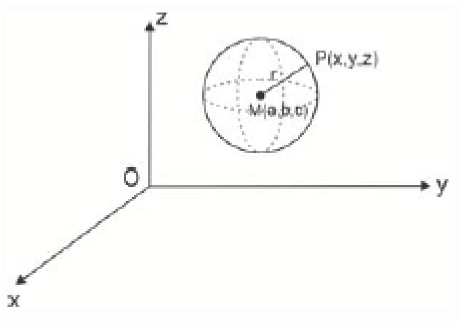
3. BÖLÜM
ÜÇ BOYUTLU CİSİMLERİN ANALİTİĞİ

KÜRE

3.1. Tanım: Uzayda sabit bir noktadan eşit uzaklıkta bulunan noktaların geometrik yerine küre denir. Sabit noktaya kürenin merkezi, eşit uzaklığa ise kürenin yarıçapı denir.



3.1. Teorem: Merkezi $M(a, b, c)$ noktası ve yarıçapı r olan kürenin denklemi;

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$$

dir. (Bu denkleme merkezil küre denklemi adı verilir.)

İspat: Küre merkezinden yüzeyde gezen noktalar $P(x, y, z)$ olsun. Üç boyutlu uzayda $M(a, b, c)$noktasından $P(x, y, z)$ noktası arasındaki uzaklık

$$|MP|=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}$$

olacağından

$$r^2=(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2$$

bulunur.

3.2. Tanım: 3.1. teoremde elde edilen

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$$

denkleme merkezil küre denklemi adı verilir.

Örnek: Merkezi $M(2,1,\ 1)$ olan $P(1,2,0)$ noktasından geçen kürenin denklemi nedir?

Çözüm: $r = |MP| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{6}$

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-\ 1)^2 = 6$$

Örnek: $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 2z - 6 = 0$ çember denklemi verilmiştir. Bu çemberin merkezinin koordinatlarını ve yarıçapını bulunur.

Çözüm: $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 2z - 6 - 9 + 9 - 1 + 1 = 0$

$$(x-3)^2 + y^2 + (z-\ 1)^2 = 4^2$$

$M(3,0,\ 1)$ ve $r = 4$

3.3. Tanım: Merkezil küre denklemi düzenlenirse;

$$x^2 + y^2 + z^2 + Dx + Ey + Fz + G = 0$$

şeklinde yazılabilir. Bu yazıma kürenin genel denklemi adı verilir. Burada

$$D = -2a, E = -2b, F = -2c, G = a^2 + b^2 + c^2 - r^2, M\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}, -\frac{F}{2}\right)$$

biçimindedir.

Örnek: $(x-3)^2 + (y-2)^2 + (z-\ 4)^2 = 9$ olan merkezil denklemini genel denkleme çeviriniz.

Çözüm: $(x-3)^2 + (y-2)^2 + (z-\ 4)^2 = 9$

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 + z^2 - 8z + 16 = 9$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 4y - 8z + 20 = 0$$

3.1. Not: Kürenin merkezil denklemi ile genel denklemi arasında

$$r^2 = a^2 + b^2 + c^2 - G$$

eşitliği olduğundan

$$r^2 = \frac{D^2}{4} + \frac{E^2}{4} + \frac{F^2}{4} - G$$

ise

$$r = \frac{1}{4}\sqrt{D^2 + E^2 + F^2 - 4G}$$

elde edilir.

i) $D^2 + E^2 + F^2 - 4G > 0$ ise küre vardır.
ii) $D^2 + E^2 + F^2 - 4G = 0$ ise küre bir noktadan ibarettir.
iii) $D^2 + E^2 + F^2 - 4G < 0$ ise küre tanımlı değildir.

Örnek: Denklemi $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 11 = 0$ olan kürenin merkezinin koordinatlarını ve yarıçap uzunluğunu bulunuz.

