2. BÖLÜM
ÜÇ BOYUTLU UZAYDA
DOĞRULAR ve DÜZLEMLER

$\mathbb{R}^3$ DE DOĞRU DENKLEMLERİ

2.1. Tanım: $m, n, r \in \mathbb{R}$ olmak üzere $z = f(x, y) = mx + ny + r$ biçimindeki fonksiyonlara üç boyutlu uzayda doğru denklemi denir. Bu denklem $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $ax + by + cz + d = 0$ biçiminde kapalı denklem olarak yazılabilir. Burada z düzlemi esas alınmak üzere m değeri x düzlemine göre eğimi, n değeri y düzlemine göre eğimini verir.

Örnek:
1) $4x + 5y - z + 10 = 0$
2) $x + 2y + 6z = 8$
3) $f(x, y) = 2x + 3y + 5$

birer doğrulardır.

Örnek: $f(x, y) = 2x + 3y + 5$ doğrusunun x düzleminine göre eğimi $m = 2$, y düzlemine göre eğimi $n = 3$ dür.

Örnek: $4x + 6y - 2z + 9 = 0$ doğrusunun x düzlemine göre eğimi $m = -\frac{4}{-2} = 2$ ve y düzlemine göre eğimi $n = -\frac{6}{-2} = 3$ dür.

1. İki Noktası Bilinen Doğru Denklemi

2.1. Teorem: $A(x_0, y_0, z_0)$ ve $B(x_1, y_1, z_1)$ noktalarından geçen doğrunu denklemi;

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}$$

dir.

İspat: $P(x_1, y_1, z_1)$ ve $Q(x_2, y_2, z_2)$ gibi iki noktadan geçen doğrunun denklemi (doğrusal fonksiyonlardaki iki noktadan geçen doğrunun denklemi gereği)

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} \text{ ve } \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

yazılabilir.

Örnek: $A(6, 2, 3)$ ve $B(-1, 4, 0)$ noktalarından geçen doğrunu denklemi nedir?

Çözüm: $\frac{x-6}{-1-6} = \frac{y-2}{2-4} = \frac{z-3}{0-3}$

$$\frac{x-6}{-7} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3}$$

2.1. Sonuç: 2.1. teoremde elde edilen $\frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{y-y_0}{y_1-y_0} = \frac{z-z_0}{z_1-z_0}$ denkleminde özel olarak $x_2 - x_1 = p, y_2 - y_1 = q, z_2 - z_1 = r$ alınırsa

$$\frac{x-x_1}{p} = \frac{y-y_1}{q} = \frac{z-z_1}{r}$$

bulunur.

2.2. Tanım: $\frac{x-x_1}{p} = \frac{y-y_1}{q} = \frac{z-z_1}{r}$ biçiminde olan doğru denkleminde p, q, r sayılarına doğrunun parametresi denir. Mesela önceki örnekteki doğrunun parametreleri $N(-7, 2, 3)$ dür.

Örnek: Orijinden geçen ve doğrunun parametresi $N(-2, 3, 5)$ olan doğrunun denklemi nedir?

Çözüm: $0(0, 0, 0)$ dan geçen ve $N(-2, 3, 5)$ doğrunun parametresi olan doğrunun denklemi,

$$\frac{x-0}{-2} = \frac{y-0}{3} = \frac{z-0}{5}$$

$$\frac{x}{-2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5}$$

biçimindedir.

2.3. Tanım: $\frac{x-x_0}{p} = \frac{y-y_0}{q} = \frac{z-z_0}{r} = \lambda$ doğru denkleminde;

$$x = x_0 + \lambda p, y = y_0 + \lambda q, z = z_0 + \lambda r$$

denklemine doğrunun parametrik denklemleri adı denir.

Örnek: $\frac{x-2}{3} = \frac{y+6}{5} = \frac{z-4}{-2}$ olan doğru üzerinde herhangi iki nokta bulunuz.

Çözüm: $\frac{x-2}{3} = \frac{y+6}{5} = \frac{z-4}{-2} = \lambda$

$$x = 2 + 3\lambda, y = -6 + 5\lambda, z = 4 - 2\lambda$$

elde edilir. Doğrular üzerindeki tüm noktalar $(2 + 3\lambda, -6 + 5\lambda, 4 - 2\lambda)$ biçimindedir.

$\lambda = 0$ için $A(2, -6, 4)$

$\lambda = 1$ için $A(5, -1, 2)$

bulunur.

2.1. Not: Doğru denkleminde;

i) $p = 0$ ise, doğru x eksenine dik olur. Bu durumda doğru $y \circ z$ düzlemine paraleldir ve denklemi $x - x_0 = 0$, $\frac{y-y_0}{q} = \frac{z-z_0}{r}$ dir.

ii) $q = 0$ ise, doğru x eksenine dik olur. Bu durumda doğru $x \circ z$ düzlemine paraleldir ve denklemi $y - y_0 = 0$, $\frac{x-x_0}{p} = \frac{z-z_0}{r}$ dir.

iii) $r = 0$ ise, doğru x eksenine dik olur. Bu durumda doğru $x \circ y$ düzlemine paraleldir ve denklemi $z - z_0 = 0$, $\frac{x-x_0}{p} = \frac{y-y_0}{q}$ dir.

Örnek: $A(3,2,-4)$ noktasından geçen ve $v=(-1,2,0)$ eksenleri kesen noktaları olan doğrunun denklemi nedir?

Çözüm: $\frac{x-3}{-1}=\frac{y-2}{2}, z+4=0$

2.2. Not: Şu ana kadar $\mathbb{R}^3$ de doğru denklemleri;

1. $m,n,r\in\mathbb{R}, z=f(x,y)=mx+ny+r$
2. $a,b,c,d\in\mathbb{R}, ax+by+cz+d=0$
3. $\frac{x-x_0}{p}=\frac{y-y_0}{q}=\frac{z-z_0}{r}$

olmak üzere üç çeşit elde edilmiştir.

2. İki Doğrunun Paralel Olma Durumu

2.2. Teorem: $d_1:\frac{x-x_1}{p_1}=\frac{y-y_1}{q_1}=\frac{z-z_1}{r_1}$ ve $d_2:\frac{x-x_2}{p_2}=\frac{y-y_2}{q_2}=\frac{z-z_2}{r_2}$ iki doğru birbirlerine paralel olsun. Bu takdirde,

$$d_1//d_2\Leftrightarrow\frac{p_1}{p_2}=\frac{q_1}{q_2}=\frac{r_1}{r_2}$$

dir.

İspat: $d_1$ve d_2 doğrularının paralel olması demek doğruların eksenlere olan izdüşümlerinde birbirine paralel olması demektir. Bu ise eksenlerin kesen noktaları birbirini oranlar. Yani;

$$d_1//d_2\Leftrightarrow\frac{p_1}{p_2}=\frac{q_1}{q_2}=\frac{r_1}{r_2}$$

dir.

