# 6. BÖLÜM
# NÜMERİK İNTEGRAL

## GİRİŞ

Eğer f (x) fonksiyonu [a, b] de integrallenebilir, ilkel fonksiyonu da F(x) ise bu taktirde

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

olduğu bilinmektedir. Bu denklem literatürde Newton-Leibnitz formülü olarak bilinmektedir.

Fakat F(x) ilkel fonksiyonunun bulunması her zaman mümkün olmaz. Örneğin, f(x) fonksiyonu tablo ile verilmişse onun ilkelinin bulunması imkânsızdır. Benzer durumlar katlı integraller için söz konusudur. Bu nedenle sayısal integral denklemlerinin türetilmesi önem kazanmaktadır.

Nümerik integralleme de bir katlı integrallerin nümerik hesaplanması kuadratürleme, iki katlı integrallerin nümerik hesaplanması ise kubatürleme adını almaktadır. Uygun denklemlere ise kuadratür ve kubatür denklemleri denir.

Kuadrature integrallerin yaklaşık olarak hesaplanmasında f(x) fonksiyonun [a, b] aralığındaki

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

integrali, verilen $x_i$ düğüm noktalarında ve $A_i$ ağırlığında

$$I = \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$$

biçiminde toplam denklemlerinde hesaplanır. Bütün kuadratüre kurallarında integralin değeri interpolasyon polinomlarından yararlanılarak hesaplanır. Yani f (x) fonksiyonu yerine yaklaşık bir $P_n(x)$ polinomunun alınır ve integralin değeri yaklaşık olarak hesaplanır.

**DİKDÖRTGEN YÖNTEMİ**

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrallenebilir bir fonksiyon olsun. $\int_a^b f(x)dx$ integrali Riemann toplamlarının bir limiti olduğundan $\int_a^b f(x)dx$ integralinin yaklaşık değeri olarak herhangi bir Riemann toplamı alınabilir. $[a,b]$ aralığını $\Delta x=\frac{b-a}{n}$ olmak üzere $i=0,1,2,\cdots,n$ için $x_i=a+i\,\Delta x$ noktalarından n tane uzaklıkta alt aralığa bölelim. Bu durumda $i=0,1,2,\cdots,n$ için $t_i\in[x_{i-1},x_i]$ olmak üzere

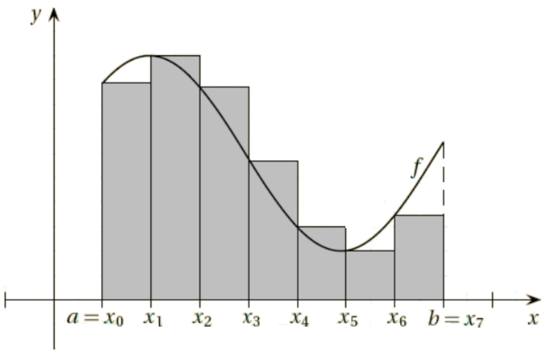
$$\int_a^b f(x)\,dx\cong\sum_{i=1}^n f(t_i)\,\Delta x_i=\sum_{i=1}^n f(t_i)\,\Delta x=\Delta x\sum_{i=1}^n f(t_i) \qquad (1)$$

olur.

**6.1. Tanım:** Her $i=0,1,2,\cdots,n$ için $t_i=x_{i-1}$ olmak üzere

$$\int_a^b f(x)\,dx\cong\Delta x\sum_{i=1}^n f(t_i)$$

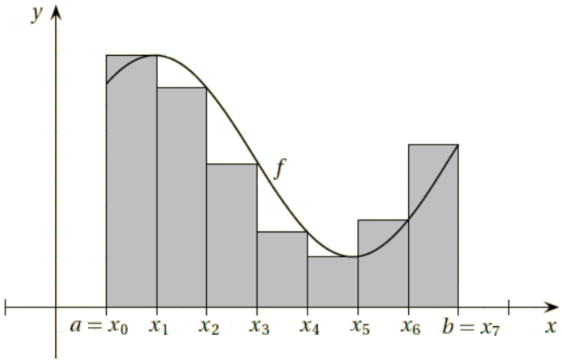
ifadesi $L_n=\Delta x\sum_{i=1}^n f(t_i)$ seçilirse $\int_a^b f(x)\,dx\cong L_n$ olur. Bu yönteme sol uç nokta yaklaşımı denir.




