2. BÖLÜM
KISMİ TÜREV

KISMİ TÜREV KAVRAMI

Tek değişkenli fonksiyonlarda fonksiyonun türevi, x bağımsız değişkenine Δx artması verildiğinde fonksiyonun $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$ artmasının Δx'e oranı olan $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ in $\Delta x \to 0$ iken (varsa) limitine denilmişti. Şimdi bu durumu iki değişkenli fonksiyonlara taşıyalım.

2.1. Tanım: z = f (x, y) iki değişkenli fonksiyonu verildiğinde bağımsız değişkenlere Δx ve Δy artmaları için fonksiyon artması

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$$

olur. $f(x,y)$'nin (x_0, y_0) noktasında;

$$f_x(x,y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$$

limitin var olmasına x'e göre kısmi türevi denir.

$$f_y(x,y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$

limitin var olmasına y'e göre kısmi türevi denir.

Burada z = f (x, y) fonksiyonunda eğer y'yi sabit tuttuğumuzda elde edilen fonksiyonun x'e göre türevi varsa bu türev x'e göre kısmi türev; eğer x'i sabit tuttuğumuzda elde edilen fonksiyonun y'ye göre türevi varsa bu türev ise y'ye göre kısmi türev olur.

x e göre kısmi türev

$$f_x(x,y), \frac{\partial f}{\partial x}(x,y), z_x(x,y)$$

y ye göre kısmi türev ise

$$f_y(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y), z_y(x,y)$$

gibi sembollerle gösterilir.

Örnek: $f(x,y) = x^3 y^2$ fonksiyonunun $f_x(x,y)$ tanım kullanarak çözünüz.

Çözüm:

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3y^2-x^3y^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{(x^3+3x^2h+3xh^2+h^3)y^2-x^3y^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{h(3x^2y^2+3xhy^2+h^2y^2)}{h} \\ &= 3x^2y^2 \;// \end{aligned}$$

Kısmi türevleri bulurken fonksiyonların $\Delta x_i = h$ artmasın da bağımsız değişkenlerden birisi sabit tutulup fonksiyon tek değişkenli fonksiyona dönüştürülür. Bu şekilde türev alınır.

Örnek: $f(x,y)=x^3+y^2-3xy+10$ fonksiyonunun $f_x(x,y)$ ve $f_y(x,y)$ kısmi türevlerini hesaplayınız.

Çözüm: $f_x(x,y)$ türevini bulmak için y'yi sabit olarak düşünerek, x'ye göre türev almamız gerekiyor. Buna göre

$$f_x(x,y)=3x^2-3y$$

olur. $f_y(x,y)$ türevini bulmak için ise x'i sabit olarak düşünerek, y'ye göre türev almamız gerekiyor. Buna göre

$$f_y(x,y)=2y-3x$$

olur.

Örnek: $f(x,y)=x^4+xy^2$ fonksiyonu için $f_x(2,3)$ türevini bulunuz.

Çözüm: Bu fonksiyonun x'e göre türevini alıp x yerine 2, y yerine 3 yazarsak:

$$f_x(x,y)=4x^3+y^2$$

$$f_x(2,3)=4.2^3+3^2=41$$

olarak bulunur.

Örnek: $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ fonksiyonu için $f_y(3,-1)$ türevini bulunuz.

Çözüm: Bu fonksiyonun y'ye göre türevini alıp x yerine 3, y yerine -1 alırsak,

$$f_y(x,y)=\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

$$f_y(3,-1)=\frac{-1}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=-\frac{1}{\sqrt{10}}$$

olarak bulunur.

Örnek: $f(x,y)=\dfrac{xy}{x+y}$ fonksiyonunun tanım kümesine ait (x, y) değerleri için $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ ve $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ türevlerini bulunuz.

Çözüm:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{y(x+y)-1.xy}{(x+y)^2}=\frac{y^2}{(x+y)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{x(x+y)-1.xy}{(x+y)^2}=\frac{x^2}{(x+y)^2}$$

Örnek: $f(x,y)=x^2\ln(x+y)+(x^2+y^2)e^{-x}$

fonksiyonları için $f_x(x,y)$ ve $f_y(x,y)$ kısmi türevlerini bulunuz.

Çözüm:

$$f_x(x,y)=2x.\ln(x+y)+\frac{x^2}{x+y}+2x^2.e^{-x}-(x^2+y^2)e^{-x}$$

$$f_y(x,y)=\frac{x^2}{x+y}+2ye^{-x}$$

Örnek: $f(x,y)=\sin xy+\cos xy$

fonksiyonları için $f_x(x,y)$ ve $f_y(x,y)$ kısmi türevlerini bulunuz.

Çözüm:

$$f_x(x,y)=y\cos xy-y\sin xy$$

$$f_y(x,y)=x\cos xy-x\sin xy$$

Örnek (Verimlilik): Bilgisayar üreten bir firmanın verimliliği, x birim iş gücü ve y birim sermaye kullanılması durumunda yaklaşık olarak, **Cobb-Douglas Verimlilik fonksiyonu** diye bilinen

$$f(x,y)=20x^{3/5}y^{2/5}$$

fonksiyonuyla ifade edilmektedir. f 'nin x'e göre kısmi türevi $f_x(x,y)$, verimliliğin kullanılan iş gücüne göre değişim oranını vermektedir ve **marjinal iş gücü verimliliği** olarak adlandırılır. $f_x(x,y)$ kısmi türevi de verimliliğin kullanılan serma-

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

yeye göre değişim oranını vermektedir ve **marjinal sermaye verimliliği** olarak adlandırılır.

a) Firma şu anda 3 000 birimlik iş gücü ve 2 500 birimlik sermaye kullandığına göre marjinal iş gücü verimliliğini ve marjinal sermaye verimliliğini bulunuz.

b) 3 000 birimlik iş gücü ve 2 500 birimlik sermaye kullanılırken iş gücü artırılarak mı yoksa sermaye artırılarak mı verimlilikte daha çok artış sağlanacağını belirleyiniz.

Çözüm:

$$f_x(x,y)=12x^{-2/5}y^{2/5} \text{ ise } f_x(3000,2500)=12.(3000)^{-2/5}(2500)^{2/5}=12{,}91$$

$$f_y(x,y)=8x^{3/5}y^{-3/5} \text{ ise } f_y(3000,2500)=8.(3000)^{3/5}(2500)^{-3/5}=35{,}56$$

dir. Dolayısıyla, 3 000 birimlik iş gücü ve 2 500 birimlik sermaye kullanılması durumunda marjinal iş gücü verimliliği 35,56 birimlik ve marjinal sermaye verimliliği de 12,91 birimliktir.

b) 3 000 birimlik iş gücü ve 2 500 birimlik sermaye kullanılırken sermaye sabit tutulmak kaydıyla iş gücündeki her 1 birimlik artış verimlilikte 35,56 birimlik artış sağlayacak; iş gücü sabit tutulmak kaydıyla sermayedeki her 1 birimlik artış ise verimlilikte 12,91 birimlik artış sağlayacaktır. Bu nedenle, iş gücü artırılarak verimlilikte daha çok artış sağlanacağı görülmektedir. //

Üç ve daha çok değişkenli fonksiyonların kısmi türevleri iki değişkenli fonksiyonların kısmi türevlerine benzer olarak şu şekilde tanımlanır.

2.2. Tanım: $z=f(x_1,x_2,...,x_n)$ n- değişkenli fonksiyonun x_i değişkenine göre kısmi türevi

$$\lim_{\Delta x_i\to 0}\frac{f(x_1,x_2,...,x_i+\Delta x_i,...,x_n)-f(x_1,x_2,...,x_i,...,x_n)}{\Delta x_i}$$

limitine eşit olup

$$f_{x_i}(x_1,x_2,...,x_n)\,,\ \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1,x_2,...,x_n)\,,\ z_{x_i}(x_1,x_2,...,x_n)$$

gibi sembollerle gösterilir. Üç ve daha çok değişkenli fonksiyonlarda bağımsız değişkenin biri dışında kalan tüm bağımsız değişkenler sabit tutularak o tek bağımsız değişkene göre türev alınır ve bu türeve verilmiş fonksiyonun o değişkene göre kısmi türevi alınır.

Örnek: $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1x_2+x_3x_4+x_1x_4+x_2x_3$ dört değişkenli fonksiyonun $f_{x_1}, f_{x_2}, f_{x_3}, f_{x_4}$ kısmi türevlerini bulalım.

Çözüm:

$f_{x_1}(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_2+x_4$

$f_{x_2}(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1+x_3$

$f_{x_3}(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_4+x_2$

$f_{x_4}(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_3+x_1$

Örnek: Tanım kümesi

$$A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x=z \text{ ve } x=-z\}$$

olan ve üç değişkenli

$$f(x,y,z)=\frac{y^2}{x^2-z^2}$$

olan fonksiyonun tanım kümesine ait noktalarda $f_x(1,3,2)$, $f_y(1,3,2)$ ve $f_z(1,3,2)$ kısmi türevlerini bulunuz.

Çözüm:

$$f_x(x,y,z)=\frac{-2xy^2}{(x^2-z^2)^2} \text{ ise } f_x(1,3,2)=\frac{-2.1.3^2}{(1^2-2^2)^2}=-2$$

$$f_y(x,y,z)=\frac{2y(x^2-z^2)}{(x^2-z^2)^2}=\frac{2y}{x^2-z^2} \text{ ise } f_y(1,3,2)=\frac{2.3}{1^2-2^2}=\frac{3}{2}$$

$$f(x,y,z)=\frac{-(-2z)y^2}{(x^2-z^2)^2}=\frac{2zy^2}{(x^2-z^2)^2} \text{ ise } f(1,3,2)=\frac{2.2.3^2}{(1^2-2^2)^2}=4$$

Örnek: $f(x,y,z)=x^2\tan yz$ fonksiyonu için $f_x\left(-1,\frac{\pi}{4},1\right)$ ve $f_y\left(-1,\frac{\pi}{4},1\right)$ türevlerini bulunuz.

Çözüm:

$$f_x(x,y,z)=2x\tan yz \text{ ise } f_x\left(-1,\frac{\pi}{4},1\right)=2.(-1)\tan(\frac{\pi}{4}.1)=-2$$

$$f_y(x,y,z)=(1+\tan^2 yz)x^2z \text{ ise } f_y\left(-1,\frac{\pi}{4},1\right)=(1+\tan^2(\frac{\pi}{4}.1))(-1)^2.1=2 \quad //$$

YÜKSEK MERTEBEDEN KISMİ TÜREV

Çok değişkenli fonksiyonlara tanımlı olduğu aralıkta yüksek mertebeden türev alınabilir. Yüksek mertebeden türevde gösterim sırası şu şekildedir:

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

İki defa x'e göre kısmi türev

$$f_{xx}(x,y),\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y),\ z_{xx}(x,y)$$

şeklinde, iki defa y'ye göre kısmi türev

$$f_{yy}(x,y),\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y),\ z_{yy}(x,y)$$

şeklinde, önce x'e göre sonra y'ye göre türev

$$f_{xy}(x,y),\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y),\ z_{xy}(x,y)$$

şeklindedir. Bu gösterim mantığı diğer gösterimlerde benzer şekilde yapılır.

Örnek: $f(x,y)=(x^2+y^2)\ln(x+y)$

fonksiyonunda $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$ i bulunuz.