Örnek: $d_1:\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{m}=\frac{z-5}{1}$ ve $d_2:\frac{x-4}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{n}$ doğruları paralel ise $m+n$ nedir?

Çözüm: d_1 ve d_2 doğrularının eksenleri kesen noktaları $v_1=(3,m,1)$ ve $v_2=(1,2,n)$ dir.

$$d_1//d_2\Leftrightarrow\frac{3}{1}=\frac{m}{2}=\frac{1}{n}$$

$$m=6 \text{ ve } n=\frac{1}{3}$$

$$m+n=6+\frac{1}{3}=\frac{19}{3}$$

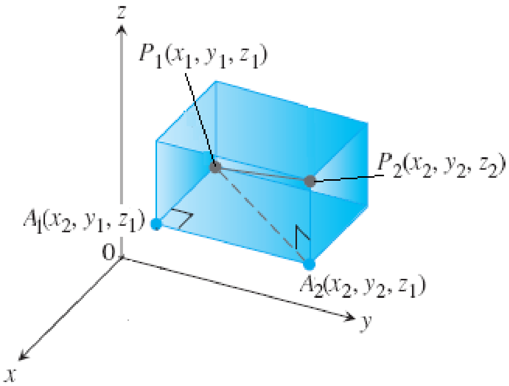
3. İki Noktanın Arasındaki Uzaklık

2.3. Teorem: $P_1(x_1, y_1, z_1)$ noktasının $P_2(x_2, y_2, z_2)$ noktasına uzaklığı;

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

şeklindedir.

İspat: xy koordinat düzlemine paralel bir $A_1(x_2, y_1, z_1)$ ve $A_2(x_2, y_2, z_1)$ noktalarını alalım. P_1 ve P_2 noktaları arasındaki uzaklık $P_1A_1A_2$ ve $P_1A_2P_2$ dik üçgenlerinin Pisagor teoremi uygulayalım.



$|P_1A_1| = |x_2 - x_1|$, $|A_1A_2| = |y_2 - y_1|$, $|A_2P_2| = |z_2 - z_1|$
$P_1A_1A_2$ ve $P_1A_2P_2$ üçgenlerinin her ikisi de dik açılı olduğundan Pisagor teoremini iki defa uygulamamız lazım.

$$|P_1P_2|^2 = |P_1A_2|^2 + |A_2P_2|^2, \quad |P_1A_2|^2 = |P_1A_1|^2 + |A_1A_2|^2$$

olur. Buna göre;

$$\begin{aligned} |P_1P_2|^2 &= |P_1A_2|^2 + |A_2P_2|^2 \\ &= |P_1A_1|^2 + |A_1A_2|^2 + |A_2P_2|^2 \\ &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 \end{aligned}$$

dir. Bu yüzden

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

olur.

Örnek: $A(1, 3, -2)$ ve $B(5, 4, 2)$ noktaları arasındaki uzaklık

$$d = \sqrt{(5-1)^2 + (4-3)^2 + (2-(-2))^2} = \sqrt{33}$$

olur.

Örnek: $A(4,2,4)$ ve $B(a,-2,1)$ noktaları arasındaki uzaklık 13 birim ise a'nın değeri nedir?

Çözüm: $|AB| = 13$

$$\sqrt{(a-4)^2+(-2-2)^2+(1-4)^2} = 13$$
$$(a-4)^2+16+9 = 169$$
$$(a-4)^2 = 144$$
$$a-4 = 12 \ \wedge \ a-4 = -12$$
$$a = 16 \ \wedge \ a = -8$$

Örnek: $(m,-2,3)$ ve $(5,1,-2)$ noktaları arasındaki uzaklık $5\sqrt{2}$ ise m'nin değeri nedir?

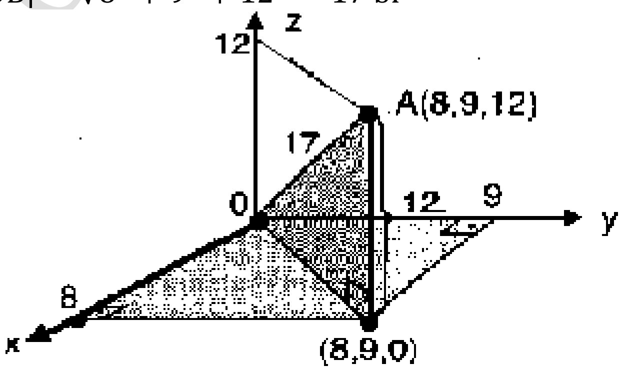
Çözüm: $\sqrt{(5-m)^2+(1-(-2))^2+(-2-3)^2} = 5\sqrt{2}$

$$(5-m)^2+34 = 50$$
$$(5-m)^2 = 16$$
$$5-m = 4 \ \wedge 5-m = -4$$
$$m = 1 \ \wedge m = 9$$

2.3. Not: $A(a,b,c)$ noktasının orijine olan uzaklığı $|OB| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$ dir.

Örnek: $A(8,9,12)$ noktasının orijine olan uzaklığı nedir?

Çözüm: $|OB| = \sqrt{8^2+9^2+12^2} = 17$ br



4. İki Doğru Arasıdaki Açı

2.4. Teorem: $d_1: \frac{x-x_1}{p_1} = \frac{y-y_1}{q_1} = \frac{z-z_1}{r_1}$ ve $d_2: \frac{x-x_2}{p_2} = \frac{y-y_2}{q_2} = \frac{z-z_2}{r_2}$ doğruları verilsin. Bu takdirde iki doğru arasındaki açı,

$$\cos\theta = \frac{p_1p_2+q_1q_2+r_1r_2}{\sqrt{p_1^2+q_1^2+r_1^2}\sqrt{p_2^2+q_2^2+r_2^2}}$$

dir.

İspat: Analitik Geometri dersi Doğrunun Analitiği konusunda iki boyutlu uzayda bu teorem ispatlanmıştır. Verilen denklemde;

i) $r_1 = r_2 = 0$ alınırsa $x \circ y$ eksenine izdüşümünü verir.

$$\cos\theta = \frac{p_1p_2+q_1q_2}{\sqrt{p_1^2+q_1^2}\sqrt{p_2^2+q_2^2}}$$

olup iki boyutlu uzayı gerçekler.

ii) $q_1 = q_2 = 0$ alınırsa $x \circ z$ eksenine izdüşümünü verir.

$$\cos\theta = \frac{p_1p_2+r_1r_2}{\sqrt{p_1^2+r_1^2}\sqrt{p_2^2+r_2^2}}$$

olup iki boyutlu uzayı gerçekler.

iii) $p_1 = p_2 = 0$ alınırsa $y \circ z$ eksenine izdüşümünü verir.

