3. BÖLÜM
NÜMERİK LİNEER DENKLEMLER

GİRİŞ

Bu bölümde lineer cebir derslerin de bazı çözüm yöntemleri anlatılan n bilinmeyenli n lineer denklem sistemlerinin nümerik çözümlerini konu edineceğiz. Lineer denklem sistemleri, bazı mühendislik ve fen bilimleri problemleri, yanı sıra, iş ve ekonomi problemlerinin matematiksel bazı uygulamalarında uygulanmaktadır.

Lineer denklemlerin bir sistemi

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

biçimindedir. Burada a_{ij} katsayıları ve b_i sabitleri bilinenler ve x_i bilinmeyenleri temsil etmektedir. Matris formunda

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

biçiminde yazabiliriz. Lineer Cebir derslerinde denklem sistemlerinin ters matris, Cramer ve Echelon form yöntemleriyle çözüm yöntemleri verildi. Bu bölümde n bilinmeyenli n tane denklemin çözüm vektörünü dolaylı yoldan, yaklaşık olarak bulabilmek için iki yeni yöntem vereceğiz.

1. JACOBİ İTERASYON YÖNTEMİ

Lineer denklem sistemlerinin çözümünde denklem sistemi oldukça büyük ise Matris işlemleri kullanılarak yok etme metotlarının kullanılması yapılan temel aritmetik işlemlerin çokluğundan dolayı tercih edilmezler. Bu durumda iterasyon yöntemleri tercih edilir. Yöntemde çözümlere bir başlangıç tahmininde bulunulur ve denklemlerde yerine konularak yeni tahmin değerleri bulunur. İşlemler bir birini takip eden yaklaşık değerler arasında mutlak fark çok küçük oluncaya kadar devam eder.

Bu yöntem aynı zamanda eş zamanlı olarak yer değiştirme yöntemi olarak bilinir. Basit ve anlaşılabilir olması açısından denklem n = 3 alalım, yani üç bilinmeyenli üç denklem sistemini ele alalım.

3.1. Teorem (Jacobi Yöntemi):

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$$

lineer denklem sistemi olsun. Burada a_{11}, a_{22} ve a_{33} katsayıları ilgili denklemlerin en büyük katsayıları olduğunu varsayalım, bu varsayım yöntemin çözülebilirlik ya da yakınsama şartıdır. Buna göre,

$$|a_{11}| > |a_{12}| + |a_{13}|$$
$$|a_{22}| > |a_{21}| + |a_{23}|$$
$$|a_{33}| > |a_{31}| + |a_{32}|$$

denklemlerinin sağlanması olsun. Bu denklem sistemininin çözümü

$$x_1^{(n+1)} = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^{(n)} - a_{13}x_3^{(n)})$$
$$x_2^{(n+1)} = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{(n)} - a_{23}x_3^{(n)})$$
$$x_3^{(n+1)} = \frac{1}{a_{33}}(b_3 - a_{31}x_1^{(n)} - a_{32}x_2^{(n)})$$

şeklindeki itarasyon dizisi lineer denklemin çözüm kümesini verir. Burada üstel (n) gösterimi n-inci iterasyondaki değerini belirtmektedir. Üstün (0) olması durumu x_i-lerin başlangıç değerini ifade etmektedir.

Bu teoremin ispatı aşikar olduğundan ispat edilmemiştir.

Yukarıdaki iterasyon şemasını $(N \times N)$ lik bir sisteme genelleştirirsek denklem:

$$x_i^{(n+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left\{b_i - \left(\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_1^{(n)} + \sum_{j=i+1}^{N} a_{ij}x_1^{(n)}\right)\right\}, \qquad i = 1,2,\dots, N$$

ile verilir.

Örnek:

$$8x+2y+3z=30$$
$$x-9y+2z=1$$
$$2x+3y+6z=31$$

lineer denklem sistemini Jakobe iterasyon yöntemiyle bulunuz.