Çözüm

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}=\frac{\partial f}{\partial x}\left(2y\ln(x+y)+\frac{x^2+y^2}{x+y}\right)$$

$$=\frac{2y}{x+y}+\frac{2(x+y)-(x^2+y^2)}{(x+y)^2}$$

$$=\frac{y^2+2(x+y)}{(x+y)^2}-1$$

Alexis Claude Clairaut
13 Mayıs 1713, Paris, Fransa - 17 Mayıs 1765, Paris, Fransa

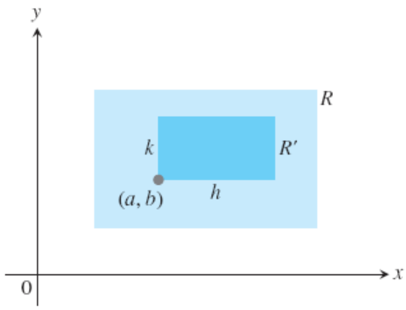
2.1. Teorem: $f(x,y)$ ve kısmi türevleri, f_x, f_y, f_{xy} ve f_{yx} bir (a, b) noktasını içeren bir açık bölgede tanımlıysa ve hepsi (a, b) noktasında sürekliyse,

$$f_{xy}(a,b)=f_{yx}(a,b)$$

olur.

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

İspat: $f_{xy}(a,b)$ ile $f_{yx}(a,b)$'nin eşit oldukları Ortalama Değer Teoremi dört kere uygulanarak gösterilebilir. Hipoteze göre, (a, b) noktası xy-düzleminde, f_x ,f_y ,f_{xy} ve f_{yx}'in hepsinin tanımlı olduğu bir R dikdörtgeninin içinde bulunmaktadır.



h ve k sayılarını, (a + h, b + k) noktası da R dikdörtgeni içinde bulunacak şekilde seçer ve

$$\Delta = F(a + h) - F(a) \qquad (1)$$

olmak üzere,

$$F(x) = f(x, b + k) - f(x, b) \qquad (2)$$

farkını inceleriz. F'ye (türetilebilir olduğu için süreklidir) Ortalama Değer Teoremini uygularız ve (2) denklemi, c_1 sayısı a ile a + h arasında bulunmak üzere,

$$\Delta = hF'(c_1) \qquad (3)$$

halini alır. (1) denkleminden,

$$F'(x) = f_x(x,b+k) - f_x(x,b)$$

bulunur, böylece (3) denklemi

$$\Delta = h[f_x(c_1,b+k) - f_x(c_1,b)] \qquad (4)$$

halini alır. Şimdi Ortalama Değer Teoremini $g(y) = f_x(c_1,b)$ fonksiyonuna uygular. b ile b + k arasındaki bir d_1 değeri için,

$$f(b+k) - g(b) = kg'(d_1)$$

Veya

$$f_x(c_1,b+k) - f_x(c_1,b) = kf_{xy}(c_1,d_1)$$

elde ederiz. Bunu (4) denklemine yerleştirerek, uç noktaları (a, b), (a + h , b), (a + h, b + k) ve (a, b + k) olan R′ dikdörtgeninde bulunan bir (c_1, d_1) noktası için

$$\Delta = hF'(c_1,d_1) \qquad (5)$$

elde ederiz. (1) Denklemini (2) Denklemine yerleştirirsek,

$$\begin{aligned}\Delta &= f(a+h,b+k) - f(a+h,b) - f(a,b+k) + f(a,b)\\ &= [f(a+h,b+k) - f(a+h,b)] - [f(a,b+k) - f(a,b)]\\ &= \phi(b+k) - \phi(b) \qquad (6)\end{aligned}$$

olmak üzere,

$$\phi(y) = f(a+h,y) - f(a,y) \qquad (7)$$

elde ederiz. (7) denklemine Ortalama Değer Teoreminin uygulanması, b ile b + k arasındaki bir d_2 için,

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

$$\Delta = k\phi'(d_2)$$

verir. (6) Denkleminden

$$\phi(y) = f_y(a+h,y) - f_y(a,y) \qquad (9)$$

bulunur. (9) denklemini (8) denklemine yerleştirmek

$$\Delta = k[f_y(a+h,d_2) - f_y(a,d_2)$$

verir. Son olarak, köşeli parantezin içindeki ifadeye Ortalama Değer Teoremini uygulayarak, a ile a + h arasındaki bir c_2 değeri için,

$$\Delta = kh[f_{yx}(c_2,d_2) \qquad (10)$$

elde ederiz. (5) ve (10) Denklemleri birlikte, hem (c_1, d_1) hem de (c_2, d_2) R' dikdörtgeninin içinde bulunmak üzere

$$f_{xy}(c_1,d_1) - f_{yx}(c_2,d_2) \qquad (11)$$

olduğunu gösterir. (11) Denklemi tam olarak istediğimiz sonuç değildir. Çünkü sadece f_{xy} 'nin (c_1, d_1) 'de, f_{yx} 'in (c_2, d_2)'deki değerine eşit olduğunu söyler. Ama tartışmamızdaki h ve k sayıları istediğimiz kadar küçük yapılabilir. f_{xy} ve f_{yx}'in ikisinin de (a, b)'de sürekli oldukları hipotezi, h ve k → 0 iken $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \to 0$ olmak koşuluyla,

$$f_{xy}(c_1,d_1) = f_{xy}(a,b) + e_1 \text{ ve } f_{yx}(c_2,d_2) = f_{yx}(a,b) + e_2$$

olduğu anlamına gelir. Dolayısıyla, h ve k'yi sıfıra götürürsek, $f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)$ elde ederiz.

ÇOK DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLARDA DİFERENSİYELLENEBİLME

Diferensiyellenebilmenin başlangıç noktası Fermat'nın farklar oranı değil, daha çok Δx artım fikridir. Tek değişkenli fonksiyonlarda çalışmalarımızdan, y = f (x) fonksiyonu $x = x_0$ 'da diferensiyellenebilirse, x'i x_0'dan $x_0 + \Delta x$'e değiştirmekten kaynaklanan f 'nin değerindeki değişikliğin, Δx → 0 iken ε → 0 olmak üzere,

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \varepsilon \Delta x$$

şeklinde bir denklemle verildiğini hatırlayalım. İki değişkenli fonksiyonlar için, benzer özellik diferensiyellenebilmenin tanımı halini alır.

2.3. Tanım: Bir $z = f(x,y)$ fonksiyonu için $f_x(x_0,y_0)$ ve $f_y(x_0,y_0)$ varsa;

$$\Delta z = f_x(x_0,y_0)\Delta x + f_y(x_0,y_0)\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$$

şeklindeki bir denklemi Δx, Δy → 0 iken $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \to 0$ olmak üzere sağlarsa, $z = f(x,y)$ fonksiyonu (x_0, y_0)'da diferansiyellenebilirdir. Tanım kümesinin her noktasında diferensiyellenebilirse, f 'ye diferensiyellenebilir denir.

2.2. Teorem (İki Değişkenli Fonksiyonlar için Artım Teoremi): f(x,y) 'nin birinci kısmi türevlerinin, (x_0, y_0) noktasını içeren açık bir R bölgesinde ta-

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

nımlı olduklarını ve f_x ve f_y'nin (x_0, y_0)'da sürekli olduklarını varsayalım. Bu durumda, (x_0, y_0)'dan R'deki başka bir $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ noktasına ilerlemekten dolayı f 'de oluşacak

$$\Delta z = f(x_0\Delta x+, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

değişikliği, $\Delta x, \Delta y \to 0$ iken, $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \to 0$ olmak üzere,

$$\Delta z = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$$

şeklinde bir denklemi sağlar.

2.1. Sonuç: Bir $f(x,y)$ fonksiyonunun f_x ve f_y kısmi türevleri açık bir R bölgesinde sürekli iseler, f fonksiyonu R'nin her noktasında diferansiyellenebilirdir.

KISMİ TÜREVDE ZİNCİR KURALI

Tek değişkenli fonksiyonlarda zincir kuralı; $y = f(x)$ için $u(x)$ değişken değiştirmesi uygulandığında;

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}$$

olduğunu biliyoruz. İki veya daha fazla değişken için de aşağıdaki teorem uygulanır. Ama biz burada sadece iki değişken için tanımlayacağız. Üç veya daha değişken için benzer yöntem uygulanır.

2.3. Teorem: $z = f(x,y)$ fonksiyonunun f_x ve f_y kısmi türevleri sürekli ise $u(x,y)$ ve $v(x,y)$ x ve y'nin türetilebilir fonksiyonları ise $z = f(u(x,y), v(x,y))$ bileşkesi x ve y'nin türetilebilir bir fonksiyonudur.

$$\frac{dz}{dx} = f_x(u(x,y), v(x,y)).u'(x,y) + f_y(u(x,y), v(x,y)).v'(x,y)$$

veya

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dx}$$

olur.

İspat: u ve v, x_0'da türetilebiliyorlarsa, z'nin de x_0'da türetilebilir ve $P_0 = (u(x_0, y), v(x_0, y))$ olmak üzere

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)_{x_0} = \left(\frac{dz}{du}\right)_{P_0}\left(\frac{du}{dx}\right)_{x_0} + \left(\frac{dz}{dv}\right)_{P_0}\left(\frac{dv}{dx}\right)_{x_0}$$

olduğunu göstermek gerekir.

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

Δu, Δv ve Δz, x'i x_0'dan $x_0+\Delta x$ 'ye değiştirmekten kaynaklanan artımlar olsun. f diferansiyellenebilir olduğundan, $\Delta u, \Delta v \to 0$ iken $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \to 0$ olmak üzere,

$$\Delta z=\left(\frac{dz}{du}\right)_{P_0}\Delta u+\left(\frac{dz}{dv}\right)_{P_0}\Delta v+\varepsilon_1\Delta u+\varepsilon_2\Delta v$$

olur. $\frac{dz}{dx}$ 'yi bulmak için bu denklemini Δx ile böler ve Δx'i sıfıra götürürüz. Bölüm

$$\frac{\Delta z}{\Delta x}=\left(\frac{dz}{du}\right)_{P_0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+\left(\frac{dz}{dv}\right)_{P_0}\frac{\Delta v}{\Delta x}+\varepsilon_1\frac{\Delta u}{\Delta x}+\varepsilon_2\frac{\Delta v}{\Delta x}$$

Δx' i sıfıra götürürsek

$$\begin{aligned}\left(\frac{dz}{dx}\right)_{u_0} &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta x}\\ &=\left(\frac{dz}{du}\right)_{P_0}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)_{x_0}+\left(\frac{dz}{dv}\right)_{P_0}\left(\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)_{x_0}+0.\frac{\Delta u}{\Delta x}+0.\frac{\Delta v}{\Delta x}\\ &=\left(\frac{dz}{du}\right)_{P_0}\left(\frac{du}{dx}\right)_{x_0}+\left(\frac{dz}{dv}\right)_{P_0}\left(\frac{dv}{dx}\right)_{x_0}\end{aligned}$$

verir.

Örnek: $z=\ln((e^x\cos y)^2+(e^x\cos y)^2)$ fonksiyonu için $\frac{dz}{dx}$ yi bulunuz.