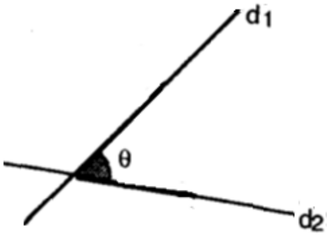
$$\cos\theta = \frac{q_1q_2+r_1r_2}{\sqrt{q_1^2+r_1^2}\sqrt{q_2^2+r_2^2}}$$

olup iki boyutlu uzayı gerçekler.

Her üç boyuttada bu denklem sağlandığından üç boyutlu uzayda da bu denklem sağlanır.

Örnek: $d_1: \frac{x-3}{-1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+3}{-\sqrt{2}}$ ve $d_1: \frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-5}{\sqrt{2}}$ doğruları arasındaki açı kaç derecedir?

Çözüm: d_1 ve d_2 doğrularının eksenleri kesikleri noktaları $v_1 = (-1, 1, -\sqrt{2})$ ve $v_1 = (1, 1, \sqrt{2})$ dir.



$$\cos\theta = \frac{(-1)\cdot 1+1\cdot 1+(-\sqrt{2})\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{(-1)^2+1^2+(-\sqrt{2})^2}\,\sqrt{1^2+1^2+\sqrt{2}^2}} = -\frac{1}{2}$$

$$\theta = 120^0$$

bulunur.

5. İki Doğrunun Dik Olma Durumu

2.5. Teorem: $d_1\colon \frac{x-x_1}{p_1} = \frac{y-y_1}{q_1} = \frac{z-z_1}{r_1}$ ve $d_2\colon \frac{x-x_2}{p_2} = \frac{y-y_2}{q_2} = \frac{z-z_2}{r_2}$ iki doğru birbirlerine dik olsun. Bu takdirde,

$$d_1 \perp d_2 \text{ ise } p_1p_2 + q_1q_2 + r_1r_2 = 0$$

dir.

İspat: d_1 ve d_2 doğruları birbirlerine dik iseler aralarındaki açı 90^0 olacağından, 2.4. teorem gereği;

$$\cos 90 = 0$$
$$p_1p_2 + q_1q_2 + r_1r_2 = 0$$

olur.

Örnek: $d_1\colon \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-5}{2}$ ve $d_2\colon \frac{x-4}{a} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{5}$ doğruları paralel ise $m+n$ nedir?

Çözüm: d_1 ve d_2 doğrularının eksenleri kesim noktaları $v_1 = (3,4,2)$ ve $v_2 = (a,2,5)$ dir.

$$p_1p_2 + q_1q_2 + r_1r_2 = 0$$
$$3a + 4\cdot 2 + 2\cdot 5 = 0$$
$$a = -6$$

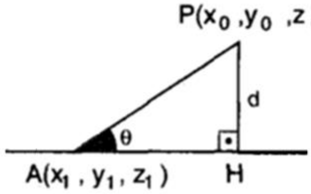
6. Bir Noktanın Bir Doğruya Uzaklığı

2.6. Teorem: $P(x_0, y_0, z_0)$ noktasının $\dfrac{x-x_1}{p} = \dfrac{y-y_1}{q} = \dfrac{z-z_1}{r}$ doğrusuna uzaklığı,

$$d = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}\,\sin\theta$$

dir.

İspat: $\dfrac{x-x_1}{p} = \dfrac{y-y_1}{q} = \dfrac{z-z_1}{r}$ doğrusu $A(x_1, y_1, z_1)$ noktasından geçsin.



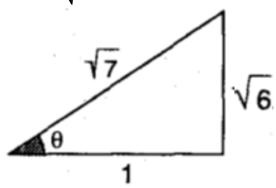
PAH dik üçgeninde $\sin\theta = \dfrac{d}{\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2}}$ olduğundan istenen elde edilir.

Örnek: $P(1, 2, 3)$ noktasının $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z+1}{2}$ doğrusuna uzaklığı nedir?

Çözüm: $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z+1}{2}$ doğrusu $A(2, 1, -1)$ noktasından geçmekte ve $v(3, 1, 2)$ dir.

$$\sqrt{(1-2)^2 + (2-1)^2 + (3-(-1))^2} = \sqrt{18}$$

$$\cos\theta = \frac{3\cdot(1-2)+1\cdot(2-1)+2\cdot(3-(-1))}{\sqrt{18}\sqrt{3^2+1^2+2^2}} = \frac{1}{\sqrt{7}}$$

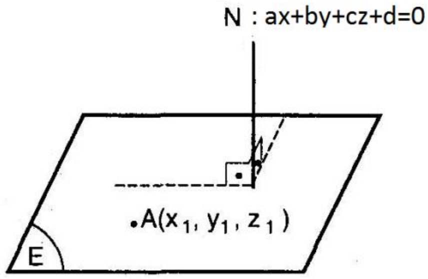


$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}\,\sin\theta \\ &= \sqrt{18}\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}} \\ &= \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{7}} \end{aligned}$$

$\mathbb{R}^3$ DÜZLEM DENKLEMİ

2.4. Tanım: Düzlemin üzerindeki bir doğruya dik olan doğruya düzlemin normali denir ve N ile ifade edilir.

2.5. Tanım: $N: ax + by + cz + d = 0$ düzlemin normali ve düzlem üzerinde $A(x_1, y_1, z_1)$ bir nokta olsun. $a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$ denklemine düzlem denklemi denir. Düzlem denklemi $Ax + By + Cz + D = 0$ biçiminde de yazılabilir.



Örnek: $A(4, -2, 3)$ noktasından geçen ve $N : 3x + y + 2z = 0$ normaline dik olan düzlemin denklemi nedir?

Çözüm: $a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$

$$3(x - 4) + 1(y - (-2)) + 2(z - 3) = 0$$

$$3x + y + 2z - 16 = 0$$

Örnek: $3x + 4y - 2z + 5 = 0$ düzleminin normali nedir?

Çözüm: Düzlemin normali $N : 3x + 4y - 2z = 0$ dir.

1. İki Düzlemin Çakışık Olması

2.7. Teorem:

$E_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ ve $E_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$
iki düzlemi çakışık olması için,

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

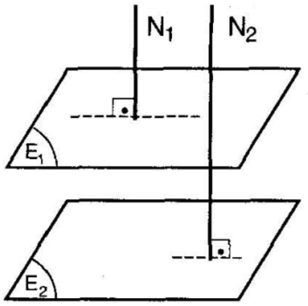
olması gerekir.

İspat: İki düzlem birbirine çakışık ise bu iki düzlem üzerindeki birbirlerine paralel doğrular çakışık olacağından 2.2. teorem gereği istenen sonuç elde edilir.