Çözüm: Yukarıdaki denklem için

$$|8|>|2|+|3|$$
$$|-9|>|1|+|2|$$
$$|6|>|2|+|3|$$

şartlar üç denklem içinde sağlamaktadır. Buna göre;

$$x^{(n+1)}=\frac{1}{8}(30-2y^{(n)}-3z^{(n)})$$
$$y^{(n+1)}=\frac{1}{9}(-1+x^{(n)}+2z^{(n)})$$
$$z^{(n+1)}=\frac{1}{6}(31-2x^{(n)}-3y^{(n)})$$

başlangıç şartı önceden verilmediğinden $x^{(0)}=1,\ y^{(0)}=1,\ z^{(0)}=1$ olsun.

1. Adım:

$$x^{(1)}=\frac{1}{8}(30-2y^{(0)}-3z^{(0)})=\frac{1}{8}(30-2.1-3.1)=3{,}125$$
$$y^{(1)}=\frac{1}{9}(-1+x^{(0)}+2z^{(0)})=\frac{1}{9}(-1+1+2.1)=0{,}222222222$$
$$z^{(1)}=\frac{1}{6}(31-2x^{(0)}-3y^{(0)})=\frac{1}{6}(31-2.1-3.1)=4{,}333333333$$

2. Adım:

$$x^{(2)}=\frac{1}{8}(30-2y^{(1)}-3z^{(1)})=\frac{1}{8}(30-2.0{,}222222222-3.4{,}333333333)=2{,}069444444$$
$$y^{(2)}=\frac{1}{9}(-1+x^{(1)}+2z^{(1)})=\frac{1}{9}(-1+3{,}125+2.4{,}333333333)=1{,}199074074$$
$$z^{(2)}=\frac{1}{6}(31-2x^{(1)}-3y^{(1)})=\frac{1}{6}(31-2.3{,}125-3.0{,}222222222)=4{,}013888889$$

3. Adım:

$$x^{(3)} = \frac{1}{8}(30 - 2y^{(2)} - 3z^{(2)}) = \frac{1}{8}(30 - 2.1,199074074 - 3.4,013888889) = 1,945023148$$

$$y^{(3)} = \frac{1}{9}(-1 + x^{(2)} + 2z^{(2)}) = \frac{1}{9}(-1 + 2,06944444 + 2.4,01388889) = 1,010802469$$

$$z^{(3)} = \frac{1}{6}(31 - 2x^{(2)} - 3y^{(2)}) = \frac{1}{6}(31 - 2.2,06944444 - 3.1,199074074) = 3,877314815$$

4. Adım:

$$x^{(4)} = \frac{1}{8}(30 - 2y^{(3)} - 3z^{(3)}) = \frac{1}{8}(30 - 2.1,010802469 - 3.3,877314815) = 2,043306327$$

$$y^{(4)} = \frac{1}{9}(-1 + x^{(3)} + 2z^{(3)}) = \frac{1}{9}(-1 + 1,945023148 + 2.3,877314815) = 0,966628086$$

$$z^{(4)} = \frac{1}{6}(31 - 2x^{(3)} - 3y^{(3)}) = \frac{1}{6}(31 - 2.1,945023148 - 3.1,010802469) = 4,012924383$$

5. Adım:

$$x^{(5)} = \frac{1}{8}(30 - 2y^{(4)} - 3z^{(4)}) = \frac{1}{8}(30 - 2.0,966628086 - 3.4,012924383) = 2,003496335$$

$$y^{(5)} = \frac{1}{9}(-1 + x^{(4)} + 2z^{(4)}) = \frac{1}{9}(-1 + 2,043306327 + 2.4,012924383) = 1,00768399$$

$$z^{(5)} = \frac{1}{6}(31 - 2x^{(4)} - 3y^{(4)}) = \frac{1}{6}(31 - 2.2,043306327 - 3.0,966628086) = 4,002250514$$

