3. BÖLÜM
İKİ KATLI İNTEGRALLER

İKİ KATLI İNTEGRAL KAVRAMI

3.1. Tanım: İki değişkenli bir fonksiyonda tanım kümesi bir yüzey veya yüzeyin alt kümeleridir. Bu yüzeyi

$$D=\{(x,y): a\le x\le b, c\le y\le d\}$$

veya

$$D=\{(x,y): a\le x\le b, c(x)\le y\le d(x)\}$$

ile gösterirsek iki değişkenli fonksiyonun hem x'e hem'de y'ye göre integrallerinin alınmasına f fonksiyonun iki katlı integrali denir ve $dA=dx\,dy$ olmak üzere $I=\iint_D f(x,y)\,dA$ biçiminde gösterilir. Bu integralin iç kısmındaki integral $g(x)=\int f(x,y)\,dy$ şeklinde yazılabilir. Bu takdirde kısmi türev yardımıyla $I=\int g(x)\,dx$ şekline dönüştürülebilir.

Buna göre iki katlı integralin hesaplanması işlemini şöyle ifade edebiliriz:

$$I=\iint_D f(x,y)\,dxdy=\int_a^b g(x)\,dx=\int_a^b\left[\int_c^d f(x,y)\,dy\right]dx$$

biçiminde olur.

Toplam sembolünün ve limitinin özelliklerinden yararlanarak, iki katlı integrallerin aşağıdaki özelliklere sahip olduğu kolayca gösterilir.

i) $\iint_D k.f(x,y)\,dA=k.\iint_D f(x,y)\,dA$

ii) $\iint_D f(x,y)+g(x,y)\,dA=\iint_D f(x,y)\,dA+\iint_D g(x,y)\,dA$

iii) D üzerinde $f(x,y)\ge 0$ ise $\iint_D f(x,y)\,dA\ge 0$ dir.

iv) D üzerinde $f(x,y)\ge g(x,y)$ ise $\iint_D f(x,y)\,dA\ge\iint_D g(x,y)\,dA$ dir.

v) $D=D_1\cup D_2$ ve $D_1\cap D_2=\varnothing$ ise

$$\iint_{D_1 \cup D_2} f(x,y)\,dA = \iint_{D_1} f(x,y)\,dA + \iint_{D_2} f(x,y)\,dA$$

dir.

Şimdi ispatı yukarıdaki tanım ve izahtan görülebilen iki Fubini teoremi verelim.

Guido Fubini

19 Ocak 1879, Venedik, İtalya - 06 Haziran 1943, New York, ABD

3.1. Teorem (1. Fubini Teoremi): $f(x,y)$, bir D bölgesinde sürekli, $D=\{(x,y): a \le x \le b, c \le y \le d\}$ olsun.

$$I = \iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\,dy \right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\,dx \right] dy$$

biçimindedir.

$I = \iint_D f(x,y)\,dxdy$ integralini hesaplamak için aşağıdaki işlemler yapılır:

1. Önce x'i sabit tutup y ye göre $\int_c^d f(x,y)dy$ belirli integrali hesaplanır. Bu integralin sonucu x'e bağlı olduğundan bu sonuç x'in fonksiyonudur. Bu fonksiyona g (x) diyelim: $g(x) = \int_c^d f(x,y)dy$
2. Sonra g (x) fonksiyonunun [a, b] aralığında belirli integrali hesaplanarak sonuç bulunur.

Örnek: D = [0, 1] × [–1, 3] olmak üzere $I = \iint_D (x^2+y^2)\,dxdy$ integralini hesaplayalım.

Çözüm: Önce x'i sabit tutarak

$$g(x) = \int_{-1}^{3} (x^2+y^2)\,dy$$

$$=\int_{-1}^{3} x^2\,dy+\int_{-1}^{3} y^2\,dy$$

$$=x^2y\Big|_{-1}^{3}+\frac{y^3}{3}\Big|_{-1}^{3}$$

$$=4x^2+\frac{28}{3}$$

bulunur. Sonra

$$I=\int_0^1 g(x)\,dx=\int_0^1\left(4x^2+\frac{28}{3}\right)dx=\frac{4x^3}{3}+\frac{28}{3}x\Big|_0^1=\frac{32}{3}$$

bulunur.