Çözüm: Verilen küre denkleminde, $D = -2, E = -4$ ve $F = -6$ dir.

$$a = -\frac{D}{2} = -\frac{-2}{2} = 1, b = -\frac{E}{2} = -\frac{-4}{2} = 2, c = -\frac{F}{2} = -\frac{-6}{2} = 3$$

olduğundan verilen kürenin merkezinin koordinatları; $M(1, 2, 3)$ tür.

$$\begin{aligned} r &= \frac{1}{4}\sqrt{D^2 + E^2 + F^2 - 4G} \\ &= \frac{1}{4}\sqrt{(-2)^2 + (-4)^2 + (-6)^2 - 4(-11)} \\ &= \frac{1}{4}\sqrt{100} \\ &= 5 \text{ br} \end{aligned}$$

olur.

3.2. Not: Verilen bir kürenin merkezinin yerine göre denklemleri aşağıdaki biçimde olur.

a. Merkezi orijinde olan kürenin denklemi: Merkezinin koorinatları $M(0, 0, 0)$ ve yarıçap uzunluğu r birim ise $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$dir.

b. Merkezi x ekseni üzerinde olan kürenin denklemi: Merkezin koordinatları $M(a, 0, 0)$ ve yarıçap uzunluğu r birim ise $(x - a)^2 + y^2 + z^2 = r^2$ dir.

c. Merkezi y ekseni üzerinde olan kürenin denklemi: Merkezinin koordinatları $M(0, b, 0)$ ve yarıçap uzunluğu r birim ise $x^2 + (y - b)^2 + z^2 = r^2$ dir.

d. Merkezi z ekseni üzerinde olan kürenin denklemi: Merkezinin koordinatları $M(0, 0, c)$ ve yarıçap uzunluğu r birim ise $x^2 + y^2 + (z - c)^2 = r^2$ dir.

e. Koordinat düzlemlerine teğet olan kürenin denklemi: Merkezinin koordinatları $M(r, r, r)$ ve yarıçap uzunluğu r birim ise

$$(x - r)^2 + (y - r)^2 + (z - r)^2 = r^2$$
$$x^2 + y^2 + z^2 - 6r + 2r^2 = 0$$

dir.

Örnek: Denklemi $x^2 + y^2 + z^2 - 2z + 24 = 0$ olan kürenin merkezinin koordinatlarını ve yarıçap uzunluğunu bulunuz.

Çözüm: Verilen küre denkleminde, $D = 0, E = -2$ ve $F = 0$ dır.

$$a = -\frac{D}{2} = -\frac{0}{2} = 0, b = -\frac{E}{2} = -\frac{-2}{2} = 1, c = -\frac{F}{2} = -\frac{0}{2} = 0$$

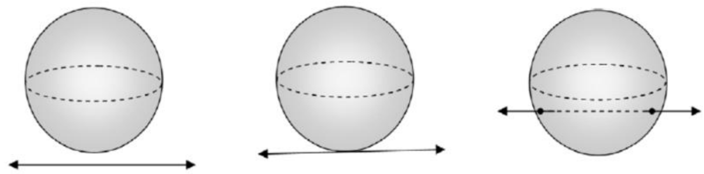
olduğundan, kürenin merkezinin koordinatları, $M(0, 1, 0)$ dır. Bu da bize kürenin merkezinin y ekseni üzerinde olduğunu gösterir.

$$\begin{aligned} r &= \frac{1}{4}\sqrt{D^2 + E^2 + F^2 - 4G} \\ &= \frac{1}{4}\sqrt{0^2 + (-2)^2 + 0^2 - 4(-24)} \\ &= \frac{1}{4}\sqrt{100} \\ &= 5 \text{ br} \end{aligned}$$

olur. O halde, kürenin yarıçapının uzunluğu $r = 5$ birim olur.

