1. BÖLÜM
ÇOK DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLARA GİRİŞ

Buraya kadar incelediğimiz fonksiyonlar tek değişkenli fonksiyonlardı. Bu fonksiyonlara tek değişkenli fonksiyonlar diyorduk. Çünkü bağımsız değişkenin sayısı bir tanedir. Ama iki, üç ya da daha fazla değişkenli ise ortaya çıkan fonksiyonlara çok değişkenli fonksiyon şeklinde tanımlanacağız.

ÇOK DEĞİŞKENLİ FONKSİYON KAVRAMI

1.1. Tanım: Boş küme olmayan herhangi A, B ve C kümeleri verilsin ve A ve B kümelerinin kartezyen çarpımını;

$A \times B = \{ (x, y) \mid x \in A, y \in B \}$

olsun, $A \times B$ kümesinden alınmış her (x, y) çiftini C kümesinden bir ve yalnız bir z elemanı ile eşleyen bir f fonksiyonu verilmişse bu f fonksiyonu $A \times B$ kümesinden C kümesine iki değişkenli fonksiyon denir ve

$$f : A \times B \to C$$
$$(x, y) \to z = f(x, y)$$

biçiminde gösterilir. $A \times B$ ye fonksiyonun tanım kümesi veya tanım bölgesi, C ye ise değer kümesi denir.

Örnek: $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{-2, -1\}$, $C = \{3, 4, 5\}$ kümeleri verilsin. O zaman

$A \times B = \{ (1, -2), (1, -1), (2, -2), (2, -1)\ (3, -2), (3, -1) \}$

olur.

$f(1, -2) = 3$, $f(1, -1) = 3$, $f(2, -2) = 4$, $f(2, -1) = 4$, $f(3, -2) = 5$, $f(3, -1) = 5$

fonksiyondur.

Örnek: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 - y^2 + 4xy$ iki değişkenli fonksiyonu için $f(0,1), f(3,2)$ yı bulunuz.

Çözüm: $f(0,1) = 0^2 - 1^2 + 4.0.1 = -1$

$f(3,2) = 3^2 - 2^2 + 4.3.2 = 29$

Not: Tek değişkenli fonksiyonlarda olduğu gibi iki değişkenli fonksiyonlarda da değişkenlerin ve kuralın hangi harflerle gösterildiğinin önemi yoktur. Örneğin,

$$f(x,y)=\log(x^2+\sqrt{y})$$
$$g(m,n)=\log(m^2+\sqrt{n})$$

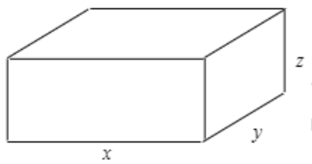
bağıntıları aynı fonksiyonları ifade eder.

Örnek: A türü ve B türü olmak üzere iki tür ürün üreten bir işletmenin haftalık sabit gideri 500 □, ürün başına haftalık gideri A için 70 □, B için 80 □ ise işletmenin haftada x adet A ve y adet B üretmesi durumunda haftalık toplam

$$C(x,y)=500+70x+80y \text{ □}$$

olur.

Örnek: Dikdörtgen şeklindeki bir kartondan üstü açık, dikdörtgenler prizması oluşturuluyor. Bu prizmanın boyutlar x, y ve z ise prizmanın alanı fonksiyonu;



$$f(x,y,z)=2xy+2xz+2yz$$

biçimindedir.

Örnek: a) $f(x,y)=\dfrac{y}{x^2-5x+4}$

b) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2-4}$

c) $f(x,y)=\log(-x^2+y)$

fonksiyonlarının tanım kümelerini bulalım.

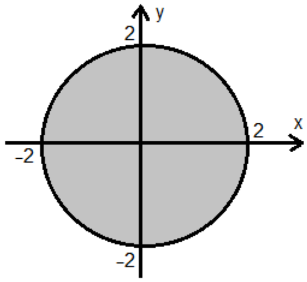
Çözüm: a) $f(x,y)=\dfrac{y}{x^2-5x+4}$ fonksiyonunun paydasını 0 yapan değerler tanım kümesini sağlamaz.

$x^2-5x+4=0$ ise $x_1=1$ ve $x_2=4$

olduğundan tanım kümesi $(\mathbb{R}-\{1,4\})\times\mathbb{R}$ dir.

b) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2-4}$ fonksiyonunun tanımlı olduğu aralık,

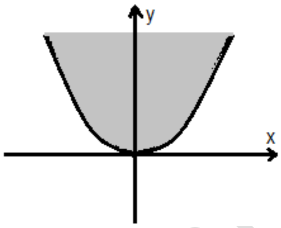
$$x^2+y^2-4\leq 0$$
$$x^2+y^2\leq 4$$



$\{(x, y) \in \mathbb{R}:\ x^2 + y^2 \leq 4\}$ biçimindedir.

c) $f(x,y) = \log(-x^2 + y)$ fonksiyonunun tanımlı olduğu aralık,

$$-x^2 + y > 0$$
$$y > x^2$$



$\{(x, y) \in \mathbb{R}:\ y > x^2\}$ biçimindedir.