2. İki Düzlemin Paralel Olma Şartı

2.8. Teorem:

$E_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ ve $E_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$
iki düzlemin paralel olması için,
$N_1 : a_1x + b_1y + c_1z = 0$ ve $N_2 : a_2x + b_2y + c_2z = 0$
normalinin paralel olması gerekir.



$E_1//E_2$ ise $N_1//N_2 \Rightarrow \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$

Bu teoremin ispatı aşikârdır.

Örnek: $x - my + 3z - 8 = 0$ düzleminin $2x + 6y + 6z - 8 = 0$ düzlemine paralel olması için m ne olmalıdır?

Çözüm: $N_1: x - my + 3 = 0$ ve $N_2: 2x + 6y + 6z = 0$ olup

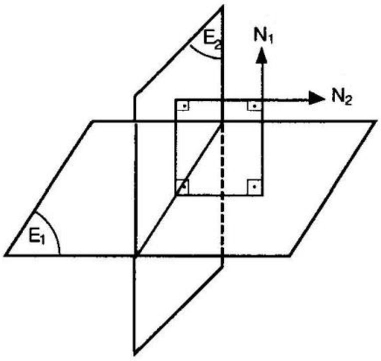
$$N_1//N_2 \Rightarrow \frac{1}{2} = -\frac{m}{6} = \frac{3}{6} \Rightarrow m = -3$$

bulunur.

3. İki Düzlemin Dik Olma Şartı

2.9. Teorem:

$E_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ ve $E_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$
iki düzlemin dik olması için,
$N_1 : a_1x + b_1y + c_1z = 0$ ve $N_2 : a_2x + b_2y + c_2z = 0$
normalinin dik olması gerekir.



$E_1 \perp E_2$ ise $N_1 \perp N_2 \Rightarrow a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$

2.4. teoremde $\theta = 90^0$ alınırsa istenen elde edilir.

Örnek: $4x + 5y + mz - 6 = 0$ düzleminin $-x + 2y + 3z + 1 = 0$ düzlemine dik olması için m ne olmalıdır?

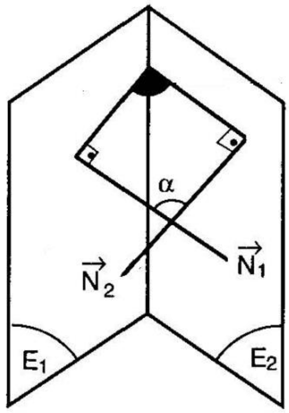
Çözüm: $N : 4x + 5y + mz = 0$ ve $N : -x + 2y + 3z = 0$ olduğundan;

$E_1 \perp E_2$ ise $N_1 \perp N_2 \Rightarrow 4(-1) + 5 \cdot 2 + m \cdot 1 = 0$
$\Rightarrow m = -6$

olur.

4. İki Düzlem Arasındaki Açı (Ölçek Açısı)

2.10. Teorem:
$E_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ ve $E_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ düzlemleri arasındaki açı
$N_1 : a_1x + b_1y + c_1z = 0$ ve $N_2 : a_2x + b_2y + c_2z = 0$
ise, E_1 ve E_2 düzlemleri arasındaki açı N_1 ve N_2 arasındaki açının bütünleyenidir.



$180 - \alpha$ ölçek açısı

Bu teoremin ispatı aşikardır.

Örnek: $\sqrt{2}x + y + z - 6 = 0$ düzleminin $\sqrt{2}x - y - z + 2 = 0$ düzlemleri arasındaki açı kaç derecedir (Düzlemler arasındaki açı 2. bölgededir)?

Çözüm: $N_1 : \sqrt{2}x + y + z = 0$ ve $N_2 : \sqrt{2}x - y + z = 0$ ise;

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}+1\cdot(-1)+1\cdot 1}{\sqrt{\sqrt{2}^2+1^2+1^2}\,\sqrt{\sqrt{2}^2+(-1)^2+2^2}} = \frac{1}{2}$$

Düzlemler arasındaki açı (ölçek açısı) 120^0 ve bütünleyeni 60^0 dir.

5. Doğrunun Düzlem İle Durumu

2.11. Teorem:
$\frac{x-x_0}{p} = \frac{y-y_0}{q} = \frac{z-z_0}{r}$ doğrusu ve $Ax + By + Cz + D = 0$ düzlemi verilsin.

a) $Ap + Bq + Cr \neq 0$ ise doğru düzlemi bir noktada keser.

b) $Ap + Bq + Cr = 0$ ve $Ax_0 + By_0 + Cx_0 + D = 0$ ise doğru düzlemle çakışıktır.

c) $Ap + Bq + Cr = 0$ ve $Ax_0 + By_0 + Cx_0 + D \neq 0$ ise doğru düzleme paraleldir.

İspat: $\frac{x-x_0}{p} = \frac{y-y_0}{q} = \frac{z-z_0}{r} = \lambda$ alınırsa;
$x = x_0 + \lambda p, y = y_0 + \lambda q, z = z_0 + \lambda r$

olacağından,

$$A(x_0 + \lambda p) + B(y_0 + \lambda q) + C(z_0 + \lambda r) + D = 0$$
$$(Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D) + \lambda(Ap + Bq + Cr) = 0$$

yazılabilir.

i) Bir doğrunun eğimi ile bir düzlemin eğimi eğimi eşit değilse, Doğrusal Fonksiyonlar konusunda bunların bir noktada kesişeceğini izah edilmişti. Buna göre $Ap + Bq + Cr \neq 0$ olup o doğru ile düzlemin bir noktada kesiştiğini gösterir.

ii) $Ap + Bq + Cr = 0$ ve $Ax_0 + By_0 + Cx_0 + D = 0$ ise keyfi $A(x_0, y_0, z_0)$ noktasının düzlem denklemini sağladığını gösterir. $A(x_0, y_0, z_0)$ keyfi olduğundan doğrunun her noktasının doğrunun düzlem üzerinde olduğunu gösterir.

iii) $Ap + Bq + Cr = 0$ ve $Ax_0 + By_0 + Cx_0 + D \neq 0$ ise $A(x_0, y_0, z_0)$ noktasının hiçbir noktası sağlamadığından hiçbir noktada kesişmeyeceğinden, vu durum ancak doğrunun düzleme paralel olmasıyla mümkündür.

Örnek: $\frac{x-4}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{2}$ doğrusu ve $-3x + 2y + z - 18 = 0$ düzleminin kesim noktasının koordinatlarını bulunuz.

Çözüm: $\frac{x-4}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{2} = k$ alınırsa,

$$x = k + 4, y = 2k + 2, z = 2k$$

bulunur. Bu eşitlikleri $-3x + 2y + z - 18 = 0$ düzlem denkleminde yerine yazılırsa,

$$-3(k + 4) + 2 \cdot 2k + 2k - 18 = 0$$

$$k = 2$$

olduğundan ortak nokta $A(6, 6, 4)$ olur.