KÜRE ve DOĞRU

Bir doğru ile küre ya teğettir ya iki noktada kesişirler ya da kesişmezler. Doğru ve küre denklemleri verildiğinde, birbirlerine göre hangi durumda olduğu iki şekilde bulunabilir. Küre ve doğru denklemlerinin ortak çözümünde elde edilen ikinci dereceden denklemin diskiriminantı $\Delta > 0$ ise iki noktada kesişirler, $\Delta = 0$ ise teğettirler, $\Delta < 0$ ise herhangi bir noktada kesişmezler. Ya da kürenin merkezinin doğruya uzaklığı hesaplanır. Bu uzaklığı ℓ ile gösterelim. r yarıçap olmak üzere,



i) $\ell < r$ ise kesişirler
ii) $\ell > r$ ise kesişmezler
iii) $\ell = r$ ise teğettirler.

Örnek: $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 18$ küresiyle $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{2} = z$ doğrusunun kesişme noktalarını bulunuz.

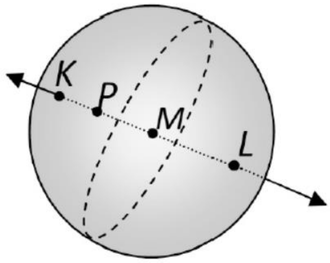
Çözüm: Küre denkleminde, $x = 2t + 1, y = 2t$ ve $z = t$ yazalım. Buradan,

$$(2t)^2 + (2t)^2 + t^2 = 18$$

eşitliğinden $t = \pm 2$ olur. Buna göre kesişme noktaları, $K(5, 4, 2)$ ve $L(-3, -4, -2)$ bulunur.

Örnek: $P(1,\ 2,\ 3)$ noktası $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 52$ küresinin içinde bir noktadır. Bu nokta küre üzerindeki hangi noktaya en yakındır?

Çözüm: Kürenin merkezi M olmak üzere PM doğrusunun küreyi kestiği noktaların biri P'ye en yakın diğeri de en uzak noktadır. Bu noktaları K ve L ile gösterelim. $M(1,\ 0,\ 0)$ olduğundan PM doğrusunun denklemi $x = 1, \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ olur. Buna göre bu doğrunun küreyle kesiştiği noktaları bulalım.



$$(1-1)^2 + (2t)^2 + (2t)^2 = 52$$

eşitliğinden $t = \pm 2$ olur. Yani doğrunun küreyle kesiştiği noktalar $(1,\ 4,\ 6)$ ve $(1, -4, -6)$ noktalarıdır. P noktasının bu noktalara uzaklıklarının sırasıyla,

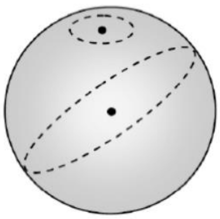
$$\sqrt{(1-1)^2 + (4-2)^2 + (6-3)^2} = \sqrt{13}$$

ve

$$\sqrt{(1-1)^2 + (-4-2)^2 + (-6-3)^2} = 3\sqrt{13}$$

olduğu görülebilir. Buna göre küre üzerindeki noktalardan P noktasına en yakın olan nokta $K(1,\ 4,\ 6)$ ve en uzak olan nokta da $L(1, -4, -6)$ noktasıdır.

3.4. Tanım: Küre üzerinde bulunan çapı, kürenin çapına eşit olan çemberlere kürenin büyük çemberleri denir. Bunlar küre üzerinde elde edilebilecek en büyük çemberlerdir. Çapı, kürenin çapından küçük olan diğer çemberlere de, kürenin küçük çemberleri diyeceğiz.



KÜRE ve DÜZLEM

Bir düzlem ile bir kürenin birbirine göre durumunu 4 farklı durumda incelenir.

1. Düzlem ile küre kesişmez

Bu durumda, kürenin merkezinin düzleme uzaklığı yarıçaptan büyüktür. Kürenin, düzleme en yakın ve en uzak noktalarının koordinatları, merkezden geçen ve doğrultusu düzlemin normali olan doğrunun küreyle kesişme noktalarıdır.

