3. BÖLÜM
AFİN UZAY ve KONVEKSLİK

AFİN KÜMELER

3.1. Tanım: $x, y \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere $\{(1-\lambda)x + \lambda y : \lambda \in \mathbb{R}\}$ veya başka bir yazılış ile

$$\{\lambda_1 x + \lambda_2 y : \lambda_1 + \lambda_2 = 1, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}$$

kümesine x ve y noktalarından geçen doğru denir.

3.2. Tanım: $A \subseteq \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\forall\, x, y \in M \text{ için } (1-\lambda)x + \lambda y \in A$$

gerçekleniyor ise A kümesine $\mathbb{R}^n$ de bir afin küme denir. Başka bir deyişle herhangi iki noktasından geçen doğruyu içeren kümelere afin küme denir.

$\emptyset, \mathbb{R}^n$, tek nokta kümeleri, doğrular ve düzlemler birer afin küme örnekleridir.

$x_1, x_2, \dots, x_m \in \mathbb{R}^n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ ve $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$ olmak üzere

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_m x_m$$

noktasına $x_1, x_2, \dots, x_m$ noktalarının afin kombinasyonu denir.

3.3. Tanım: Afin kombinasyon kavramını kullanarak, afin kümeleri herhangi iki noktasının afin kombinasyonunu içeren kümeler olarak tanımlamak mümkündür.

3.1. Teorem: Bir $A \subseteq \mathbb{R}^n$ kümesinin afin olması için gerek ve yeter şart elemanlarının tüm afin kombinasyonlarını içermesidir.

İspat: $\Rightarrow$: A kümesi elemanlarının tüm afin kombinasyonlarını içersin; bu durumda herhangi iki noktasının afin kombinasyonunu da içerir dolayısıyla A kümesi afin küme olur.

$\Leftarrow$: Tersine A bir afin küme olsun ve $m > 2$ olmak üzere A kümesi $m-1$ tane elemanının afin kombinasyonunu içersin. Şimdi $x_1, x_2, \dots, x_m \in A$, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$, $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$ olsun. Burada $x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i \in A$ gerçeklendigini göstermektir. $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_m x_m = 1$ olduğundan λ_i lerden en az biri 1'den farklıdır. $\lambda_m \neq 1$ olsun. Bu durumda

$$x = \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i x_i + \lambda_m x_m = (1-\lambda_m) \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{m-1} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_m} x_i \right)}_{\in A} + \lambda_m x_m \in A$$

gerçeklenir. Çünkü

$$\sum_{i=1}^{m-1} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_m} = \frac{\lambda_1}{1-\lambda_m} + \frac{\lambda_2}{1-\lambda_m} + \dots + \frac{\lambda_{m-1}}{1-\lambda_m} = \frac{1-\lambda_m}{1-\lambda_m}$$

olup $y = \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_m} x_i$ noktası A kümesinin $m-1$ tane x_i elemanının afin kombinasyonu olup kabul geregi A kümesine aittir. Böylece $x = (1-\lambda_m)y + \lambda_m x_m$ noktası A'nın iki y ve x_m elemanlarının afin kombinasyonu olduğundan A kümesine aittir. Böylece tümevarım ile bir afin kümenin, elemanlarının herhangi bir afin kombinasyonunu içerdigi gösterilmiş olur.

3.4. Tanım: Bir $A \subseteq \mathbb{R}^n$ kümesini kapsayan tüm afin kümelerin kesişimine, yani I herhangi bir indis kümesi olmak üzere

$$\bigcap_{i \in I} \{A_i : A \subseteq A_i \text{ ve } \forall\, i \in I \text{ için } A_i \text{ afin}\}$$

kesişim kümesine A kümesinin afin örtüsü ya da afin zarfı denir ve aff(A) ile gösterilir.

3.1. Sonuç: $A \subseteq \mathbb{R}^n$ olmak üzere aff(A) kümesi A kümesini kapsayan en küçük afin kümedir.

3.2. Teorem: Bir $A \subseteq \mathbb{R}^n$ kümesi için aff(A) afin örtü kümesi, A kümesinin elemanlarının tüm afin kombinasyonlarının kümesine eşittir.

İspat. A kümesinin elemanlarının tüm afin kombinasyonlarının kümesi W ile gösterilsin. Bu durumda $A \subseteq W$ ve W afin kümedir. Dolayısıyla $\text{aff}(A) \subseteq W$ geçerlidir. Öte yandan aff(A) kümesi afin olduğundan 3.1. teorem nedeniyle elemanlarının tüm afin kombinasyonlarını, özel olarak $A \subseteq \text{aff}(A)$ olduğu için A kümesinin elemanlarının tüm afin kombinasyonları olan W kümesini de kapsar, böylece $W \subseteq \mathrm{aff}(A)$ olur. Sonuç olarak $\mathrm{aff}(A) = W$ olduğu elde edilir.

3.3. Teorem: $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}^n$ olsun. A kümesinin afin olması için gerek ve yeter şart A'nın tek bir L lineer alt uzayına paralel olmasıdır.

İspat: $\Rightarrow$: A afin olsun ve bir $x_0 \in A$ seçilsin. Bu durumda $L = A - x_0$ bir lineer alt uzay olur. Gerçekten,

i) $\alpha \in \mathbb{R}$ ve $L = A - x_0$ olsun. Dolayısıyla $\exists\, a \in A$ öyle ki $x = a - x_0$ gerçeklenir. Öte yandan A bir afin küme olduğundan $\alpha \underbrace{a}_{\in A} + (1-\alpha)\underbrace{x_0}_{\in A} \in A$ geçerlidir. Böylece

$$\alpha x = \alpha(a - x_0) = \alpha a - \alpha x_0 + x_0 - x_0 = \underbrace{\alpha a + (1-\alpha)x_0}_{\in A} - x_0 \in L$$

yani $\alpha x \in L$ sağlanır.

ii) $x_1, x_2 \in L = A - x_0$ ise $\exists\, a_1, a_2 \in A$ öyle ki $x_2 = a_2 - x_0$ ve $x_1 = a_1 - x_0$ gerçeklenir. Bu durumda

$$x_1 + x_2 = a_1 - x_0 + a_2 - x_0 = \frac{2}{2}a_1 + \frac{2}{2}a_2 - 2x_0 = 2\left(\underbrace{\frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2}a_2}_{\in A} - 2x_0\right) \in L$$

olur, burada A afin olduğundan $\frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2}a_2 \in A$ olup $\frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2}a_2 - 2x_0 \in L$ dir. (i) nedeniyle de bu noktanın 2 katı da L kümesine ait olur.