Çözüm: $u=e^x\cos y$, $v=e^x\sin y$ dönüşümü yapılarak $z=\ln(u^2+v^2)$ olur. Buna göre

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dx}&=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dx}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dy}\\ &=\frac{2u}{u^2+v^2}e^x\cos y+\frac{2v}{u^2+v^2}e^x\sin y\\ &=\frac{2e^x\cos y}{(e^x\cos y)^2+(e^x\sin y)^2}e^x\cos y+\frac{2e^x\sin y}{(e^x\cos y)^2+(e^x\sin y)^2}e^x\sin y\\ &=\frac{2e^{2x}\cos^2 y}{e^{2x}\cos^2 y+e^{2x}\sin^2 y}+\frac{2e^{2x}\sin^2 y}{e^{2x}\cos^2 y+e^{2x}\sin^2 y}\\ &=\frac{2e^{2x}(\cos^2 y+\sin^2 y)}{e^{2x}(\cos^2 y+\sin^2 y)}\\ &=2\end{aligned}$$

Örnek: $z=xy$ fonksiyonunun x = cos t, y = sin t yolu boyunca türevini ve türevinde $t=\frac{\pi}{2}$ değerini bulunuz.

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

Çözüm: $\frac{dz}{dt}$ 'yu bulmak için zincir kuralını uygulayalım:

$$\begin{aligned}
\frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} \\
&= y(-\sin t) + x(\cos t) \\
&= (\sin t)(-\sin t) + (\cos t)(\cos t) \\
&= \cos^2 t - \sin^2 t \\
&= \cos 2t
\end{aligned}$$

$$\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=\frac{\pi}{2}} = \cos\left(2.\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

2.4. Teorem (Üç Bağımsız Değişkenli Fonksiyonlar İçin Zincir Kuralı): $t = f(x,y,z)$ türetilebiliyorsa ve x, y, z de u_1, u_2 ve u_3'nin türetilebilir fonksiyonlarıysa, t de u_1, u_2 ve u_3'nin türetilebilir bir fonksiyonudur ve

$$\frac{dt}{dx} = \frac{\partial t}{\partial u_1}\frac{du_1}{dx} + \frac{\partial t}{\partial u_2}\frac{du_2}{dx} + \frac{\partial t}{\partial u_3}\frac{du_3}{dx}$$

olur.

Bu teorem bir önceki teoreme benzediğinden bu teorimin ispatı okuyucuya bırakılmıştır.

Örnek: $t = \ln((x\cos y)^2 + (x\cos y)^2 + xyz)$ fonksiyonu için $\frac{dt}{dx}$ yi bulunuz.

Çözüm: $u_1 = x\cos y$, $u_2 = x\sin y$, $u_3 = xyz$ dönüşümü yapılarak $z = \ln(u_1^2 + u_2^2 + u_3)$ olur. Buna göre

$$\begin{aligned}
\frac{dt}{dx} &= \frac{\partial t}{\partial u_1}\frac{du_1}{dx} + \frac{\partial t}{\partial u_2}\frac{du_2}{dx} + \frac{\partial t}{\partial u_3}\frac{du_3}{dx} \\
&= \frac{2u_1}{u_1^2 + u_2^2 + u_3}\cos y + \frac{2u_2}{u_1^2 + u_2^2 + u_3}\sin x + \frac{1}{u_1^2 + u_2^2 + u_3}yz \\
&= \frac{2x\cos^2 y}{x^2 + xyz} + \frac{2x\sin^2 y}{x^2 + xyz} + \frac{yz}{x^2 + xyz} \\
&= \frac{2x + yz}{x^2 + xyz}
\end{aligned}$$

TAM DİFERENSİYEL

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

2.4. Tanım: 2.3. Tanımda diferensiyellenebilmenin $z=f(x,y)$ fonksiyonu için;

$$\Delta z=f_x\Delta x+f_y\Delta y+\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_2\Delta y$$

olduğunu görmüştük. Bu eşitlikteki $f_x\Delta x$ ve $f_y\Delta y$ büyüklükleri için;

$z=f(x,y)$ alınırsa $\Delta z=dz$,

$f(x,y)=x$ alınırsa $\Delta x=dx$,

$f(x,y)=y$ alınırsa $\Delta y=dy$

olacağından $z=f(x,y)$ fonksiyonunun tam diferensiyeli

$$dz=f_x(x,y)\,dx+f_y(x,y)\,dy$$

olur. Bu yazıma tam diferensiyeli veya toplam diferensiyeli denir.

n değişkenli türevlenebilen bir

$$z=f(x_1,x_2,...,x_n)$$

fonksiyonunun tam diferensiyeli

$$dz=\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2+...+\frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n$$

dir.

Örnek: $z=e^x\sin y$ fonksiyonunun tam diferensiyelini bulunuz.

Çözüm: $dz=e^x\sin y\,dx+e^x\cos y\,dy$

Örnek: Bir dikdörtgenin kenarları $x=10\,cm$ ve $y=6\,cm$ dir. x kenarı 4 mm artırılır, y kenarı 2 mm kısaltılırsa bu dikdörtgenin köşegeni ne kadar değişir.

Çözüm: Köşegen uzunluğu $z=\sqrt{x^2+y^2}$ dir.

$$dz=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dx+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dy$$

dir. Burada $x=10$, $y=6$, $dx=0,4$, $dy=0,2$ alınırsa,

$$dz=\frac{10}{\sqrt{10^2+6^2}}0,4+\frac{4}{\sqrt{10^2+6^2}}0,2=0,412$$

değişimi olur.

Örnek: Bir un fabrikası 25 m yüksekliğinde 5 m yarıçapında silindir şeklinde buğday depolama tankını kurmuştur. Tankın hacmi yükseklik ve yarıçaptaki küçük değişimlere ne kadar duyarlıdır?

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

Çözüm: Silindirin hacmi $V=\pi r^2 h$ dir. Burada $r=5\,m$ ve $h=25\,m$ dir.

$$\begin{aligned} dV &= V_r(5,25)dr + V_h(5,25)\,dh \\ &= 2\pi rh\,dr + \pi r^2\,dh \\ &= 250\pi\,dr + 25\pi\,dh \end{aligned}$$

yaklaşımını buluruz.

KAPALI FONKSİYONLARIN KISMİ TÜREVLERİ

İki değişkenli fonksiyonlarda $z=f(x,y)$ eşitliği $F(x,y,z)=0$ kapalı fonksiyonuna dönüştürülür.

Üç değişkenli fonksiyonlarda $t=f(x,y,z)$ eşitliği $F(x,y,z,t)=0$ kapalı fonksiyonuna dönüştürülür.

Benzer şekilde diğer çok değişkenli fonksiyonlar da tanımlanır.

Tek değişkenli fonksiyonlarda $y=f(x)$ fonksiyonların kapalı fonksiyonu $F(x,y)=0$ biçiminde yazılıp türevi $\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}$ olduğunu hatırlayalım.

2.5. Teorem: İki değişkenli fonksiyonun $F(x,y,z)=0$ kapalı fonksiyonu ise bu fonksiyonun türevi;

$$\frac{dz}{dx}=-\frac{F_x}{F_z} \quad \text{ve} \quad \frac{dz}{dy}=-\frac{F_y}{F_z}$$

biçimindedir.

İspat: $F(x,y,z)=0$ kapalı fonksiyon, F_x ve F_y türevleri olsun. Zincir kuralından

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dx}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dx}=0$$

yazılabilir. $\frac{dx}{dx}=1$, $\frac{dy}{dx}=0$ olduğundan

$$\frac{dz}{dx}=-\frac{F_x}{F_z}$$

bulunur.

Örnek: $z^3-xy+yz+y^3-2=0$ kapalı fonksiyonunun da x ve y'ye göre türevini bulunuz.

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

Çözüm: $\frac{dz}{dx}=-\frac{-y}{3z^2+y}=\frac{y}{3z^2+y}$ ve $\frac{dz}{dy}=-\frac{-x+z+3y^2}{3z^2+y}=\frac{x-z-3y^2}{3z^2+y}$

İKİ DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLARDA TAYLOR AÇILIMI

Bir değişkenli bir f fonksiyonunun a noktasının bir komşuluğunda her mertebeden türeve sahip olduğunda buna ait Taylor serisinin $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f(a)^{(k)}}{k!}(x-a)^k$ olduğunu, bunun yakınsak ve toplamının f (x) olması için gerek ve yeter şartın $K_n(x)$ kalan terimin sıfıra gitmesi olduğunu belirtmiştik. Çok değişkenli fonksiyonlar için benzer tanım ve teoremleri inceleyelim.

2.5. Tanım: $z=f(x,y)$ fonksiyonunun (a, b) noktasında her mertebeden kısmi türevleri mevcut olsun.

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left[f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)\right]^{(k)}$$
$$=f(a,b)+\frac{1}{1!}\left[f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)\right]$$
$$+\frac{1}{2!}\left[f_{xx}(a,b)(x-a)^2+f_{xy}(a,b)(x-a)(y-b)+f_{yy}(a,b)(y-b)^2\right]$$

serisine f fonksiyonunun (a, b) noktasındaki Taylor serisi denir.

2.1. Uyarı: Bir değişkenli fonksiyonlarda olduğu gibi, bunun yakınsak ve toplamının f(x, y) olması için gerek ve yeter şart $0<\theta<1$ için

$$K_n=\frac{1}{(n+1)!}$$
$$\left\{\left[f_x(a+\theta(x-a),(b+\theta(y-b)\right]^{(n+1)}(x-a)^{(n+1)}+\left[f_y(a+\theta(x-a),(b+\theta(y-b)\right]^{(n+1)}(y-b)^{(n+1)}\right\}$$

kalan teriminin sıfıra gitmesidir.

Örnek: $f(x,y)=x^3+2x^2+3xy+y^2-x+y-1$ ifadesini $(x-1)$ ve $(y+1)$ in kuvvetine göre yazınız.

Çözüm: $f(1,-1)=-2$

$f_x(x,y)=3x^2+4x+3y-1\Rightarrow f_x(1,-1)=3$

$f_y(x,y)=3x+2x+1\Rightarrow f_y(1,-1)=2$

$f_{xx}(x,y)=6x+4\Rightarrow f_{xx}(1,-1)=10$

$f_{xy}(x,y)=3\Rightarrow f_{xy}(1,-1)=3$

$f_{yy}(x,y)=2\Rightarrow f_{yy}(1,-1)=2$

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

$$f_{xxx}(x,y)=6 \Rightarrow f_{xxx}(1,-1)=6$$
$$f_{xxy}(x,y)=f_{xyy}(x,y)=f_{yyy}(x,y)=0 \Rightarrow f_y(1,-1)=0$$

olduğundan

$$f(x,y)=-2+\frac{1}{1!}\left[3(x-1)+2(y+1)\right]+\frac{1}{2!}\left[10(x-1)^2+6(x-1)(y+1)+2(y+1)^2\right]+\frac{1}{3!}\left[6(x-1)^3\right]$$

$$=-2+3(x-1)+2(y+1)+5(x-1)^2+3(x-1)(y+1)+(y+1)^2+(x-1)^3$$

bulunur.

Örnek: $f(x,y)=e^x \sin y$ fonksiyonunu (0, 0) noktası komşuluğunda Taylor serisini üçüncü mertebeye kadar açınız.