2. Düzlem küreye teğettir

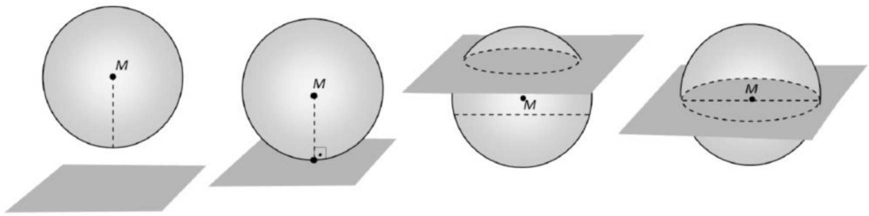
Bu durumda, kürenin merkezinin düzleme uzaklığı yarıçapa eşittir. Ayrıca, küre ile düzlem denklemini ortak çözümünde elde edilecek ikinci dereceden denklemin diskriminantı sıfırdır. Bu ortak çözümden teğet noktası da belirlenebilir.

3. Düzlem küreyi bir küçük çember boyunca keser

Bu durumda, kürenin merkezinin düzleme uzaklığı yarıçaptan küçüktür. Küçük çemberin hangi düzlemde yer aldığı bulunursa, bulunan düzlem ile kürenin arakesitinden, çember denklemi de bulunabilir.

4. Düzlem küreyi bir büyük çember boyunca keser

Bu durumda, kürenin merkezinin düzleme uzaklığı sıfırdır. Yani, kürenin merkezi düzlem üzerindedir.



Örnek: Aşağıdaki düzlemlerin $(x-3)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 4$ küresi ile durumlarını inceleyiniz.

a) $x + 2y - 2z + 7 = 0$ b) $x + 2y - 2z + 5 = 0$

c) $x + 2y - 2z = 0$ d) $x + 2y - 2z - 1 = 0$

Çözüm: Kürenin merkezi $M(3, 0, 1)$ noktasıdır. Kürenin merkezinin düzlemlere uzaklığını,

$$\ell = \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

kullanarak bulalım. $R = 2$ olduğu göz önüne alınırsa,

a) $\ell = 8/3 > R$ olduğundan düzlem kürenin dışında,
b) $\ell = 2 = R$olduğundan düzlem küreye teğettir,
c) $\ell = 1/3 < R$ olduğundan düzlem ile kürenin kesişimi bir küçük çemberdir,
d) $\ell = 0$ olduğundan düzlem ile kürenin kesişimi bir büyük çemberdir.

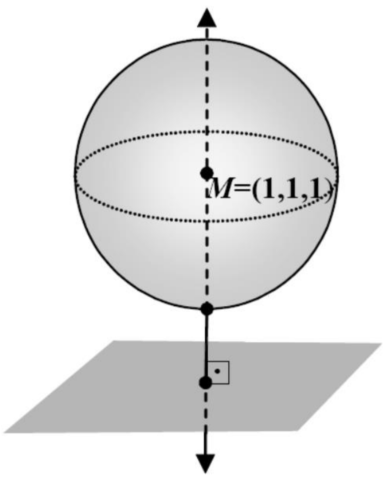
Örnek: $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1$ küresi ile $2x + y - 2z = k$ düzlemi veriliyor.
a) Küre ve düzlem birbirlerine teğet ise k'nin değeri nedir?
b) Küre ile düzlemin kesişimi bir büyük çember ise k'nin değeri nedir?
c) $k = 7$ için küre üzerindeki düzleme en yakın ve en uzak olan noktaların koordinatlarını bulunuz.