Sonuçta (i) ve (ii) den L kümesinin skaler ile çarpma ve toplama işlemlerine göre kapalı olduğu yani bir lineer alt uzay olduğu elde edilmiş olur. $L = A - x_0$ ise $A = L - x_0$ olduğundan A kümesi L lineer alt uzayına paraleldir.

$\Leftarrow$: Tersine A kümesi bir L lineer alt uzayına paralel olsun, yani belli bir $x_0 \in \mathbb{R}^n$ için $A = L + x_0$ olsun. A'nın afin olduğunu gösterelim. $x_1, x_2 \in A$ ve $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ olsun. $x_1, x_2 \in A$ ise $\exists\, y_1, y_2 \in L$ öyle ki $x_1 = y_1 + x_0$ ve $x_2 = y_2 + x_0$ olur. Böylece

$$\begin{aligned}\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 &= \lambda_1 y_1 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_2 x_2 \\ &= \underbrace{\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2}_{\in L} + (\underbrace{\lambda_1 + \lambda_2}_{=1})x_0 \in A\end{aligned}$$

olur, bu ise A kümesinin afin olması demektir. Dolayısıyla afin kümelerin lineer uzayların ötelemeleri olduğu gösterilmiş olur.

Şimdi tekliğini gösterelim. Kabul edelim ki $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ve L_1, L_2 lineer alt uzayları için $A = L_1 + x_1 = L_2 + x_2$ olsun. $L_1 + x_1 = L_2 + x_2$ ise $L_1 = L_2 + (x_2 - x_1)$ olur. Öte yandan L_1 bir lineer alt uzay olduğu için $0 \in L_1$ ve dolayısıyla $0 \in L_2 + (x_2 - x_1)$ olacağından $-(x_2 - x_1) \in L_2$ olmalıdır. Sonuç olarak

$$L_1 = L_2 + \underbrace{(x_2 - x_1)}_{\in L_2} = L_2$$

bulunur.

3.2. Sonuç: Lineer alt uzaylar orijini içeren afin kümelerdir.

3.3. Sonuç: $\mathbb{R}^n$ uzayında boyutu $n-1$ olan her afin küme bir hiperdüzlem belirtir.

3.4. Teorem: $A_{m\times n}$ bir matris ve $b \in \mathbb{R}^m$ olmak üzere $M = \{x : Ax = b\}$ kümesi $\mathbb{R}^n$ uzayında bir afin kümedir ve herhangi bir afin küme bu şekilde ifade edilebilir.

İspat. $M = \{x : Ax = b\}$ kümesinin afin olduğunu gösterelim. $x, y \in M$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olsun. $z = (1-\lambda)x + \lambda y$ olarak tanımlansın. Bu durumda

$$Az = (1-\lambda)Ax + \lambda Ay = (1-\lambda)b + \lambda b = b$$

kısacası $Bz = b$ geçerli olur. Böylece $z = (1-\lambda)x + \lambda y \in M$ gerçeklenmesi nedeniyle M kümesi bir afin küme olur.

Şimdi; $M \neq \varnothing$ kümesi $\mathbb{R}^n$ uzayında herhangi bir afin küme olsun. 3.3. teoremden M kümesinin paralel olduğu bir L lineer alt uzayı vardır. $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ vektör kümesi $L^\perp$ uzayının bir tabanı olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler geçerlidir:

$$\begin{aligned} L = (L^\perp)^\perp &= \{x : x \perp a_1, x \perp a_2, \dots, x \perp a_m\} \\ &= \{x : \langle a_i, x\rangle = 0, i = 1,2,\dots,m\} \\ &= \{x : Ax = 0\} \end{aligned}$$

burada A, satırları $a_1, a_2, \dots, a_m$ olan $m \times n$ matrisi göstermektedir. M afin kümesi L alt uzayına paralel olduğundan, bir $x_0 \in \mathbb{R}^n$ için aşağıdakiler geçerli olur:

$$M = L + x_0 = \{x : A(x - x_0) = 0\} = \{x : Ax = Ax_0\} = \{x : Ax = b\}$$

burada $b = Ax_0$ olarak alınmıştır. //

Bu teoremdeki afin küme aşağıdaki biçimde de ifade edilebilir:

$$M = \{x : \langle x, a_i\rangle = b_i, i = 1, 2, \dots, m\} = \bigcap_{i=1}^{m} H_i$$

burada a_i ile A matrisinin i. satırı, b_i ile $b \in \mathbb{R}^m$ vektörünün i. bileseni ve H_i ile

$$H_i = \{x : \langle x, a_i \rangle = b_i\}$$

kümesi gösterilmektedir. Her bir H_i kümesi bir hiperdüzlemdir.

3.4. Sonuç: $\mathbb{R}^n$ uzayının her afin alt kümesi sonlu sayıdaki hiperdüzlemin bir kesişimidir.

3.5. Tanım: $m \geq 1$ olmak üzere $v_0, v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n$ noktaları için eğer

$$\sum_{i=0}^{m} \lambda_i v_i = 0 \text{ ve } \sum_{i=0}^{m} \lambda_i = 0 \text{ için } \lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0$$

gerektirmesi doğru oluyor ise $v_0, v_1, \dots, v_m$ noktaları afin bağımsızdır denir.

3.5. Teorem: $m \geq 1$ olmak üzere $v_0, v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n$ noktalarının afin bağımsız olabilmesi için gerek ve yeter şart $v_1 - v_0, v_2 - v_0, \dots, v_m - v_0$ noktalarının lineer bağımsız olmasıdır.