Örnek: $\frac{x+11}{2} = \frac{y+1}{5} = \frac{z-2}{m}$ doğrusu $2x - 4y + 3z + 8 = 0$ düzlemine paralel ise m'nin değeri nedir?

Çözüm: $2x + 5y + mz = 0$ ve $v = (2, -4, 3)$

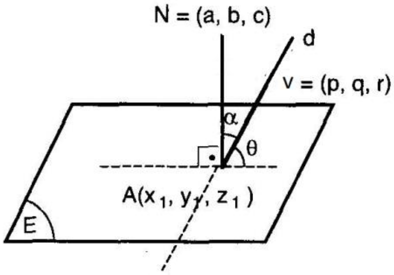
$$2 \cdot 2 + 5 \cdot (-4) + m \cdot 3 = 0$$

$$m = -\frac{16}{3}$$

6. Bir Doğru ile Bir Düzlem Arasındaki Açı

2.12. Teorem:

$d: \frac{x-x_0}{p} = \frac{y-y_0}{q} = \frac{z-z_0}{r}$ doğrusu ile $E: \ Ax + By + Cz + D = 0$ düzlemi arasındaki açı doğru ile düzlemin normali arasındaki açısının sinüsüne eşittir.



İspat: Doğru ile düzlem arasındaki açı θ, doğru ile normali arasındaki açı α olsun. $\alpha + \theta = 90$ olup $\cos\alpha = \sin\theta$ dır.

$$\sin\theta = \cos\alpha$$

eşitliğinden elde edilir. 2.4. teoremden istenen elde edilir.

Örnek: $x + \sqrt{2}y + z - 5 = 0$ düzlemi ile $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{\sqrt{2}} = \frac{z-3}{-1}$ doğrusu arasındaki açı kaç derecedir?

Çözüm: $N: \ x + \sqrt{2}y + z = 0$ ve $v = (1, \sqrt{2}, -1)$ ise;

$$\sin\theta = \frac{1\cdot 1+\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}+1\cdot(-1)}{\sqrt{1^2+\sqrt{2}^2+1^2}\ \sqrt{1^2+\sqrt{2}^2+(-1)^2}} = \frac{1}{2}$$

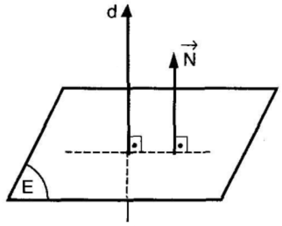
$$\theta = 30^0 = \frac{\pi}{2}$$

elde edilir.

7. Doğrunun Düzleme Diklik Şartı

2.13. Teorem:

$d : \frac{x-x_0}{p} = \frac{y-y_0}{q} = \frac{z-z_0}{r}$ doğrusu $E : Ax + By + Cz + D = 0$ düzlemine dik ise doğru ve normal birbirlerine paraleldir. (N//d)



$$E \perp d \text{ ise } N//d \Leftrightarrow \frac{A}{p} = \frac{B}{q} = \frac{C}{r}$$

dir.

Bu teoremin ispatı aşikârdır.

Örnek: $\frac{x-2}{m} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-2}{3}$ doğrusu $5x + ny + 3 = 0$ düzlemine dik olması için $m + n$ ne olmalıdır?

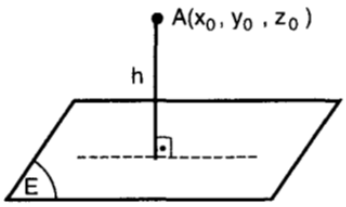
Çözüm: $N : 5x + 4y + 3z = 0$ ve $v = (m, -2, 3)$

$$\frac{5}{m} = \frac{n}{-2} = \frac{4}{3}$$

$$m = \frac{15}{4} \text{ ve } n = \frac{8}{3} \text{ ise } m + n = \frac{15}{4} - \frac{8}{3} = \frac{13}{12}$$

8. Bir Noktanın Bir Düzleme Olan Uzaklığı

2.14. Teorem: $A(x_0, y_0, z_0)$ noktasının $E : Ax + By + Cz + D = 0$ düzlemine olan uzaklığı;



$$h = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

dir.

İspat: Analitik Geometri dersi Doğrunun Analitiği konusunda iki boyutlu uzayda bu teorem ispatlanmıştır. Verilen düzlemde normale dik bir $ax + by + cz + d = 0$ doğru denklemini alalım.

i) $c = 0$ alınırsa $x \circ y$ eksenine izdüşümünü verir.

$$h = \frac{|ax_0+by_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

olup iki boyutlu uzayı gerçekler.

ii) $b = 0$ alınırsa $x \circ z$ eksenine izdüşümünü verir.

$$h = \frac{|ax_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+c^2}}$$

olup iki boyutlu uzayı gerçekler.

iii) $c = 0$ alınırsa $y \circ z$ eksenine izdüşümünü verir.

$$h = \frac{|bx_0+cz_0+d|}{\sqrt{b^2+c^2}}$$

olup iki boyutlu uzayı gerçekler.

Her üç boyuttada bu denklem sağlandığından üç boyutlu uzayda da bu denklem sağlanır.

Örnek: $A(3, 8, -2)$ noktasının $6x - 5y + 3z + 4 = 0$ düzlemine uzaklığı kaç birimdir?

Çözüm: $$h = \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$
$$= \frac{|6\cdot 3+(-5)\cdot 8+3\cdot(-2)+4|}{\sqrt{6^2+(-5)^2+3^2}}$$
$$= \frac{24}{\sqrt{70}}$$

9. Paralel İki Düzlem Arasındaki Uzaklık

2.15. Teorem: Birbirlerine paralel olan;
$E_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ ve $E_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ düzlemleri arasındaki uzaklık;

$$h = \frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

dir.

İspat: 2.14. teorem gereği E_2 düzlemi üzerinde alınan bir (x_2, y_2, z_2) noktasının d_1 doğrusuna uzaklığı;

$$h = \frac{|Ax_2+By_2+Cz_2+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \qquad (1)$$

dir. Ayrıca (x_2, y_2, z_2) noktası, d_2 düzleminin denklemini sağlar. Yani $A_2x + B_2y + C_2z = -D_2$ dir. Bulduğumuz değeri (1) de yerine yazarsak,

$$h = \frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

elde edilir.

