olduğundan kök $[1,5;1,625]$ aralığında aranmalıdır.

$$x_4=\frac{x_1+x_3}{2}=\frac{1,5+1,625}{2}=1,5625$$

olur. Buna göre $f(1,5625)=(1,5625)^3-2.(1,5625)-1=-0,310302734$ olduğundan kök $[1,5625;1,625]$ aralığında aranmalıdır.

$$x_5=\frac{x_4+x_3}{2}=\frac{1,5625+1,625}{2}=1,59375$$

olur. Buna göre $f(1,59375)=(1,59375)^3-2.(1,59375)-1=-0,139312744$ olduğundan kök $[1,59375;1,625]$ aralığında aranmalıdır.

$$x_6=\frac{x_5+x_3}{2}=\frac{1,59375+1,625}{2}=1,609375$$

olur. Buna göre $f(1,609375)=(1,609375)^3-2.(1,609375)-1=-0,050327301$ olduğundan kök $[1,609375;1,625]$ aralığında aranmalıdır.

Yaklaşık bağıl hata;

$$\varepsilon_a=\left|\frac{p_i-p_{i-1}}{p_i}\right|=\left|\frac{1,618033989-1,609375}{1,618033989}\right|=0,0055=0,55.10^{-2}$$

olduğundan denklemin kökü $x\approx\frac{1,609375+1,625}{2}=1,6171875$ olur.

EXCEL PROGRAMI

$f(x)=x^3-2x-1$ fonksiyonu için 1. adım

f(alt Sınır): $f_x$ =C5^3-2*C5-1
f(üst sınır): $f_x$ =D5^3-2*D5-1
ikiye bölme: $f_x$ =(C5+D5)/2
f(ikiye bölme): $f_x$ =G5^3-2*G5-1
Bağıl hata oranı: $f_x$ =MUTLAK((1,618-G5)/1,618)*100
alt sınır (2. adım): $f_x$ =EĞER(H5<0;G5;C5)
üst sınır (2. adım): $f_x$ =EĞER(H5>0;G5;D5)

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | | | | |
| 2 | | | $f(x)=x^3-2x-1$ | | Yaklaşık Değer = 1,6183033989 | | | | | |
| 3 | | | | | | | | | | |
| 4 | | | alt sınır | üst sınır | f(alt sınır) | f(üst sınır) | İkiye bölme | f(ikiye bölme) | Bağıl Hata Oranı (%) | |
| 5 | | 1. adım | 1 | 2 | -2 | 3 | 1,5 | -0,625 | 7,31 | |
| 6 | | 2. adım | 1,5 | 2 | -0,625 | 3 | 1,75 | 0,859375 | 8,14 | |
| 7 | | 3. adım | 1,5 | 1,75 | -0,625 | 0,859375 | 1,625 | 0,041015625 | 0,41 | |
| 8 | | 4. adım | 1,5 | 1,625 | -0,625 | 0,041015625 | 1,5625 | -0,310302734 | 3,45 | |
| 9 | | 5. adım | 1,5625 | 1,625 | -0,310302734 | 0,041015625 | 1,59375 | -0,139312744 | 1,52 | |
| 10 | | 6. adım | 1,59375 | 1,625 | -0,139312744 | 0,041015625 | 1,609375 | -0,050327301 | 0,55 | |
| 11 | | | | | | | | | | |

**Örnek:** $f(x)=x-\cos$ denkleminin bir kökünü ikiye bölme yöntemiyle bulunuz.

Çözüm: Öncelikle denklemin kökünün hangi aralıkta olduğunu bulalım.

$$f(0)=0-\cos 0=-1 \text{ ve } f(1)=1-\cos 1=0{,}459697694$$

olup $f(0)f(1)<0$ olacağından denklemin kökü [0, 1] aralığındadır.

$$x_1=\frac{a+b}{2}=\frac{0+1}{2}=0{,}5$$

olur. Buna göre $f(0{,}5)=(0{,}5)-\cos 0{,}5=-0{,}377582562$ olduğundan kök $[0{,}5;1]$ aralığında aranmalıdır.

$$x_2=\frac{x_1+b}{2}=\frac{0{,}5+1}{2}=0{,}75$$

olur. Buna göre $f(0{,}75)=(0{,}75)-\cos 0{,}75=0{,}018311131$ olduğundan kök $[0{,}5;0{,}75]$ aralığında aranmalıdır.

$$x_3=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{0{,}5+0{,}75}{2}=0{,}625$$

olur. Buna göre $f(0{,}625)=(0{,}625)-\cos 0{,}625=-0{,}18596312$ olduğundan kök $[0{,}625;0{,}75]$ aralığında aranmalıdır.

$$x_4=\frac{x_3+x_2}{2}=\frac{0{,}625+0{,}75}{2}=0{,}6875$$

olur. Buna göre $f(0{,}6875)=(0{,}6875)-\cos 0{,}6875=-0{,}085334946$ olduğundan kök $[0{,}6875;0{,}75]$ aralığında aranmalıdır.

$$x_5=\frac{x_4+x_2}{2}=\frac{0{,}675+0{,}75}{2}=0{,}71875$$

olur. Buna göre $f(0{,}71875)=(0{,}71875)-\cos 0{,}71875=-0{,}0338779372$ olduğundan kök $[0{,}71825;0{,}75]$ aralığında aranmalıdır.