İspat: $\Rightarrow$: $v_0, v_1, \dots, v_m$ noktaları afin bağımsız olsun. $\lambda_0 = -\sum_{i=1}^{m} \lambda_i$ olmak üzere aşağıdaki denklemi ele alalım,

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i (v_i - v_0) = 0$$

olsun. Dikkat edilirse

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i (v_i - v_0) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i - \left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \right) v_0 = 0$$

olduğundan $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i = \lambda_0 v_0 + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i = 0$ bulunur. Ayrıca $\sum_{i=0}^{m} \lambda_i = 0$ gerçekleştiğinden ve $v_0, v_1, \dots, v_m$ noktaları afin bağımsız olduğundan her $i = 0, 1, 2, \dots, m$ için $\lambda_i = 0$ olur. Dolayısıyla $v_1 - v_0, v_2 - v_0, \dots, v_m - v_0$ noktaları lineer bağımsızdır.

$\Rightarrow$: $v_1 - v_0, v_2 - v_0, \dots, v_m - v_0$ noktaları lineer bağımsız ise $v_0, v_1, \dots, v_m$ noktalarının afin bağımsız olduğunu gösterir. //

Bundan sonra bir $C \subset \mathbb{R}^n$ kümesi tarafından doğurulan uzay span(C) ile gösterilecektir. span(C) kümesi C kümesinin elemanlarının tüm lineer kombinasyonlarının oluşturduğu küme olduğundan bir lineer alt uzaydır.

3.6. Teorem: $v_0, v_1, , \dots, v_m \in \mathbb{R}^n$ ve $K = \text{aff}\{v_0, v_1, , \dots, v_m\}$ ise $\text{span}\{v_1 - v_0, v_2 - v_0, \dots, v_m - v_0\}$ kümesi K kümesine paralel olan bir alt uzaydır.

İspat: K afin kümesine paralel olan alt uzay L ile gösterilsin. Bu durumda $K - v_0 = L$ olur, dolayısıyla da her $i = 1, 2, \dots, m$ için $v_i - v_0 \in L$ ve L bir alt uzay olduğundan $v_i - v_0$ elemanlarının tüm lineer kombinasyonlarını içerir. Bu ise $\text{span}\{v_1 - v_0, v_2 - v_0, \dots, v_m - v_0\} \subset L$ kapsamasının geçerli olması demektir. Tersine, sabit bir $v \in L$ için $v + v_0 \in K$ geçerlidir. Dolayısıyla K'nın tanımı geregi $v + v_0$ elemanı, vi'lerin bir afin kombinasyonu şeklinde yazılır. Buna göre $v + v_0 = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i v_i$ burada $\sum_{i=0}^{m} \lambda_i = 1$ geçerlidir. Bu ise

$$
\begin{aligned}
v &= \sum_{i=0}^{m} \lambda_i v_i - v_0 \\
&= \sum_{i=0}^{m} \lambda_i v_i - \left(\sum_{i=0}^{m} \lambda_i \right) v_0 \\
&= \sum_{i=0}^{m} \lambda_i (v_i - v_0) \cup \text{span}\{v_1 - v_0, v_2 - v_0, \dots, v_m - v_0\}
\end{aligned}
$$

içermesinin dolayısıyla da $L \subseteq \text{span}\,\{v_1 - v_0, v_2 - v_0, \dots, v_m - v_0\}$ kapsamasının doğru olduğunu söyler. Sonuçta

$$K - v_0 = \text{span}\{v_1 - v_0, v_2 - v_0, \dots, v_m - v_0\}$$

elde edilir.

3.5. Sonuç: $m \geq 1$ olmak üzere $v_0, v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n$ noktalarının afin bağımsız olması için gerek ve yeter şart $\text{aff}\{v_0, v_1, , \dots, v_m\}$ kümesinin m-boyutlu olmasıdır.

3.6. Tanım: $x_1, x_2, \dots, x_m \in \mathbb{R}^n$, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \geq 0$ ve $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$ olmak üzere $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_1 + \cdots + \lambda_m x_1$ toplamına $x_1, x_2, \dots, x_m$ noktalarının bir konveks kombinasyonu denir.

Özel olarak, x ve y gibi iki noktanın bir konveks kombinasyonunu $0 \leq \lambda \leq 1$ olmak üzere $(1 - \lambda)x + \lambda y$ yazılısı ile ifade etmek mümkündür.

$x, y \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere $\{(1 - \lambda)x + \lambda y : \, 0 \leq \lambda \leq 1\}$ kümesine x ve y noktalarını birleştiren doğru parçası denir.

KONVEKS KÜMELER

3.7. Tanım: $C \subset \mathbb{R}^n$ olmak üzere, eğer

$\forall\, x, y \in C, 0 \le \lambda \le 1$ için $(1-\lambda)x + \lambda y \in C$

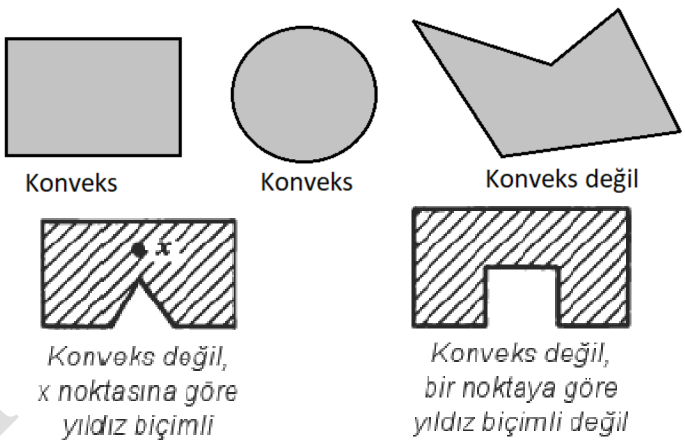
içermesi gerçekleniyor ise C kümesine bir konveks küme denir. Yani her nokta ikilisi tarafınfan oluşturulan doğru parçası C'nın içinde kalıyorsa C kümesine konveks olur. Eğer $0 < \lambda < 1$ için $(1-\lambda)x + \lambda y \in C$ ise kesin konveks küme denir.