**6.2. Tanım:** Her $i=0,1,2,\cdots,n$ için $t_i=x_i$ olmak üzere

$$\int_a^b f(x)\,dx\cong\Delta x\sum_{i=1}^n f(t_i)$$

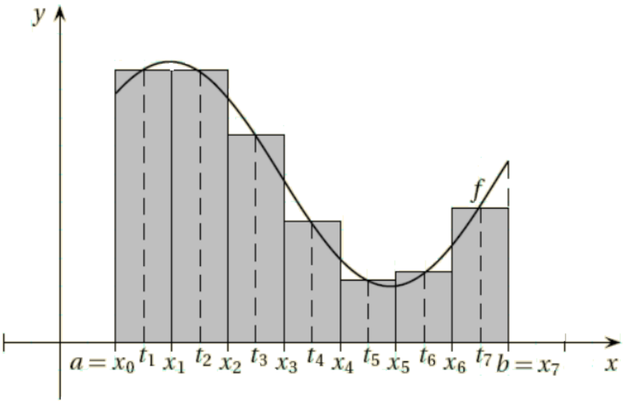
ifadesi $R_n=\Delta x\sum_{i=1}^n f(t_i)$ seçilirse $\int_a^b f(x)\,dx\cong R_n$ olur. Bu yönteme sağ uç nokta yaklaşımı denir.




**6.3. Tanım:** Her $i = 0, 1, 2, \cdots, n$ için $t_i$, $[x_{i-1}, x_i]$ aralığının orta noktası yani $t_i = \frac{1}{2}(x_{i-1}, x_i)$ olmak üzere

$$\int_a^b f(x)\,dx \cong \Delta x \sum_{i=1}^{n} f(t_i)$$

ifadesi $M_n = \Delta x \sum_{i=1}^{n} f(t_i)$ seçilirse $\int_a^b f(x)\,dx \cong M_n$ olur. Bu yönteme orta nokta yaklaşımı denir.




Şimdi de orta nokta yönteminde yapılan hatayı bulalım.

f fonksiyonu [a, b] aralığında integrallenebilen ve 1. mertebeden sürekli türevi ve 2. mertebeden türevi olan bir fonksiyon olsun. Bu durumda f sınılı ise orta nokta yöntemiyle hata için bir alt ve üst sınır belirlenebilir. [a, b] aralığında f fonksiyonunun ikinci türevinin maksimumu M olsun. Orta nokta yönteminde yapılan hatayı $E_0$ ile gösterelim. Bu durumda $E_0 \leq \frac{(b-a)^3 M}{24n^2}$ olur.

**Örnek:** Orta nokta yöntemiyle $\int_1^2 x^2\,dx$ integralinin yaklaşık değerinin $n = 5$ için bulunuz.

Çözüm: İntegralin gerçek değeri

$$\int_1^2 x^2\,dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_1^2 = \frac{1}{3}(2^3 - 1^3) = \frac{7}{3}$$

dir. Şimdi orta noktayı yöntemini uygulayalım.