Örnek: $D=\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\times[0,\pi]$ olmak üzere $I=\iint_D \sin x\cos\frac{y}{2}\,dxdy$ integralini hesaplayalım.

Çözüm: $g(x)=\int_0^{\pi}\sin x\cos\frac{y}{2}\,dy$

$$=\sin x\int_0^{\pi}\cos\frac{y}{2}\,dy$$

$$=2\sin x.\sin\frac{y}{2}\Big|_0^{\pi}$$

$$=2\sin x.\left(\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0\right)$$

$$=2\sin x$$

ve

$$I=\int_0^{\pi/2} g(x)\,dx=\int_0^{\pi/2} 2\sin x\,dx=-2\cos x\Big|_0^{\pi/2}=-2\left(\cos\frac{\pi}{2}-\cos 0\right)=2 \quad //$$

İki katlı integralin hesaplanmasında integralleme sırası değişebilir. Yani, önce y'yi sabit tutup, x e göre $\int_a^b f(x,y)\,dx$ integralini hesaplayıp, sonra elde edilen fonksiyonu $[c,d]$ aralığında integrallersek aynı sonuca geliriz.

İki katlı integral D dikdörtgeni yerine daha karmaşık kümeler üzerinde de tanımlanabilir, fakat o konu kompleks analiz derslerinde gösterilecektir.

3.2. Teorem (2. Fubini Teoremi): $f(x,y)$, bir D bölgesinde sürekli olsun.

i) D, $g_1(x)$ ve $g_2(x)$, [a, b] de sürekli olmak üzere, $a \le x \le b$, $g_1(x) \le y \le g_2(x)$ olsun.

$$I = \iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy \right] dx$$

olur.

ii) D, $h_1(x)$ ve $h_2(x)$, [c, d] de sürekli olmak üzere, $c \le x \le d$, $h_1(x) \le y \le h_2(x)$ olsun.

$$I = \iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_c^d \left[\int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(x,y)\,dx \right] dy$$

olur.

Örnek: $D = \{(x,y) : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le x\}$ bölgesi üzerinde $f(x,y) = 4 - x - y$ fonksiyonun integralini inceleyiniz.

Çözüm: $I = \int_0^1 \int_0^x (4 - x - y)\,dydx$

$$= \int_0^1 \left[\int_0^x (4 - x - y)\,dy \right] dx$$

$$= \int_0^1 \left[4y - xy - \frac{y^2}{2} \Big|_0^x \right] dx$$

$$= \int_0^1 \left[4x - \frac{3x^2}{2} \right] dx$$

$$= 2x^2 - \frac{x^2}{2} \Big|_0^1$$

$$= \frac{5}{2}$$

İKİ KATLI İNTEGRALLERDE BÖLGE DÖNÜŞÜMLERİ

xy-düzlemindeki bir D bölgesinden, uv-düzlemindeki bir başka R bölgesine,

$$u = f(x, y), v = g(x, y)$$

denklemleriyle bire-bir olarak dönüştürüldüğünü varsayalım. Yani,

$$T : D \to R$$

$$(x,y) \to (u,v) = T(f(x,y), g(x,y))$$

bölge dönümü verilmiş. xy – düzlemindeki bir D bölgesi uv – düzlemindeki bir R bölgesine dönüştürüldüğünde uv –düzleminde alanı $\Delta u_k \Delta v_k$ olan bölge xy – düzleminde alanı $|J|\Delta x_k \Delta y_k$ olan bir bölgeye dönüşür. Burada J, dönüşüm Jakobiyeni olup

$$J = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}$$

dir. Bu durumda

$$\iint_D T(u,v)\,du\,dv = \iint_D T(f(x,y), g(x,y))\,|J|\,dx\,dy$$

olur. Eğer özel olarak

$$u = r\cos\theta, \; y = r\sin\theta$$

dönüşümü yardımıyla kutupsal koordinatlara geçilirse

$$\iint_D T(u,v)\,du\,dx = \iint_D T(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

olur. Çünkü bu dönüşüm için

$$J = \frac{\partial(u,v)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} u_r & u_\theta \\ v_r & v_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

dir.