Örnek: $3x + 4y + 5z + 11 = 0$ ve $6x + 8y + 10z + 9 = 0$ düzlemleri arasındaki uzaklık;

$$h = \frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{|11-9|}{\sqrt{3^2+4^2+5^2}} = \frac{\sqrt{2}}{5}$$

10. Doğruların Aynı Düzlemde Olma Şartı

2.16. Teorem: $\frac{x-x_1}{p_1} = \frac{y-y_1}{q_1} = \frac{z-z_1}{r_1}$, $\frac{x-x_2}{p_2} = \frac{y-y_2}{q_2} = \frac{z-z_2}{r_2}$ doğruların aynı düzlemde olması için;

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix} = 0$$

dır. (Burada doğrular birbirine paralel değildir.)

İspat: Determinant konusundan hatırlayacak olursak;

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix} = 0$$

elde edilir. Bu iki determinantın eşit olması için $A(x_1, y_1, z_1) = B(x_2, y_2, z_2)$ olmasıyla mümkündür. Buna göre iki doğru aynı düzlem üzerindedir.

11. Bir Noktadan Geçen ve İki Doğruya Paralel Olan Düzlem Denklemi

2.17. Teorem: $A(x_0, y_0, z_0)$ noktasından geçen ve $v_1 = (p_1, q_1, r_1)$ ile $v_2 = (p_2, q_2, r_2)$ olan doğrularına paralel bir düzlemin denklemi;

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix} = 0$$

dır.

İspat: $$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix}$$

elde edilir. Bu iki determinantın eşit olması düzlemin $A(x_0, y_0, z_0)$ noktasından geçen ve $v_1 = (p_1, q_1, r_1)$ ile $v_2 = (p_2, q_2, r_2)$ olan doğrularına paralel olmasıyla mümkündür.

Örnek: $A(3, -2, -1)$ noktasından geçen ve $v_1 = (1, -2, 4)$ ile $v_2 = (3, 2, -5)$ olan doğrularına paralel olan düzlem denklemini bulunuruz.

Çözüm:

$$\begin{vmatrix} x - 3 & y + 2 & z + 1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 0$$

determinantının açılımı yapılırsa;

$$2x + 17y + 8z + 36 = 0$$

denklemi elde edilir.

12. Üç Noktadan Geçen Düzlemin Denklemi

2.18. Teorem: $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$, $A_3(x_3, y_3, z_3)$ noktasından geçen düzlemin denklemi;

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y - y_1 & y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \\ z - z_1 & z_2 - z_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

dır.

İspat: Bu determinantın açılımı yapılınca;

$$x\underbrace{(y_1z_3 - y_3z_1)}_{A} + y\underbrace{(-x_1z_3 + x_3z_1)}_{B} + z\underbrace{(x_1y_3 - x_3y_1)}_{C}$$
$$\underbrace{-x_2(y_1z_3 - y_3z_1) + y_2(x_1z_3 - x_3z_1) - z_2(x_1y_3 - x_3y_1)}_{D} = 0$$

elde edilir ki bu bize $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$, $A_3(x_3, y_3, z_3)$ noktasından geçen düzlemin denklemi olduğunu gösterir.

2.19. Teorem: $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$, $A_3(x_3, y_3, z_3)$ noktasından geçen düzlemin denklemi;

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

dır.

Bu teoremde 2.18. teorem gibi determinantın açılımı yapılınca düzlem denklemi elde edildiği görülür.

Örnek: $A_1(3, 2, 5)$, $A_2(-1, 4, 6)$, $A_3(2, 0, 1)$ noktasından geçen düzlemin denklemi;

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \\ -1 & 4 & 6 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

dır.

Çözüm: Bu determinantının açılımı yapılırsa;

$$-6x + 17y + 26z - 2 = 0$$

denklemi elde edilir.

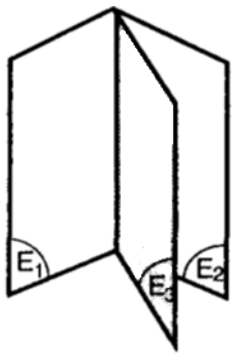
İKİ DÜZLEMİN ARAKESİTİNDEN GEÇEN DÜZLEM DENKLEMİ (DÜZLEM DEMETİ)

2.6. Tanım:

$E_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ ve $E_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ iki düzlemin verilsin; $\lambda \in \mathbb{R}$ için

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$$

denklemine iki düzleminin ara kesitinden geçen düzlemlerin denklemi veya düzlem demeti denir.



Örnek: $2x + y + z - 5 = 0$ ve $4x - 7y + 8z + 10 = 0$ düzlemlerin arakesitinden ve $A(-1, 2\ 2)$ noktasından geçen düzlemin denklemi nedir?

Çözüm: Verilen düzlemlerin arakesitinden geçen düzlemin denklemi

$$(2x + y + z - 5) + \lambda(4x - 7y + 8z + 10) = 0$$

olup bu düzlem $A(-1, 2\ 2)$ noktasından da geçtiğinden bu nokta koordinatları düzlem denklemini sağlar.

$$(2(-1) + 2 + 2 - 5) + \lambda(4(-1) - 7 \cdot 2 + 8 \cdot 2 + 10) = 0$$

$$\lambda = 12$$

$\lambda = 12$ yerine yazılırsa,

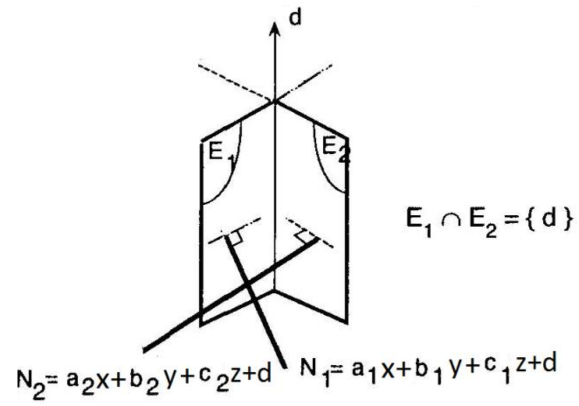
$$(2(-1) + 2 + 2 - 5) + 12(4(-1) - 7 \cdot 2 + 8 \cdot 2 + 10) = 0$$

$$50x - 83y + 97z + 115 = 0$$

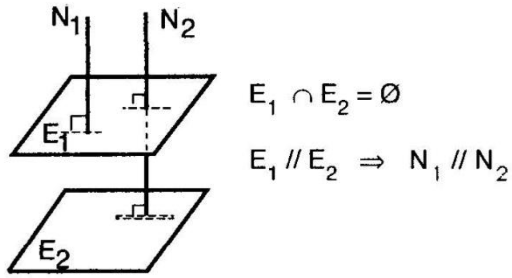
elde edilir.