Yaklaşık bağıl hata;

$$\varepsilon_a = \left|\frac{p_i - p_{i-1}}{p_i}\right| = \left|\frac{0{,}73425 - 0{,}75}{0{,}75}\right| = 0{,}021 = 0{,}21.10^{-1}$$

olduğundan denklemin kökü $x \approx \dfrac{0{,}71825 + 0{,}75}{2} = 0{,}73425$ olur.

EXCEL PROGRAMI

$f(x) = x - \cos$ fonksiyonu için 1. adım

f(alt Sınır): $f_x$=C16-COS(C16)
f(üst sınır): $f_x$ =D16-COS(D16)
ikiye bölme: $f_x$ =(C16+D16)/2
f(ikiye bölme): $f_x$ =G16-COS(G16)
Bağıl hata oranı: $f_x$ =MUTLAK((0,739085133-G16)/0,739085133)*100
alt sınır (2. adım): $f_x$ =EĞER(H16<0;G16;C16)
üst sınır (2. adım): $f_x$ =EĞER(H16>0;G16;D16)

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 13 | | | $f(x)=x-\cos$ | | Yaklaşık Değer = 0,739085133 | | | | | |
| 14 | | | | | | | | | | |
| 15 | | | alt sınır | üst sınır | f(alt sınır) | f(üst sınır) | İkiye bölme | f(ikiye bölme) | Bağıl Hata Oranı (%) | |
| 16 | | 1. adım | 0 | 1 | -1 | 0,459697694 | 0,5 | -0,377582562 | 32,35 | |
| 17 | | 2. adım | 0,5 | 1 | -0,377582562 | 0,459697694 | 0,75 | 0,018311131 | 1,48 | |
| 18 | | 3. adım | 0,5 | 0,75 | -0,377582562 | 0,018311131 | 0,625 | -0,185963120 | 15,44 | |
| 19 | | 4. adım | 0,625 | 0,75 | -0,185963120 | 0,018311131 | 0,6875 | -0,085334946 | 6,98 | |
| 20 | | 5. adım | 0,6875 | 0,75 | -0,085334946 | 0,018311131 | 0,71875 | -0,033879372 | 2,75 | |
| 21 | | 6. adım | 0,71875 | 0,75 | -0,033879372 | 0,018311131 | 0,734375 | -0,007874725 | 0,64 | |
| 22 | | | | | | | | | | |

## 2. SABİT NOKTA İTERASYONU

Luitzen Egbertus Jan Brouwer
27 Şubat 1881, Rotterdam, Hollanda - 02 Aralık 1966, Blaricum, Hollanda

**2.1. Tanım:** Bir g fonksiyonu verilsin. $g(p)=0$ eşitliğini sağlayan bir noktaya g fonksiyonunun sabit noktası denir.

**2.2. Teorem:** Eğer f, $[x_1,x_2]$ aralığında sürekli, $f(x)=g(x)-x$ olsun. Her $x\in[x_1,x_2]$ için $g(x)\in[a,b]$ ise $[x_1,x_2]$ aralığında g fonksiyonunun en az bir sabit noktası vardır.

İspat: Eğer $g(a)=a$ veya $g(b)=b$ ise g'nin sabit noktası uç noktalarda yer alır. Diğer durumda her $x\in[a,b]$ için $g(x)\in[a,b]$ olduğundan $g(a)>a$ ve $g(b)=b$'dir. $f(x)=g(x)-x$ şeklinde tanımlanan fonksiyon [a, b] aralığında süreklidir ve $f(a)=g(a)-a>0$ ve $f(b)=g(b)-b<0$ eşitsizliklerini gerçekler. Dolayısıyla ara değer teoremine göre $f(p)=0$ olacak şekilde bir p sayısı (a, b) aralığında mevcuttur. Bu p sayısı için $g(p)-p=0$ olduğundan $g(p)=p$ eşitliğini sağlar. Yani (a, b) aralığında yer alan p sayısı g fonksiyonunun bir sabit noktasıdır.

**2.3. Teorem (Sabit Nokta Teoremi):** g , $[x_1,x_2]$ aralığında sürekli ve her $x\in[x_1,x_2]$ için $g(x)\in[x_1,x_2]$ olsun. Ayrıca $g'$ türevi $(x_1,x_2)$ aralığında mevcut ve her $x\in[x_1,x_2]$ için $|g'(x)|\le k$ eşitsizliğini sağlayan bir 0 < k < 1 sayısı var olsun. Buna göre $[x_1,x_2]$ aralığındaki her $p_0$ sayısı için

$$x_n=g(x_{n-1}),\quad n\ge 1$$

şeklinde tanımlanan dizi $[x_1,x_2]$ aralığında bir x sabit noktasına yakınsar.