Eğer $D = \{(r,\theta) : s(\theta) \le r \le t(\theta), a \le \theta \le b\}$ ise bu takdirde

$$\iint_D T(u,v)\,du\,dv = \int_a^b \int_{s(\theta)}^{t(\theta)} T(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

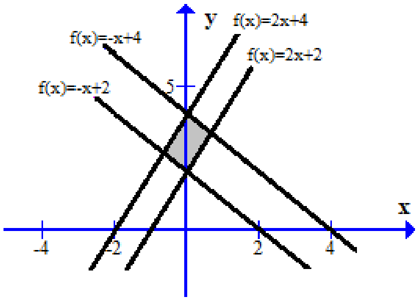
dir.

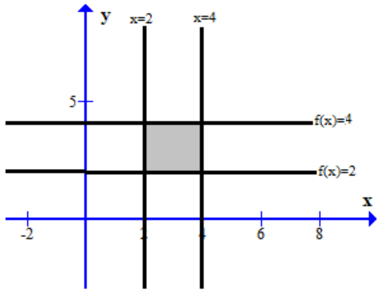
Örnek: Bir D bölgesi $2x+y=2$, $2x-y=4$, $y+x=2$ ve $y+x=4$ doğruları tarafindan sınırlanan bölgedir. Bu böğe $u=x+y$ ve $v=2x-y$ dönüşümü yardımıyla uv düzlemindeki D bölgesine dönüştürülüyor.

$$\iint_D (2x-y)^2\,dx\,dy$$

integralini yeni u ve v değişkenine göre yazıp hesaplayınız.

Çözüm: $2x+y=2$, $2x-y=4$ doğruları $v=2, v=4$ doğrularına, $y+x=2$ ve $y+x=4$ doğrularına $v=2, v=4$ doğruları tarafindan sınırlanan dikdörtgensel bölgedir.





$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\frac{1}{\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}=\frac{1}{\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}}=\frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}=-\frac{1}{3}$$

olduğundan

$$\iint_D (2x-y)^2\,dx\,dy=\int_2^4\int_2^4 v^2\frac{1}{3}dvdu=\int_2^4 \frac{v^3}{9}\bigg|_2^4 du=\frac{56}{9}\int_2^4 du=\frac{56}{9}\bigg|_2^4=\frac{112}{9}$$

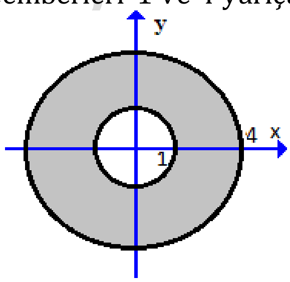
bulunur.

Örnek: D bölgesi $x^2+y^2=1$ ve $x^2+y^2=16$ çemberleri arasında kalan bölge olduğuna göre

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm: Verilere göre çemberleri 1 ve 4 yarıçaplı çemberlerdir.



Buna göre $1\le r\le 4$ dür. $0\le\theta\le 2\pi$ olacağından kutupsal koordinat dönüşümü yapılırsa,

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy=\int_0^{2\pi}\int_1^4 (r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta)^{1/2}\,r\,dr\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_1^4 r^2\,dr\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{r^3}{3}\bigg|_1^4\,d\theta$$

$$= 63\int_0^{2\pi} d\theta$$

$$= 63\theta\Big|_0^{2\pi}$$

$$= 126\pi$$

bulunur.