1.2. Tanım: $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere, boş küme olmayan $A_1, A_2, \cdots, A_n$ ve C kümeleri verilsin. $x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \cdots, x_n \in A_n$ olmak üzere, her bir

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$$

n-lisinin C kümesinden bir ve yalnız bir z elemanı ile eşleşmişse $A_1, A_2, \cdots, A_n$ den C ye n-değişkenli fonksiyon denir ve

$$f : A_1 \times A_2 \times ... \times A_n \to C$$
$$(x_1, x_2, \cdots, x_n) \to f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = z$$

biçiminde gösterilir. $A_1, A_2, \cdots, A_n$ kümesine fonksiyonun tanım kümesi C kümesine ise değer kümesi denir.

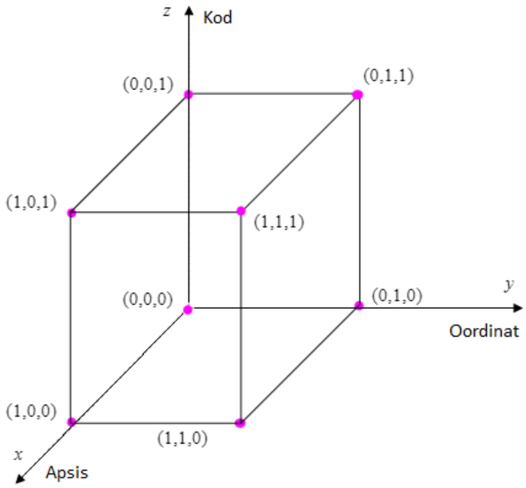
Örnek: $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 3x_2^2 + 4x_1x_3^2$ iki değişkenli fonksiyonu için $f(-1, 1, 2)$ yı bulunuz.

Çözüm: $f(-1,1,2) = (-1)^2 - 3.1^2 + 4.(-1).2^2 = -18$

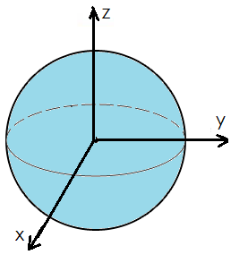
Not: Bu kısımdan sonraki yerlerde çok değişkenli fonksiyonların bazılarını iki değişken olarak tanımlanacak ve bütün işlemler bu şekilde incelenecektir. Okuyucu bu işlemleri n değişkene taşıyabilir.

Bu kısımda meşhur birkaç iki değişkenli fonksiyonların denklemini ve grafiğini vereceğiz.

Üç boyutlu uzayda Kartezyen koordinat sisteminde x eksenine apsis, y eksenine oordinat ve z eksenine kod adı verilir.



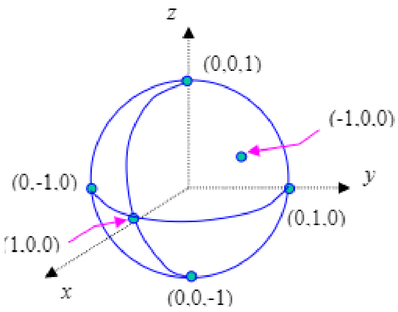
1. Küre:



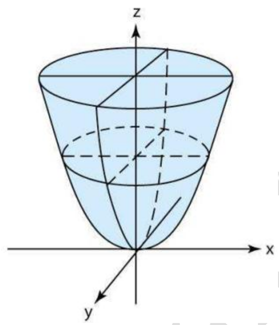
$$x^2+y^2+z^2=r^2$$

Örnek: $x^2+y^2+z^2=1$ denklemi için

- xy–düzleminde $z=0$ ve $x^2+y^2=1$ olup merkezi orijinde olan 1 yarıçaplı çemberdir.
- xz–düzleminde $y=0$ ve $x^2+z^2=1$ olup merkezi orijinde olan 1 yarıçaplı çemberdir.
- yz–düzleminde $x=0$ ve $y^2+z^2=1$ olup merkezi orijinde olan 1 yarıçaplı çemberdir.



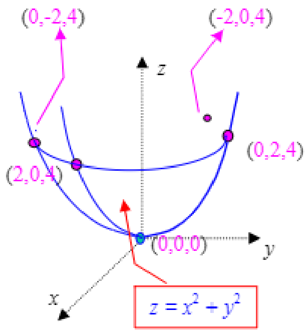
2. Eliptik Paraboloid



$$z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$$

Örnek: $z=x^2+y^2$ denklemi için

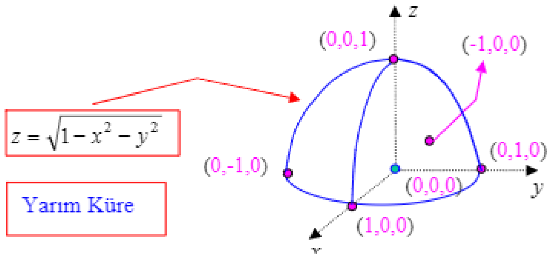
- xy–düzleminde $z=0$ ve $x^2+y^2=0$ olup (0, 0, 0) noktasını gösterir.
- $z=4$ düzleminde $x^2+y^2=4$ olup merkezi $z=4$ de olan 2 yarıçaplı çemberdir.