3.8. Tanım: Sabit bir $x_0 \in C \subset \mathbb{R}^n$ ve $0 \le \lambda \le 1$ olmak üzere, eğer $\forall\, y \in C$ için $(1-\lambda)x_0 + \lambda y \in C$ gerçekleniyor ise C kümesi x_0 noktasına göre yıldız biçimli bir kümedir denir.

Konveks tanıma eşdeğer olarak, konveks bir küme aşağıdaki ifadelerden herhangi biri ile de tanımlanabilir:

- Herhangi iki noktasını birlestiren doğru parçasını içiren küme,
- Herhangi iki elemanının konveks kombinasyonlarını içeren küme,
- Her bir elemanına göre yıldız biçimli olan küme.

Örnek:



Örnek: $\mathbb{R}^n$ uzayında kapalı birim yuvar $\overline{B(0,1)} = \{\, x \in \mathbb{R}^n : \; \|x\| \le 1\}$ kümesi konveks olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $x_1, x_2 \in \overline{B(0,1)}, 0 \le \lambda \le 1$ olmak üzere

$\|(1-\lambda)x_1 + \lambda x_2\| \le |1-\lambda|\|x_1\| + |\lambda|\|x_2\| \le |1-\lambda| + |\lambda| = 1$

olur. Buna göre $(1-\lambda)x_1 + \lambda x_2 \in \overline{B(0,1)}$ dir. Dolayısıyla $\overline{B(0,1)}$ kümesi konvekstir.

Örnek: Herhangi bir hiperdüzlemin konveks küme olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $\varnothing \neq a \in \mathbb{R}^n$ ve $b \in \mathbb{R}$ olmak üzere herhangi bir hiperdüzlemi hatırlayacak olursak, $H = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle a, x \rangle = b\}$ biçimindeki kümelerdi. Buna göre $x_1, x_2 \in H, 0 \leq \lambda \leq 1$ için

$\langle a, (1-\lambda)x_1 + \lambda x_2 \rangle = (1-\lambda)\langle a, x_1 \rangle + \lambda \langle a, x_2 \rangle = (1-\lambda)b + \lambda b = b$

Olacagından $(1-\lambda)x_1 + \lambda x_2 \in H$ elde edilir, dolayısıyla H kümesi konvekstir.

3.6. Sonuç: Bir kümenin konveks olabilmesi için gerek ve yeter şart her bir elemanına göre yıldız biçimli olmasıdır.

Örnek: $\mathbb{R}^n, \varnothing$ ve $\{x_1\}$ tek nokta kümesi konvekstir.

3.7. Sonuç: Bir $C \subset \mathbb{R}^n$ konveks kümesinin boyutu, C kümesinin afin örtüsü olan aff(C) afin kümesinin paralel olduğu lineer alt uzayın boyutudur.

3.7. Teorem: $\forall i \in I$ için $C_i \subset \mathbb{R}^n$ kümeleri $\bigcap_{i \in I} C_i$ kesişim kümesi de konvekstir.

İspat: $x_1, x_2 \in \bigcap_{i \in I} C_i$ ve $0 \leq \lambda \leq 1$ olsun. Bu durumda $\forall i \in I$ için $x_1, x_2 \in C_i$ dir. Böylece $\forall i \in I$ için C_i kümeleri konveks olduğundan $(1-\lambda)x_1 + \lambda x_2 \in C_i$ ve dolayısıyla $(1-\lambda)x_1 + \lambda x_2 \in \bigcap_{i \in I} C_i$ olur.

3.8. Teorem: İki konveks kümenin toplamı bir konveks kümedir. Yani $C_1, C_2 \subset \mathbb{R}^n$ konveks ise aşağıdaki toplam kümesi de konvekstir:

$C_1 + C_2 = \{x_1 + x_2 : x_1 \in C_1, x_2 \in C_2\}$

dir.

İspat: $x, y \in C_1 + C_2$ ve $0 \leq \lambda \leq 1$ olsun. Buna göre $\exists\, x_1, y_1 \in C_1, \exists\, y_1, y_2 \in C_2$ öyle ki $x = x_1 +, y_1, y = y_1 + y_2$ dir. Bu durumda:

$(1-\lambda)x + \lambda y = \underbrace{(1-\lambda)x_1 + \lambda y_1}_{\in C_1} + \underbrace{(1-\lambda)x_2 + \lambda x_2}_{\in C_1} \in C_1 + C_2$

olur.

3.9. Teorem: $\alpha \in \mathbb{R}$ ve $C \subseteq \mathbb{R}^n$ bir konveks küme ise

$$\alpha C = \{\alpha x_1 : x_1 \in C\}$$

skaler kat kümesi de konvekstir.

İspat: $x, y \in \alpha C$ ve $0 \leq \lambda \leq 1$ olsun. Buna göre $\exists\, x_1, x_2 \in C$, öyle ki $x = ax_1$ ve $y = ax_2$ dir. Bu durumda

$$(1-\lambda)x + \lambda y = \alpha \underbrace{(1-\lambda)x_1 + \lambda x_2}_{\in C} \in C$$

olur.

3.8. Sonuç: $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ olmak üzere $C_1, C_2 \subset \mathbb{R}^n$ konveks ise $\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2$ de konvekstir.

3.10. Teorem: $C_1, C_2 \subset \mathbb{R}^n$ konveks ise

$$C_1 \times C_2 = \{(x_1, x_2): x_1 \in C_1, x_2 \in C_2\}$$

kartezyen çarpım kümesi de konvekstir.

Bu teoremin ispatı okuyucuya bırakılmıştır.

3.11. Teorem: $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineer dönüşüm ve $C \subset \mathbb{R}^n$ konveks olsun. Bu durumda

$$T(C) = \{T(x): x \in C\}$$

görüntü kümesi $\mathbb{R}^m$'de konvekstir.