$x \approx 2,\ y \approx 1\ z \approx 4$

EXCEL PROGRAMI

$$\begin{aligned} 8x + 2y + 3z &= 30 \\ x - 9y + 2z &= 1 \\ 2x + 3y + 6z &= 31 \end{aligned}$$

lineer denklem sistemini Jakobe iterasyon yöntemi 1. adım

x : f_x =(30-2*D10-3*E10)/8
y: f_x =(-1+C10+2*E10)/9
z: f_x =(31-2*C10-3*D10)/6

L36

	A	B	C	D	E	F
19–20		$x^{(n+1)}=\frac{1}{8}(30-2y^{(n)}-3z^{(n)})$				
21–22		$y^{(n+1)}=\frac{1}{9}(-1+x^{(n)}+2z^{(n)})$				
23–24		$z^{(n+1)}=\frac{1}{6}(31-2x^{(n)}-3y^{(n)})$				
25			x	y	z	
26		0. adım	1	1	1	
27		1. adım	3,125	0,222222222	4,333333333	
28		2. adım	2,069444444	1,199074074	4,013888889	
29		3. adım	1,945023148	1,010802469	3,877314815	
30		4. adım	2,043306327	0,966628086	4,012924383	
31		5. adım	2,003496335	1,007683899	4,002250514	
32						

Örnek:

$$5x+2y+z=12$$
$$x+4y+z=12$$
$$2x+y+4z=16$$

lineer denklem sistemini Jakobe iterasyon yöntemiyle bulunuz.

Çözüm: Yukarıdaki denklem için

$$|5|>|2|+|1|$$
$$|4|>|1|+|1|$$
$$|4|>|2|+|1|$$

şartlar üç denklem içinde sağlamaktadır. Buna göre;

$$x^{(n+1)}=\frac{1}{5}(12-2y^{(n)}-z^{(n)})$$
$$y^{(n+1)}=\frac{1}{4}(12-x^{(n)}-z^{(n)})$$
$$z^{(n+1)}=\frac{1}{4}(16-2x^{(n)}-y^{(n)})$$

başlangıç şartı önceden verilmediğinden $x^{(0)}=1,\ y^{(0)}=1,\ z^{(0)}=1$ olsun.

1. Adım:

$$x^{(1)}=\frac{1}{5}(12-2y^{(0)}-z^{(0)})=\frac{1}{5}(12-2.1-1)=1{,}8$$

$$y^{(1)}=\frac{1}{4}(12-x^{(0)}-z^{(0)})=\frac{1}{4}(12-1-1)=2{,}5$$

$$z^{(1)}=\frac{1}{4}(16-2x^{(0)}-y^{(0)})=\frac{1}{4}(16-2.1-1)=3{,}25$$

2. Adım:

$$x^{(2)}=\frac{1}{5}(12-2y^{(1)}-z^{(1)})=\frac{1}{5}(12-2.2{,}5-3{,}25)=0{,}75$$

$$y^{(2)}=\frac{1}{4}(12-x^{(1)}-z^{(1)})=\frac{1}{4}(12-1{,}8-3{,}25)=1{,}7375$$

$$z^{(2)}=\frac{1}{4}(16-2x^{(1)}-y^{(1)})=\frac{1}{4}(16-2.1{,}8-2{,}5)=2{,}475$$

3. Adım:

$$x^{(3)}=\frac{1}{5}(12-2y^{(2)}-z^{(2)})=\frac{1}{5}(12-2.1{,}7375-2{,}475)=1{,}21$$

$$y^{(3)}=\frac{1}{4}(12-x^{(2)}-z^{(2)})=\frac{1}{4}(12-0{,}75-2{,}475)=2{,}19375$$

$$z^{(3)}=\frac{1}{4}(16-2x^{(2)}-y^{(2)})=\frac{1}{4}(16-2.0{,}75-1{,}7375)=3{,}190625$$

4. Adım:

$$x^{(4)}=\frac{1}{5}(12-2y^{(3)}-z^{(3)})=\frac{1}{5}(12-2.2{,}19375-3{,}190625)=0{,}884375$$

$$y^{(4)}=\frac{1}{4}(12-x^{(3)}-z^{(3)})=\frac{1}{4}(12-1{,}21-3{,}190625)=1{,}89984375$$

$$z^{(4)}=\frac{1}{4}(16-2x^{(3)}-y^{(3)})=\frac{1}{4}(16-2.1{,}21-2{,}19375)=2{,}846525$$