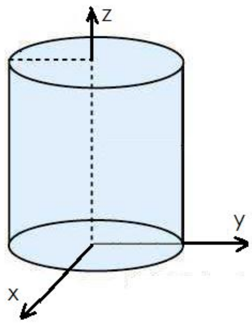
Örnek: $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ denklemi için

- xy–düzleminde $z=0$ ve $x^2+y^2=1$ olup merkezi orijinde olan 1 yarıçaplı çemberdir.

- xz–düzleminde $y=0$ ve $z=\sqrt{1-x^2}$ olup $x^2+z^2=1$, $z\geq 0$ dir.
- yz–düzleminde $x=0$ ve $z=\sqrt{1-y^2}$ olup $y^2+z^2=1$, $z\geq 0$ dir.

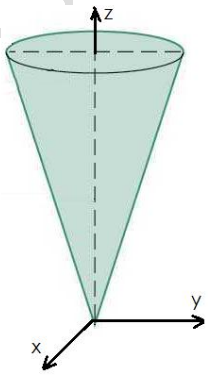


3. Silindir



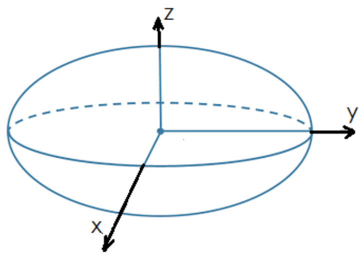
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

4. Koni



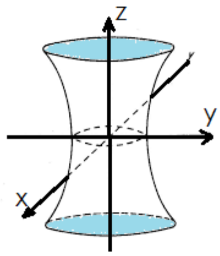
$$z^2=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$$

5. Elipsoid



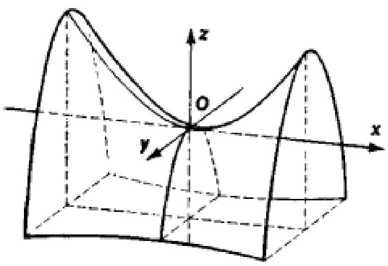
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

6. Tek Kanatlı Paraboloid



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

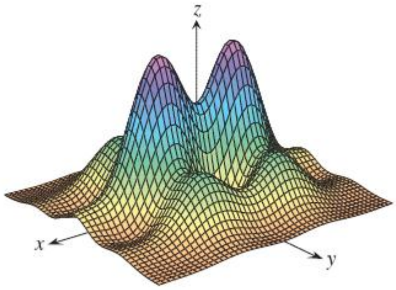
7. Hiperbolik Paraboloid



b

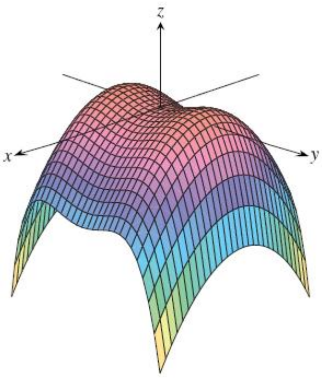
$$z=\frac{x^2}{2a}-\frac{y^2}{2b}$$

8.



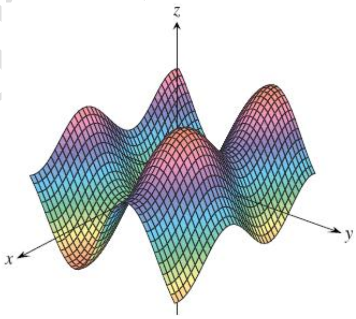
$$z = e^{-\frac{(x^2+y^2)}{8}}(\sin x^2 + \cos y^2)$$

9.



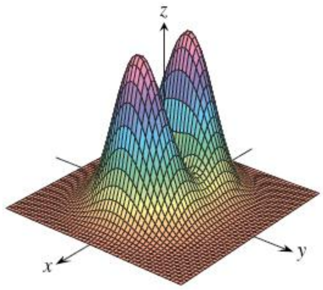
$$z = y^2 - y^4 - x^2$$

10.



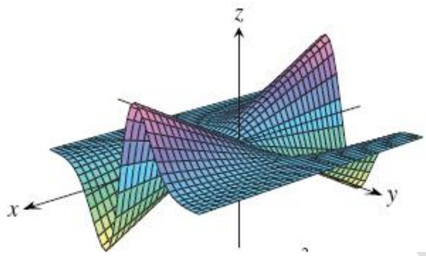
$$z = \sin x + 2\sin y$$

11.



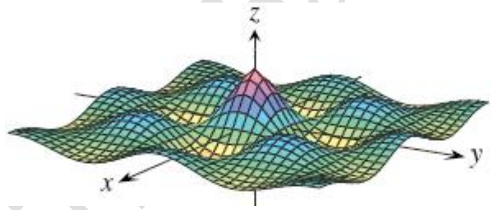
$z = e^{-(x^2+y^2)}(4x^2 + y^2)$

12.