İspat: $y_1, y_2 \in T(C)$ ve $0 \leq \lambda \leq 1$ olsun. Buna göre $\exists\, x_1, x_2 \in C$, öyle ki $y_1 = T(x_1)$ ve $y_2 = T(x_2)$ dir. Bu durumda

$$(1-\lambda)y_1 + \lambda y_2 = (1-\lambda)T(x_1) + \lambda T(x_2) = T(\underbrace{(1-\lambda)x_1 + \lambda x_2}_{\in C}) \in T(C)$$

olur.

3.9. Sonuç: $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineer dönüşüm ve $D \subset \mathbb{R}^n$ konveks olsun. Bu durumda

$$T^{-1}(D) = \{x \in \mathbb{R}^n : T(x) \in D\}$$

ters görüntü kümesinin $\mathbb{R}^n$'de konveksdir.

AFİN DÖNÜŞÜM

3.9. Tanım: $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ dönüşümüne $\lambda \in \mathbb{R}$ ve $x, y \in \mathbb{R}^n$ için

$$F((1-\lambda)x + \lambda y) = (1-\lambda)F(x) + \lambda F(y)$$

ise F'ye afin dönüşüm denir.

3.12. Teorem: $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ bir lineer dönüşüm ise T bir afin dönüşümdür.

Bu teoremin ispatı okuyucuya bırakılmıştır.

3.1. Not: Her afin dönüşümün bir lineer dönüşüm olması gerekmez.

3.13. Teorem: $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ afin dönüşümü için $F(0) = 0$ ise F bir lineer dönüşümdür.

İspat: F bir afin dönüşüm olmak üzere $\alpha \in \mathbb{R}$ ve $x \in \mathbb{R}^n$ olsun. Bu durumda

$$F(\alpha) = F(\alpha x + (1-\alpha)\cdot 0) = \alpha F(x) + (1-\alpha)F(0) = \alpha F(x)$$

olur. Şimdi $x, y \in \mathbb{R}^n$ olsun,

$$\begin{aligned} F(x+y) &= F\left(2\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right) + (-1)\cdot 0\right) \\ &= 2F\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right) + (-1)\cdot F(0)) \\ &= 2\cdot\frac{1}{2}F(x) + 2\cdot\frac{1}{2}F(x) = F(x) + F(y)) \end{aligned}$$

olur. O halde F bir lineer dönüşüm olur.

3.14. Teorem: $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ bir lineer dönüşüm ve $a \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ şeklinde tanımlanmış her afin dönüşüm $F(x) = T(x) + a$ biçimindedir.

İspat: F bir afin dönüşüm olsun, $a = F(0) \in \mathbb{R}^n$ ve $T(x) = F(x) - a$ seçilirse T dönüşümü de afin bir dönüşüm olur. Ayrıca

$$T(0) = F(0) - a = F(0) - F(0) = 0$$

olur. Bu durumda $T(x) = F(x) - a$ dönüşümü $T(0) = 0$ sağlayan afin dönüşüm olup 3.13. teorem nedeniyle bir lineer dönüşümdür. Dolayısıyla $F(x)$ afin dönüşümü $T(x) + a$ biçimindedir.

Tersine, $a \in \mathbb{R}^n$ ve T lineer dönüşüm olmak üzere $F(x) = T(x) + a$ ise $\lambda \in \mathbb{R}$ için

$$F((1-\lambda)x + \lambda y) = T((1-\lambda)x + \lambda y) + a$$

$$
\begin{aligned}
&= (1-\lambda)T(x) + \lambda T(y) + a \\
&= (1-\lambda)(F(x) - a) + \lambda(F(y) - a) + a \\
&= (1-\lambda)F(x) - (1-\lambda)a + \lambda F(y) - \lambda a + a \\
&= [(1-\lambda)F(x) + \lambda F(y)] - [(1-\lambda)a + \lambda a] + a \\
&= (1-\lambda)F(x) + \lambda F(y)
\end{aligned}
$$

olur. Buna göre F bir afin dönüşümdür.

3.10. Sonuç: Bir $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ dönüşümünün afin olması için gerek ve yeter şart $T(x) = F(x) - F(0)$ şeklinde tanımlanmış $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ dönüşümünün lineer olmasıdır.

3.10. Tanım: Bir $A \subseteq \mathbb{R}^n$ kümesini kapsayan tüm konveks kümelerin kesişimine,

$$\bigcap_{i \in I} \{A_i : A \subseteq A_i \text{ ve } \forall\, i \in I \text{ için } A_i \text{ konveks}\}$$

kümesine A kümesinin konveks örtüsü veya konveks zarfı denir ve bu küme conv(A) ile gösterilir.

3.11. Sonuç: Bir A kümesinin konveks örtüsü A kümesini kapsayan en küçük konveks kümedir. Daima $A \subset \mathrm{conv}(A)$ geçerlidir. A konveks bir küme ise $\mathrm{conv}(A) \subseteq A$ gerçekleşeceğinden $\mathrm{conv}(A) = A$ elde edilir.

3.15. Teorem: $C \subset \mathbb{R}^n$ kümesinin konveks olması için gerek ve yeter şart elemanlarının tüm konveks kombinasyonlarını içermesidir.

Bu teorem ispatı 3.1. teoreme benzer şekilde yapılması okuyucuya bırakılmıştır.

3.12. Sonuç: Bir $A \subseteq \mathbb{R}^n$ kümesinin elemanlarının tüm konveks kombinasyonlarının kümesini K(A) ile gösterilmek üzere K(A) konvekstir ve $A \subseteq K(A)$ dır.

3.13. Sonuç: Bir A kümesinin konveks olması için gerek ve yeter şart $A = K(A)$ olmasıdır.

3.16. Teorem: $A \subseteq \mathbb{R}^n$ için $\mathrm{conv}(A) = K(A)$ geçerlidir.

Bu teorem ispatı 3.2. teoreme benzer şekilde yapılması okuyucuya bırakılmıştır.