Çözüm: a) Kürenin merkezi M(1, 1, 1) noktasıdır. Merkezin düzleme uzaklığı;

$$\ell = \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{|2+1-2-k|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}} = \frac{|1-k|}{3}$$

olduğundan küre ve düzlem birbirine teğet ise $\ell = r = 1$ olması gerektiğinden $|1-k| = 3$ ise $k = 4$ veya $k = -2$ elde edilir.

b) Küre ile düzlemin kesişiminin bir büyük çember olması için $\ell = 0$ olmalıdır. Buradan $k = 1$ bulunur.



c) $k = 7$ alınırsa $\ell = 2 > 1$ olduğundan düzlem küreyi kesmez. Önce, kürenin merkezinden geçen ve düzleme dik olan doğrunun denklemini bulalım. Doğrultmanın parametreleri $N(2, 1, -2)$ olduğundan doğrunun denklemi;

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-2} = t$$

olur. Bu doğru ile kürenin kesişim noktalarını bulalım. Küre denkleminde,

$$x = 2t + 1, y = t + 1 \text{ ve } z = -2t + 1$$

yazarsak,

$$(2t + 1 - 1)^2 + (t + 1 - 1)^2 + (-2t + 1 - 1)^2 = 1$$

$$9t^2 = 1$$

eşitliğinden $t = \pm\frac{1}{3}$ olur. Kesişim noktalarını K_1, K_2 ve bu noktaların düzleme uzaklıklarını da ℓ_1, ℓ_2 ile gösterirsek,

$$t = \frac{1}{3} \text{ için, } K_1\left(\frac{5}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right) \text{ ve } \ell_1 = \frac{|10/3+4/3-2/3-5|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}} = \frac{1}{3}$$

ve

$$t = -\frac{1}{3} \text{ için, } K_1\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right) \text{ ve } \ell_2 = \frac{|2/3+2/3-10/3-5|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}} = \frac{7}{3}$$

olur. $\ell_1 < \ell_2$ olduğundan K_2 kürenin düzleme en uzak noktası, K_1 ise kürenin düzleme en yakın noktasıdır.

Örnek: $(x - 3)^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 9$ küresinin üzerinde $A(4, 2, 3)$, $B(0, 0, 1)$ ve $C\,(2, 2, 3)$ noktaları veriliyor.

a) Bu noktalardan geçen çember parametrik denklemi nedir?

b) Bu çember büyük çember midir?

c) Bu çemberin alanını nedir?

Çözüm: a) $A(4, 2, 3), B(0, 0, 1)$ ve $C\,(2, 2, 3)$ noktalarının bulunduğu düzlemin denklemini bulalım.

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-1 \\ 4-0 & 2-0 & 3-1 \\ 2-0 & 2-0 & 3-1 \end{vmatrix} = 0$$

$$4z - 4y - 4 = 0$$

$$z = y + 1$$

elde edilir. Düzlem denklemiyle kürenin arakesiti bize istenen çemberin denklemini verir. Buna göre,

$$(x - 3)^2 + (z - 1)^2 + (z - 1)^2 = 9$$
$$(x - 3)^2 + 2(z - 1)^2 = 9$$

denklemi istenen çemberin denklemidir. (Burada R3 uzayında döndürülmüş ve ötelenmiş bir çember elde ettiğimiz için, standart düzlemsel çember denklemi çıkması beklenmez.)

Şimdi bu çemberin parametrik denklemini bulalım.

$$\frac{(x-3)^2}{9}+\frac{(z-1)^2}{9/2}=1, y=z-1$$

olduğundan bu çemberin parametrik denklemi

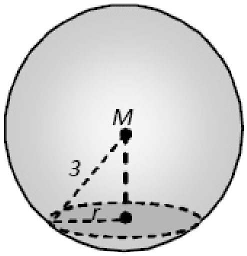
$$x=3+3\cos t, z=1+\frac{3\sqrt{2}}{2}\sin t, y=\frac{3\sqrt{2}}{2}\sin t$$

olacaktır.

b) Bulunan çemberin büyük çember olup olmadığını kontrol etmek için, çemberin üzerinde bulunduğu $y=z-1$ düzleminin, kürenin merkezinden geçip geçmediğini incelemek yeterlidir. Kürenin merkezi M(3, 0, 1) noktası, düzlem denklemini sağladığından bulunan çember büyük çemberdir. Dolayısıyla da yarıçapı kürenin yarıçapıdır.

c) Çember büyük çember olduğundan yarıçapı $R=3$ ve alanı da 9π olur.