İspat: Bir $(x_n)$ iterasyon dizisi g fonksiyonu [a, b] aralığın tanımlıdır. $|g'(x)|\le k$ eşitsizliği ve Ortalama Değer Teoremi kullanılarak her n için $c_n\in(a,b)$ olmak üzere

$$|x_n - x| = |g(x_{n-1}) - g(x)| = |g'(c_n)||x_{n-1} - x| \le k|x_{n-1} - x|$$

ifadesi elde edilir. Bu değerler iterasyonun terimleri olarak uygulandığında

$$|x_n - x| \le k|x_{n-1} - x| \le k^2|x_{n-2} - x| \le \dots \le k^n|x_0 - x|$$

sonucuna ulaşılır. $0 < k < 1$ olduğundan $\lim\limits_{n\to\infty} k^n = 0$ sağlanır. Dolayısıyla

$$\lim_{n\to\infty}|x_n - x| \le \lim_{n\to\infty} k^n|x_n - x| = 0$$

elde edilir. Yani, $(x_n)$ iterasyon dizisi x'ye yakınsar.

**Örnek:** $x^3 - 2x - 1 = 0$ denklemini göz önüne alalım denklemin yaklaşık kökü 1,618030759 olduğundan $x_0 = 1$ den başlayarak kökü bulunuz.

Çözüm: Denklem üç faklı yoldan $g(x) = x$ biçiminde yazılabilir.

$$x = \frac{x^3 - 1}{2},\ x = \frac{1}{x^2 - 2},\ x = \sqrt[3]{2x+1}$$

olduğundan

$$g(x) = \frac{x^3 - 1}{2},\ g(x) = \frac{1}{x^2 - 2},\ g(x) = \sqrt[3]{2x+1}$$

$$g'(x) = \frac{3x^2}{2},\ g'(x) = -\frac{2x}{(x^2 - 2)^2},\ g(x) = \frac{2}{3(2x+1)^{2/3}}$$

bulunur. Buna göre her üç durum $x_0 = 1$ için

$$|g'(1)| = \left|\frac{3.1^2}{2}\right| = 1,5 > 1$$

$$|g'(1)| = \left|-\frac{2.1}{(1^2 - 2)^2}\right| = 2 > 1$$

$$|g'(1)| = \left|\frac{2}{3(2.1+1)^{2/3}}\right| = \frac{2}{3\sqrt[3]{9}} < 1$$

Buna göre $g(x) = \sqrt[3]{2x+1}$ fonksiyonu çözüm için uygundur, $x_0 = 1$ değeri için mutlak bir yakınsama elde edileceği söylenebilir. İterasyon fonksiyonu ile kökü bulmaya çalışalım. Şu halde $x_{i+1} = \sqrt[3]{2x_i + 1}$ olur.

$$x_1 = \sqrt[3]{2.1+1} = 1,44224957$$

$$x_2 = \sqrt[3]{2.1,44224957+1} = 1,571972738$$

$$x_3 = \sqrt[3]{2.1,571973738+1} = 1,606218699$$

$$x_4 = \sqrt[3]{2.1,606218699+1} = 1,615019684$$

$$x_5 = \sqrt[3]{2.1,615019684+1} = 1,617266050$$

$$x_6 = \sqrt[3]{2.1,617266050+1} = 1,617838414$$
$$x_7 = \sqrt[3]{2.1,617838414+1} = 1,617984185$$
$$x_8 = \sqrt[3]{2.1,617984185+1} = 1,618021306$$
$$x_9 = \sqrt[3]{2.1,618021306+1} = 1,618030759$$

iterasyonu burada kesebiliriz. Çünkü ilk 5 basamağı aynı çıkmaktadır.

EXCEL PROGRAMI

$x^3 - 2x - 1 = 0$ ve $g(x) = \sqrt[3]{2x+1}$ fonksiyonu için 1. adım

$x_i$: $f_x$=((2*C6)+1)^(1/3)
Bağıl hata oranı: $f_x$ =MUTLAK((1,618033-C6)/1,618033)*100
i (2. adım): $f_x$ =D6

| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | |
| 2 | | | $x^3 - 2x - 1 = 0$ | Yaklaşık Değer = 1,618033 | | |
| 3 | | | $g(x) = \sqrt[3]{2x+1}$ | | | |
| 4 | | | | | | |
| 5 | | | i | $x_i$ | Bağıl Hata Oranı (%) | |
| 6 | | 1. adım | 1 | 1,44224957 | 38,20 | |
| 7 | | 2. adım | 1,442249570 | 1,571972738 | 10,86 | |
| 8 | | 3. adım | 1,571972738 | 1,606218699 | 2,85 | |
| 9 | | 4. adım | 1,606218699 | 1,615019684 | 0,73 | |
| 10 | | 5. adım | 1,615019684 | 1,617266050 | 0,19 | |
| 11 | | 6. adım | 1,617266050 | 1,617838414 | 0,05 | |
| 12 | | 7. adım | 1,617838414 | 1,617984185 | 0,01 | |
| 13 | | 8. adım | 1,617984185 | 1,618021306 | 0,00 | |
| 14 | | 9. adım | 1,618021306 | 1,618030759 | 0,00 | |
| 15 | | | | | | |

**Örnek:** $e^{2x} + 2x - 5 = 0$ denklemi ele alalım. Denklemin yaklaşık çözümü $x = 0,653279321$ olduğu için $x_0 = 1$ den başlayarak çözüm bulunuz.