5. Adım:

$$x^{(5)}=\frac{1}{5}(12-2y^{(4)}-z^{(4)})=\frac{1}{5}(12-2.1{,}89984375-2{,}8465625)=1{,}07075$$

$$y^{(5)}=\frac{1}{4}(12-x^{(4)}-z^{(4)})=\frac{1}{4}(12-0{,}884375-2{,}8465625)=2{,}067265625$$

$$z^{(5)}=\frac{1}{4}(16-2x^{(4)}-y^{(4)})=\frac{1}{4}(16-2.0{,}884375-1{,}89984375)=3{,}082851563$$

EXCEL PROGRAMI

$$5x + 2y + z = 12$$
$$x + 4y + z = 12$$
$$2x + y + 4z = 16$$

lineer denklem sistemini Jakobe iterasyon yöntemi 1. adım

x : f_x (12-2*D26-E26)/5
y: f_x =(12-C26-E26)/4
z: f_x =(16-2*C26-D26)/4

$x \approx 1,\ y \approx 2\ z \approx 3$

	A	B	C	D	E	F
18		$x^{(n+1)} = \frac{1}{5}(12 - 2y^{(n)} - z^{(n)})$				
19						
20		$y^{(n+1)} = \frac{1}{3}(10 - x^{(n)} - z^{(n)})$				
21						
22		$z^{(n+1)} = \frac{1}{4}(16 - 2x^{(n)} - y^{(n)})$				
23						
24						
25			x	y	z	
26		0. adım	1	1	1	
27		1. adım	1,8	2,5	3,25	
28		2. adım	0,75	1,7375	2,475	
29		3. adım	1,21	2,19375	3,190625	
30		4. adım	0,884375	1,89984375	2,8465625	
31		5. adım	1,07075	2,067265625	3,082851563	
32						

2. GAUSS-SEİDEL YÖNTEMİ

Bu yöntem Jacobi iterasyon yöntemiyle hemen hemen aynıdır. Aralarındaki fark (n + 1) inci değeri bulunan bilinmeyenler hemen kullanılır.

3.2. Teorem (Gauss-Seidel Yöntemi): 3.1. Teoremdeki bütün şartlar sağlanmış olsun.

$$x_1^{(n+1)} = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^{(n)} - a_{13}x_3^{(n)})$$

$$x_2^{(n+1)} = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{(n+1)} - a_{23}x_3^{(n)})$$

$$x_3^{(n+1)} = \frac{1}{a_{33}}(b_3 - a_{31}x_1^{(n+1)} - a_{32}x_2^{(n+1)})$$

biçimindeki itarasyon dizisi lineer denklemin çözüm kümesini verir. Burada görüldüğü gibi ikinci denklemde x_1 yerine birinci denklemden hesaplanan $x_1^{(n+1)}$ değeri kullanılmıştır, üçüncü denklemde birinci ve ikinci denklemlerde hesaplana $x_1^{(n+1)}$ ve $x_2^{(n+1)}$ değerleri kullanılmıştır.

Bu teoremin ispatı aşikar olduğundan ispat edilmemiştir.

a_{11}, a_{22} ve a_{33} katsayılarını, Jacobi iterasyon yönteminde olduğu gibi ilgili denklemlerin en büyük katsayıları olduğunu varsayıyoruz, bu varsayım yöntemin çözülebilirlik ya da yakınsama şartıdır. Yani;

$$|a_{11}| > |a_{12}| + |a_{13}|$$
$$|a_{22}| > |a_{21}| + |a_{23}|$$
$$|a_{33}| > |a_{31}| + |a_{32}|$$

denklemi sağlanması durumunda geçerlidir.