Örnek: $(x-3)^2+y^2+(z-1)^2=9$ 9küresinin, $x+y+z=1$ düzlemiyle kesişmesiyle oluşan çemberin alanını bulunuz.



Çözüm: Kürenin merkezinin düzleme uzaklığı;

$$\ell=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|3+0+1-1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\sqrt{3}$$

olur. Kürenin yarıçapı 3 br olduğundan, düzlemin küreyle kesişmesiyle oluşan çemberin yarıçapı;

$$r=\sqrt{9-3}=\sqrt{6}$$

bulunur. O halde, arakesit çemberinin alanı $\pi r^2=6\pi$ elde edilir.

Örnek: $(x-3)^2+y^2+(z-1)^2=9$ küresinin A(4, 2, 3), B(0, 0, 1) noktalarından geçen ve alanı 9π olan çemberin parametrik denklemini bulunuz.

Çözüm: Alanı 9π olduğundan çemberin yarıçapı kürenin yarıçapıdır. O halde istenen çember büyük çemberdir ve çemberin bulunduğu düzlem kürenin merkezinden geçer. Buna göre çemberin bulunduğu düzlem

$$\begin{vmatrix} x-3 & y & z-1 \\ 4-3 & 2 & 3-1 \\ 0-3 & 0 & 1-1 \end{vmatrix} = 0$$

$$6z - 6y - 6 = 0$$

$$y = z - 1$$

olur. Büyük çemberin denklemi de,

$$\{(x-3)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 9\} \cap \{y = z - 1\}$$

arakesit eğrisidir.

$$(x-3)^2 + (z-1)^2 + (z-1)^2 = 9$$

$$\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(z-1)^2}{9/2} = 1, y = z - 1$$

bulunur. Bu eğrinin parametrik denklemi ise,

$$x = 3 + 3\cos t, z = 1 + \frac{3\sqrt{2}}{2}\sin t, y = \frac{3\sqrt{2}}{2}\sin t$$

$$\alpha(t) = \left(3 + 3\cos t, \frac{3\sqrt{2}}{2}\sin t, 1 + \frac{3\sqrt{2}}{2}\sin t\right)$$

büyük çemberi elde edilir.

Örnek: $(x-3)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 9$ küresinin A(4, 2, 3) ve C (2, 2, 3) noktalarından geçen büyük çemberin parametrik denklemini bulunuz. Bu çemberin alanını hesaplayınız.

Çözüm: İki nokta verilmiş fakat büyük çember istenildiğinden çemberin bulunduğu düzlem kürenin merkezinden olan M(3, 0, 1) noktasından da geçmesi gerekir. Yani, aslında yine 3 nokta verilmiştir. Buna göre düzlem denklemi;

$$\begin{vmatrix} x-3 & y & z-1 \\ 4-3 & 2 & 3-1 \\ 2-3 & 2 & 3-1 \end{vmatrix} = 0$$

$$4z - 4y - 4 = 0$$

$$y = z - 1$$

olur. Büyük çemberin denklemi de,

$$\{(x-3)^2+y^2=9\}\cap\{y=z-1\}$$

arakesit eğrisidir. Parametrik denklemi de,

$$\alpha(t)=\left(3+3\cos t, \frac{3\sqrt{2}}{2}\sin t, 1+\frac{3\sqrt{2}}{2}\sin t\right)$$

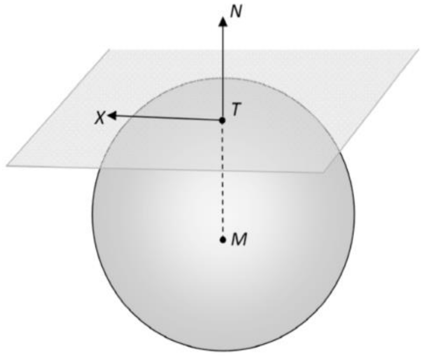
olur. Alanı büyük çember olduğundan 9π dir.