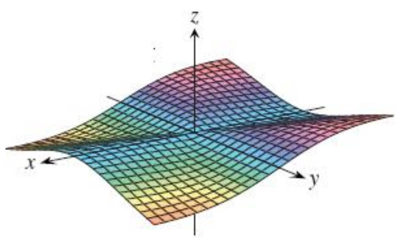
$z = xye^{-y^2}$

13.



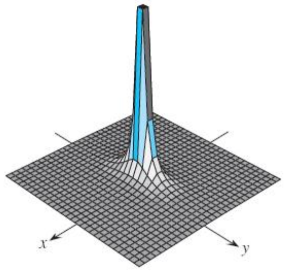
$z = (\cos x)(\cos y)e^{-\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{4}}$

14.



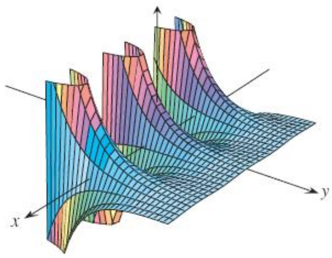
$z = -\dfrac{xy^2}{x^2 + y^2}$

15.



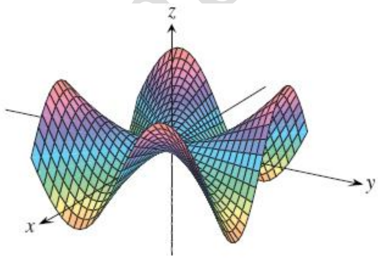
$$z=\frac{1}{4x^2+y^2}$$

16.



$z=e^{-y}\cos x$

17.



$$z=\frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$$

ÇOK DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLARDA İŞLEMLER

1.3. Tanım: $f:A\to\mathbb{R}$, $g:B\to\mathbb{R}$ ve $A\cap B\neq\varnothing$ olmak üzere,

1. $(f+g):A\cap B\to\mathbb{R}$ ve $(f+g)(x,y)=f(x,y)+g(x,y)$ fonksiyonuna f ile g nin toplamı denir.

2. $(f-g):A\cap B\to\mathbb{R}$ ve $(f-g)(x,y)=f(x,y)-g(x,y)$ fonksiyonuna f ile g nin çıkarması denir.

3. $(f.g):A\cap B\to\mathbb{R}$ ve $(f.g)(x,y)=f(x,y).g(x,y)$ fonksiyonuna f ile g nin çarpımı denir.

4. $c\in\mathbb{R}$ olmak üzere $(cf):A\to\mathbb{R}$ ve $c(f)(x,y)=(cf)(x,y)$ fonksiyonuna f in skalerle çarpımı denir.

5. $\frac{f}{g}:(A\cap B)\to\mathbb{R}$ ve $\left(\frac{f}{g}\right)(x,y)=\frac{f(x,y)}{g(x,y)}$, (g(x, y) ≠ 0) fonksiyonuna f ile g ye bölümü denir.

6. $n\in\mathbb{R}$ olmak üzere $f:A\to\mathbb{R}$ ve $f^n(x,y)=[f(x,y)]^n$ fonksiyonuna f'nin n. kuvveti denir.

Örnek: $f(x,y)=x^2+y^2$ ve $g(x,y)=-2xy$ fonksiyonlarının toplamını ve çıkarmasını bulunuz.

Çözüm:
a) $f(x,y)+g(x,)=x^2+y^2-2xy=(x-y)^2$
b) $f(x,y)-g(x,)=x^2+y^2-(-2xy)=(x+y)^2$

Örnek: $f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,
$f(a;b)=\max(a;b)$ ve $g(a;b)=\min(a;b)$
şeklinde tanımlanıyor. $f(8;2)+g(-1;5)$ i bulunuz.

Çözüm: $f(8;2)=\max(8;2)=8$ ve $g(-1;5)=\min(-1;5)=-1$
$f(8;2)+g(-1;5)=8-1=7$

Örnek: $f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(a,b)=(a-b)^3$ ise $f^4(201,199)$ yi bulunuz.

Çözüm: $f^4(201,199)=[f(201-199)]^4=[(201-199)^3]^4=2^{12}$

4.1. Teorem: A ve B boştan farklı iki sayılabilir küme iseler $A\times B$ de sayılabilir kümedir.

İspat: A sayılabilir bir küme ise en az bir 1–1 olan $g:A\to\mathbb{N}$ fonksiyonu vardır ki, $a\in A$ için $h(a)\in\mathbb{N}$ dir.

B sayılabilir bir küme ise en az bir 1−1 olan $h: A \to \mathbb{N}$ fonksiyonu vardır ki, $b \in B$ için $h(b) \in \mathbb{N}$ dir.