Gauss-Seidel iterasyon yönteminin $(N \times N)$ lik bir sistem ve xi bilinmeyenleri için iterasyon denklemi:

$$x_i^{(n+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left\{ b_i - \left(\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_1^{(n+1)} + \sum_{j=i+1}^{N} a_{ij} x_1^{(n)} \right) \right\}, \qquad i = 1,2,\ldots, N$$

ile verilir.

Örnek:

$$8x + 2y + 3z = 30$$
$$x - 9y + 2z = 1$$
$$2x + 3y + 6z = 31$$

lineer denklem sistemini Gauss-Seidel yöntemiyle bulunuz.

Çözüm: Yukarıdaki denklem için

$$|8| > |2| + |3|$$
$$|-9| > |1| + |2|$$
$$|6| > |2| + |3|$$

şartlar üç denklem içinde sağlamaktadır. Buna göre;

$$x^{(n+1)} = \frac{1}{8}(30 - 2y^{(n)} - 3z^{(n)})$$

$$y^{(n+1)} = \frac{1}{9}(-1 + x^{(n+1)} + 2z^{(n)})$$

$$z^{(n+1)} = \frac{1}{6}(31 - 2x^{(n+1)} - 3y^{(n+1)})$$

başlangıç şartı önceden verilmediğinden $x^{(0)} = 1,\ y^{(0)} = 1,\ z^{(0)} = 1$ olsun.

1. Adım:

$$x^{(1)} = \frac{1}{8}(30 - 2y^{(0)} - 3z^{(0)}) = \frac{1}{8}(30 - 2.1 - 3.1) = 3{,}125$$

$$y^{(1)} = \frac{1}{9}(-1 + x^{(1)} + 2z^{(0)}) = \frac{1}{9}(-1 + 3{,}125 + 2.1) = 0{,}458333$$

$$z^{(1)} = \frac{1}{6}(31 - 2x^{(1)} - 3y^{(2)}) = \frac{1}{6}(31 - 2.3{,}125 - 3.0{,}458333) = 3{,}895833$$

2. Adım:

$$x^{(2)} = \frac{1}{8}(30 - 2y^{(1)} - 3z^{(1)}) = \frac{1}{8}(30 - 2.0{,}458333 - 3.3{,}895833) = 2{,}174479$$

$$y^{(2)} = \frac{1}{9}(-1 + x^{(2)} + 2z^{(1)}) = \frac{1}{9}(-1 + 2{,}174479 + 2.3{,}895833) = 0{,}996238$$

$$z^{(2)} = \frac{1}{6}(31 - 2x^{(2)} - 3y^{(2)}) = \frac{1}{6}(31 - 2.2{,}174479 - 3.0{,}996238) = 3{,}943721$$

3. Adım:

$$x^{(3)} = \frac{1}{8}(30 - 2y^{(2)} - 3z^{(2)}) = \frac{1}{8}(30 - 2.0{,}996238 - 3.3{,}943721) = 2{,}022045$$

$$y^{(3)} = \frac{1}{9}(-1 + x^{(3)} + 2z^{(2)}) = \frac{1}{9}(-1 + 2{,}022045 + 2.3{,}943721) = 0{,}989943$$

$$z^{(3)} = \frac{1}{6}(31 - 2x^{(3)} - 3y^{(3)}) = \frac{1}{6}(31 - 2.2{,}022045 - 3.0{,}989943) = 3{,}99768$$

4. Adım:

$$x^{(4)} = \frac{1}{8}(30 - 2y^{(3)} - 3z^{(3)}) = \frac{1}{8}(30 - 2.0{,}989943 - 3.3{,}99768) = 2{,}003384$$

$$y^{(4)} = \frac{1}{9}(-1 + x^{(4)} + 2z^{(3)}) = \frac{1}{9}(-1 + 2{,}003384 + 2.3{,}99768) = 0{,}999861$$

$$z^{(4)} = \frac{1}{6}(31 - 2x^{(4)} - 3y^{(4)}) = \frac{1}{6}(31 - 2.2{,}003384 - 3.0{,}999861) = 3{,}998942$$