3.14. Sonuç: Bir A kümesinin konveks olması için gerek ve yeter şart $A = \mathrm{conv}(A)$ olmasıdır.

3.11. Tanım: $\emptyset = C \subset \mathbb{R}^n$ kümesini kapsayan tüm kapalı ve konveks kümelerin kesişimine C kümesinin kapalı konveks örtüsü denir ve bu küme $\overline{\mathrm{conv}}(C)$ ile gösterilir.

3.17. Teorem: $\emptyset = C \subset \mathbb{R}^n$ için $\overline{\mathrm{conv}}(C) = \overline{\mathrm{conv}(C)}$ dir.

İspat: $\overline{\mathrm{conv}(C)}$ kümesi C kümesini içeren kapalı ve konveks bir küme olduğundan $\overline{\mathrm{conv}}(C) \subseteq \overline{\mathrm{conv}(C)}$ kapsaması geçerlidir. Ayrıca, tanımı gereği $\overline{\mathrm{conv}}(C)$ kümesi C'yi kapsayan bir konveks küme olduğundan $\overline{\mathrm{conv}}(C) \subseteq \overline{\mathrm{conv}(C)}$ kapsaması olur. Bu kapsamada her tarafın kapanışı alınırsa ve $\overline{\mathrm{conv}}(C)$ kümesinin kapalı olduğuna dikkat edilirse

$$\overline{\mathrm{conv}(C)} \subseteq \overline{\overline{\mathrm{conv}}(C)} = \overline{\mathrm{conv}}(C)$$

elde edilir.

Constantin Carathéodory
13 Eylül 1873, Berlin, Almanya-02 Şubat 1950, Münih, Almanya

3.18. Teorem (Caratheodory Teoremi): $A \subseteq \mathbb{R}^n$ herhangi bir küme olsun. $\mathrm{conv}(A)$ kümesinin herhangi bir elemanı, A kümesinin $n + 1$'den daha fazla olmayan sayıdaki elemanının konveks kombinasyonu şeklinde yazılabilir.

İspat: $x \in conv(A) = K(A)$ olsun, dolayısıyla öyle $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \geq 0$, $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$ sayıları ve $x_i \in A, i = 1, 2, \dots, m$; noktaları vardır ki $x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i$ şeklinde yazılabilir. Şimdi bu yazılışta $m > n + 1$ dolayısıyla $m - 1 > n$ olsun. Bu durumda $\mathbb{R}^n$ uzayında en fazla n tane vektörün lineer bağımsız olabilecegi bilgisi kullanılarak, $\underbrace{x_1 - x_m, x_2 - x_m + \dots + x_{m-1} - x_m}_{m-1 \text{ tane}}$ vektörlerinin $\mathbb{R}^n$ uzayında lineer bagımlı olmak zorunda oldukları sonucu elde edilir. Bu ise hepsi birden sıfır olmayan $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ sayıları için

$$\alpha_1(x_1 - x_m) + \alpha_2(x_2 - x_m) + \dots + \alpha_{m-1}(x_{m-1} - x_m) = 0 \qquad (1)$$

eşitliğinin sağlanmasını gerektirir. $\alpha_m = -\sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i$ denirse (1) eşitliğinden

$$\alpha_1 x_1 - \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_{m-1} x_{m-1} - \alpha_1 x_m - \alpha_2 x_m - \alpha_{m-1} x_m = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i x_i - \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i x_m = \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i x_i + \alpha_m x_m = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i = 0$$

elde edilir. Böylece $\forall\, t \in \mathbb{R}$ için $x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i - t \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_m = \sum_{i=1}^{m-1} (\lambda_i - \alpha_m) x_m$ yazılabilir. Şimdi amacımız, öyle bir $t_0 \in \mathbb{R}$ bulmaktır ki $i = 1, 2, \dots, m$ için $\lambda_i - t_0 \alpha_i \geq 0$ ve $\sum_{i=1}^{m} (\lambda_i - t_0 \alpha_i) = 1$ sağlansın ve en az bir $\lambda_i - t_0 \alpha_i$ katsayısını sıfır yapsın.

$i = 1, 2, \dots, m$ için α_i'lerin hepsi birden sıfır degil ve $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 0$ olduğundan $I = \{i : \alpha_i > 0,\ i = 1, 2, \dots, m\}$ kümesi iyi tanımlıdır. Dolayısıyla

$$\exists\, t_0 = \frac{\lambda_i}{\alpha_i} = \min\left\{\frac{\lambda_i}{\alpha_i} : i \in I\right\} \geq 0$$

dir. Bu şekilde belirlenen t_0 için, eğer $i \in I$ ise

$$\lambda_i - t_0 \alpha_i = \alpha_i \left(\frac{\lambda_i}{\alpha_i} - t_0\right) \geq 0$$

özel olarak $i = i_0$ ise $\lambda_{i_0} - t_0 \alpha_{i_0} = \lambda_{i_0} - \frac{\lambda_{i_0}}{\alpha_{i_0}} \alpha_{i_0} = 0$, $i \notin I$ ise $\alpha_i \leq 0$ ve $t_0 \geq 0$ olduğundan $\lambda_i - t_0 \alpha_i \geq 0$ olur. Böylece $i = 1, 2, \dots, m$ için $\lambda_i - t_0 \alpha_i \geq 0$, $\exists\, i_0 \in I \subseteq \{1, 2, \dots, m\}$ için $\lambda_{i_0} - t_0 \alpha_{i_0} = 0$ ve

$$\sum_{i=1}^{m} (\lambda_i - t_0 \alpha_i) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i - t_0 \sum_{i=1}^{m} \alpha_m = 1 - t \cdot 0 = 1$$

olur.

Sonuç olarak, $x=\sum_{i=1}^{m}(\lambda_i - t_0\alpha_i)x_i$ noktası, A kümesinin $x_1, x_2, \dots, x_m$ noktalarının bir konveks kombinasyonu ve en az bir $i_0 \in \{1,2,\dots,m\}$ için $\lambda_{i_0} - t_0\alpha_{i_0} = 0$ olduğundan x noktası A kümesinin $m-1$ tane elemanının konveks kombinasyonu şeklinde yazılmış olur.