$$a = 1, b = 2 \text{ ve } \Delta x = \frac{2-1}{5} = \frac{1}{5} = 0{,}2$$

için

$$x_0 = 1, x_1 = 1{,}2, x_2 = 1{,}4, x_3 = 1{,}6, x_4 = 1{,}8, x_5 = 2$$

olduğuna göre orta noktalar

$$t_1 = 1{,}1, t_2 = 1{,}3, t_3 = 1{,}5, t_4 = 1{,}7, t_5 = 1{,}9$$

olur. Buna göre

| $i$ | $x_{i-1}$ | $x_i$ | $t_i$ | $f(t_i) = t_i^2$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1,0 | 1,2 | 1,1 | 1,21 |
| 2 | 1,2 | 1,4 | 1,3 | 1,69 |
| 3 | 1,4 | 1,6 | 1,5 | 2,25 |
| 4 | 1,6 | 1,8 | 1,7 | 2,89 |
| 5 | 1,8 | 2,0 | 1,9 | 3,61 |
| | | | $\Sigma$ | 11,65 |

$$\begin{aligned}\int_1^2 x^2\,dx \cong M_n &= \frac{2-1}{5}\sum_{i=1}^{5} f(t_i)\\ &= \frac{1}{5}[f(1{,}1) + f(1{,}3) + f(1{,}5) + f(1{,}7) + f(1{,}9)]\\ &= \frac{1}{5}[(1{,}1)^2 + (1{,}3)^2 + (1{,}5)^2 + (1{,}7)^2 + (1{,}9)^2]\\ &= \frac{11{,}65}{5}\end{aligned}$$

olur. Orta nokta yöntemindeki hata

$$E_0 = \int_1^2 x^2\,dx - M_n = \frac{7}{3} - \frac{11{,}65}{5} = 1{,}557$$

elde edilir.

**YAMUK KURALI**

İntegralle dikdörtgenler yerine yamuklarla yaklaşma metoduna yamuk kuralı diyeceğiz.

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrallenebilir bir fonksiyon olsun. $[a,b]$ aralığını $\Delta x=\dfrac{b-a}{n}$ olmak üzere $i=0,1,2,\cdots,n$ için $x_i=a+i\,\Delta x$ noktalarından n tane eşit uzunlukta alt aralığa bölelim. Bu durumda f'nin $[x_{i-1},x_i]$ aralığı üzerindeki integrali yaklaşık olarak

$$\Delta x\frac{f(x_{i-1})-f(x_i)}{2}$$

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx\cong \Delta x\sum_{i=1}^{n}\frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2}$$

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &\cong \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx\\ &\cong \Delta x\sum_{i=1}^{n}\frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2}\\ &=\frac{\Delta x}{2}\sum_{i=1}^{n}(f(x_{i-1})+f(x_i))\\ &=\frac{\Delta x}{2}[f(x_0)+2f(x_1)+...+2f(x_{n-1})+f(x_n)]\end{aligned}$$

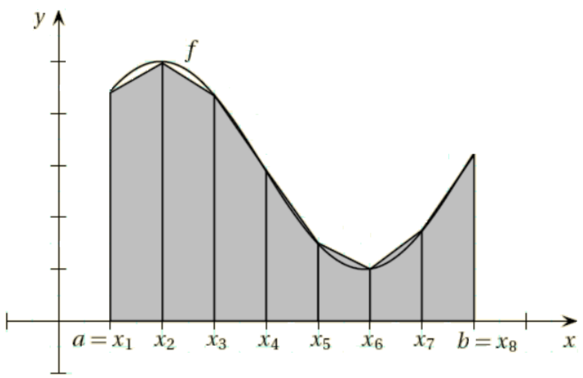
olur.

$$T_n=\frac{\Delta x}{2}[f(x_0)+2f(x_1)+...+2f(x_{n-1})+f(x_n)]$$

olarak alınırsa

$$\int_a^b f(x)\,dx\cong T_n=\frac{L_n+R_n}{2}$$

olduğu elde edilir.