Şimdi $f(a,b) = (g(a), h(b))$ olacak şekilde, $f: A \times B \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ fonksiyonunu tanımlayalım. f fonksiyonu 1−1 dir. Çünkü,

g, 1−1 olduğundan her $a, b \in A$ için $g(a) = g(c) \Rightarrow a = c$
h, 1−1 olduğundan her $b, d \in B$ için $h(b) = h(d) \Rightarrow b = d$

yazılabilir. Buna göre her $(a,b),(c,d) \in A \times B$ için

$f(a,b) = f(c,d)$
$(g(a), h(b)) = (g(c), h(d))$
$g(a) = g(c)$ ve $h(b) = h(d)$ (Sıralı ikililerden)
$a = c$ ve $b = d$ (g ve h nin 1−1 olmasından)

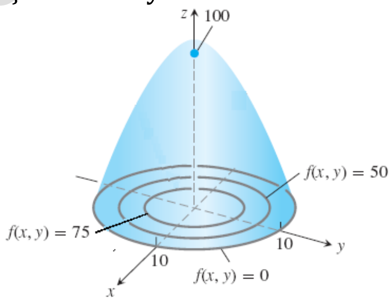
bulunur. Şu halde f fonksiyonu da 1−1 dir. Öyleyse $A \times B$ de sayılabilir kümedir.

SEVİYE EĞRİLERİ ve SEVİYE YÜZEYLERİ

4.4. Tanım: Düzlemde, bir f (x, y) fonksiyonunun f (x, y) = c gibi sabit bir değer aldığı noktalar kümesine f 'nin bir seviye eğrisi denir.

Örnek: $f(x,y) = 100 - x^2 - y^2$ fonksiyonun grafiğini çiziniz ve f'nin düzlemdeki tanım kümesinde $f(x,y) = 0$, $f(x,y) = 50$ ve $f(x,y) = 75$ seviye eğrilerini bulunuz.

Çözüm: f 'nin tanım kümesi bütün xy-düzlemidir ve f 'nin değer kümesi 100'e eşit veya 100'den küçük reel sayıların kümesidir.



Grafiği, şekilde gösterilen $f(x,y) = 100 - x^2 - y^2$ paraboloididir. //

Seviye eğrilikleri harita biliminde kullanılmaktadır. Bu eğriliklerde yükseklikleri belirtmek için Contour (Kontür) çizgileri tanımı yapılıp işlemleri ona göre yapılır.

4.5. Tanım: Uzayda, üç bağımsız değişkenli bir fonksiyonun sabit bir $f(x,y,z)=c$ değerine sahip olduğu (x, y, z) noktaları f ’nin bir seviye yüzeyi denir.

Üç değişkenli bir fonksiyonların grafikleri, dört boyutlu bir uzayda olduğu için grafiği çizemeyiz. Ancak, üç boyutlu seviye yüzeylerine bakarak, fonksiyon hakkında yorum yapabiliriz.

Örnek: $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ fonksiyonunun seviye yüzeylerini belirleyiniz.

Çözüm: f ’nin değeri, orijinden (x, y, z) noktasına olan uzaklıktır. Her $\sqrt{x^2+y^2+z^2}=c$ seviye yüzeyi, merkezi orijinde olan c yarıçaplı bir küredir. Şöyle ki;

$\sqrt{x^2+y^2+z^2}=1$ denklemi 1 yarıçaplı bir küredir.
$\sqrt{x^2+y^2+z^2}=4$ denklemi 4 yarıçaplı bir küredir.
$\sqrt{x^2+y^2+z^2}=9$ denklemi 9 yarıçaplı bir küredir.

Burada fonksiyonun grafiğini çizemeyiz, ama seviye yüzeylerine bakarak şu yorumu yapabiliriz. Fonksiyonun seviye yüzeyleri tanım kümesinde küre olarak ilerlerken, fonksiyonun değerlerinin küre türü şekiller olduğu tahmin edilmektedir.

ÇOK DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLARDA LİMİT

4.4. Tanım: $A \subset \mathbb{R}^2$ kümesi ve $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ noktası verilsin. Eğer her $\delta > 0$ için $0<|x-x_0|<\delta$, $0<|y-y_0|<\delta$, $(x,y)\neq(x_0,y_0)$ olacak şekilde en az bir $(x,y)\in A$ varsa, o zaman (x_0,y_0) noktasına A kümesinin yığılma noktası denir.

Örneğin, $x^2+y^2\leq 1$ dairesinde her bir $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ noktası

$$A=\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2<1\}$$

kümesinin yığılma noktasıdır.

4.5. Tanım: $A \subset \mathbb{R}^2$ olmak üzere, $f : A \to \mathbb{R}$, $z = f(x, y)$ iki değişkenli fonksiyonu ve L sayısı verilsin, (x_0,y_0) ise A kümesinin bir yığılma noktası olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için öyle $\delta > 0$ var ve $0<|x-x_0|<\delta$, $0<|y-y_0|<\delta$ eşitsizliklerini sağlayan her $(x, y) \in A$ için $|f(x, y) - L| < \varepsilon$ eşitsizliği sağlanıyorsa, (x, y) ikilisi (x_0, y_0) a yaklaşırken f (x, y) nin limiti L dir denir ve sembolik olarak

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=L$$

şeklinde gösterilir.

Bu tanımda ve önceki tanımda $0<|x-x_0|<\delta$, $0<|y-y_0|<\delta$ yerine

$$0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$$

de yazılabilir.

Örnek: $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{x^2-y^2}{x-y}=\dfrac{0}{0}$ belirsizliğini gideriniz.