Çözüm: $f(0,0)=0$

$$f_x(x,y)=e^x \sin y \Rightarrow f_x(0,0)=0$$
$$f_y(x,y)=e^x \cos y \Rightarrow f_y(0,0)=1$$
$$f_{xx}(x,y)=e^x \sin y \Rightarrow f_{xx}(0,0)=0$$
$$f_{xy}(x,y)=e^x \cos y \Rightarrow f_y(0,0)=1$$
$$f_{yy}(x,y)=-e^x \sin y \Rightarrow f_{yy}(0,0)=0$$
$$f_{xxx}(x,y)=e^x \sin y \Rightarrow f_{xxx}(0,0)=0$$
$$f_{xxy}(x,y)=e^x \cos y \Rightarrow f_{xxy}(1,-1)=1$$
$$f_{xyy}(x,y)=-e^x \sin y \Rightarrow f_{xyy}(1,-1)=0$$
$$f_{yyy}(x,y)=-e^x \cos y \Rightarrow f_{yyy}(1,-1)=-1$$

olduğundan

$$e^x \sin y = y + xy + \frac{1}{2!}x^2y - \frac{1}{3!}y^3 + \ldots$$

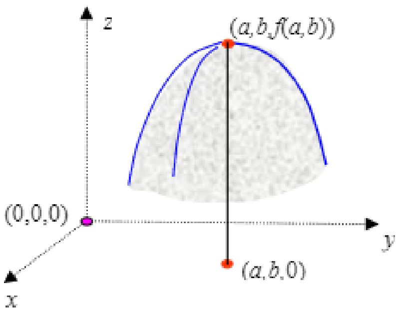
bulunur.

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

ÇOK DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLARDA EKSTREMUM (MAKSİMUM – MİNİMUM) NOKTALARI

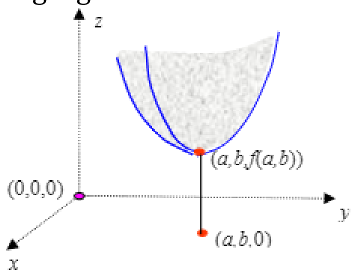
2.6. Tanım: $z=f(x,y)$ denklemi ile tanımlanan iki değişkenli bir f fonksiyonu ve bu fonksiyonun tanım kümesi içinde $(a,b)\in \mathbb{R}^2$ verilmiş olsun. Eğer (a, b) yi merkez kabul eden bir dairesel bölgedeki her (x, y) için $f(a,b)\geq f(x,y)$ ise, bu takdirde $f(a,b)$ ye f 'nin bir yerel maksimum değeri denir.

$f(a,b)$ değeri f 'nin bir yerel maksimum değeri ise, f 'nin $(a,b,f(a,b))$ civarındaki grafiği şekilde görüldüğü gibi olacaktır.



2.7. Tanım: $z = f(x,y)$ denklemi ile tanımlanan iki değişkenli bir f fonksiyonu ve bu fonksiyonun tanım kümesi içinde $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ verilmiş olsun. Eğer (a, b) yi merkez kabul eden bir dairesel bölgedeki her (x, y) için $f(a,b) \leq f(x,y)$ ise, bu takdirde $f(a,b)$ ye f 'nin bir yerel minimum değeri denir.

$f(a,b)$ değeri f 'nin bir yerel minimum değeri ise, f 'nin $(a,b,f(a,b))$ civarındaki grafiği şekilde görüldüğü gibi olacaktır.



Bir fonksiyonun yerel maksimum veya yerel minimum değerleri tanım kümesindeki hangi noktalarda ortaya çıkabilir? Bir değişkenli fonksiyonlar için de aynı soruyu sormuş ve cevaplanmıştık. İki değişkenli fonksiyonlar için bu sorunun cevabı aşağıdaki teoremde verilecektir.

Simeon Denis Poisson
21 Haziran 1781, Loiret, Fransa - 25 Nisan 1840, Sceaux, Fransa

2.6. Teorem: $f(a,b)$, f nin yerel maksimum veya yerel minimum değeri ise ve $f_x(a,b)$, $f_y(a,b)$ kısmi türevleri varsa, $f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$ dır.

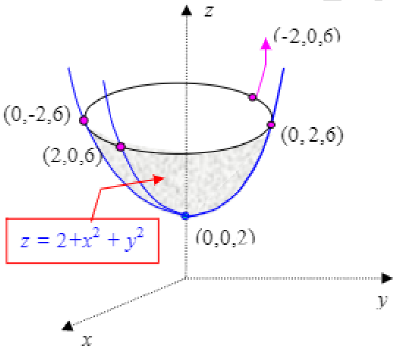
İspat: (a, b) noktasında f 'nin bir yerel ekstremum değeri varsa $g(x)=f(x,b)$ fonksiyonunun x = a noktasında bir yerel ekstremum değeri vardır. Bu nedenle $g'(a)=0$ dır. Şimdi, $g'(a)=f_x(a,b)$ olduğundan $f_x(a,b)=0$ olur.

Benzer düşünceyle, $h(y)=f(a,y)$ fonksiyonu $f_y(a,b)=0$ olduğunu gösterir.

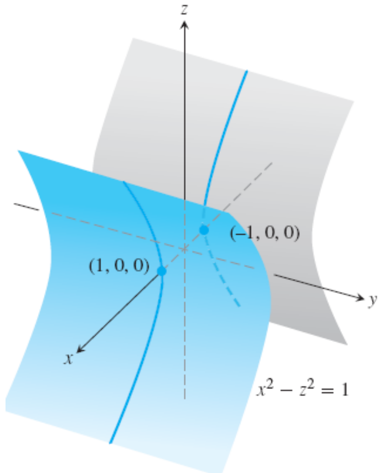
Örnek: $z=f(x,y)=2+x^2+y^2$ fonksiyonu için $f(0,0)=2$ yerel minimum değeridir. Teoremde ifade edildiği üzere her iki kısmi türev de (0,0) noktasında 0 değerini alırlar.

$f_x(x,y)=2x$ ise $f_x(0,0)=2.0=0$

$f_y(x,y)=2y$ ise $f_y(0,0)=2.0=0$



Örnek: $x^2-z^2=1$ hiperbolik silindiri üzerinde orijine en yakın olan noktayı bulunuz.



Öğr. Gör. ... YILM...

Çözüm: $x^2 - z^2 = 1$ kısıtlaması ile $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ fonksiyonunun değerini minimize eden noktalardır. x ve y'ye kısıtlama denklemindeki bağımsız değişkenler olarak bakarsak,

$$z^2 = x^2 - 1$$

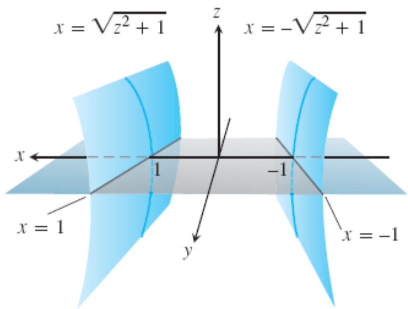
olur ve silindirin üzerinde $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$'nin değerleri

$$h(x,y) = x^2 + y^2 + (x^2 - 1) = 2x^2 + y^2 - 1$$

fonksiyonuyla verilir. Silindir üzerinde koordinatları f 'yi minimize eden noktaları bulmak için, xy-düzleminde koordinatları h'yi minimize eden noktaları ararız. h'nin tek ekstremum değeri

$$h_x(x,y) = 4x = 0 \text{ ve } h_y(x,y) = 2y = 0$$

denklemlerini sağlayan (0, 0) noktasındadır. Fakat silindirin üzerinde hem x hem de y'nin sıfır olduğu bir nokta yoktur. Bu ise denklemin çözümü bu şekilde olmadığını gösterir.



Şimdi x'i y ve z cinsinden $x^2 = z^2 + 1$ olarak ifade ederek çözümü araştıralım. Bu değişken dönüşümüyle, $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ fonksiyonu

$$k(x,y) = (z^2 + 1) + y^2 + z^2 = y^2 + 2z^2 + 1$$

haline gelir ve biz k'nin en küçük değerini aldığı noktaları ararız. k'nin yz-düzlemindeki tanım kümesi artık silindir üzerinde (x, y, z) noktalarının y ve z koordinatlarını seçeceğimiz tanım kümesiyle çakışmaktadır. Yani, düzlemde k'yi minimize eden noktalara silindir üzerinde karşılık gelen noktalar vardır. k'nin en küçük değeri

$$k_y(x,y) = 2y = 0 \text{ ve } k_z(x,y) = 4z = 0$$

veya y = z = 0 olan yerde bulunur. Bu

$$x^2 = z^2 + 1 = 1 \text{ ise } x = \pm 1$$

verir. Bu noktaya silindir üzerinde karşılık gelen noktalar (±1, 0, 0)'dır.

$$k(x,y) = y^2 + 2z^2 + 1 \geq 1$$

eşitsizliğinden (±1, 0, 0) noktalarının k'nin bir minimum değerini verdiğini görürüz. Ayrıca orijinden silindir üzerindeki bir noktaya minimum uzaklığın 1 birim olduğunu da görürüz.

2.8. Tanım: $f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$ olan (a, b) noktalarına f fonksiyonunun kritik noktaları denir.

Eğer f tanım kümesindeki her (x, y) için kısmi türevleri mevcut olan iki değişkenli bir fonksiyon ise, f 'nin yerel maksimum veya minimum değerleri kritik noktalarda ortaya çıkacaktır. Ancak yerel maksimum veya minimum değere yol açmayan kritik noktalar da olabilir.

2.9. Tanım: Eğer (a, b) , f 'nin bir kritik noktası fakat yerel maksimum veya yerel minimumu değilse, (a, b, f (a, b)) noktasına f 'nin bir eyer (semer) noktası denir. Yani fonksiyonun x ve y'ye göre kısmi türevleri sıfıra eşit ve ekstremum noktaları değilse, buna eyer noktası denir.

Örnek: $z=f(x,y)=x^2-y^2$ için (0, 0, 0) noktası bir eyer noktasıdır. Gerçekten, $f_x(0,0)=0$ ve $f_y(0,0)=0$ olup (0, 0) a yakın her (a, 0) için $f(a,0)=a^2>f(0,0)=0$ ve her (0, b) için $f(0,b)=-b^2<f(0,0)=0$ dır. Dolayısıyla, (0, 0) noktası ne yerel maksimum ne de yerel minimum değere yol açmayan bir kritik noktadır.

Bir fonksiyonun bir kritik noktasının yerel maksimum veya yerel minimum değer veya eyer noktasına yol açıp açmadığını aşağıdaki teoremde ifade edilen ikinci türev testi ile belirleyebiliriz.

2.7. Teorem (İkinci Türev Testi): (a, b) noktası, z = f (x, y) ile verilen f fonksiyonunun bir kritik noktası olsun. Ayrıca, (a, b) yi merkez kabul eden bir dairesel bölgenin her noktasında f'nin tüm ikinci mertebeden türevleri mevcut olsun.

$$A=f_{xx}(a,b),\quad B=f_{xy}(a,b),\quad C=f_{yy}(a,b)$$

denilsin. Bu takdirde,

a) $AC-B^2>0$ ve $A<0$ ise, $f(a,b)$ yerel maksimumdur,

b) $AC-B^2>0$ ve $A>0$ ise, $f(a,b)$ yerel minimumdur,

c) $AC-B^2<0$ ise, $(a,b,f(a,b))$ eyer noktasıdır,

d) $AC-B^2=0$ ise, bu test geçersizdir.