Eğer $m-1 = n+1$ ise ispat biter, yok $m-1 > n+1$ ise ispatın basındaki m yerine $m-1$ yazılarak aynı işlemler tekrar edilerek yine en az bir katsayı 0 yapılabilir. Bu indirgeme işlemi x noktasının konveks kombinasyondaki eleman sayısı $n+1$ olana kadar devam ettirilebilir.

Johann Radon
16 Aralık 1887, Decin, Çekya - 25 Mayıs 1956, Viyana, Avusturya

3.19. Teorem (Radon Teoremi): $C = \{x_1, x_2, \dots, x_r\}$ kümesi $\mathbb{R}^n$'de sonlu noktalı herhangi bir küme olsun. Eğer $r \geq n+2$ ise C kümesi $\mathrm{conv}(C_1) \cap \mathrm{conv}(C_2) \neq \emptyset$ sağlanacak biçimde ayrık iki C_1 ve C_2 alt kümesine parçalanabilir.

İspat: $r \geq n+2$ olduğundan C kümesi afin bağımlıdır. Bu durumda, hepsi birden sıfır olmayan öyle $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ sayıları vardır ki

$$\sum_{i=1}^{r}\alpha_i x_i = 0 \text{ ve } \sum_{i=1}^{m}\alpha_i = 0$$

eşitlikleri sağlanır. Bu α_i sayılarının en az ikisi farklı işaretli olmak zorundadır. Dolayısıyla, genelliği bozmaksızın $1 \leq k < r$ sağlayan herhangi bir k için

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \geq 0,\ \alpha_{k+1}, \alpha_{k+2}, \dots, \alpha_r < 0$$

olduğunu kabul edebilim. Ayrıca α_i'lerin toplamı 0 olduğundan

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k = -(\alpha_{k+1} + \alpha_{k+2} + \cdots + \alpha_r)$$

şeklinde tanımlanmış olan α_i sayısı pozitiftir. Şimdi aşağıdaki biçimde tanımlanmıs x noktasını göz önüne alalım:

$$0 = \sum_{i=1}^{r}\alpha_i x_i = \sum_{i=1}^{k}\alpha_i x_i + \sum_{i=k+1}^{r}\alpha_i x_i = \sum_{i=1}^{k}\frac{\alpha_i}{\alpha}x_i + \sum_{i=k+1}^{r}\frac{\alpha_i}{\alpha}x_i$$

$$x = \sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha_i}{\alpha} x_i = \sum_{i=k+1}^{r} \left(-\frac{\alpha_i}{\alpha} \right) x_i$$

dir. Böylece x noktası $x_1, x_2, \dots, x_k$ noktalarının bir konveks kombinasyonu olur, dolayısıyla $x \in \text{conv}\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ dir. Benzer biçimde x noktası $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_r$ noktalarının bir konveks kombinasyonu olduğundan $x \in \text{conv}\{x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_r\}$ olur.

$C_1 = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ ve $C_2 = \{x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_r\}$ kümeleri tanımlanırsa $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$ ve $\text{conv}(C_1) \cap \text{conv}(C_2) \neq \emptyset$ olur.

Eduard Helly
01 Haziran 1884, Viyana, Avusturya - 28 Kasım 1943, Şikago, Illinois, ABD

3.20. Teorem (Helly Teoremi): $C_1, C_2, \dots, C_r \in \mathbb{R}^n$, $r \geq n+1$ ve $i = 1, 2, \dots, k$ için C_i kümeleri konveks olsunlar. Eğer bu konveks kümelerden herhangi $n+1$ tanesinin kesişimi boş değil ise $\bigcap_{i=1}^{r} C_i \neq \emptyset$ dir.

İspat: İspatı r üzerinden tümevarım ile yapalım. Eğer $r = n+1$ ise ispatlayacak bir şey yoktur. Şimdi $r-1 \geq n+1$ olmak üzere hipotez $r-1$ tane konveks küme için doğru olsun. Bu durumda hipotez gereği herbir $1 \leq i \leq r$ için

$$x \in C_1 \cap C_2 \cap \dots \cap C_{i-1} \cap C_{i+1} \cap \dots \cap C_r$$

olan bir x_i noktası vardır. $r \geq n+2$ olduğundan $S = \{x_1, x_2, \dots, x_r\}$ kümesine Radon teoremini uygularak $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ ve $\text{conv}(S_1) \cap \text{covn}(S_2) \neq \emptyset$ sağlayan S_1ve S_2 kümelerini elde edebiliriz. Genelligi kaybetmeksizin $1 \leq k \leq r$ olmak üzere $S_1 = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ ve $S_2 = \{x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_r\}$ varsayalım. Şimdi $\text{conv}(S_1) \cap \text{covn}(S_2) \neq \emptyset$ nedeniyle var olan $x \in \text{conv}(S_1) \cap \text{covn}(S_2)$ noktasının $i = 1, 2, \dots, r$ için $x \in C_i$ olduğunu gösterelim. Gerçekten de, $1 \leq k$ olduğunda $x_i \in C_{k+1} \cap \dots \cap C_r$ olur. Buna göre C_i ler konveks olduğundan

$$x \in \text{conv}\{x_1, x_2, \dots, x_k\} \subset C_{k+1} \cap \dots \cap C_r$$

bulunur. $i > k+1$ olduğunda ise $x_i \in C_1 \cap C_2 \cap \dots \cap C_k$ ve dolayısıyla

$$x \in \text{conv}\{x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_r\} \subset C_1 \cap C_2 \cap \dots \cap C_k$$

elde edilir. O halde $x \in C_1 \cap C_2 \cap \dots \cap C_k \cap C_{k+1} \dots \cap C_r$ olur. Bu ise istenendir.

3.12. Tanım: $M \subset \mathbb{R}^n$ konveks küme olmak üzere, eğer bir $x \in M$ noktası M kümesinin elemanlarının bir konveks kombinasyonu şeklinde yazılamıyorsa ya da eşdeger olarak $x = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2$ olacak biçimde $x_1, x_2 \in M$ noktaları bulunamıyor ise x noktasına M kümesinin bir köşe noktası denir.