KÜREYE TEĞET BİR DÜZLEMİNİN BULUNMASI

3.2. Teorem: $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ küresine üzerindeki $T(x_0,y_0,z_0)$ noktasında çizilen teğet düzlemin denklemi

$$(x-x_0)(x_0-a)+(y-y_0)(y_0-b)+(z-z_0)(z_0-c)=0$$

dır.



İspat: Kürenin merkezi M olmak üzere MT doğrusu, düzleme diktir. Buna göre düzlem üzerindeki değişken bir nokta X(x, y, z) olmak üzere TX doğrusu MT doğrusuna diktir. Buna göre $(x-x_0, y-y_0, z-z_0)$ ile (x_0-a, y_0-b, z_0-c) olduğundan

$$(x-x_0)(x_0-a)+(y-y_0)(y_0-b)+(z-z_0)(z_0-c)=0$$

olur.

Örnek: $(x-3)^2+y^2+(z-1)^2=9$ küresinin üzerindeki T(4, 2, 3) noktasından çizilen teğet düzlemin denklemini bulunuz.

Çözüm: M(3, 0, 1), T(4, 2, 3) ve X(x, y, z) için,

$(x-4, y-2, z-3)$ ile $(4-3, 2-0, 3-1)$

$(x-4)\cdot 1+(y-2)\cdot 2+(z-3)\cdot 2=0$

$x+2y+z=14$

elde edilir.

3.3. Teorem: $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ küresine üzerindeki $T(x_0,y_0,z_0)$ noktasında çizilen teğet düzlemin denklemi

$$(x-a)(x_0-a)+(y-b)(y_0-b)+(z-c)(z_0-c)=R^2$$

dir.

İspat: 3.2. teoremde teğet düzlemin denklemini

$$(x-x_0)(x_0-a)+(y-y_0)(y_0-b)+(z-z_0)(z_0-c)=0$$

bulmuştuk. Bu eşitlikle $(x_0-a)^2+(y_0-b)^2+(z_0-c)^2=R^2$ eşitliğini toplarsak

$$(x-x_0)(x_0-a)+(x_0-a)^2+(y-y_0)(y_0-b)+(y_0-b)^2 \\ +(z-z_0)(z_0-c)+(z_0-c)^2=R^2$$

$$[(x-x_0)+(x_0-a)](x_0-a)+[(y-y_0)+(y_0-b)](y_0-b) \\ +[(z-z_0)+(z_0-c)](z_0-c)=R^2$$

$$(x-a)(x_0-a)+(y-b)(y_0-b)+(z-c)(z_0-c)=R^2$$

elde edilir.

Örnek: $x^2+y^2+z^2-2x-y+z+1=0$ küresinin $T(1,\ 1,\ 0)$ noktasındaki, teğet düzleminin denklemini bulunuz.

Çözüm: $x^2+y^2+z^2+Dx+Ey+Fz+G=0$ küresinin üzerindeki $T(x_0,y_0,z_0)$ noktasında çizilen teğet düzlemin denkleminin

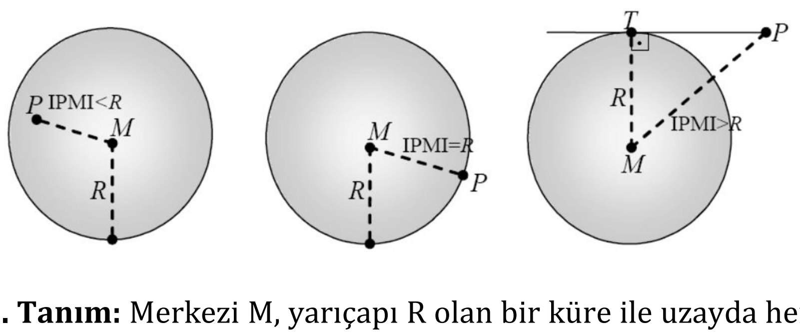
$$x\,x_0+y\,y_0+z\,z_0+\frac{D}{2}(x+x_0)+\frac{E}{2}(y+y_0)+\frac{F}{2}(z+z_0)+G=0$$

olduğu kullanılırsa,

$$x\cdot 1+y\cdot 1+z\cdot 0-(x+1)-\frac{1}{2}(y+1)+\frac{1}{2}(z+0)+1=0$$

eşitliğinden $y+z=1$ düzlemi elde edilir.