Örnek: D bölgesi $5x^2+2xy+2y^2=1$ elipsi tarafından sınırlanan bölge olduğuna göre $x=u+v$ ve $y=-2u+v$ dönüşümü yardımıyla

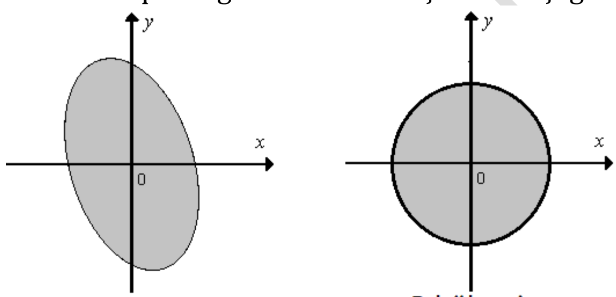
$$\iint_D \sqrt{5x^2+2xy+2y^2}\,dx\,dy$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm: $5x^2+2xy+2y^2=1$ denkleminde $x=u+v$, $y=-2u+v$ yazılırsa

$$9(u^2+v^2)=1$$

çemberi bulunur. Verilen elips ve görüntüsü olan çember aşağıdaki gibidir.



D bölgesi R bölgesi

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=3$$

olduğundan

$$I=\iint_D \sqrt{5x^2+2xy+2y^2}\,dx\,dy=\iint_D 3\sqrt{u^2+v^2}\,3\,du\,dv$$

$$=9\int_{-1/3}^{1/3}\int_{-\sqrt{(1/9)-u^2}}^{\sqrt{(1/9)-u^2}} \sqrt{u^2+v^2}\,du\,dv$$

Bulunur. Kutupsal koordinatlara geçilirse,

$$I=9\int_0^{2\pi}\int_0^{1/3} r.r\,dr\,d\theta=3\int_0^{2\pi} r^3\Big|_0^{1/3} d\theta=\frac{1}{9}\int_0^{2\pi} d\theta=\frac{2\pi}{9}$$

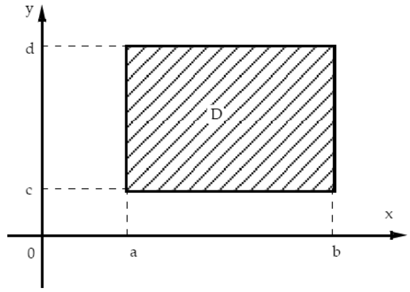
elde edilir. //

Şimdi burada iki katlı integralin hangi alanda kullanıldığını inceleyelim. Böylece iki katlı integralin uygulamalarına bakalım.

İKİ KATLI İNTEGRALLE ALAN HESAPLARI

3.2. Tanım: [a, b] ve [c, d] birer kapalı aralık olmak üzere,

$$D = [a, b] \times [c, d] = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, b] \text{ ve } y \in [c, d] \}$$



kümesine $x \circ y$ düzleminde kapalı dikdörtgen denir.

3.3. Teorem: $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ kapalı dikdörtgeni üzerinde tanımlı ve sürekli

$$f : D \to \mathbb{R}, z = f(x, y)$$

iki değişkenli fonksiyonu verilsin. Bu bölgenin alanı

$$\text{Alan}(A) = \iint_D dx\,dy$$

dir.

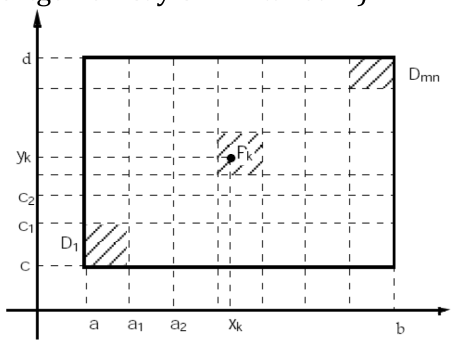
İspat: Belirli integral konusundaki gibi; [a, b] aralığının

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < ... < a_{i-1} < a_i < ... < a_n = b$$

bölüntüsünü, [c, d] aralığının ise

$$c = c_0 < c_1 < c_2 < ... < c_{j-1} < c_j < ... < c_m = d$$

bölüntüsünü seçelim. Bu bölüntülerin en büyüğü δ olsun. (Bu bölüntüler D dikdörtgeninin de $D_1, D_2, ... D_{mn}$ gibi küçük dikdörtgenlerden oluşan bir bölüntüsünü doğurmuş olur. Bu dikdörtgenler sayısı mn tanedir.)