Çözüm: Denklem iki faklı yoldan $x = g(x)$ formunda yazılabilir.

$$x = \frac{5 - e^{2x}}{2}, \quad x = \frac{1}{2}\ln(5 - 2x)$$

olduğundan

$$g(x)=\frac{5-e^{2x}}{2},\; g(x)=\frac{1}{2}\ln(5-2x)$$

$$g'(x)=-e^{2x},\; g'(x)=\frac{1}{2x-5}$$

bulunur. Buna göre her üç durum $x_0=1$ için

$$|g'(1)|=|-e^2|=7{,}389>1$$

$$|g'(1)|=\left|\frac{1}{2.1-5}\right|=\frac{1}{3}<1$$

Buna göre $g(x)=\frac{1}{2}\ln(5-2x)$ fonksiyonu çözüm için uygundur, $x_0=1$ değeri için mutlak bir yakınsama elde edileceği söylenebilir. İterasyon fonksiyonu ile kökü bulmaya çalışalım. Şu halde $x_{i+1}=\frac{1}{2}\ln(5-2x_i)$ olur.

$$x_1=\frac{1}{2}\ln(5-2.1)=0{,}549306144$$

$$x_2=\frac{1}{2}\ln(5-2.0{,}549306144)=0{,}680666157$$

$$x_3=\frac{1}{2}\ln(5-2.0{,}680666157)=0{,}645808797$$

$$x_4=\frac{1}{2}\ln(5-2.0{,}645808797)=0{,}655297886$$

$$x_5=\frac{1}{2}\ln(5-2.0{,}655297886)=0{,}652732495$$

$$x_6=\frac{1}{2}\ln(5-2.0{,}652732495)=0{,}653427352$$

$$x_7=\frac{1}{2}\ln(5-2.0{,}653427352)=0{,}653239239$$

$$x_8=\frac{1}{2}\ln(5-2.0{,}653239239)=0{,}653290172$$

$$x_9=\frac{1}{2}\ln(5-2.0{,}653290172)=0{,}653276382$$

$$x_{10}=\frac{1}{2}\ln(5-2.0{,}653276382)=0{,}653280116$$

iterasyonu burada kesebiliriz. Çünkü ilk 4 basamağı aynı çıkmaktadır. Çıkan değerler ve $\varepsilon_t$ değerleri aşağıdaki tabloda karşılaştırılmıştır.

| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 17 | | | $e^{2x}+2x-5=0$ | Yaklaşık Değer = 0,653280 | | |
| 18 | | | $g(x)=\frac{1}{2}\ln(5-2x)$ | | | |
| 19 | | | | | | |
| 20 | | | | | | |
| 21 | | | i | $x_i$ | Bağıl Hata Oranı (%) | |
| 22 | | 1. adım | 1 | 0,549306144 | 53,07 | |
| 23 | | 2. adım | 0,549306144 | 0,680666157 | 15,92 | |
| 24 | | 3. adım | 0,680666157 | 0,645808797 | 4,19 | |
| 25 | | 4. adım | 0,645808797 | 0,655297886 | 1,14 | |
| 26 | | 5. adım | 0,655297886 | 0,652732495 | 0,31 | |
| 27 | | 6. adım | 0,652732495 | 0,653427352 | 0,08 | |
| 28 | | 7. adım | 0,653427352 | 0,653239239 | 0,02 | |
| 29 | | 8. adım | 0,653239239 | 0,653290172 | 0,01 | |
| 30 | | 9. adım | 0,653290172 | 0,653276382 | 0,00 | |
| 31 | | 10. adım | 0,653276382 | 0,653280116 | 0,00 | |

## 3. NEWTON-RAPHSON YÖNTEMİ

Joseph Raphson
1648, Middlesex - 1715, İngiltere, Birleşik Krallık

**2.4. Teorem:** f, $[x_1,x_2]$ aralığında türevlenebilir olsun. Her $x\in[x_1,x_2]$ için genel terim

$$x_n=x_{n-1}-\frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})},\quad n>1$$

şeklinde tanımlanan iterasyon dizisi $[x_1,x_2]$ aralığında bir x sabit noktasına yakınsar.

İspat: Bir $(x_n)$ iterasyon dizisi f, fonksiyonu [a, b] aralığın tanımlı olsun. Eğer $x_i$ kök ise $f(x_i)=0$ dır. Eğriye $(x_0,f(x_0))$ noktasından geçen teğetin eğimi,

$$f'(x)=\frac{f(x_0)}{x_0-x_1}$$

$$x_0-x_1=\frac{f(x_0)}{f'(x)}$$

$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x)}$$

bulunur aynı işlemleri diğer x değerlerine de yapıp işlemleri genellersek;

$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

$$x_3=x_2-\frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$

...

$$x_{i+1}=x_i-\frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

bulunur. $x_i$ kök ise $f(x_i)=0$ olacağından

$$\lim_{i\to\infty} x_{i+1}=\lim_{i\to\infty}\left(x_i-\frac{f(x_i)}{f'(x_i)}\right)=x$$

bulunur.