Çözüm:

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^2-y^2}{x-y}=\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{(x-y)(x+y)}{(x-y)}=\lim_{(x,y)\to(1,1)}(x+y)=2$$

Örnek: $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{xy-y-2x+2}{x-1}=\dfrac{0}{0}$ belirsizliğini gideriniz.

Çözüm:

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{xy-y-2x+2}{x-1}=\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{y(x-1)-2(x-1)}{x-1}=\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{(x-1)(y-2)}{(x-1)}=-1$$

Örnek: $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{x^2-xy}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\dfrac{0}{0}$ belirsizliğini gideriniz.

Çözüm:

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^2-xy}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x(x-y)(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}=\lim_{(x,y)\to(1,1)} x(\sqrt{x}+\sqrt{y})=2$$

Örnek: $f(x,y)=\dfrac{2xy^2}{x^2+y^2}$ fonksiyonunun (0, 0) noktasındaki limitinin değeri kaçtır?

Çözüm: $x=r\cos\theta$ ve $y=r\sin\theta$ dönüşümü yaparak kutupsal koordinatlara çevirelim.

$x=0$ ve $y=0$ için $r=0$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy^2}{x^2+y^2}=\lim_{r\to 0}\frac{2r\cos\theta.r^2\sin^2\theta}{r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta}=\lim_{r\to 0}2r\cos\theta.\sin^2\theta=0$$

4.2. Teorem: $A,B\subset\mathbb{R}^2$, $f:A\to\mathbb{R}$ ve $g:B\to\mathbb{R}$ iki fonksiyon, $(a,b)\in A\cap B$ olmak üzere,

i) $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)+g(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)+\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y)$

ii) $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)-g(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)-\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y)$

iii) $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y).g(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y).\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y)$

iv) $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} \dfrac{f(x,y)}{g(x,y)}=\dfrac{\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)}{\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y)}$

Bu teoremin ispatı tek fonksiyonlardaki limitlerinin benzeri olduğundan okuyucuya bırakılmıştır.

BİR DOĞRU veya EĞRİ BOYUNCA LİMİT

Verilen bir limit apsis, oordinat ve kod boyunca değil de bir doğru veya eğri boyunca incelenebilir. Bununla ilgili bir örnek verelim.

Örnek: $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ fonksiyonunun $(0,\ 0)$ noktasındaki limiti $y=2x$ doğrusu boyunca bulunuz.

Çözüm: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}=\lim\limits_{x\to(0,0)} \dfrac{x2x}{x^2+(2x)^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2}{5x^2}=\dfrac{2}{5}$

ARDIŞIK LİMİT

4.6. Tanım: Verilen bir limit

$$\lim_{x\to x_0}\left(\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right) \text{ veya } \lim_{y\to y_0}\left(\lim_{x\to x_0} f(x,y)\right)$$

biçiminde incelenmesine ardışık limit denir. Ardışık limitler önceki limit gibi aynı sonucu vermeyebilir. Veya ardışık limitlerin her iki durumu da aynı sonucu vermeyebilir.

Örnek: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{x-y}{x+y}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{x-0}{x+0}\right)=1$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x-y}{x+y}\right)=\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{0-y}{0+y}\right)=-1$$

ÇOK DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLARDA SÜREKLİLİK

4.7. Tanım: Eğer $(x_0,y_0)\in A$ ve $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ limiti var ve $f(x_0,y_0)$ eşitse, yani

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0)$$

ise, o zaman z = f (x, y) fonksiyonuna (x_0,y_0) noktasında sürekli fonksiyon denir.

Eğer z = f (x, y) fonksiyonu A kümesinin her bir noktasında sürekli ise bu fonksiyona A üzerinde sürekli fonksiyon denir.

Her noktanın limiti ve görüntüsü aynı olduğu durumlara süreklilik denmektedir.

Üç ve daha çok değişkenli fonksiyonların limit ve sürekliliği de benzer yolla tanımlanabilir.

4.3. Teorem (İki Yol Testi): (x, y) noktası (x_0,y_0) 'a yaklaşırken bir $f(x,y)$ fonksiyonunun iki farklı yol boyunca farklı limitleri varsa, $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ yoktur.

Bu teoremin ispatı aşikâr olduğundan okuyucuya bırakılmıştır.

Örnek: $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} & ,(x,y)\neq(0,0) \\ 0 & ,(x,y)=(0,0) \end{cases}$

fonksiyonunun orijin hariç her yerde sürekli olduğunu gösteriniz.

Çözüm: f fonksiyonu $(x,y)\neq(0,0)$ olan her noktada süreklidir. Burada $(x,y)\to(0,0)$ iken f 'nin limitinin olup olmadığına bakalım.

Orijine farklı yollardan yaklaştığımızda, farklı sonuçlar veriyorsa (0, 0) noktasında süreksizdir diyeceğiz.