Şimdi de yamuk yönteminde yapılan hatayı bulalım.

f fonksiyonun ikinci türevi var ve sınırlı ise yamuk kuralı ile yapılan hesap hataları için bir alt ve üst sınır aşağıdaki şekilde belirlenebilir. Yamuk kuralı kullanarak $\int_a^b f(x)\,dx$ integli hesaplarken yapılan hata

$$\frac{(b-a)^3}{12n^2} m \le E_T \le \frac{(b-a)^3}{24n^2} M$$

olur. Yamuk kuralında yapılan hata

$$E_T = \int_a^b f(x)\,dx - T_n$$

ile hesaplanır.

**Örnek:** Yamuk yöntemiyle $\int_1^2 x^2\,dx$ integralinin yaklaşık değerinin $n = 5$ için bulunuz.

Çözüm: İntegralin gerçek değeri

$$\int_1^2 x^2\,dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_1^2 = \frac{1}{3}(2^3 - 1^3) = \frac{7}{3}$$

dir. Şimdi yamuk yöntemini uygulayalım.

$x_0 = 1, x_1 = 1{,}2, x_2 = 1{,}4, x_3 = 1{,}6, x_4 = 1{,}8, x_5 = 2$

olduğuna göre

| i | $x_i$ | $x_i^2$ | $m_i$ | $m_i f(t_i)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1,0 | 1,00 | 1 | 1,00 |
| 1 | 1,2 | 1,44 | 2 | 2,88 |
| 2 | 1,4 | 1,96 | 2 | 3,92 |
| 3 | 1,6 | 2,56 | 2 | 5,12 |
| 4 | 1,8 | 3,24 | 2 | 6,48 |
| 5 | 2,0 | 4,00 | 1 | 4,00 |
| | | | $\Sigma$ | 23,4 |

$$\int_1^2 x^2\,dx \cong \frac{2-1}{2\cdot 5}\sum_{i=1}^{5} f(t_i)$$

$$= \frac{1}{5}[f(1) + 2f(1{,}2) + 2f(1{,}4) + 2f(1{,}6) + 2f(1{,}8) + f(2)]$$

$$= \frac{23{,}4}{5}$$

olur. Buna göre yamuk yöntemindeki hata

$$E_T = \int_1^2 x^2\,dx - T_n = \frac{7}{3} - \frac{23{,}4}{10} = -\frac{1}{1500} = \frac{7}{3} - \frac{11{,}7}{5} = 1{,}553$$

elde edilir.

**Örnek:** $\int_0^{\pi} \sin x\,dx$ integralinin sonucu 2 olduğuna göre yamuk yöntemiyle yaklaşık değerini bulunuz.

Çözüm: $\left[0, \frac{\pi}{4}\right], \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right], \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right]$ ve $\left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$ biçiminde dört eşit parçaya ayıralım

$$\begin{aligned} I &= \frac{\pi/4}{2}\left[f(0) + 2f\left(\frac{\pi}{4}\right) + 2f\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2f\left(\frac{3\pi}{4}\right) + f(\pi)\right] \\ &= \frac{\pi}{8}\left[0 + 2\,\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\cdot 1 + 2\,\frac{\sqrt{2}}{2} + 0\right] \\ &= \frac{\pi}{4}(\sqrt{2} + 1) \\ &= 1{,}89612 \end{aligned}$$

olur. Buna göre yamuk yöntemindeki hata

$$E_T = \int_0^{\pi} \sin x\,dx - T_n = 2 - 1{,}89612 = 0{,}10388$$

elde edilir.

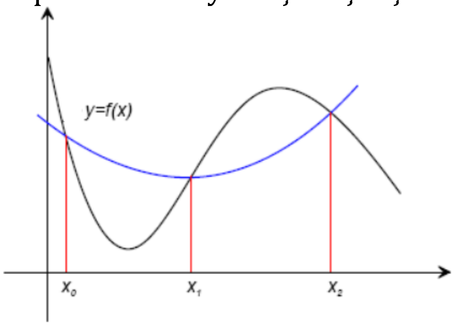
Thomas Simpson
20 Ağustos 1710, – 14 Mayıs 1761, Sutton Cheney, Leicestershire İngiltere