5. Adım:

$$x^{(5)}=\frac{1}{8}(30-2y^{(4)}-3z^{(4)})=\frac{1}{8}(30-2.0,999861-3.3,998942)=2,0004317$$

$$y^{(5)}=\frac{1}{9}(-1+x^{(5)}+2z^{(4)})=\frac{1}{9}(-1+2,0004317+2.3,998942)=0,999128$$

$$z^{(5)}=\frac{1}{6}(31-2x^{(5)}-3y^{(5)})=\frac{1}{6}(31-2.2,00004317-3.0,999128)=3,9999497$$

$x\approx 2,\ y\approx 1\ z\approx 4$

EXCEL PROGRAMI

$$8x+2y+3z=30$$
$$x-9y+2z=1$$
$$2x+3y+6z=31$$

lineer denklem sistemini Gauss-Seidel yöntemi 1. adım

x : f_x =(30-2*D10-3*E10)/8
y: f_x =(-1+C11+2*E10)/9
z: f_x =(31-2*C11-3*D11)/6

	A	B	C	D	E	F
3–4		$x^{(n+1)}=\frac{1}{8}(30-2y^{(n)}-3z^{(n)})$				
5–6		$y^{(n+1)}=\frac{1}{9}(-1+x^{(n+1)}+2z^{(n)})$				
7–8		$z^{(n+1)}=\frac{1}{6}(31-2x^{(n+1)}-3y^{(n+1)})$				
9			x	y	z	
10		0. adım	1	1	1	
11		1. adım	3,125	0,458333	3,895833	
12		2. adım	2,174479	0,996238	3,943721	
13		3. adım	2,022045	0,989943	3,99768	
14		4. adım	2,003384	0,999861	3,998942	
15		5. adım	2,000432	0,999813	3,99995	
16						

Örnek:

$$5x+2y+z=12$$
$$x+4y+z=12$$
$$2x+y+4z=16$$

lineer denklem sistemini Gauss-Seidel yöntemiyle bulunuz.

Çözüm: Yukarıdaki denklem için

$$|5| > |2| + |1|$$
$$|4| > |1| + |1|$$
$$|4| > |2| + |1|$$

şartlar üç denklem içinde sağlamaktadır. Buna göre;

$$x^{(n+1)} = \frac{1}{5}(12 - 2y^{(n)} - z^{(n)})$$
$$y^{(n+1)} = \frac{1}{4}(12 - x^{(n+1)} - z^{(n)})$$
$$z^{(n+1)} = \frac{1}{4}(16 - 2x^{(n+1)} - y^{(n+1)})$$

başlangıç şartı önceden verilmediğinden $x^{(0)} = 1,\ y^{(0)} = 1,\ z^{(0)} = 1$ olsun.

1. Adım:

$$x^{(1)} = \frac{1}{5}(12 - 2y^{(0)} - z^{(0)}) = \frac{1}{5}(12 - 2.1 - 1) = 1{,}8$$
$$y^{(1)} = \frac{1}{4}(12 - x^{(1)} - z^{(0)}) = \frac{1}{4}(12 - 1{,}8 - 1) = 2{,}3$$
$$z^{(1)} = \frac{1}{4}(16 - 2x^{(1)} - y^{(1)}) = \frac{1}{4}(16 - 2.1{,}8 - 2{,}3) = 2{,}525$$

2. Adım:

$$x^{(2)} = \frac{1}{5}(12 - 2y^{(1)} - z^{(1)}) = \frac{1}{5}(12 - 2.2{,}3 - 2{,}525) = 0{,}975$$
$$y^{(2)} = \frac{1}{4}(12 - x^{(2)} - z^{(1)}) = \frac{1}{4}(12 - 0{,}975 - 2{,}525) = 2{,}125$$
$$z^{(2)} = \frac{1}{4}(16 - 2x^{(2)} - y^{(2)}) = \frac{1}{4}(16 - 2.0{,}975 - 2{,}125) = 2{,}98125$$