İspat: $z=f(x,y)$ fonksiyonu ikinci mertebeden kısmi türevleri mevcut olsun. Taylor açılımından

$$f(a+h,a+k)-f(a,b)=f_x(a,b)h+f_y(a,b)k+\frac{1}{2}\left[h^2f_{xx}(a,b)+2hkf_{xy}(a,b)+k^2f_{yy}(a,b)\right]+K_3$$

yazılabilir. $h\to 0$ ve $k\to 0$ için $K_3\to 0$ ve (, b) noktasında estremum mevcut olduğunda $f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$ olacağından

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

$$G = h^2 f_{xx}(a,b) + 2hk f_{xy}(a,b) + k^2 f_{yy}(a,b)$$

ifadesinin işaretine bağlıdır. $G > 0$ için $f(a+h, b+k) \geq f(a,b)$ olacağından (a, b) noktasında bir yerel minimum, $G < 0$ için $f(a+h, b+k) \leq f(a,b)$ olacağından (a, b) noktasında bir yerel maksimum bulunacaktır.

$$A = f_{xx}(a,b), \quad B = f_{xy}(a,b), \quad C = f_{yy}(a,b)$$

denilirse

$$G = Ah^2 + 2hkB + Ck^2$$

olur. Bu üç terimlinin işareti $AC - B^2$ ye bağlıdır.

1. $AC - B^2 > 0$ olsun. F'nin işareti A'nın işareti ile aynıdır. $A > 0$ ise $F > 0$ dır. Buna göre f 'nin (a, b) de bir yerel minimumu vardır. $A < 0$ ise $F < 0$ dır. Buna durumda f 'nin (a, b) de bir yerel maksimumu vardır. a ve b gerçekleşir.

2. $AC - B^2 < 0$ olsun. Bu durumda F bazı h değerleri için pozitif bazıları için negatif olacağından (a, b) noktasında yerel ekstremum yoktur. (a, b) noktası eyer noktasıdır.

3. $AC - B^2 = 0$ olsun. Bu durum ayrı bir inceleme gerektirir.

Örnek: $z = f(x,y) = 2 + x^2 + y^2$ fonksiyonunun kritik noktalarını araştıralım. Kritik noktaları bulmak için birinci mertebeden kısmi türevleri hesaplayıp sıfıra eşitleyelim.

$$f_x(x,y) = 2x = 0 \Rightarrow x = 0$$
$$f_y(x,y) = 2y = 0 \Rightarrow y = 0$$

Buradan görüyoruz ki (0,0) noktası f 'nin bir kritik noktasıdır. Şimdi ikinci türev testini uygulayalım.

$$f_{xx}(x,y) = 2 \Rightarrow A = f_{xx}(0,0) = 2$$
$$f_{xy}(x,y) = 0 \Rightarrow B = f_{xy}(0,0) = 0$$
$$f_{yy}(x,y) = 0 \Rightarrow C = f_{yy}(0,0) = 0$$

$AC - B^2 > 0$ ve $A > 0$ olduğundan $f(0,0) = 2$, f 'nin yerel minimum değeridir.

Örnek: $z = f(x,y) = -x^2 - y^2 + 6x + 8y - 21$ fonksiyonunun kritik noktalarını araştıralım.

$$f_x(x,y) = -2x + 6 = 0$$
$$f_y(x,y) = -2y + 8 = 0$$

denklemlerinin çözümünden (3,4) noktasının f 'nin bir kritik noktası olduğunu görürüz. İkinci türev testini uygulayalım.

$$f_{xx}(x,y) = -2 \Rightarrow A = f_{xx}(3,4) = -2$$
$$f_{xy}(x,y) = 0 \Rightarrow B = f_{xy}(3,4) = 0$$

$$f_{yy}(x,y)=-2 \Rightarrow C=f_{yy}(3,4)=-2$$

$AC-B^2>0$ ve $A<0$ olduğundan $f(3,4)=4$, f'nin yerel maksimum değeridir.

Örnek: $z=f(x,y)=x^3+y^3-x-y$ fonksiyonunun kritik noktalarını araştıralım. Birinci mertebeden kısmi türevleri sıfır yapan x, y değerlerini bulunuz.

$$f_x(x,y)=3x^2-1=0 \Rightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$f_y(x,y)=3y^2-1=0 \Rightarrow y=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Böylece, f'nin dört adet kritik noktası bulunur:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right),\ \left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right),\ \left(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right),\ \left(-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

İkinci türev testi için ikinci mertebeden kısmi türevleri hesaplayalım.

$$f_{xx}(x,y)=6x\,,\ f_{xy}(x,y)=0\,,\ f_{yy}(x,y)=6y$$

$\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ için noktası ikinci türev testini uygulayalım.

$$A=f_{xx}\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{6}{\sqrt{3}}\,,\ B=f_{xy}\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=0\,,\ C=f_{yy}\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{6}{\sqrt{3}}$$

$$AC-B^2=\left(\frac{6}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{6}{\sqrt{3}}\right)-0^2>0 \text{ ve } A=\frac{6}{\sqrt{3}}>0$$

Buradan, $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{3\sqrt{3}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}=-\frac{4}{3\sqrt{3}}$ değerinin f 'nin bir yerel minimum değeri olduğu görülür. Benzer şekilde, $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},0\right)$ ve $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},0\right)$ noktaları eyer noktaları olup $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{4}{3\sqrt{3}}$ değeri f'nin bir yerel maksimum değeridir.

Örnek: $z=f(x,y)=x^3+y^3-6xy$ fonksiyonunun kritik noktalarını araştıralım. Birinci mertebeden kısmi türevlerden

$$f_x(x,y)=3x^2-6y=0$$

$$f_y(x,y)=2y-6x=0$$

denklemlerini elde ederiz. Bu iki denklemi ortak çözmek için ikinci denklemden $y=3x$ elde edilip birinci denklemde y'nin bu değeri yerleştirilirse,

$$3x^2-6(3x)=0$$
$$3x(x-6)=0$$
$$x=0 \wedge x=6$$

bulunur. Dolayısıyla, kritik noktalar $(0,0)$ ve $(6,18)$ noktalarıdır. İkinci türev testi için ikinci mertebeden kısmi türevleri hesaplayalım.

$$f_{xx}(x,y)=6x\,,\ f_{xy}(x,y)=-6\,,\ f_{yy}(x,y)=2$$

(0, 0) noktası için:

$$A=f_{xx}(0,0)=0\,,\ B=f_{xy}(0,0)=-6\,,\ C=f_{yy}(0,0)=2$$

$AC-B^2=(0).(2)-6^2=-36<0 \Rightarrow (0,0,0)$ eyer noktasıdır.

(6, 18) noktası için:

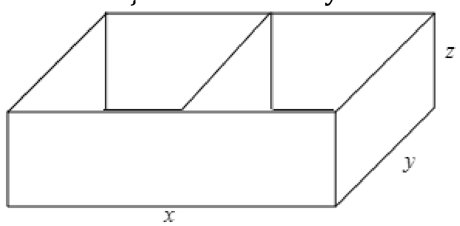
$$A=f_{xx}(6,18)=36\,,\ B=f_{xy}(6,18)=-6\,,\ C=f_{yy}(6,18)=2$$

$$AC-B^2=(36).(2)-6^2=36>0\ ,A=36>0$$

$$f(6,18)=6^3+18^3-6.6.18=-108$$

yerel minimumdur.

Örnek: İki bölmeli, üstü açık, dikdörtgenler prizması şeklinde, 48 cm³ hacimli bir küçük karton kutu yapılmak isteniyor. Bu iş için kullanılacak karton levhanın alanının minimum olması için kutunun boyutları ne olmalıdır?



Kullanılacak levhanın alanının minimum olması isteniyor. Kutunun boyutlarını, şekilde görüldüğü gibi, x, y ve z ile gösterelim. Bu takdirde, kutu için kullanılacak levhanın alanı

$$A=xy+3yz+2xz$$

olur. Diğer yandan, kutunun hacmi 48 cm³ olduğundan $48=xyz$ ve buradan $z=\dfrac{48}{xy}$ olduğu görülür. Böylece, A alanı iki değişkene bağlı olarak ifade edilebilir:

$$A=xy+\frac{144}{x}+\frac{96}{y}$$

Problemin yapısı gereği $x>0$ ve $y>0$ olmalıdır. Şimdi problemimiz $A=A(x,y)$ nin minimum değerini belirlemektir. A'nın birinci mertebeden kısmi türevlerini hesaplayalım.

$$A_x=y-\frac{144}{x^2}\,,\ A_y=x-\frac{96}{y^2}$$

Bu türevler $x>0$ ve $y>0$ olan her (x, y) için tanımlıdır. A'nın minimum değeri kritik noktalar arasında ortaya çıkacaktır.

$$A_x = y - \frac{144}{x^2} = 0,\; A_y = x - \frac{96}{y^2} = 0$$

$$y = \frac{144}{x^2},\; x = \frac{96}{y^2}$$

$$x = 6,\quad y = 4$$

Yukarıdaki hesaplamalar, bir tek kritik nokta bulunduğunu gösteriyor: (6, 4). Problemin yapısından bu noktanın yerel minimum değere yol açacağı görülmekle beraber ikinci türev testi uygulanınca

$$A_{xx} = \frac{288}{x^3},\; A_{xy} = 1,\; A_{yy} = \frac{192}{y^3}$$

$$A = A_{xx}(6,4) = \frac{288}{6^3} = \frac{4}{3},\; B = A_{xy}(6,4) = 1,\; C = A_{yy}(6,4) = \frac{192}{4^3} = 3$$

bulunur. Böylece, $A = 6.4 + \frac{144}{6} + \frac{96}{4} = 72$ değeri A'nın (yerel) minimum değeridir. O halde, kullanılacak levha miktarının minimum olduğu 48 cm^2 hacimli kutunun boyutları $x = 6, y = 4, z = 2\,cm$ ve kullanılacak levhanın alanı da 72 cm^2 olmalıdır.

Örnek: Bir yılda x bin tane A türü ve y bin tane B türü ürün üreten bir firmanın yıllık gideri, $C(x,y) = 6x^2 - 4xy + 2y^2 - 15x + 30$ milyon ₺ ve yıllık geliri, $R(x,y) = 5xy + 4y$ milyon ₺ olmaktadır. Bu firmanın yıllık kârının maksimum olması için yılda kaç bin adet A türü ve kaç bin adet B türü ürün üretmesi gerekir? Maksimum kâr ne olur?

Çözüm: Kâr fonksiyonu,

$$\begin{aligned} P(x,y) &= R(x,y) - C(x,y) \\ &= (5x + 4y) - (6x^2 - 4xy + 2y^2 - 15x + 30) \\ &= -6x^2 + 4xy - 2y^2 + 20x + 4y - 30) \end{aligned}$$

olup

$$P_x(x,y) = -12x + 4y + 20 = 0$$
$$P_y(x,y) = 4x - 4y + 4 = 0$$

denklem sisteminin çözümünden

$$\left.\begin{aligned} -12x + 4y + 20 &= 0 \\ 4x - 4y + 4 &= 0 \end{aligned}\right\} x = 3,\; y = 4$$

(3,4) kritik noktası elde edilir. İkinci türev testi,

$$P_{xx}(x,y) = -12 = A,\; P_{xy}(x,y) = 4 = B,\; P_{yy}(x,y) = -4 = C$$

$$AC - B^2 = (-12)(-4) - 4^2 = 32 > 0 \text{ ve } A = -12 < 0$$

P'nin maksimum değeri olduğunu gösterir. Dolayısıyla, yılda 3 bin adet A ve 4 bin adet B türü ürün üretilirse, maksimum kâr elde edilir. Maksimum kâr 8 milyon ₺ dir.