Her $1 \le k \le mn$ için D_k dikdörtgeninden keyfi $P_k(x_k, y_k)$ noktasını seçip

$$S = f(x_1, y_1)\Delta A_1 + f(x_2, y_2)\Delta A_2 + ... + f(x_{mn}, y_{mn})\Delta A_{mn}$$

$$=\sum_{k=1}^{mn} f(x_k,y_k)\Delta A_k$$

toplamını oluşturalım. Burada ΔA_k sembolü dikdörtgenin alanını göstermektedir. $\delta \to 0$ iken S toplamının limiti (tek değişkenli fonksiyonlarda olduğu gibi)

$$\lim_{\delta\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(x_k,y_k)\Delta A_k = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$

şeklindedir. Bu integralin değeri [a, b] ve [c, d] aralıklarının bölüntülerinden ve P_k noktalarının seçiminden bağımsızdır. Eğer f fonksiyonu her $(x,y)\in B$ için 1 olarak tanımlanırsa yukarıdaki eşitlik

$$\lim_{\delta\to 0}\sum_{k=1}^{n} \Delta A_k = \iint_D dx\,dy$$

şeklini alır. Parçalanma nasıl yapılışa yapılsın ΔA_k alanlarının toplamı D bölgesinin alanı olacağından,

$$\text{Alan}(A)=\iint_D dx\,dy$$

olur. //

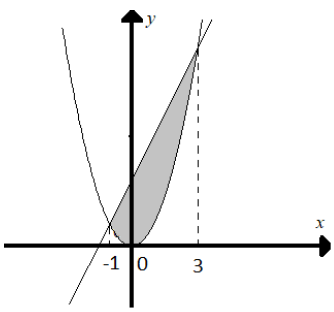
Kutupsal koordinatlara geçildiğinde, Jakobiyen r olacağından bu teorem

$$\text{Alan}(A)=\iint_D r\,dr\,d\theta$$

şekline dönüşür.

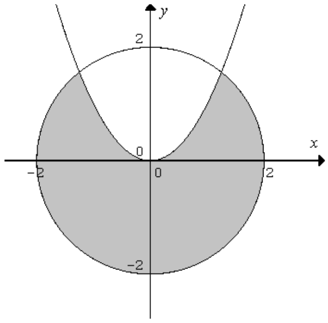
Örnek: $y=x^2$ parabolü ile $y=2x+3$ doğru arasında kalan bölgenin alanını hesaplayınız.

Çözüm: Bu parabol ve doğrunun kesiştiği nokta $x^2=2x+3$ denkleminden $x=-1$ ve $x=3$ dir.



$$A=\int_{-1}^{3}\int_{x^2}^{2x+3} dy\,dx=\int_{-1}^{3}(2x+3-x^2)dx = x^2+3x-\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{3} = \frac{22}{3}br^2$$

Örnek: $x^2+y^2=4$ çemberi ile $y=x^2$ parabolü veriliyor. Şekildeki bölgenin alanını bulunuz.



Çözüm: $A=2\int_0^2\int_{\sqrt{4-x^2}}^{x^2} dydx$

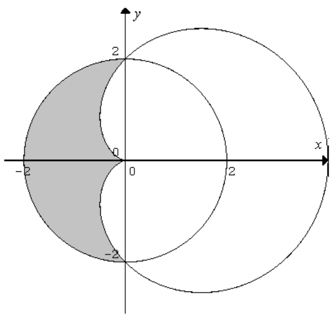
$$=2\int_0^2 (x^2-\sqrt{4-x^2})dx$$

$$=2\left[\frac{x^3}{3}-2\arcsin\frac{x}{2}-\frac{1}{2}x\sqrt{4-x^2}\right]_0^2$$

$$=\frac{16}{3}-4\arcsin 1$$

$$=\frac{16}{3}-2\pi\ br^2$$

Örnek: $r=2(1+\cos\theta)$ kardiyodinin dışında, $r=2$ çemberinin için kalan alanı bulunuz.