## SİMPSON YÖNTEMİ

Yamuk kuralında egrinin altında bir yamuk çizip, onun alanını bularak integralin alanını buluruz buda integralin yaklaşık değerini bulmada belli hata oranına sebep olmaktadır. Simpson kurallarında eğri üzerinde iki nokta alıp onları düz doğruyla birleştirerek alan bulmak yerine iki nokta arasında bir nokta daha alıp üç noktadan geçen bir parabol (2. dereceden polinom) elde ederek eğri yerine parabolün alanını bulmaya (1/3 Simpson yöntemi), ya da iki nokta arasında iki nokta daha alıp dört noktadan geçen bir kübik (3. dereceden) (3/8 Simpson yöntemi) polinom alarak onun alanını bulmaya dayanmaktadır. Tabiiki iki düğüm noktasından bir doğru çizmek yerine oradan bir eğri çizmek hata oranını daha da azaltacaktır.

### a) Simpson'un 1/3 Yöntemi

Lineer olmayan herhangi üç noktadan bir parabol geçer. Simpson yöntemi bu şekilde integrale parabollerle yaklaşma çalışılır.




$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrallenebilir bir fonksiyon olsun. n bir çift doğal sayı ve $\Delta x=\dfrac{b-a}{n}$ olmak üzere $[a,b]$ aralığını $i=0,1,2,\cdots,n$ için $x_i=a+i\,\Delta x$ noktalarından n tane eşit uzunlukta alt aralığa bölelim. $[x_{i-1},x_i]$ ve $[x_i,x_{i+1}]$ alt aralıklarını göz önüne alalım. $[x_{i-1},x_{i+1}]$ aralığında f fonksiyonuna parabolle yaklaşalım. $P_{i-1}(x_{i-1},f(x_{i-1}))$, $P_i(x_i,f(x_i))$ ve $P_{i+1}(x_{i+1},f(x_{i+1}))$ noktalarından geçen parabolün denklemi $y=Ax^2+Bx+C$ biçimindedir. Böylece

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \cong \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (Ax^2+Bx+C)\,dx$$

dir. Diğer yandan

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (Ax^2+Bx+C)\,dx=\left(A\frac{x^3}{3}+B\frac{x^2}{2}+Cx\right)\Bigg|_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}=\left(A\frac{x^3}{3}+B\frac{x^2}{2}+Cx\right)\Bigg|_{x_i-\Delta x}^{x_i+\Delta x}$$

$$=\frac{A}{3}((x_i+\Delta x)^3-(x_i-\Delta x)^3)+\frac{B}{2}((x_i+\Delta x)^2-(x_i-\Delta x)^2)+2(\Delta x)C$$

$$=\frac{A}{3}2(\Delta x)((\Delta x)^2+3x_i^2)+2B(\Delta x)x_i+2(\Delta x)C$$

$$=\frac{\Delta x}{3}2A((\Delta x)^2+3x_i^2)+\frac{6B}{3}(\Delta x)x_i+\frac{6}{3}(\Delta x)C$$

$$=\frac{\Delta x}{3}[2A((\Delta x)^2+3x_i^2)+6Bx_i+6C]$$
$$=\frac{\Delta x}{3}[2A(\Delta x)^2+6Ax_i^2+6Bx_i+6C]$$

olur. $y = Ax^2 + Bx + C$ parabolü $P_{i-1}(x_{i-1}, f(x_{i-1})), P_i(x_i, f(x_i))$ ve $P_{i+1}(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$ noktalarından geçtiğinden $x_{i-1} = x_i - \Delta x$ ve $x_{i+1} = x_i + \Delta x$ olduğunda göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} f(x_{i-1}) &= f(x_i - \Delta x) \\ &= A(x_i - \Delta x)^2 + B(x_i - \Delta x) + C \\ &= A(\Delta x)^2 - 2A(\Delta x)x_i - B(\Delta x) + Ax_i^2 + Bx_i + C \end{aligned}$$