3. Adım:

$$x^{(3)} = \frac{1}{5}(12 - 2y^{(2)} - z^{(2)}) = \frac{1}{5}(12 - 2.2{,}125 - 2{,}98125) = 0{,}95375$$
$$y^{(3)} = \frac{1}{4}(12 - x^{(3)} - z^{(2)}) = \frac{1}{4}(12 - 0{,}95375 - 2{,}98125) = 2{,}01625$$
$$z^{(3)} = \frac{1}{4}(16 - 2x^{(3)} - y^{(3)}) = \frac{1}{4}(16 - 2.0{,}95375 - 2{,}01625) = 3{,}0190625$$

4. Adım:

$$x^{(4)}=\frac{1}{5}(12-2y^{(3)}-z^{(3)})=\frac{1}{5}(12-2.2{,}01625-3{,}0190625)=0{,}9896275$$

$$y^{(4)}=\frac{1}{4}(12-x^{(4)}-z^{(3)})=\frac{1}{4}(12-0{,}9896275-3{,}0190625)=1{,}9978125$$

$$z^{(4)}=\frac{1}{4}(16-2x^{(4)}-y^{(4)})=\frac{1}{4}(16-2.0{,}9896275-1{,}9978125)=3{,}0057031$$

5. Adım:

$$x^{(5)}=\frac{1}{5}(12-2y^{(4)}-z^{(4)})=\frac{1}{5}(12-2.1{,}09978125-3{,}0057031)=0{,}9997344$$

$$y^{(5)}=\frac{1}{4}(12-x^{(5)}-z^{(4)})=\frac{1}{4}(12-0{,}9997344-3{,}0057031)=1{,}9986406$$

$$z^{(5)}=\frac{1}{4}(16-2x^{(5)}-y^{(5)})=\frac{1}{4}(16-2.0{,}9997344-1{,}9986406)=3{,}0004727$$

EXCEL PROGRAMI

$$5x+2y+z=12$$
$$x+4y+z=12$$
$$2x+y+4z=16$$

lineer denklem sistemini Gauss-Seidel yöntemi 1. adım

x : f_x (12-2*D26-E26)/5
y: f_x =(12-C27-E26)/4
z: f_x =(16-2*C27-D27)/4

$x\approx 1$, $y\approx 2$ $z\approx 3$

$$x^{(n+1)} = \frac{1}{5}(12 - 2y^{(n)} - z^{(n)})$$

$$y^{(n+1)} = \frac{1}{4}(12 - x^{(n+1)} - z^{(n)})$$

$$z^{(n+1)} = \frac{1}{4}(16 - 2x^{(n+1)} - y^{(n+1)})$$

	x	y	z
0. adım	1	1	1
1. adım	1,8	2,3	2,525
2. adım	0,975	2,125	2,98125
3. adım	0,95375	2,01625	3,019063
4. adım	0,989688	1,997813	3,005703
5. adım	0,999734	1,998641	3,000473

KAYNAKÇA

1. Prof. Dr. İbrahim Uzun, Nümerik Analiz, Beta Basın A.Ş., 2012, İstanbul.
2. Prof. Dr. Nuri Özalp – Doç. Dr. Elif Demirci, Nümerik Analiz, Ward Cheney, David Kincaid, Gazi Yayınları, 2012, Ankara.
3. Doç. Dr. Arzu Erdem, Sayısal Analiz, Kocaeli Üniversitesi, Ders notları, 2013, Kocaeli.
4. Doç. Dr. Zekeriya Girgin, Sayısal Analiz, Pamukkale Üniversitesi, Ders notları, 2016, Denizli.
5. Yrd. Doç. Dr. İhsan Temuçin Dolapçı, Yrd. Doç. Dr. Yiğit Aksoy, Sayısal Yöntemler, Celal Bayar Üniversitesi, Ders notları, 2015, Manisa.
6. Yrd. Doç. Dr. Emel Yavuz Duman, Nümerik Analiz, İstanbul Kültür Üniversitesi, Ders notları, 2013, İstanbul.
7. Yasin Ortakçı, Karabük Üniversitesi, Sayısal Analiz Ders Notları, 2007, Karabük.