**Örnek:** $f(x)=e^x-3x$ denkleminin kökünü $x_0=0$ için Newton-Raphson yöntemiyle bulunuz.

Çözüm: $f(x)=e^x-3x$ ise $f'(x)=e^x-3$

$$x_{i+1}=x_i-\frac{e^x-3x}{e^x-3}$$

başlangıç noktası $x_0=0$ olduğundan

$$x_1=0-\frac{e^0-3.0}{e^0-3}=0,5$$

$$x_2=0,5-\frac{e^{0,5}-3.0,5}{e^{0,5}-3}=0,610059655$$

$$x_3=0,610059655-\frac{e^{0,610059655}-3.0,610059655}{e^{0,610059655}-3}=0,61899678$$

$$x_4 = 0{,}61899678 - \frac{e^{0{,}61899678} - 3.0{,}61899678}{e^{0{,}61899678} - 3} = 0{,}619061283$$

$$x_5 = 0{,}619061283 - \frac{e^{0{,}619061283} - 3.0{,}619061283}{e^{0{,}619061283} - 3} = 0{,}619061287$$

görüldüğü gibi Newton-Raphson yöntemi çok daha hızlı yaklaşım sağlamaktadır.

EXCEL PROGRAMI

$f(x) = e^x - 3x$ fonksiyonu için 1. adım

$x_i$: $f_x$ =C6-((ÜS(C6)-3*C6)/(ÜS(C6)-3))
Bağıl hata oranı: $f_x$ =MUTLAK((D6-C6)/D6)*100
i (2. adım): $f_x$ =D6

| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | |
| 2 | | | | | | |
| 3 | | | $f(x) = e^x - 3x$ | Yaklaşık Değer = 1,618033 | | |
| 4 | | | | | | |
| 5 | | | i | $x_i$ | Bağıl Hata Oranı (%) | |
| 6 | | 1. adım | 0 | 0,5 | 100,00 | |
| 7 | | 2. adım | 0,5 | 0,610059655 | 18,04 | |
| 8 | | 3. adım | 0,610059655 | 0,61899678 | 1,44 | |
| 9 | | 4. adım | 0,61899678 | 0,619061283 | 0,01 | |
| 10 | | 5. adım | 0,619061283 | 0,619061287 | 0,00 | |
| 11 | | | | | | |

**Örnek:** $f(x) = x^2 - \sin x - 1$ denkleminin kökünü $x_0 = 1$ için Newton-Raphson yöntemiyle bulunuz.

Çözüm: $f(x) = x^2 - \sin x - 1$ ise $f'(x) = 2x - \cos x$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{x^2 - \sin x - 1}{x^2 - \cos x}$$

başlangıç noktası $x_0 = 1$ olduğundan

$$x_1 = 1^2 - \frac{1^2 - \sin 1 - 1}{2.1 - \cos 1} = 1{,}57646935$$

$$x_2 = 1{,}576469353 - \frac{1{,}576469353^2 - \sin 1{,}576469353 - 1}{2.1{,}576469353 - \cos 1{,}576469353} = 1{,}517467181$$

$$x_3 = 1{,}57467181 - \frac{1{,}57467181^2 - \sin 1{,}57467181 - 1}{2.1{,}57467181 - \cos 1{,}57467181} = 1{,}512176028$$

$$x_4 = 1{,}512176028 - \frac{1{,}512176028^2 - \sin 1{,}512176028 - 1}{2.1{,}512176028 - \cos 1{,}512176028} = 1{,}512134554$$

$$x_5 = 1{,}512134554 - \frac{1{,}512134554^2 - \sin 1{,}512134554 - 1}{2.1{,}512134554 - \cos 1{,}512134554} = 1{,}512134552$$

EXCEL PROGRAMI

$f(x) = x^2 - \sin x - 1$ fonksiyonu için 1. adım

$x_i$: $f_x$ =C18-((C18^2-SİN(C18)-1)/(2*C18-COS(C18)))
Bağıl hata oranı: $f_x$ =MUTLAK((D18-C18)/D18)*100
i (2. adım): $f_x$ =D18

| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 14 | | | | | | |
| 15 | | | $f(x)=x^2-\sin x-1$ | Yaklaşık Değer = 1,512134552 | | |
| 16 | | | | | | |
| 17 | | | i | $x_i$ | Bağıl Hata Oranı (%) | |
| 18 | | 1. adım | 1 | 1,576469353 | 36,57 | |
| 19 | | 2. adım | 1,576469353 | 1,517467181 | 3,89 | |
| 20 | | 3. adım | 1,517467181 | 1,512176028 | 0,35 | |
| 21 | | 4. adım | 1,512176028 | 1,512134554 | 0,00 | |
| 22 | | 5. adım | 1,512134554 | 1,512134552 | 0,00 | |
| 23 | | | | | | |

**Örnek:** $\sqrt{5}$ in değerini Newton-Raphson yöntemiyle bulunuz.

Çözüm: $\sqrt{5}$ değeri $f(x) = x^2 - 5$ denkleminin köküdür. $x_0 = 2$ alınabilir. Çünkü 5 sayısının kara kökü 2 sayısı civarındadır.