$$f(x_{i-1}) = Ax_i^2 + Bx_i + C$$

ve

$$\begin{aligned} f(x_{i+1}) &= f(x_i + \Delta x) \\ &= A(x_i + \Delta x)^2 + B(x_i + \Delta x) + C \\ &= A(\Delta x)^2 + 2A(\Delta x)x_i + B(\Delta x) + Ax_i^2 + Bx_i + C \end{aligned}$$

olur bu durumda

$$f(x_{i-1}) + 4f(x_i) + f(x_{i+1}) = f(x_{i+1}) + 6Ax_i^2 + 6Bx_i + 6C$$

bulunur. Böylece

$$\begin{aligned} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (Ax^2+Bx+C)\,dx &= \frac{\Delta x}{3}[2A(\Delta x)^2+6Ax_i^2+6Bx_i+6C] \\ &= \frac{\Delta x}{3}[f(x_{i-1})+4f(x_i)+f(x_{i+1})] \end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \cong \frac{\Delta x}{3}[f(x_{i-1})+4f(x_i)+f(x_{i+1})]$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)\,dx + \ldots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)\,dx$$

olacağından

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\,dx &= \frac{\Delta x}{3}[(f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2))+(f(x_2)+4f(x_3)+f(x_4)) \\ &\quad +(f(x_4)+4f(x_5)+f(x_6))+\ldots++(f(x_{n-2})+4f(x_{n-1})+f(x_n))] \\ &\cong \frac{\Delta x}{3}[(f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+2f(x_4)+\ldots \\ &\quad +2f(x_{n-2})+4f(x_{n-1})+2f(x_n)] \end{aligned}$$

bulunur. Burada

$$\int_a^b f(x)\,dx \cong S_n = \frac{\Delta x}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \cdots + 4f(x_{n-1}) + 4f(x_n)]$$

olur. Bu yönteme Simpson yöntemi denir.

Şimdi de Simpson yönteminde yapılan hatayı bulalım.

f fonksiyonun [a, b] aralığında 4. türevi var ve sürekli ise yamuk yönteminde olduğu gibi Simpson yönteminde yapılan hata için bir alt ve üst sınır belirlenebilir. [a, b] aralığında f fonksiyonunun 4. türevinin maksimumu M ve miniumu m ise

$$\frac{(b-a)^5}{180n^4} m \leq E_S \leq \frac{(b-a)^5}{180n^4} M$$

ile bulunur. Buna göre Simpson yönteminde yapılan hata

$$E_S = \int_a^b f(x)\,dx - S_n$$

ile bulunur.

**Örnek:** $\int_0^\pi \sin x\,dx$ integralinin sonucu 2 olduğuna göre 1/3 Simpson yöntemiyle yaklaşık değerini bulunuz.

Çözüm:

**i.** $[0, \pi]$ aralığında bir tane parabol yaparak integralin değerini yaklaşık olarak bulalım. $m = 1$ alalım.

$$I = \frac{\Delta x}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2) = \frac{\pi}{3}[f(0) + 4\sin\frac{\pi}{2} + 0] = 2{,}0944$$

bulunur. Bu değer gerçek değere yakın bir değerdir.

**ii.** Aralığı $\left[0, \frac{\pi}{2}\right], \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ biçiminde ikiye bölelim ve iki farklı parabol yaparak integralin değerini yaklaşık olarak bulalım. $m = 2$ alalım.

$$\begin{aligned} I &= \frac{\pi/4}{3}\left[f(0) + 4f\left(\frac{\pi}{4}\right) + f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] + \frac{\pi/2}{3}\left[f\left(\frac{\pi}{2}\right) + 4f\left(\frac{3\pi}{4}\right) + f(\pi)\right] \\ &= \frac{\pi}{12}\left[f(0) + 4f\left(\frac{\pi}{4}\right) + 2f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] \\ &= \frac{\pi}{12}[0 + 2\sqrt{2} + 2 + 2\sqrt{2}] \\ &= \frac{(2\sqrt{2}+1)\pi}{6} \\ &= 2{,}00456 \end{aligned}$$

bu sonuç gerçek değere yakın bir yakınsama olduğunu göstermektedir.