Örnek: Pozitif reel sayılardan oluşan (x,y,z) sayı üçlüsündeki sayıların toplamı $x+y+z=30$ dur. Bu sayı üçlülerinden hangisi için xyz çarpımı maksimum olur?

Çözüm: $x+y+z=30$ şartından $z=30-x-y$ elde edilir. Problemimiz, $x>0$ ve $y>0$ olmak üzere,

$$f(x,y)=xy(30-x-y)=30xy-x^2y-xy^2$$

dir. Bu fonksiyonunun minimum değerini bulmalıyız. Birinci mertebeden kısmi türevler

$$f_x(x,y)=30y-2xy-y^2=0$$

$$f_y(x,y)=30x-x^2-2xy=0$$

denklem sistemini verir. Burada ikinci denklem birinci denklemden çıkarılırsa,

$$f_x(x,y)-f_y(x,y)=(30y-2x-y^2)-(30x-x^2-2xy)=0$$

$$30(y-x)-y^2+x^2=0$$

$$(y-x)-(30-y-x)=0$$

olur. Buradan da $y=x$ olması gerektiği görülür. Çünkü $x+y=30$ alınırsa $z=0$ olur ki bu $z>0$ olmasıyla çelişir. Birinci denklemde $y=x$ alalım ve denklemi ve çözelim. $x>0$ şartından

$$30x-2x^2-x^2=3x(10-x)=0$$

$$x=10$$

O halde, $(10,10)$ noktası f'nin kritik noktasıdır. İkinci türev testini uygulayalım.

$$f_{xx}(x,y)=-2y\,,\ f_{xy}(x,y)=30-2x-2y\,,\ f_{yy}(x,y)=-2x\,,$$

$$A=f_{xx}(10,10)=-20\,,\ B=f_{xy}(10,10)=30-20-20=-10\,,\ C=f_{xx}(10,10)=-20\,,$$

$$AC-B^2=(-20).(-20)-(-10)^2=300>0\ ,\ A=-20<0$$

Sonuç olarak, $f(10,10)=1000$ değeri f 'nin (yerel) maksimum değeridir; $x+y+z=30$ olup xyz çarpımının minimum olduğu x, y, z değerleri $x=y=z=10$ dur.

LAGRENGE ÇARPANLARI YÖNTEMİ

2.10. Tanım: g fonksiyonu f fonksiyonunun şartları altında tanımlanmış bir fonksiyon olsun. $z=f(x,y)$ fonksiyonun $g(x,y)=0$ kısıtlaması altında maksimum (veya minimum) değerinin incelenmesine kısıtlamalı maksimizasyonu (veya minimizasyon) denir. $g(x,y)=0$ şartına problem kısıtı denir.

2.11. Tanım: $z=f(x,y)$ fonksiyonun $g(x,y)=0$ kısıtlaması altında maksimum (veya minimum) değeri

$$F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda g(x,y)$$

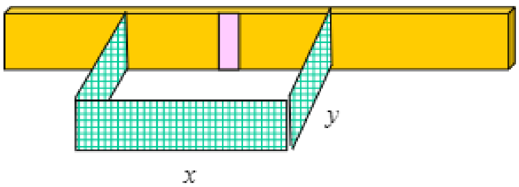
olarak tanımlanır. Bu tanımlamada F fonksiyonuna Lagrange Fonksiyonu ve λ değerine Lagrange Çarpanı denir.

Bu tanıma göre $g(x,y)=0$ kısıtlaması altında $z=f(x,y)$ fonksiyonunun herhangi bir yerel maksimum veya minimum değeri $f(a,b)$ ise, (a,b,λ) noktası olmak üzere;

$$\begin{cases} F_x(x,y,\lambda)=0 \\ F_y(x,y,\lambda)=0 \\ F_z(x,y,\lambda)=0 \end{cases}$$

sisteminin bir çözümü olduğu aşikardır.

Örnek:



Şekilde görüldüğü gibi, uzun bir duvarın önünde bir tarafı duvar ve diğer üç tarafı tel örgü ile çevrili dikdörtgen biçiminde bir alan oluşturulmak isteniyor. Bu iş için en çok 240 m tel örgü kullanılabilecektir. Oluşturulacak alanın maksimum olması için dikdörtgenin boyutları ne olmalıdır? Maksimum alan ne olur?

Çözüm: Problemin çözümü için dikdörtgenin boyutlarını x ve y ile gösterelim. Oluşturulan alan $A=f(x,y)=xy$; kullanılacak tel örgünün uzunluğu $x+2y=240$ m olur. Bu, x ve y üzerinde bir kısıtlamadır.

Şimdi $f(x,y)=xy$ nin $g(x,y)=x+2y-240=0$ kısıtlaması altında maksimum değerini bulalım. Buna göre Lagrenge fonksiyonu

$$F(x,y,\lambda)=xy+\lambda(x+2y-240)$$

dir. Lagrange teoremini uygulayalım.

$$\begin{cases} F_x(x,y,\lambda)=y+\lambda=0 \\ F_y(x,y,\lambda)=x+2\lambda=0 \\ F_z(x,y,\lambda)=x+2y-240=0 \end{cases}$$

$$x=120 \text{ ve } y=60$$

Demek ki maksimum alan için dikdörtgenin boyu 120 m, eni 60 m olmalıdır. Maksimum alan, 7 200 m^2 dir.

Örnek: $f(x,y)=x^2+y^2$ nin $x+y=10$ kısıtlaması altında minimum değerini bulunuz.

Çözüm: Burada problem kısıtını $g(x,y)=x+y-10$ biçiminde ifade ederek Lagrange fonksiyonunun

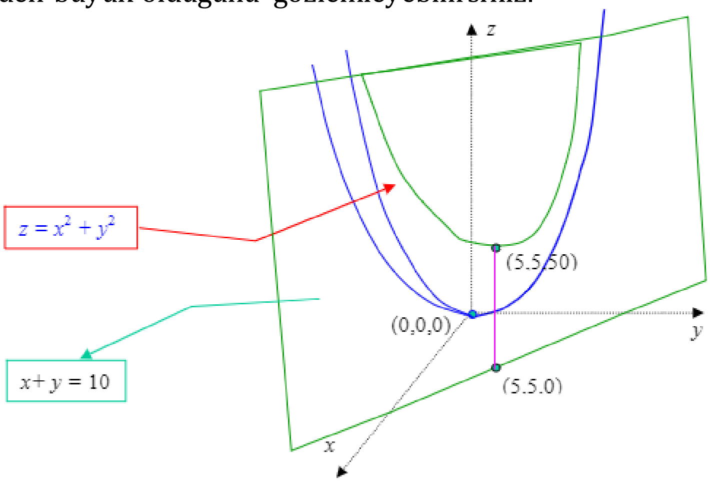
$$F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda g(x,y)$$
$$=(x^2+y^2)+\lambda(x+y-10)$$

olduğunu görürüz. Lagrange teoremini uygulayalım.

$$\begin{cases} F_x(x,y,\lambda)=2x+\lambda=0 \\ F_y(x,y,\lambda)=2y+\lambda=0 \\ F_z(x,y,\lambda)=x+y-10=0 \end{cases}$$

$$x=y=5$$

olur. Böylece, f fonksiyonunun $x+y=10$ kısıtlaması altında minimum değeri $f(5,5)=50$ dir. Burada, f fonksiyonunun $x+y=10$ olan her (x, y) noktasındaki değerinin 50 den büyük olduğunu gözlemleyebilirsiniz.



Örnek: $f(x,y)=25-x^2-y^2$ nin $x+y=4$ kısıtlaması altında maksimum değerini bulunuz.

Çözüm: Burada problem kısıtını $g(x,y)=x+y-4$ biçiminde ifade ederek Lagrange fonksiyonunun

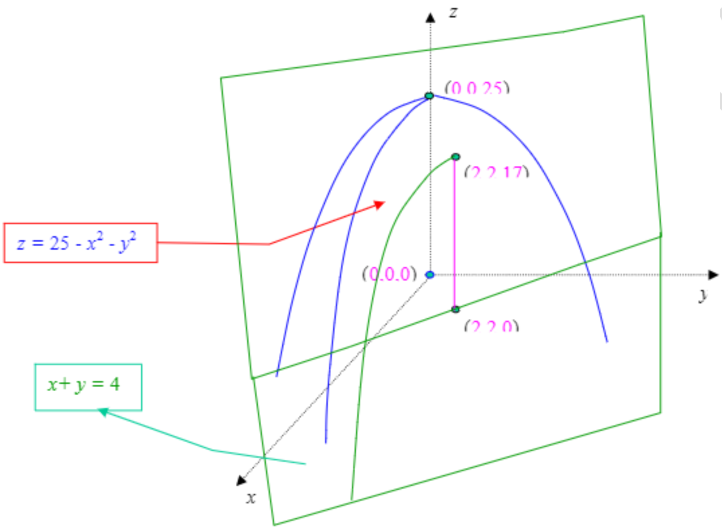
$$F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda g(x,y)$$
$$=(25-x^2-y^2)+\lambda(x+y-4)$$

olduğunu görürüz. Lagrange teoremini uygulayalım.

$$\begin{cases} F_x(x,y,\lambda) = -2x + \lambda = 0 \\ F_y(x,y,\lambda) = -2y + \lambda = 0 \\ F_z(x,y,\lambda) = x + y - 4 = 0 \end{cases}$$

$$x = y = 2$$

olur. Böylece, f fonksiyonunun $x+y=4$ kısıtlaması altında maksimum değeri $f(2,2)=17$ dir. Burada, f fonksiyonunun $x+y=4$ olan her (x, y) noktasındaki değerinin 17 den küçük olduğunu gözlemleyebilirsiniz.



Lagrange çarpanları yönteminin uygulanabileceği problemlere bir örnek te ekonomiden veriyoruz.

Örnek (Cobb – Douglass Fonksiyonu): Bir firmanın üretmeye karar verdiği yeni bir ürün için x birimlik iş gücü ve y birimlik ham madde ve teçhizat yatırımı yapılması durumunda o üründen üretebileceği ürün sayısı

$$N(x,y) = 20x^{0,55}y^{0,45}$$

olarak belirleniyor. Bir birimlik iş gücü, 45 ▯; bir birimlik hammadde ve teçhizat, 90 ▯ olarak düşünüldüğüne ve bu iş için 4 500 ▯ ayrıldığına göre, üretilen ürün sayısının maksimum olması için bu meblağın ne kadarı iş gücü için, ne kadarı ham madde ve teçhizat için tahsis edilmelidir?