$$f'(x) = 2x \text{ ve } x_{i+1} = x_i - \frac{x^2 - 5}{2x}$$

olduğundan

$$x_1 = 5^2 - \frac{2^2 - 5}{2.2} = 2,25$$

$$x_2 = 2,25^2 - \frac{2,25^2 - 5}{2.2,25} = 2,36111111$$

$$x_3 = 2,36111111^2 - \frac{2,36111111^2 - 5}{2.2,36111111} = 2,236067978$$

$$x_4 = 2,236067978^2 - \frac{2,236067978^2 - 5}{2.2,236067978} = 2,236067977$$

EXCEL PROGRAMI

$f(x) = x^2 - 5$ fonksiyonu için 1. adım

$x_i$: $f_x$ =C29-((C29^2-5)/(2*C29))
Bağıl hata oranı: $f_x$ =MUTLAK((D29-C29)/D29)*100
i (2. adım): $f_x$ =C29

| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 25 | | | | | | |
| 26 | | | $f(x) = x^2 - 5$ | Yaklaşık Değer = 2,236067977 | | |
| 27 | | | | | | |
| 28 | | | i | $x_i$ | Bağıl Hata Oranı (%) | |
| 29 | | 1. adım | 2 | 2,25 | 11,11 | |
| 30 | | 2. adım | 2,25 | 2,236111111 | 0,62 | |
| 31 | | 3. adım | 2,236111111 | 2,236067978 | 0,00 | |
| 32 | | 4. adım | 2,236067978 | 2,236067977 | 0,00 | |
| 33 | | | | | | |

**Newton-Raphson Yönteminin Dezavantajları**

Newton-Raphson yöntemi yukarıdaki örnekte görüldüğü gibi çoğu zaman etkili ve hızlı yaklaşım sağlamasına rağmen bazı durumlarda zayıf ve etkisiz kalmaktadır. Bu durum yakınsama kriterindeki ifadelerin yani $f(x)$ fonksiyonun birinci ve ikinci türevi ve fonksiyonun değeriyle ilgilidir.

i) Kök civarında dönüm noktası $f''(x) = 0$ olması durumunda kökten gittikçe uzaklaşma göstermektedir. Çünkü dönüm noktasında bir taraftan yakınsama yakınsak iken diğer taraftan ıraksaktır.

ii) Başlangıç noktasını yerel maksimum veya minimumlar civarında seçersek diğer iterasyon değerleri salınma eğilimi göstererek köke yaklaşmayacaktır, hatta bu salınma devam edebilir veya eğim $(f'(x))$ sıfır ya da sıfıra yakın bir değer çıkabilir bu durumda da çözüm ya çıkmayacak ya da ilgilendiğimiz aralığın çok dışında bir yere gidecektir.

iii) Kökten çok uzakta bir yerden başlangıç noktası seçersek de yukarıdaki sebeplerden de dolayı köke sağlıklı bir şekilde yaklaşım olmayacaktır. Örneğin yukarıda $f(x)=x^2-\sin x-1$ denklemine $x_0=1$ için Newton-Raphson yöntemiyle çözülmüştü. Eğer bu denkleme $x_0=100$ uygulanırsa kökten uzaklaştığını bağıl hatanın daha büyük olduğu görülecektir.

## 4. SECANT YÖNTEMİ

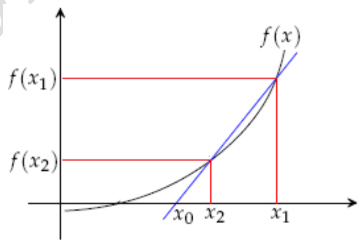
Secant kelimesi latince kesme manasına gelen secan kelimesinden türetilmiştir. Secant yöntemi bir köke yaklaşmak için kesme doğrusu kullanır, bu doğru eşri üzerindeki iki noktayı birleştirerek eşriyi kesen bir doğrudur.

**2.5. Teorem:** f, $[x_1,x_2]$ aralığında türevlenebilir olsun. Her $x\in[x_1,x_2]$ için genel terim

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)(x_{n-1}-x_n)}{f'(x_{n-1})-f(x_n)},\quad n>1$$

şeklinde tanımlanan iterasyon dizisi [a, b] aralığında bir x sabit noktasına yakınsar.

İspat:




Secant doğrusunun eğimi aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\frac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1}=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$$

burada $f(x_2)\neq 0$ dir ama $f(x_2)=0$ alınırsa

$$\frac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1}=\frac{f(x_1)-0}{x_1-x_2}$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)(x_0 - x_1)}{f(x_0) - f(x_1)}$$

$x_2$ noktasının bulunuşu gibi $x_3$, $x_4$, ... bulunur. Denklemi genellersek $x_{i+1}$ noktasını bulmak için $x_i$ ve $x_{i-1}$ noktalarını bilmemiz gerekir ve bu durumda denklemin genel hali:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_{i-1} - x_i)}{f(x_{i-1}) - f(x_i)}$$

bulunur. $x_i$ kök ise $f(x_i) = 0$ olacağından

$$\lim_{i\to\infty} x_{i+1} = \lim_{i\to\infty}\left( x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \right) = x$$

bulunur.

**Örnek:** $f(x) = e^{-x} - x$ denkleminin kökünü $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ için Secant yöntemiyle bulunuz. (Denklemin kökü x = 0,567143 dur.)