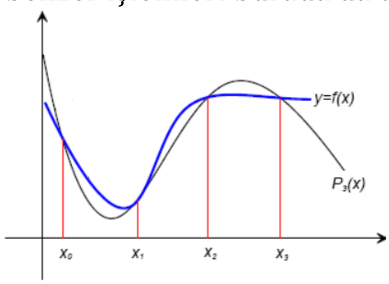
**iii.** Aralığı $\left[0, \frac{\pi}{3}\right], \left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$ ve $\left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right]$ biçiminde üç eşit parçaya ayırarak fonksiyonun yaklaşık değerini bulalım. $m = 3$ alalım.

$$I = \frac{\pi/6}{3}\left[f(0) + 4f\left(\frac{\pi}{4}\right) + f\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] + \frac{\pi/6}{3}\left[f\left(\frac{\pi}{3}\right) + 4f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{\pi/6}{3}\left[f\left(\frac{2\pi}{3}\right) + 4f\left(\frac{5\pi}{6}\right) + f(\pi)\right]\right.$$
$$= \frac{\pi}{18}\left[f(0) + 4f\left(\frac{\pi}{6}\right) + 2f\left(\frac{\pi}{3}\right) + 4f\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2f\left(\frac{2\pi}{3}\right) + 4f\left(\frac{5\pi}{6}\right) + f(\pi)\right]$$
$$= \frac{(\sqrt{3}+4)\pi}{9}$$
$$= 2{,}00086$$

bulunur. Görüldüğü gibi Simson yöntemi yamuk yöntemine göre daha iyi 2'ye yaklaşmaktadır.

### b) Simpson 3/8 Yöntemi

Verilen integraldeki eğri yerine 3. dereceden bir polinon alınarak onun alanı hesaplanır. Böylece verilen aralıkta yaklaşık olarak eğrinin alanını hesaplanmış olur. Üçüncü dereceden bir polinomu hesaplamak için dört nokta gerekmektedir. [a, b] aralığında bir integral için, noktalar $x_0 = a, x_3 = b$ uç noktaları ile aralarından $x_1$ ve $x_3$ üç eşit aralığa bölünmüş dört noktadan oluşur. Simpson 3/8 yönteminde de düğüm noktalarını ne kadar çok alırsak o kadar iyi sonuç elde ederiz. Eğri yerine seçilecek üçüncü dereceden polinomu en kolay şekilde Lagrange polinomundan yararlanarak bulabiliriz. Bu amaç için önceki yöntemlerde yapılan benzer işlemleri burada da uygulandığında



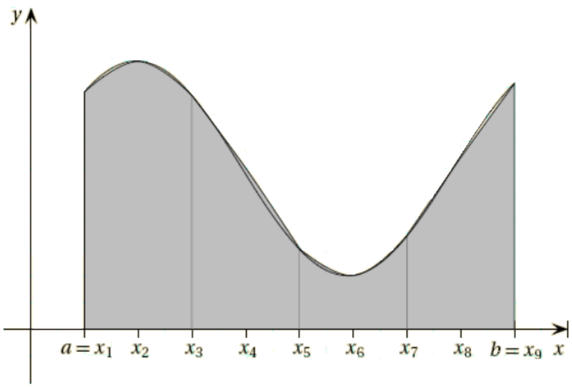

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)\,dx \cong \frac{3\Delta x}{8}[f(x_0)+3f(x_1)+3f(x_2)+f(x_3)]$$

denklemi elde ederiz. Bu denkleme Simpson 3/8 denklemi denir. Geometrik olarak bu formül f (x) eğrisi yerine $(x_0, y_0), (x_1, y_2), (x_2, y_2)$ ve $(x_3, y_3)$ düğüm noktalardan geçen $y = P_3(x)$ parabolü ele alınarak bulunmuştur.