Çözüm: Bu problemin matematiksel modeli, iş gücü için x birimlik, ham madde ve teçhizat için y birimlik yatırım yapıldığı varsayılarak, " $N(x,y)=20x^{0,55}y^{0,45}$ fonksiyonunu $45x+90y=45\,000$ kısıtlaması altında maksimize ediniz." biçiminde ifade edilebilir. Böylece,

$$N(x,y) = 20x^{0,55}y^{0,45}, \quad g(x,y) = 45x + 90y - 45\,000$$

olur. Lagrange çarpanları yönteminde

$$F(x,y,\lambda)=N(x,y)+\lambda g(x,y)$$
$$=(20x^{0,55}y^{0,45})+\lambda(45x+90y-45\,000)$$
$$F_x(x,y,\lambda)=11x^{-0,45}y^{0,45}+45\lambda=0$$
$$F_y(x,y,\lambda)=9x^{-0,55}y^{0,55}+90\lambda=0$$
$$F_\lambda(x,y,\lambda)=45x+90y-45\,000=0$$

olur. İlk iki denklemden λ yok edilirse,

$$22x^{0,45}y^{0,45}-9x^{0,55}y^{0,55}=0$$
$$x=\frac{22}{9}y$$

elde edilir. Üçüncü denklem kullanılarak,

$$45.\frac{22}{9}y+90y-45\,000=0$$
$$110y+90y-45\,000=0$$
$$y=2\,250$$

ve

$$x=\frac{22}{9}y=\frac{22}{9}2\,250=5\,500$$

dir. Eğer 5 500 birimlik iş gücü, 2 250 birimlik ham madde ve teçhizat yatırımı yapılırsa, maksimum sayıda ürün üretilir ki, bu maksimum sayı,

$$N(5\,500,2250)=20(5\,500)^{0,55}(2\,250)^{0,45}\approx 146$$

dir.

BÖLGE DÖNÜŞÜMLERİ ve JAKOBİYENLER

Carl Gustav Jacob Jacobi
(10 Aralık 1804, Potsdam, Almanya - 18 Şubat 1851, Berlin, Almanya)

Bu kısımda çok katlı integrallerde kullanılacak bölge dönüşümleri ve Jakobiyenlerden bahsedilecektir.

Öğr. Gör. Şab

xy-düzlemindeki bir D bölgesinden, uv-düzlemindeki bir başka R bölgesine,

$$u = f(x, y), v = g(x, y) \qquad (1)$$

denklemleriyle bire-bir olarak dönüştürüldüğünü varsayalım. Yani,

$$T : D \to R$$

$$(x,y) \to (u,v) = (f(x,y), g(x,y))$$

dönüşümü bir bölge dönümüdür. f_x, f_y, g_x, g_y kısmi türevleri D bölgesinde sürekli ve bu bölgedeki her (x, y) için

$$J = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0$$

ise (1) denklemleri x ve y'ye göre çözülebilir. Bu çözüm;

$$x = F(u, v), y = G(u, v) \qquad (2)$$

ile gösterilirse,

$$T^{-1} : R \to D$$

$$(u,v) \to (x,y) = (F(u,v), G(u,v))$$

ters dönüşümü elde edilir. Böylece (1) ve (2) denklem sistemleri yardımıyla D ve R bölgelerinin noktaları arasında birebir bir eşleme kurulmuş olur.

Bu işlemler üç ve daha fazla değişkenli fonksiyonlar içinde geçerlidir.

2.12. Tanım: n-boyutlu $x_1x_2...x_n$-düzlemindeki bir D bölgesinden, n boyutlu $u_1u_2...u_n$-düzlemindeki bir başka R bölgesine,

$$u_1 = f_1(x_1, x_2, ..., x_n), u_2 = f_2(x_1, x_2, ..., x_n), ..., u_n = f_n(x_1, x_2, ..., x_n) \qquad (3)$$

denklemleriyle bire-bir olarak dönüştürüldüğünü varsayalım. Her i ve k için $\frac{\partial u_1}{\partial u_k}$ türevleri mevcut olmak üzere,

$$J = \frac{\partial(u_1, u_2, ..., u_n)}{\partial(x_1, x_2, ..., x_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & ... & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & ... & \frac{\partial u_2}{\partial x_n} \\ ... & ... & \ddots & ... \\ \frac{\partial u_n}{\partial x_1} & \frac{\partial u_n}{\partial x_2} & ... & \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

determinantına (3) dönüşümünün Fonksiyonel Determinantı veya Jakobiyani denir.

Eğer (3) dönüşümünün,

$$x_1 = F_1(u_1, u_2, ..., u_n), x_2 = F_2(u_1, u_2, ..., u_n), ..., x_n = F_n(u_1, u_2, ..., u_n) \qquad (4)$$

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

biçiminde bir ters dönüşümü varsa, bu iki dönüşümün Jakobiyenleri arasında,

$$\frac{\partial(x_1,x_2,...,x_n)}{\partial(u_1,u_2,...,u_n)}\cdot\frac{\partial(u_1,u_2,...,u_n)}{\partial(x_1,x_2,...,x_n)}=1$$

denklemi vardır.

Örnek: $u=x\cos y,\ v=x\sin y$ sisteminin ve tersinin Jakobiyenlerini bulunuz.

Çözüm:

$$J=\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}u_x & u_y\\ v_x & v_y\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos y & -x\sin y\\ \sin y & x\cos y\end{vmatrix}=x(\cos^2 y+\sin^2 y)=x$$

olur. Şimdi verilen dönüşümün tersini bulalım.

$$u^2=x^2\cos^2 y,\ v^2=x^2\sin^2 y$$

olduğundan

$$u^2+v^2=x^2\cos^2 y+x^2\sin^2 y=x^2(\cos^2 y+\sin^2 y)=x^2$$

$$x=\sqrt{u^2+v^2},\ y=\arctan\frac{u}{v}$$

bulunur. Buna göre,

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}x_u & x_v\\ y_u & y_v\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\dfrac{u}{\sqrt{u^2+v^2}} & \dfrac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}\\ \dfrac{-v}{u^2+v^2} & \dfrac{u}{u^2+v^2}\end{vmatrix}=\frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}=\frac{1}{x}$$

elde edilir.

2.8. Teorem: $u=f(x,y)$ ve $v=g(x,y)$ fonksiyonları verildiğinde bu iki bağıntı arasında u ve v yok edilip x ile y arasında bir bağıntı elde edilmesi için

$$J=\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}u_x & u_y\\ v_x & v_y\end{vmatrix}=0$$

olmalıdır. Bu yazıma u ve v arasında fonksiyonel bağımlıdır adı verilir.

İspat: f ve g, bir D bölgesinde sürekli türevlere sahip iki fonksiyon olsun. $(a,b)\in D$ noktasının bir δ komşuluğunda

$$u=f(x,y)\ \text{ve}\ v=g(x,y)$$

dönüşümünün

$$J=\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}f_x & f_y\\ g_x & g_y\end{vmatrix}=f_xg_y-f_yg_x=0$$

olması aşağıdaki durumlardan birinin gerçekleşmesiyle mümkündür.

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

i) Komşuluğun her noktasında f_x, f_y, g_x, g_y kısmi türevleri sıfır olsun. Bu takdirde f ve g fonksiyonları birer sabit fonksiyonlardır. Tüm sabitler arasında bir bağıntı olduğundan f ile g bağımlıdır.

ii) $f_x = 0, f_y = 0$ ile g_x ve g_y den en az biri sıfırdan farklı olsun. Bu takdirde $f(x,y)$ sabit olur. Buna göre her fonksiyonla bağımlıdır.

iii) $f_x g_y - f_y g_x = 0$ ile f_x ve f_y türevlerinden en az biri sıfırdan farklı olsun. Mesela $f_y(a,b) \neq 0$ olsun. Bu durumda (a, b) nin öyle bir komşuluğu vardır ki bu komşulukta $u = f(x,y)$ denkleminden, y çekilip u ve x'in bir fonksiyonu olarak yazılabilir. Bu çözüm

$$y = h(x,u)$$

olsun. Bu değer $v = g(x,y)$ ifadesinde yerine yazılırsa

$$v = g(x, h(x,u)) = G(x,u)$$

bulunur. v'nin x değişkenine göre türevi alınırsa

$$\frac{\partial v}{\partial x} = g_x 1 + g_y y_x$$

$$y_x = -\frac{f_x}{f_y}$$

olacağından

$$\frac{\partial v}{\partial x} = g_x + g_y\left(-\frac{f_x}{f_y}\right) = -\frac{f_x g_y - f_y g_x}{f_y} = 0$$

bulunur. Şu halde v fonksiyonu x'e bağlı değildir. O halde u ile v arasında $v = g(u)$ şeklinde bir bağıntı vardır. //

Bu teorem sadece iki değişkenli fonksiyonlar için geçerli olmayıp üç veya daha fazla değişkenli fonksiyonlar içinde geçerlidir.

Örnek: $u = \ln x - \ln y$, $v = \dfrac{x^2 + y^2}{xy}$ fonksiyonları arasında bir fonksiyonel bağıntı olduğunu gösterip, bağıntıyı bulunuz.

Çözüm:

$$J = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{x} & -\dfrac{1}{y^2} \\ \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 y} & \dfrac{y^2 - x^2}{xy^2} \end{vmatrix} = \frac{x^2 - y^2}{xy} \begin{vmatrix} \dfrac{1}{x} & -\dfrac{1}{y^2} \\ \dfrac{1}{x} & -\dfrac{1}{y} \end{vmatrix} = 0$$

olacağından u ve v bağımlıdır. Buna göre

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

$$u=\ln x-\ln y=\ln\frac{x}{y}$$

$$\frac{x}{y}=e^u$$

olur. Buradan x çekilip $v=\dfrac{x^2+y^2}{xy}$ de yerine yazılırsa,

$$v=\frac{y^2e^{2u}+y^2}{y^2e^u}=\frac{e^{2u}+1}{e^u}=e^u+e^{-u}=2\frac{e^u+e^{-u}}{2}=2\cosh u$$

bağıntısı bulunur.

Örnek: $u=\arctan x-\arctan y$, $v=\dfrac{x-y}{1+xy}$ fonksiyonları arasında bir fonksiyonel bağıntı olduğunu gösterip, bağıntıyı bulunuz.

Çözüm:

$$J=\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}\dfrac{1}{1+x^2} & \dfrac{1}{1+y^2}\\ \dfrac{1+y^2}{(1+xy)^2} & \dfrac{1+x^2}{(1+xy)^2}\end{vmatrix}=0$$

olacağından u ve v bağımlıdır. Buna göre

$$u=\arctan x-\arctan y=\arctan\frac{x-y}{1+xy}=\arctan v$$

olduğundan u ile v arasında $v=\tan u$ bağıntısı vardır.

Örnek: $u=x+y+z$, $v=xy+xz$, $w=x^2+y^2+z^2+2yz$ fonksiyonları arasında bir fonksiyonel bağıntı olduğunu gösterip, bağıntıyı bulunuz.

Çözüm:

$$J=\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ y+z & x & x\\ 2x & 2y+2z & 2z+2y\end{vmatrix}=0$$

olacağından u, v ve w bağımlıdır. Buna göre

$$\begin{aligned}u^2&=(x+y+z)^2\\&=x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2xz\\&=(x^2+y^2+z^2+2yz)+2(xy+xz)\\&=w+2v\end{aligned}$$

bağıntısı bulunur.