Çözüm: 1. adım

$x_0 = 0$ ise $f(x_0) = e^{-0} - 0 = 1$, $x_1 = 1$ ise $f(x_1) = e^{-1} - 1 = 0{,}63212056$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)(x_0 - x_1)}{f(x_0) - f(x_1)} = 1 - \frac{-0{,}63212056(0-1)}{1-(-0{,}63212056)} = 0{,}6212699837$$

2. adım

$x_2 = 0{,}6212699837$ ise $f(x_2) = e^{-0{,}6212699837} - 0{,}6212699837 = -0{,}07081395$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)(x_1 - x_2)}{f(x_1) - f(x_2)}$$

$$= 0{,}6212699837 - \frac{-0{,}07081395(1-0{,}6212699837)}{(-0{,}63212056)-(-0{,}07081395)} = 0{,}563838389$$

3. adım

$x_3 = 0{,}563838389$ ise $f(x_3) = e^{0{,}563838389} - 0{,}563838389 = 0{,}005182355$

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)(x_2 - x_3)}{f(x_2) - f(x_3)}$$

$$= 0{,}563838389 - \frac{0{,}005182355(-0{,}07081395 - 0{,}563838389)}{(-0{,}07081395)-(0{,}005182355)} = 0{,}567143307$$

4. adım

$x_4 = 0{,}567143307$ ise $f(x_4) = e^{0{,}567143307} - 0{,}567143307 = 0{,}000042419$

$$x_5 = x_4 - \frac{f(x_4)(x_3 - x_4)}{f(x_3) - f(x_4)}$$

$$=0{,}567143307-\frac{0{,}000042419(0{,}563838389-0{,}567143307)}{(0{,}563838389)-(0{,}000042419)}=0{,}56714329$$

EXCEL PROGRAMI

$f(x)=e^{-x}-x$ fonksiyonu için 1. adım

$f(x_{i-1})$: $f_x$ =ÜS(-C7)-C7
$f(x_i)$: $f_x$ =ÜS(-D7)-D7
$x_{i+1}$: $f_x$ =D7-((F7*(C7-D7))/(E7-F7))
$x_{i-1}$: (2. adım): $f_x$ =D7
$x_i$: (2. adım): $f_x$ =G7

| | A | B | C | D | E | F | G | H |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | | |
| 4 | | $f(x)=e^{-x}-x$ | Yaklaşık Değer = 0,56714329 | | | | | |
| 5 | | | | | | | | |
| 6 | | | $x_{i-1}$ | $x_i$ | f(xi-1) | f(xi) | xi+1 | |
| 7 | | 1. adım | 0 | 1 | 1 | -0,63212056 | 0,612699837 | |
| 8 | | 2. adım | 1 | 0,612699837 | -0,63212056 | -0,07081395 | 0,563838389 | |
| 9 | | 3. adım | 0,612699837 | 0,563838389 | -0,07081395 | 0,005182355 | 0,567170358 | |
| 10 | | 4. adım | 0,563838389 | 0,567170358 | 0,005182355 | -4,2419E-05 | 0,567143307 | |
| 11 | | 5. adım | 0,567170358 | 0,567143307 | -4,2419E-05 | -2,538E-08 | 0,56714329 | |
| 12 | | | | | | | | |

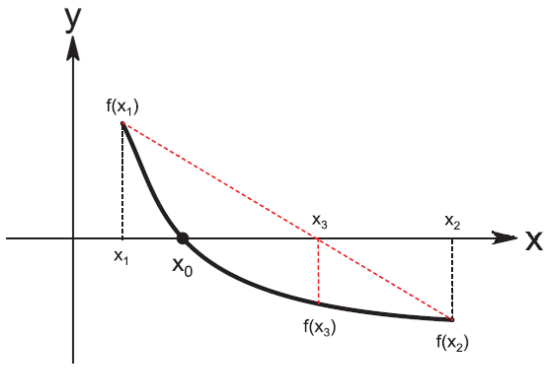
## 5. REGULA-FALSİ (KİRİŞ) YÖNTEMİ

**2.6. Teorem:** f, $[x_1,x_2]$ aralığında türevlenebilir olsun. Her $x\in[x_1,x_2]$ için genel terim

$$x_{i+1}=\frac{x_{i-1}f(x_i)-x_i f(x_{i-1})}{f(x_i)-f(x_{i-1})}$$

şeklinde tanımlanan iterasyon dizisi $[x_1,x_2]$ aralığında bir x sabit noktasına yakınsar.

İspat:




$f(x)$ fonksiyonu $[x_1,x_2]$ aralığında sürekli ve sınırlı bir fonksiyon olmak üzere $f(p)=0$ koşulunu sağlayacak şekilde $p\in[x_1,x_2]$ çözümünü vardır. $(x_1,f(x_1))$ noktası ile $(x_2,f(x_2))$ noktalarını birleştiren doğru parçasının x eksenini kestiği noktanın eğim yardımıyla;

$$m=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}=\frac{0-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

$$x_2=\frac{x_0f(x_1)-x_1f(x_0)}{f(x_1)-f(x_0)}$$

elde edilir. $x_2$ noktasının bulunuşu gibi $x_3$, $x_4$, ... bulunur. Denklemi genellersek $x_{i+1}$ noktasını bulmak için $x_i$ ve $x_{i-1}$ noktalarını bilmemiz gerekir ve bu durumda denklemin genel hali:

$$x_{i+1}=x_i-\frac{f(x_i)(x_{i-1}-x_i)}{f(x_{i-1})-f(x_i)}$$

bulunur. $x_i$ kök ise $f(x_i)=0$ olacağından

$$\lim_{i\to\infty}x_{i+1}=\lim_{i\to\infty}\left(x_i-\frac{f(x_i)(x_{i-1}-x_i)}{f(x_{i-1})-f(x_i)}\right)=x$$

bulunur.