Bu yönteminde bütün [a, b] aralığı $n = 3m$ eşit aralığa bölünür. Bu aralık sayısı keyfi genişlikte fakat aralık uzunlukları eşittir. Bu eşit genişlik $\Delta x$ ile gösterilir ve $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ ile bulunur. Kübik poilinomlar için dört nokta gerekli olduğundan birinci üç aralığa yani dört noktaya Simpson 3/8 kuralı uygulanır. Aynı kural diğer ikinci grup dört nokta için uygulanır ve uygulama bu şekilde tüm noktalara eşit bir şekilde uygulanarak kuralın genel yapısı ortaya çıkartılır. Burada;

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{3m}$$

dir.




Simpson 3/8 formülünü üçlü $[x_0, x_3], [x_3, y_6], \ldots, [x_{3m-3}, y_{3m}]$ aralıklarına uygulayalım. Her aralığın genişliği $3\Delta x$ dır.

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \cong \frac{3\Delta x}{8}[f(x_0)+3f(x_1)+3f(x_2)+f(x_3)] + \frac{3\Delta x}{8}[f(x_3)+3f(x_4)+3f(x_5)+f(x_6)]$$

$$+\frac{3\Delta x}{8}[f(x_{3m-3})+3f(x_{3m-2})+3f(x_{3m-1})+f(x_{3m})]$$

veya

$$I = \frac{3\Delta x}{8}[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + \cdots + 3f(x_{3m-2}) + 3f(x_{3m-1}) + f(x_{3m})]$$

genel Simpson 3/8 yöntemi olur.

**Örnek:** $\int_0^{\pi} \sin x\,dx$ integralinin sonucu 2 olduğuna göre 3/8 Simpson yöntemiyle yaklaşık değerini bulunuz.

Çözüm:

**i.** $[0, \pi]$ aralığında bir tane kübik denklem yaparak integralin değerini yaklaşık olarak bulalım. Bunun için $m = 1$ alalım.

$$I = \frac{3}{8}\frac{\pi-0}{3\cdot 1}\left[\sin 0 + 3\sin\frac{\pi}{3} + 3\sin\frac{2\pi}{3} + \sin\pi\right] = \frac{3\sqrt{3}\pi}{8} = 2{,}01052$$

bulunur. Bu değer önceki iki yönteme göre gerçek değere daha yakın bir değerdir.

**ii.** Aralığı $\left[0,\frac{\pi}{2}\right],\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ biçiminde ikiye bölelim ve iki farklı kübik denklem yaparak integralin değerini yaklaşık olarak bulalım. yada denklem Bunun için $m = 2$ alalım.

$$I = \frac{3(\pi/6)}{8}\left[\sin 0 + 3\sin\frac{\pi}{6} + 3\sin\frac{\pi}{3} + 2\sin\frac{\pi}{2} + 3\sin\frac{2\pi}{3} + 3\sin\frac{5\pi}{6} + \sin\pi\right]$$
$$= \frac{\left(5+3\sqrt{3}\right)\pi}{16}$$
$$= 2{,}00201$$

bu sonuç gerçek değere hızlı bir yakınsama olduğunu göstermektedir. Görüldüğü gibi Simson 3/8 yöntemi yamuk ve Simpson 1/3 yöntemlerine göre daha iyi 2'ye yaklaşmaktadır.

## KAYNAKÇA

1. Prof. Dr. Mahmut Koçak, Analiz Ders Notları, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Eskişehir, 2016.
2. Yrd. Doç. Dr. İhsan Temuçin Dolapçı, Yrd. Doç. Dr. Yiğit Aksoy, Sayısal Yöntemler, Celal Bayar Üniversitesi, Ders notları, 2015, Manisa.