İKİ DÜZLEMİN BİRBİRİNE GÖRE DURUMLARI

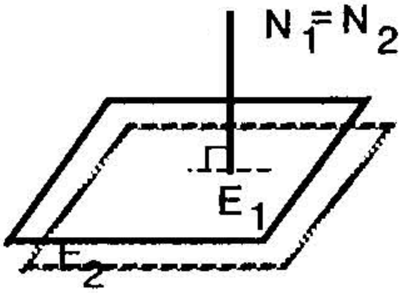
i) İki düzlem bir doğru boyunca kesişebilir.



ii) İki düzlem paralel olabilir. İki düzlem paralel olduğunda ortak hiçbir noktaları yoktur.



iii) İki düzlem çakışık olabilir. Eğer iki düzlem çakışık ise bütün noktaları ortaktır.



Örnek: $\left.\begin{aligned} x - y + 2z = 4 \\ x + y + z = 8 \end{aligned}\right\}$ düzlemleri kesişen düzlemler olduğuna göre $A(1, -2, 2)$ noktasında arakesit doğrusu nedir?

Çözüm: $\left.\begin{aligned} x - y + 2z = 4 \\ x + y + z = 8 \end{aligned}\right\} y = 4 - 2x \text{ ve } z = 4 - x$

$$x = 2 - \frac{1}{2}y \text{ ve } x = 4 - z$$

$$\frac{x}{1} = \frac{2-\frac{1}{2}y}{-2} = \frac{4-z}{2}$$

arakesit doğrusunun denklemidir.

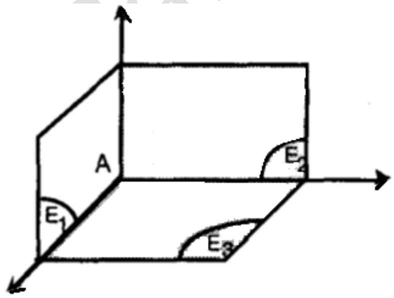
Örnek: $\left.\begin{aligned} -2x + y + 3z - 5 = 0 \\ mx + 2y + 6z - 8 = 0 \end{aligned}\right\}$ düzlemleri paralel ise m'nin değeri nedir?

Çözüm: İki düzlem paralel olması için normali paralel olmalıdır.
$N_1 = (-2, 1, 3)$ ve $N_2 = (m, 2, 6)$
$N_1 // N_2 \Leftrightarrow \frac{-2}{m} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow m = -4$

ÜÇ DÜZLEMİN BİRBİRİNE GÖRE DURUMLARI

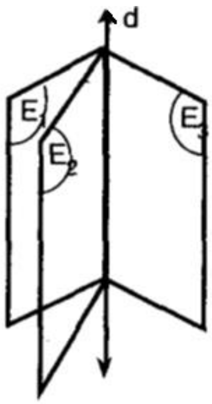
$E_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$
$E_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$
$E_3: A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0$
düzlem denklemleri verilmiş olsun.

i) Bu üç düzlemin bir tek ortak noktası olabilir.



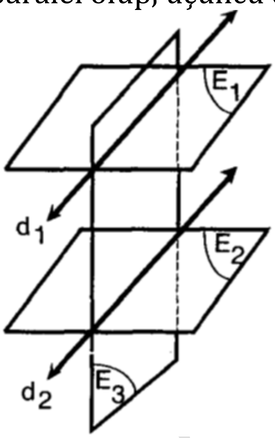
$E_1 \cap E_2 \cap E_3 = \{A\}$

ii) Üç düzlem bir doğru boyunca kesişebilir.



$E_1 \cap E_2 \cap E_3 = \{d\}$

iii) İki düzlem paralel olup, üçüncü düzlem bunları kesebilir.

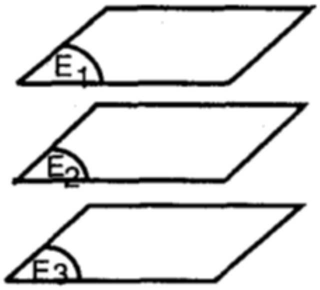


$E_1 \cap E_2 = \emptyset$

$E_1 \cap E_3 = \{d_1\}$

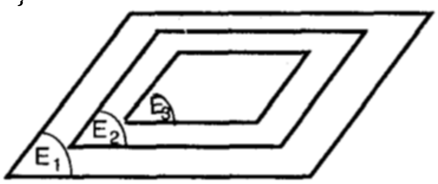
$E_2 \cap E_3 = \{d_2\}$

iv) Üç düzlem birbirine para olabilir.



$E_1 \cap E_2 \cap E_3 = \emptyset)$

v) Üç düzlem çakışık olabilir.



2.4. Not:

$E_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$
$E_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$
$E_3: A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0$

düzlem denklemleri verilmiş olsun. Bu düzlemin katsayılar determinantı Δ olsun.

i) $\Delta \neq 0$ ise bu üç düzlemin bir tek ortak noktası vardır.

ii) $\Delta = 0$ ise Rak Δ ya 2 ya da 1'dir.

a) Rak $\Delta = 2$ ise ve örneğin asli determinant $\delta = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$ olsun. Bu takdirde sistemin ilk iki denkleminin sonsuza kadar çözümü olacağından, bu iki düzlem bir doğru boyunca kesişirler.

b) Rak $\Delta = 2$ ve $\delta \neq 0$ iken

$$\delta_{2+1} = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ D_1 & D_2 & D_3 \end{vmatrix} = 0$$

ise bu üç düzlem bir doğru boyunca kesişirler.

c) Rak $\Delta = 2$ ve $\delta \neq 0$ iken $\delta_{2+1} \neq 0$ ise ç düzlemin ikişer ikişer arakesitleri paraleldir. Yani, bu üç düzlemin ortak noktası yoktur.

d) Rak $\Delta = 2$ ve örneğin asli determinant $\delta = A \neq 0$ ise $\delta_{1+1} = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ D_1 & D_2 \end{vmatrix} = 0$ yü göz önüne alalım, bu takdirde bu iki düzlem çakılıktır.

e) Rak $\Delta = 2$ ve örneğin asli determinant $\delta = A \neq 0$ ise $\delta_{1+1} \neq 0$ ise bu takdirde bu iki düzlem paraleldir.

ÇÖZÜMLÜ ALIŞTIRMALAR

1. Denklemleri

$$\frac{x+5}{-2} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z-4}{1}, \ \frac{x}{a} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{4}$$

olan iki doğrunun birbirlerine dik olması için a kaç olmalıdır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: d_1 doğrusunun eksenleri kesim noktaları, $v_1 = (-2, -3, 1)$
d_2 doğrusunun eksenleri kesim noktaları, $v_2 = (a, -2, 4)$

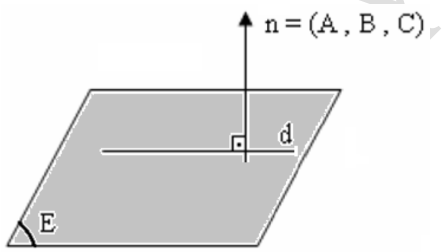
$d_1 \perp d_2$ ise $p_1p_2 + q_1q_2 + r_1r_2 = 0$
$$(-2)a + (-3)(-2) + 1 \cdot 4 = 0$$
$$a = 5$$

Cevap: E

2. $\frac{x-1}{a} = \frac{y+4}{2} = \frac{z-5}{4}$ doğrusu $-3x + (a+1)y + 2z = 5$ düzlemine paralel olduğuna göre, a kaçtır?