Her m değeri için, f fonksiyonunun $y=mx, x\neq0$, doğrusu üzerinde sabit bir değeri vardır. Çünkü

$$f(x,y)\Big|_{y=mx}=\frac{2xy}{x^2+y^2}\Bigg|_{y=mx}=\frac{2x(mx)}{x^2+(mx)^2}=\frac{2m}{1+m^2}$$

bulunur. Dolayısıyla, (x, y) doğru boyunca (0, 0)'a yaklaşırken f 'nin değeri bu sayıdır. Bu limit m ile değişir. Dolayısıyla, (x, y) orijine yaklaşırken f 'nin limiti diyebileceğimiz tek bir sayı yoktur. Limit bulunmaz ve fonksiyon sürekli değildir.

4.4. Teorem: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ denkleminde eğer (a, b) noktasındaki limiti kutupsal koordinatlarda;

$$\lim_{r\to 0} f(a+r\cos\theta, b+r\sin\theta)$$

ile hesaplanır ve süreklilik hakkında bilgi verir.

İspat: $f(x,y)$ fonksiyonu kutupsal koordinatlara çevirmek için;

$$x=r\cos\theta \text{ ve } y=r\sin\theta$$

denklemleri kullanılır. (x, y) noktasını (0, 0) noktasına yaklaştırmak için r'yi sıfıra yaklaştırmak yeterlidir. Eğer θ ne olursa olsun,

$$\lim_{r\to 0} f(r\cos\theta, r\sin\theta)=\ell$$

ise

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\ell$$

olur. Eğer (a, b) noktasındaki limit ise

$$\lim_{r\to 0} f(a+r\cos\theta, b+r\sin\theta)$$

dir.

Örnek: $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & ,(x,y)\neq(0,0) \\ 0 & ,(x,y)=(0,0) \end{cases}$

şeklinde tanımlanan f fonksiyonu $\mathbb{R}^2$ üzerinde sürekliliğini inceleyiniz.

Çözüm: (0, 0) noktası hariç verilen fonksiyon süreklidir. Bu fonksiyon kutupsal koordinatlara çevrilirse;

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}=\lim_{r\to 0}\frac{r^4\cos^2\theta\sin^2\theta}{r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta}=\lim_{r\to 0} r^2\cos^2\theta\sin^2\theta=0$$

bulunur. Bu durumda $f(0,0)=0$ dır. Buna göre f fonksiyonu süreklidir.

Örnek: $f(x,y)=\dfrac{x^2}{x^2+y^2}$

şeklinde tanımlanan f fonksiyonu $\mathbb{R}^2$ üzerinde sürekliğini inceleyiniz.

Çözüm:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}=\lim_{r\to 0}\frac{r^2\cos^2\theta}{r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta}=\cos^2\theta$$

bulunur. Buna göre f fonksiyonu sürekli değildir.

BİLEŞKE FONKSİYONLARIN SÜREKLİLİĞİ

4.8. Tanım: f fonksiyonu (x_0, y_0) noktasında sürekli ise ve g fonksiyonu da $f(x_0, y_0)$'da sürekli tek-değişkenli bir fonksiyon ise $h(x,y) = g(f(x,y))$ ile tanımlı $h = g \circ f$ bileşke fonksiyonu (x_0, y_0)'da süreklidir.

Örneğin,

$$f(x,y) = e^{x-y},\; g(x,y) = \ln(1+xy)$$

fonksiyonları her (x, y) noktasında süreklidirler.

Tek değişkenli fonksiyonlarda olduğu gibi, genel kural sürekli fonksiyonların bileşkelerinin sürekli olduğudur. Tek şart her fonksiyonun uygulandığı yerde sürekli olmasıdır.

ÇOK DEĞİŞKENLİ UZAYDA İÇ, DIŞ, SINIR, AÇIK ve KAPALI KÜMELER

4.9. Tanım: $\mathbb{R}^n$, reel ekseninin kendisi ile n kez çarpımı biçiminde tanımlanır. Bu küme

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

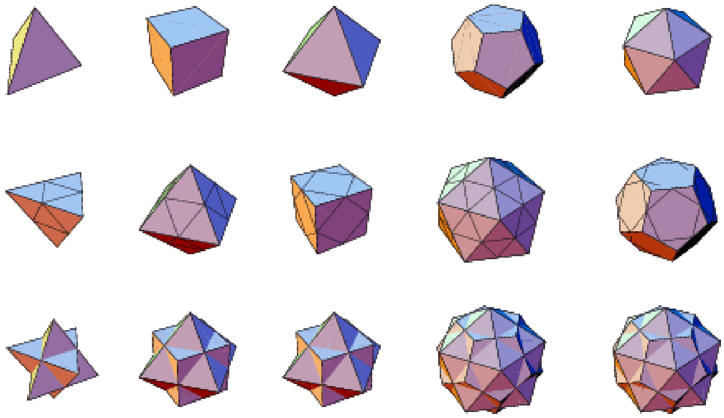
Bu kümeye, n-Euclid uzayı veya n-uzayı deriz. $(0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ noktasına orijin denir.

4.10. Tanım: 1. $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ noktaların kümesi ve a_i lerden en az biri sıfır olmayan a_i ve b reel sayı olmak üzere

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots a_nx_n \leq b$$

eşitsizliğine $\mathbb{R}^n$ de yarı düzlem denir.