Çözüm: $A=\iint_D r\,drd\theta$

$$=\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\int_{2(1+\cos\theta)}^{2} r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \left.\frac{r^2}{2}\right|_{2(1+\cos\theta)}^{2} d\theta$$

$$= 2\int_{\pi/2}^{3\pi/2} [1-(1+\cos\theta)^2] d\theta$$

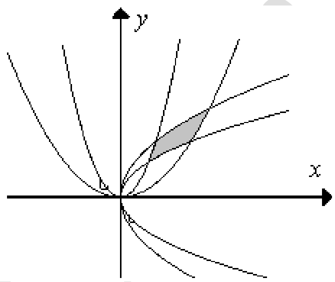
$$= 2\int_{\pi/2}^{3\pi/2} (2\cos\theta+\cos^2\theta) d\theta$$

$$= -2\int_{\pi/2}^{3\pi/2} (2\cos\theta+\frac{1+\cos 2\theta}{2}) d\theta$$

$$= -2\left(2\sin\theta+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\sin 2\theta\right)\Bigg|_{\pi/2}^{3\pi/2}$$

$$= 8-\pi \text{ br}^2$$

Örnek: $y=x^2$, $y=x^2/4, y^2=2x, y^2=4x$ parabolleri tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.



Çözüm: $u=\dfrac{x^2}{y}$, $v=\dfrac{y^2}{x}$ bölge dönüşümü yapılırsa sözkonusu paraboller, sırası ile $u=1$, $u=4$, $v=2$, $v=4$ doğrularına, dolayısıyla R bölgesine dönüşür.

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\frac{1}{\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}=\frac{1}{\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}}=\frac{1}{\begin{vmatrix} \dfrac{2x}{y} & -\dfrac{x^2}{y^2} \\ -\dfrac{y^2}{x^2} & \dfrac{2y}{x} \end{vmatrix}}=\frac{1}{3}$$

$$A=\iint_D dx\,dy=\iint_R \frac{1}{3} du\,dv=\frac{1}{3}\int_{v=2}^{4}\int_{u=1}^{4} du\,dv = 2 \text{ br}^2$$

bulunur.

HACİM HESAPLARI

3.4. Teorem: $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ kapalı dikdörtgeni üzerinde tanımlı ve sürekli

$f : D \to \mathbb{R}, z = f(x, y)$

iki değişkenli fonksiyonu verilsin. Bu bölgenin alanı

$$\text{Hacim}(V) = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$

dir.

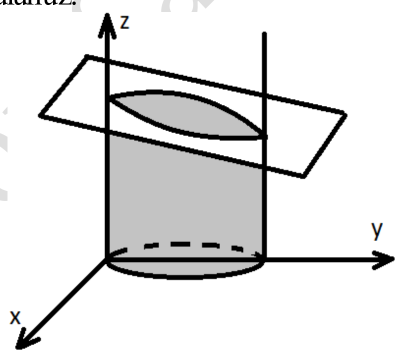
İspat: f fonksiyonu D bölgesinde sürekli ve pozitif tanımlı ise $\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta A_k$ ifadesi taban alanı ΔA_k ve yüksekliği $f(x_k, y_k)$ olan dik silindirlerin hacimleri toplamıdır.

Eğer B bölgesi, parçalanmanın δ sıfıra gidecek şekilde parçalanırsa bu hacimlerin toplamı, $z = f(x,y)$ yüzeyi, D bölgesi ve D bölgesini taban kabul eden dik silindirin arasında kalan bölgenin V hacmine eşit olur. Şu halde

$$\text{Hacim}(V) = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$

olur.