Öğr. Gör. Şaban YILMAZ

ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıda verilen soru işaretlerinin yerine gelmesi gereken değerleri veya ifadeleri yazınız.

a) $A(x,y)=\dfrac{10x}{y}$ ise $A(24,8)$

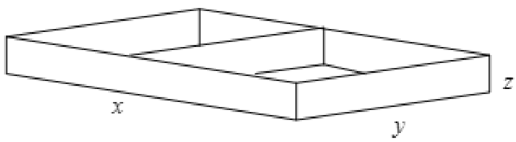
b) $B(x,y,z)=x+yz$ ise $A(10,3,0.5)$

c) $V(h,r)=\pi r^2 h$ ise $V(5,0.25)$

d) $R(p,r,t)=pe^{rt}$ ise $R(100,0.08,10)$

2. $f(x,y)=2xy^2$ ise $\dfrac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$ ve $\dfrac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}$ değerlerini bulunuz.

3. Ambalaj işi yapan bir şirkette şekilde gösterilen biçimde iki bölmeli, üstü açık bir kutu üretilmek istenmektedir. Kutunun boyutları, x, y ve z ile gösterilirse, bu kutunun yapılması için gereken malzemenin toplam alanını x, y ve z'nin fonksiyonu olarak M(x, y, z) biçiminde ifade ediniz ve bu fonksiyon için M(10, 15, 8) değerini bulunuz.



4. Bir şirket, 10-vitesli ve 3-vitesli bisikletler üretmektedir. Bir 10-vitesli bisikletin satış fiyatı p birim para, bir 3-vitesli bisikletin satış fiyatı q birim para; 10-vitesli bisikletler için haftalık talep x adet, 3-vitesli bisikletler için haftalık talep y adettir. Ayrıca haftalık gider C(x, y) olmak üzere fiyat, talep ve gider fonksiyonları

$p=230-9x+y$, $q=130+x-4y$, $C(x,y)=200+80x+30y$

olarak veriliyor. Haftalık gelir fonksiyonu R(x, y), haftalık kâr fonksiyonu P(x, y) olduğuna göre;

a) R(10, 15) ve P(10, 15) yi bulunuz.

b) $P_x(10,15)$ ve $P_y(10,15)$ yi bulunuz ve bu değerleri yorumlayınız.

5. $z=2x^2+y^2$ nin grafiğinin

a) $x=0, x=1, x=2$ düzlemlerinden her biri ile kesişimini belirleyiniz ve grafikle gösteriniz,

b) $y=0, y=1, y=2$ düzlemlerinden her biri ile kesişimini belirleyiniz ve grafikle gösteriniz,

c) $z=0, z=1, z=2$ düzlemlerinden her biri ile kesişimini belirleyiniz ve grafikle gösteriniz.

Bu grafiği çiziniz.

6. verilen iki değişkenli fonksiyonların grafiğini çiziniz.

a) $z=2x^2+3y^2$ b) $z=1+2x^2+3y^2$ c) $z=1-2x^2-3y^2$

7. Aşağıda verilen fonksiyonlardan her biri için

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial^2 x}, \frac{\partial^2 z}{\partial xy}, \frac{\partial^2 z}{\partial^2 y}, f_x(3,2), f_y(3,2)$$

yi bulunuz.

a) $f(x,y)=3x^2y-4xy^2+1$
b) $f(x,y)=\tan xy$
c) $f(x,y)=e^{2x+3y}$
d) $f(x,y)=\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}$
e) $f(x,y)=\ln(x^2+y^2)$

8. $P(x,y)=-x^2+2xy-2y^2+12y+6$ fonksiyonu için $P_x(x,y)=0$ ve $P_y(x,y)=0$ denklemlerini sağlayan x ve y'yi bulunuz.

9. Bir firmanın verimliliği, x birim iş gücü ve y birim sermaye kullanılması durumunda yaklaşık olarak, $f(x,y)=10x^{0,65}y^{0,35}$ denklemi ile ifade edilmektedir.

a) Firma şu anda 300 birimlik iş gücü ve 250 birimlik sermaye kullandığına göre marjinal iş gücü verimliliğini ve marjinal sermaye verimliliğini bulunuz.

b) 300 birimlik iş gücü ve 250 birimlik sermaye kullanılırken iş gücü artırılarak mı yoksa sermaye artırılarak mı verimlilikte daha çok artış sağlanacağını belirleyiniz.

10. Bir firma her hafta gazete reklamları için x □, televizyon reklamları için y □ harcamaktadır. Firmanın haftalık satış miktarı $S(x,y)=10x^{0,5}y^{0,4}$ denklemi ile verilmektedir. $S_x(500,300)$ ve $S_y(500,300)$ değerlerini bulunuz ve yorumlayınız.

11. İlgili teoremi kullanarak, verilen fonksiyonun yerel ekstremumlarını bulunuz.

Şaban YILMAZ

a) $f(x,y)=6-x^2-4x-y^2$

b) $f(x,y)=x^2+y^2+2x-6y+14$

c) $f(x,y)=xy+2x-3y-2$

d) $f(x,y)=e^{xy}$

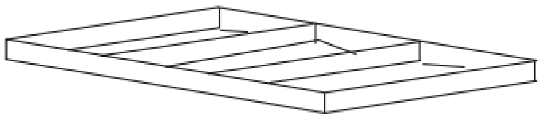
e) $f(x,y)=x^3+y^3-3xy$

f) $f(x,y)=2y^3-x^3-6xy$

g) $f(x,y)=2x^4+y^2-12xy$

h) $f(x,y)=x^3-3xy^2+6y^2$

12. Ambalaj işi yapan bir şirket, karton levhadan, aşağıdaki şekilde gösterilen yapıda, 3 bölmeli, 64 cm^3 hacimli kutular üretmek istemektedir. Bu biçimde bir kutunun üretiminde kullanılan malzeme miktarının minimum olması için kutunun boyutları ne olmalıdır?

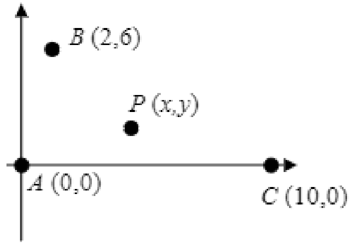


13. A ve B türü olmak üzere iki tür hesap makinesi üreten bir firmanın yılda x bin tane A ve y bin tane B türü hesap makinesi üretmesi durumunda yıllık gideri

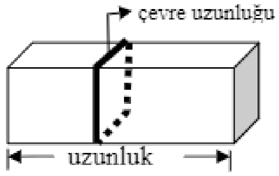
$$C(x,y)=x^2-2xy+2y^2+6x-9y+5$$

ve geliri de $R(x,y)=2x+3y$ birim para olmaktadır. Bu firmanın yıllık kârının maksimum olması için her tür hesap makinesinden kaç adet üretmesi gerekir? Maksimum kâr ne olur?

14. Düz bir platoda bulunan A, B ve C kentlerine hizmet vermek üzere bir baz istasyonu kurulacaktır. Platoda yerleştirilen bir Kartezyen koordinat sistemine göre kentlerin konumu aşağıdaki şekilde gösterilmiştir. Baz istasyonunun P(x, y) noktasına yerleştirileceği varsayılırsa, P 'den A, B ve C kentlerine olan uzaklıkların kareleri toplamının minimum olması için x ve y ne olmalıdır? Bu durumda, baz istasyonunun her üç kente olan uzaklığını bulunuz.



15. Posta idaresi, postaya verilecek kutuların şekilde görüldüğü gibi uzunluğu ile çevre uzunluğunun toplamı 300 cm'yi geçmeyecek biçimde olmasını istemektedir.



a) Hacmi maksimum olan kutunun boyutlarını bulunuz.
b) Lagrange Çarpanları Yöntemi ile çözünüz.

16. Bir kırtasiye mağazasında A ve B türü olarak adlandırılan iki tür kalem satılacaktır. Mağaza, A türü kalemlerden her birini 6 ⍰ ye, B türü kalemlerden her birini 8 ⍰ ye mal etmektedir. Yapılan araştırmalar, bir A türü kalemin satış fiyatı x ⍰ ve bir B türü kalemin satış fiyatı y ⍰ olarak belirlendiği takdirde, A türü kalemlerden haftada $s = 116 - 30x + 20y$, B türü kalemlerden de haftada $t = 144 + 16x - 24y$ adet satılabileceğini göstermiştir.

a) $x = 10$ ve $y = 12$ olması durumunda haftalık satışı belirleyiniz.

b) $x = 11$ ve $y = 11$ olması durumunda haftalık satışı belirleyiniz.

c) Haftalık kârın maksimum olması için A ve B türü kalemlerin satış fiyatı ne olmalıdır? Maksimum kâr ne olur?

17. Lagrange Çarpanları yöntemi ile çözünüz.

a) $f(x,y) = 2xy$ fonksiyonunun $x + y = 6$ kısıtlaması altında maksimum değerini bulunuz.

b) $f(x,y) = x^2 + y^2$ fonksiyonunun $3x + 4y = 25$ kısıtlaması altında minimum değerini bulunuz.

c) $f(x,y) = 2xy$ fonksiyonunun $x^2 + y^2 = 18$ kısıtlaması altında maksimum değerini bulunuz.

d) Toplamları 10 olan reel sayı ikilileri arasında çarpımı maksimum olan ikiliyi bulunuz.

e) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ fonksiyonunun $2x - y + 3z + 28 = 0$ kısıtlaması altında maksimum değerini bulunuz.

f) $f(x,y,z) = x + y + z$ fonksiyonunun $x^2 + y^2 + z^2 = 12$ kısıtlaması altında maksimum değerini bulunuz.

18. İki model televizyon üreten bir firma, A model televizyonlardan haftada x adet, B model televizyonlardan haftada y adet üretmesi durumunda haftalık toplam gideri $C(x,y)=6x^2+12y^2$ birim para olmaktadır. Eğer firmanın haftada her iki türden ürettiği televizyonların toplam sayının 90 olması isteniyorsa, giderin minimum olması için haftalık üretim programı ne olmalıdır? Minimum gider nedir?

19. (Cobb – Douglass Fonksiyonu) Bir firmanın üretmeye karar verdiği yeni bir ürün için x birimlik iş gücü ve y birimlik ham madde ve teçhizat yatırımı yapılması durumunda o üründen üretebileceği ürün sayısı

$$N(x,y)=20x^{0,4}y^{0,6}$$

olarak belirleniyor. Bir birimlik iş gücü, 50 ⍰; bir birimlik hammadde ve teçhizat, 75 ⍰ olarak düşünüldüğüne ve bu iş için 500 000 ⍰ ayrıldığına göre, üretilen ürün sayının maksimum olması için bu meblağın ne kadarı iş gücü için, ne kadarı ham madde ve teçhizat için tahsis edilmelidir?

KAYNAKÇA

- Prof. Dr. Mustafa BALCI, Matematik Analiz II, Bilim kitap kırtasiye A.Ş., Ankara, 1997.
- Prof. Dr. Mustafa BAYRAKTAR, Analiz, Korza yayıncılık a.ş., Ankara, 2017.
- Murray R. SPIEGEL, Çeviri: Prof. Dr. H. Hilmi HACISALİHOĞLU, Nobel Yayın Dağıtım, 1997.
- Prof. Dr. Vakıf CAFEROV, Matematik, Açıköğretim Fakültesi Yayınları, Eskişehir, 2009.
- George B. Thomas, Çeviri Recep Korkmaz, Thomas Calculus II, Beta, İstanbul, 2009.
- Murray R. Spiegel, İleri Matematik, Çev. Prof. Dr. H. Hilmi HACISALİHOĞLU, Schaum Yayınları, Nobel Yayın Dağıtım, 1997, Ankara.

Öğr. Gör. Şaban