A) 1 B) 0 C) −1 D) −2 E) −3

Çözüm:



$\frac{x-1}{a} = \frac{y+4}{2} = \frac{z-5}{4}$ doğrusunun eksenlerin kesim noktası $v = (a,\ 2, 4)$ dür.

$3x + (a+1)y + 2z = 5$ düzleminin normali $v = (-3, (a+1), 2)$ dir.

Doğrunun düzleme paralel olması için, $v \perp n$ olmalıdır. İki vektör dik olduğunda iç çarpımları sıfır olacağından,

$$v \perp n$$
$$a(-3) + 2 \cdot (a+1) + 4 \cdot 2 = 0$$
$$p = 2$$

bulunur.

Cevap: D

3. $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{a} = \frac{z-3}{b}$ denklemiyle verilen doğru $x + 3y - 2z + 5 = 0$ düzlemine dik olduğuna göre, $a + b$ toplamı kaçtır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Çözüm: $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{a} = \frac{z-3}{b}$ doğrusuna göre $v = (2, a, b)$

$3x + 9y - 6z + 5 = 0$ düzleminin normal vektörü $v = (1, 3, -2)$

$$\frac{2}{1} = \frac{a}{3} = \frac{b}{-2}\ \frac{2}{3} = \frac{a}{9} = \frac{b}{-6}$$

$a = 6$ ve $b = -4$

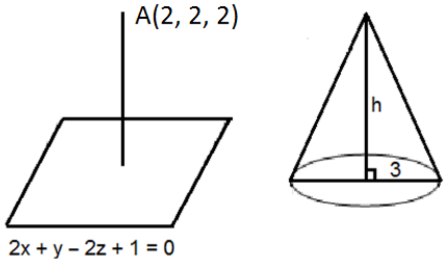
$a + b = 6 - 4 = 2$

Cevap: C

4. Tepe noktası $A(2, 2, 2)$ olan dik dairesel koninin tabanı $2x + y - 2z - 4 = 0$ düzlemi üzerindedir. Bu koninin taban yarıçapı 3 birim olduğuna göre, hacmi kaç birim küptür?

A) π B) 2π C) 3π D) 4π E) 5π

Çözüm:



$$h = \frac{|2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + (-2)2 - 4|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2}} = \frac{2}{3}$$

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi 3^2 \cdot \frac{2}{3}}{3} = 2\pi$$

Cevap: B

5. $x - 1 = y = z$ doğrusu $x + y + z = 10$ düzlemini A noktasında kesmektedir. Buna göre, A noktasının koordinatları nedir?

A) $(4, 3, 3)$ B) $(4, 2, 3)$ C) $(4, 3, 2)$ D) $(4, 1, 3)$ E) $(4, 3, 1)$

Çözüm: $x - 1 = y = z = k$ alınırsa, $x = k + 1, y = z = k$ olup,

$x + y + z = 10$

$k + 1 + k + k = 10$

$k = 3$

dir. Buna göre A noktasının koordinatları $A(4, 3, 3)$ olur.

Cevap: A

6. Uzayda,

$$d_1 : x+1 = y+2 = \frac{z}{-5} \text{ ve } d_2 : \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z-m}{a}$$

doğruları dik kesişmektedir. Buna göre, m kaçtır?

A) $\frac{5}{3}$ B) $\frac{4}{3}$ C) $\frac{2}{3}$ D) 1 E) 0

Çözüm: d_1 ve d_2 doğrularının eksenleri kesim noktaları $\vec{A}_1 = (1,1,-5)$ ve $\vec{A}_2 = (a,b,a)$ dir.

$$p_1p_2 + q_1q_2 + r_1r_2 = 0$$
$$1 \cdot a + 1 \cdot b - 5 \cdot a = 0$$
$$b = 4a$$

olur. Burada $a = 1$ alınırsa $b = 4$ olur.

$$x+1 = y+2 = \frac{z}{-5} = k \text{ ve } \frac{x}{1} = \frac{y}{4} = \frac{z-m}{1} = \ell$$

alınırsa,

$$x = k-1, y = k-2, z = 2k, x = \ell, y = 4\ell, z = \ell + c$$

olur. Burada,

$$\ell = k-1 \text{ ve } 4\ell = k-2$$

denklemleri çözülürse,

$$k = \frac{2}{3} \text{ ve } \ell = -\frac{1}{3}$$

$$z = 2k = 2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \text{ ve } \frac{4}{3} = -\frac{1}{3} + m \text{ ise } m = \frac{5}{3}$$

bulunur.

7. a ve b gerçel sayılar olmak üzere, uzayda $(1,1,1)$ noktasından geçen $ax + 2ay + bz = 14$ düzlemi, $5x + 3y - 2z = 5$ düzlemine diktir. Buna göre, b'nın değeri nedir?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

Çözüm: İki düzlem birbirine dikse;

$$p_1p_2 + q_1q_2 + r_1r_2 = 0$$
$$a \cdot 5 + a \cdot 3 - 2b = 0$$
$$b = 4a$$

Bulunan bu değerler 1. düzlemde yazılırsa,

$$ax + 2ay + 4az = 14$$

olur. Bu düzlem (1, 1, 1) noktasından geçtiğinden,

$$a \cdot 1 + 2a \cdot 1 + 4a \cdot 1 = 14$$
$$a = 2$$
$$b = 8$$

olur.

KAYNAKÇA

1. Prof. Dr. H. Hilmi HACISALİHOĞLU, 2 ve 3 Boyutlu Uzayda Analitik Geometri, 7. Baskı, Ankara, 2005.
2. Prof. Dr. Mustafa ÖZDEMİR, Analitik Geometri ve Çözümlü Problemler, Altın Nokta Yayınevi, İzmir, 2017.
3. Prof. Dr. Emin KASAP, Analitik Geometri, Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Ders Notları, Samsun, 2021.
4. M. Zeki DERMAN, Ökkeş ÖZKÖSELER, Bayram ÇETİNER, Analitik Geometri, Zafer Yayınları, Ankara, 2005.
5. Hüseyin UÇAR, Ali ÖRNEK, Analitik Geometri, Öğretmenlik Alan Bilgisi İlköğretim Matematik, Nobel Yayınları, Ankara, 2014.
6. Doç. Dr. M. Kemal Sağel, Vektörel Analiz, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi döner sermaye işletmesi yayınları, No: 67, 2003, Ankara.