Örnek: $y^2 + x^2 = 2y$ silindiri ile $z = 0$ ve $x + y + z = 8$ düzlemleri arasında kalan bölgenin hacmini bulunuz.



Çözüm: $V = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_D (8 - x - y)\,dx\,dy$

olur. Kutupsal koordinatlara geçilirse, $x^2 + y^2 = 2y$ çemberinin denklemi $r = 2\sin\theta$ olacağından,

$$V = \int_0^{\pi} \int_0^{2\sin\theta} (8 - r\cos\theta - r\sin\theta)\, r\,dr\,d\theta$$

$$=\int_0^{\pi}\left(4r^2-\frac{1}{3}r^3\cos\theta-\frac{1}{3}r^3\sin\theta\right)\Bigg|_0^{2\sin\theta} d\theta$$

$$=\int_0^{\pi}\left(16\sin^2\theta-\frac{8}{3}\sin^3\theta\cos\theta-\frac{8}{3}\sin^3\theta\right)d\theta$$

$$=\int_0^{\pi}\left(8(1-\cos 2\theta)-\frac{8}{3}\sin^3\theta\cos\theta-\frac{2}{3}(1-\cos 2\theta)^2\right)d\theta$$

$$=(8\theta-3\sin 2\theta-\frac{2}{3}\sin^4\theta)\Big|_0^{\pi}-\frac{2}{3}\int_0^{\pi}\left(1-2\cos 2\theta+\frac{1+\cos 4\theta}{2}\right)d\theta$$

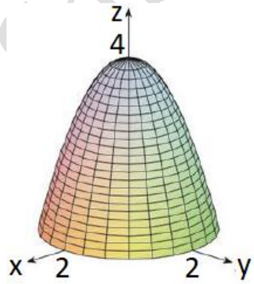
$$=(8\theta-3\sin 2\theta-\frac{2}{3}\sin^4\theta)\Big|_0^{\pi}-\frac{2}{3}\int_0^{\pi}\left(1-2\cos 2\theta+\frac{1+\cos 4\theta}{2}\right)d\theta$$

$$=8\pi-3\sin 2\pi-\frac{2}{3}\sin^4\pi-\frac{2}{3}\left(\theta-\sin 2\theta+\frac{\theta}{2}+\frac{1}{8}\sin 4\theta\right)\Bigg|_0^{\pi}$$

$$=8\pi-\frac{2}{3}.\frac{3}{2}\pi$$

$$=6\pi$$

Örnek: $z=4-x^2-y^2$ parabolidi ile xy düzlemi arasında kalan bölgenin hacmini hesaplayınız.



Çözüm: O halde integrasyon bölgesi, $x^2+y^2=4$ çemberi tarafından sınırlanan dairesel bölgedir. Buna göre

$$V=\iint_D z\,dx\,dy$$

$$=\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}(4-x^2-y^2)\,dy\,dx$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{2}(4-r^2)\,r\,dr\,d\theta$$

$$= 4\int_0^{2\pi} d\theta$$

$$= 4\theta\Big|_0^{2\pi}$$

$$= 8\pi\, br^3 \; //$$

KAYNAKÇA

- Prof. Dr. Mustafa BALCI, Matematik Analiz II, Bilim kitap kırtasiye A.Ş., Ankara, 1997.
- Prof. Dr. Mustafa BAYRAKTAR, Analiz, Korza yayıncılık a.ş., Ankara, 2017.
- Murray R. SPIEGEL, Çeviri: Prof. Dr. H. Hilmi HACISALİHOĞLU, Nobel Yayın Dağıtım, 1997.
- Prof. Dr. Vakıf CAFEROV, Matematik, Açıköğretim Fakültesi Yayınları, Eskişehir, 2009.
- George B. Thomas, Çeviri Recep Korkmaz, Thomas Calculus II, Beta, İstanbul, 2009.