4.11. Tanım: $\mathbb{R}^n$ deki yarı düzlemlerin arakesiti olarak ifade edilen $\mathbb{R}^n$ nin sınırlı alt kümesine polihedran (çok yüzlü) denir.



4.12. Tanım: $a \in \mathbb{R}^n$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. O halde

$$N(a,\varepsilon) = \{x : \|x - a\| < \varepsilon\}$$

kümesine x_0 noktasının ε-komşuluğu denir.

Örnek: $a = (x_0, y_0)$ ve $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \varepsilon^2$ çemberi verilsin. Bu çember a noktasının ε-komşuluğudur.

4.13. Tanım: $A \subset \mathbb{R}^n$ olsun. Eğer herhangi bir $\varepsilon > 0$ için bir $a \in A$ noktasında

$$N(a,\varepsilon) \subset A$$

sağlanıyorsa, x, A'nın içindedir denir. A'nın için yer alan tüm öğelerden oluşan kümeye A'nın içi adı verilir ve iç (A) ile gösterilir.

4.14. Tanım: $A \subset \mathbb{R}^n$ olsun. $x \in A$, x noktasının tüm $\varepsilon > 0$ için ε - komşuluğunun içinde hem A kümesine ait olan, hem de A kümesine ait olmayan noktalar varsa, x, A kümesinin bir Sınır Noktasıdır denir. A'nın tüm sınır noktalarından oluşan kümeye A'nın Sınırı adı verilir ve S (A) ile gösterilir.

Örnek: $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ küresinde $B\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right)$ noktası bir iç nokta, $B\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ noktası bir sınır noktasıdır.

4.15. Tanım: $A \subset \mathbb{R}^n$ olsun. iç{A) = A ise, A bir açık kümedir.

Örnek: $A=\{x:a<x<b, x\in\mathbb{R}\}\subset\mathbb{R}$ olsun. A açık bir kümedir. Çünkü, $iç(A)=\{x:a<x<b, x\in\mathbb{R}\}$ dır. Bu kümeye Açık Aralık denir. Açık aralık (a, b) ile gösterilir.

4.16. Tanım: $A\subset\mathbb{R}^n$ olsun. $S(A)\subset A$ ise A bir kapalı kümedir.

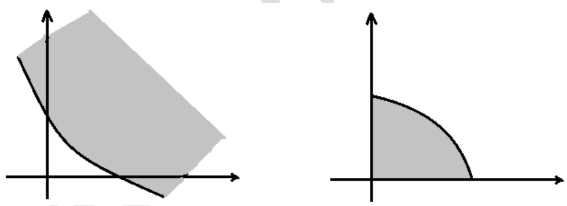
Örnek: $A=\{x:a\le x\le b, x\in\mathbb{R}\}\subset\mathbb{R}$ olsun. A kapalı bir kümedir. Çünkü $S(A)=\{a,b\}$ dir. Yani sınır "a" ve "b" noktalarından oluşmaktadır. Bu noktalar da A kümesinin içindedirler. Bu kümeye kapalı aralık denir ve [a, b] ile gösterilir.

4.17. Tanım: $A\subset\mathbb{R}^n$ ve $r>0$ olsun. Her $a\in A$ için $|a|<r$, ise, A bir sınırlı kümedir.

4.18. Tanım: Kapalı ve sınırlı bir kümeye kompakt (compact) küme denir.

4.19. Tanım: $A\subset\mathbb{R}^n$ ve $x_0\in\mathbb{R}^n$ olsun. Eğer her $a\in A$ için $a\ge x_0$, A kümesi Alttan Sınırlıdır denir. Eğer her $a\in A$ için $a<x_0$, ise A kümesi üstten sınırlıdır denir.

Örnek: Aşağıdaki şekilde sırasıyla alttan sınırlı ve ise üstten sınırlı birer küme gösterilmektedir.



KAYNAKÇA

- Prof. Dr. Mustafa BALCI, Matematik Analiz II, Bilim kitap kırtasiye A.Ş., Ankara, 1997.
- Prof. Dr. Mustafa BAYRAKTAR, Analiz, Korza yayıncılık a.ş., Ankara, 2017.
- Murray R. SPIEGEL, Çeviri: Prof. Dr. H. Hilmi HACISALİHOĞLU, Nobel Yayın Dağıtım, 1997.
- Prof. Dr. Vakıf CAFEROV, Matematik, Açıköğretim Fakültesi Yayınları, Eskişehir, 2009.
- George B. Thomas, Çeviri Recep Korkmaz, Thomas Calculus II, Beta, İstanbul, 2009.
- https://docplayer.biz.tr/36424982-Ders-5-cok-degiskenli-fonksiyonlar-kismi-turevler.html.

- https://docplayer.biz.tr/48003-Ders-6-cok-degiskenli-fonksiyonlarda-maksimum-minimum.html.
- Hasan Ersel, İktisatçılar İçin Matematik, Ankara Üniversitesi, Siyasal Bilgiler Fakültesi Yayınları 441, Ankara, 1981.