BİR NOKTANIN BİR KÜREYE GÖRE KUVVETİ



3.5. Tanım: Merkezi M, yarıçapı R olan bir küre ile uzayda herhangi bir P noktasını göz önüne alalım.

$$K=|PM|^2-R^2$$

eşitliğine P noktasının kürenin kuvveti denir.

P noktası kürenin içinde ise $K<0$;

P noktası kürenin üzerinde ise $K = 0$;
P noktası kürenin dışında ise $K > 0$ olur.

Ayrıca T, P noktasından küreye çizilen teğetin değme noktası olmak üzere, $|PM|^2 - R^2 = |PT|^2$ dir.

3.4. Teorem: $P(x_1, y_1, z_1)$ noktasının

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$$

küresine göre kuvveti

$$K = (x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 + (z_1 - c)^2 - R^2$$

dir.

İspat: $K = |PM|^2 - r^2$ eşitliğinden

$$K = (x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 + (z_1 - c)^2 - R^2$$

bulunur.

3.5. Teorem: $P(x_1, y_1, z_1)$ noktasının

$$x^2 + y^2 + z^2 + Dx + Ey + Fz + G = 0$$

çemberine göre kuvveti

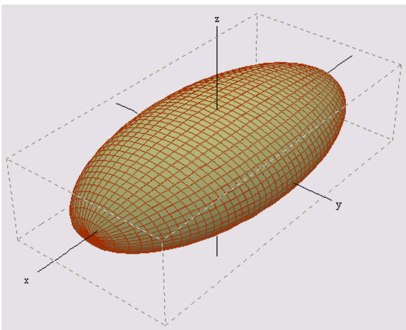
$$K = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + Dx_1 + Ey_1 + Fz_1 + G$$

dir.

Bu teoremin ispatı okuyucuya bırakılmıştır.

ELİPSOİD

3.6. Tanım: İkinci dereceden bir yüzeyde, herhangi bir düzlemle arakesitleri elips olmaktadır. Asal eksenler adı verilen birbirine dik üç eksene göre ve bu eksenlerin kesim noktası olan merkeze göre simetrik bir şekil taşır. Oluşan bu şekle **Elipsoid**, adı verilir.



Orijinde bulunan merkez ve koordinat eksenleri boyunca alınan esas eksenlerine göre elipsoidin denklemi:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

biçimindedir. Bu yüzeyin xy, yz, xz düzlemleriyle arakesitleri sırasıyla;

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

şeklindedir.

a = b, veya b = c veya c = a ise yüzeye bir dönel elipsoit veya siferoit adı verilir. Bu bir elipsi büyük ve küçük ekseni etrafında döndürerek elde edilir. Birinci durumda proleit bir siferoit (football), ikinci durumda obleit (oblate) (basık) siferoit ortaya çıkar. a = b = c iken ortaya çıkan yüzey bir küredir.

KAYNAKÇA

1. Prof. Dr. H. Hilmi HACISALİHOĞLU, 2 ve 3 Boyutlu Uzayda Analitik Geometri, 7. Baskı, Ankara, 2005.
2. Prof. Dr. Mustafa ÖZDEMİR, Analitik Geometri ve Çözümlü Problemler, Altın Nokta Yayınevi, İzmir, 2017.
3. Prof. Dr. Emin KASAP, Analitik Geometri, Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Ders Notları, Samsun, 2021.