**Örnek:** $f(x)=x^3-2x-5$ denkleminin bir kökünü Regula-Falsi yöntemiyle bulunuz.

Çözüm: Öncelikle denklemin kökünün hangi aralıkta olduğunu bulalım

$x_0=2$ için $f(2)=2^3-2.2-5=-1$

$x_1=3$ için $f(3)=3^3-2.3-5=16$

bu durumda denklemin kökü [2, 3] arasındadır. Çünkü ikiye bölme yönteminde olduğu gibi $f(2)f(3)<0$ dir.

$$x_2=\frac{x_0 f(x_1)-x_1 f(x_0)}{f(x_1)-f(x_0)}=\frac{2f(3)-3f(2)}{f(3)-f(2)}=2{,}058823529$$

ve $f(2{,}058823529)=-0{,}390838$ ise $f(2{,}058823529)f(3)<0$ olduğundan kök $[2{,}058823529{,}3]$ aralığındadır.

$$x_3=\frac{x_2 f(x_1)-x_1 f(x_2)}{f(x_1)-f(x_2)}=\frac{2{,}058823529f(3)-2f(2{,}058823529)}{f(3)-f(2{,}058823529)}=2{,}081263660$$

ve $f(2{,}08126)=-0{,}147244$ ise $f(2{,}08126)f(3)<0$ olduğundan kök $[2{,}08126{,}3]$ aralığındadır.

$$x_4=\frac{x_3 f(x_1)-x_1 f(x_3)}{f(x_1)-f(x_3)}=\frac{2{,}081263660f(3)-2f(2{,}081263660)}{f(3)-f(2{,}081263660)}=2{,}089639210$$

ve $f(2{,}089639210)=-0{,}054677$ ise $f(2{,}089639210)f(3)<0$ olduğundan kök $[2{,}089639210{,}3]$ aralığındadır.

$$x_5=\frac{x_4 f(x_1)-x_1 f(x_4)}{f(x_1)-f(x_4)}=\frac{2{,}089639210f(3)-2f(2{,}089639210)}{f(3)-f(2{,}089639210)}=2{,}092739574$$

ve $f(2{,}092739574)=-0{,}02020287$ ise $f(2{,}092739574)f(3)<0$ olduğundan kök $[2{,}092739574{,}3]$ aralığındadır.

$$x_6=\frac{x_5 f(x_1)-x_1 f(x_5)}{f(x_1)-f(x_5)}=\frac{2{,}092739574f(3)-2f(2{,}092739574)}{f(3)-f(2{,}092739574)}=2{,}093883708$$

denklemin yaklaşık kökü 2,093883708 dir.

EXCEL PROGRAMI

$f(x)=x^3-2x-5$ fonksiyonu için 1. adım

$f(x_{i-1})$: $f_x$ =C7^3-2*C7-5
$f(x_i)$: $f_x$ =D7^3-2*D7-5
$x_{i+1}$: $f_x$ =(C7*F7-D7*E7)/(F7-E7)
$x_{i-1}$: (2. adım): $f_x$ =G7
$x_i$: (2. adım): $f_x$ =D7

| | A | B | C | D | E | F | G | H |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | | |
| 4 | | $f(x)=x^3-2x-5$ | | | Yaklaşık Değer = 2,093883708 | | | |
| 5 | | | | | | | | |
| 6 | | | $x_{i-1}$ | $x_i$ | f(xi-1) | f(xi) | xi+1 | |
| 7 | | 1. adım | 2 | 3 | -1 | 16 | 2,058823529 | |
| 8 | | 2. adım | 2,058823529 | 3 | -0,39079992 | 16 | 2,08126366 | |
| 9 | | 3. adım | 2,081263660 | 3 | -0,14720406 | 16 | 2,08963921 | |
| 10 | | 4. adım | 2,089639210 | 3 | -0,054676503 | 16 | 2,092739574 | |
| 11 | | 5. adım | 2,092739574 | 3 | -0,02020287 | 16 | 2,093883708 | |
| 12 | | | | | | | | |

## KAYNAKÇA


1. Prof. Dr. İbrahim Uzun, Nümerik Analiz, Beta Basın A.Ş., 2012, İstanbul.
2. Prof. Dr. Nuri Özalp – Doç. Dr. Elif Demirci, Nümerik Analiz, Ward Cheney, David Kincaid, Gazi Yayınları, 2012, Ankara.
3. Doç. Dr. Arzu Erdem, Sayısal Analiz, Kocaeli Üniversitesi, Ders notları, 2013, Kocaeli.
4. Doç. Dr. Zekeriya Girgin, Sayısal Analiz, Pamukkale Üniversitesi, Ders notları, 2016, Denizli.
5. Yrd. Doç. Dr. İhsan Temuçin Dolapçı, Yrd. Doç. Dr. Yiğit Aksoy, Sayısal Yöntemler, Celal Bayar Üniversitesi, Ders notları, 2015, Manisa.
6. Yrd. Doç. Dr. Emel Yavuz Duman, Nümerik Analiz, İstanbul Kültür Üniversitesi, Ders notları, 2013, İstanbul.