3.13. Tanım: Sonlu noktalı bir kümenin konveks örtüsüne bir politop denir.

3.14. Tanım: $x_1, x_2, \dots, x_{k+1} \in \mathbb{R}^n$ noktaları afin bağımsız (yani $x_2 - x_1, x_3 - x_1, \dots, x_{k+1}, \dots, x_1$ lineer bağımsız) olmak üzere

$$\text{conv}\{x_1, x_2, \dots, x_{k+1}\} = \left\{ \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i x_i : \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0, i = 0,1,\dots,k \right\}$$

kümesine $\mathbb{R}^n$'de $x_1, x_2, \dots, x_{k+1}$ köşe noktalı bir k-simpleks denir.

Örnek: 0-simpleks bir noktadır, 1-simpleks bir doğru parçasıdır, 2-simpleks bir üçgensel bölgedir, 3-simpleks bir dörtyüzlüdür.

3.21. Teorem: $\emptyset = C \subset \mathbb{R}^n$ konveks küme ve $y \notin C$ olsun. Eger C kümesinin y noktasına en yakın noktası varsa bu nokta tektir. Yani $\exists\, z \in C$ için $\rho(C, y) = \|x - y\|$ ise z tektir.

İspat: Varsayalım ki$x_1, x_2 \in C$ noktaları $y \notin C$ noktasına en yakın olan iki nokta olsun, yani

$$\rho(C, y) = \|x_1 - y\| = \|x_2 - y\| \tag{1}$$

olsun. C konveks olduğundan $\frac{x_1 + x_2}{2} \in C$ olup aşağıdaki eşitsizlik sağlanır,

$$\begin{aligned} \rho(C, y) &= \left\| \frac{x_1 + x_2}{2} - y \right\| \\ &= \frac{1}{2} \|(x_1 - y) + (x_2 - y)\| \\ &\leq \frac{1}{2} \left(\|x_1 - y\| + \|x_2 - y\| \right) \\ &= \rho(C, y) \end{aligned}$$

dir. Bu durumda $\|(x_1 - y) + (x_2 - y)\| \leq \|x_1 - y\| + \|x_2 - y\|$ olup üçgen eşitsizliğinin eşitlik halidir. Böylece $\exists\, \alpha \geq 0$ için $x_1 - y = \alpha(x_2 - y)$ gerçeklenir. (1) eşitliği nedeniyle $\alpha = 1$ dolayısıyla da

$$x_1 - y = x_2 - y$$
$$x_1 = x_2$$

bulunur.

3.15. Sonuç: $C \subset \mathbb{R}^n$ konveks ve kapalı bir küme ve $y \notin C$ ise daima C kümesinin y noktasına en yakın tek bir noktası vardır.

AYIRMA TEOREMLERİ

3.15. Tanım: $M, N \subset \mathbb{R}^n$, $0 \neq a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\forall\, m \in M, n \in N$ için $\langle a, m\rangle \leq b \leq \langle a, n\rangle$ eşitsizliği oluyor ise $H = \{x : \langle a, x\rangle = b\}$ hiperdüzlemi M ve N kümelerini ayırır denir.

Dikkat edilirse $M \subset \{x : \langle a, x\rangle \leq b\}$ ve $N \subset \{x : \langle a, x\rangle \geq b\}$ gerçeklendiginden, M ve N kümeleri $H = \{x : \langle a, x\rangle = b\}$ hiperdüzleminin belirlediği yarı uzaylar tarafından kapsanırlar.

3.22. Teorem: $0 \neq M \subset \mathbb{R}^n$, konveks bir küme ve $\overline{M}$, M kümesinin kapanışı bir kümesi olmak üzere $x_0 \notin \overline{M}$ olsun. Bu durumda öyle bir $a \neq 0$ noktası ve bir $\varepsilon > 0$ sayısı vardır ki her $x \in M$ için $\langle a, x\rangle = \langle a, x_0\rangle - \varepsilon_0$ eşitsizliği vardır. (Kapanış için bkz. Topoloji derslerine)

İspat: $\overline{M}$ kümesi kapalı ve $x_0 \notin \overline{M}$ olduğundan önceki 3.15. sonuç nedeniyle x_0 noktasına en yakın olan noktaya $y \in \overline{M}$ diyelim. Dolayısıyla her $x \in \overline{M}$ için

$$\|x - x_0\| \geq \|y - x_0\| \qquad (1)$$

olur. Öte yandan $\overline{M}$ konveks olduğundan $x \in \overline{M}$ ve $0 \leq \lambda \leq 1$ için $(1-\lambda)y + \lambda x \in \overline{M}$ dir.

Şimdi $x \in M \subset \overline{M}$ ve $0 \leq \lambda \leq 1$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \|y - x_0\|^2 &\leq \|(1-\lambda)y + \lambda x - x_0\|^2 \\ &= \|(1-\lambda)y + \lambda x - x_0\|^2 \\ &= \langle y - x_0 + \lambda(x-y), y - x_0 + \lambda(x-y)\rangle \\ &= \|y - x_0\|^2 + 2\lambda\langle x - y, y - x_0\rangle + \lambda^2\|x - y\|^2 \end{aligned}$$

elde edilir, dikkat buradaki eşitsizlik (1) eşitsizliğinden dolayı geçerlidir. Şu halde $x \in M$ ve $0 \leq \lambda \leq 1$ ne olursa olsun $2\langle x - y, y - x_0\rangle$ geçerlidir. Bu ise her $x \in M$ için

$$\langle x - y, y - x_0\rangle \geq 0 \qquad (2)$$

gerçeklenmesi anlamına gelir. Şimdi $a = x_0 - y$ diyelim ve $\varepsilon_0 = \|a\|^2 = \langle a, a\rangle$ diyelim. $x_0 \notin \overline{M}$ olduğundan $a \neq 0$ ve $\varepsilon_0 > 0$ olur. Dolayısıyla, (2) eşitsizliği nedeniyle $x \in M$ için

$$\begin{aligned}\langle x - y, y - x_0\rangle \geq 0 &\Leftrightarrow \langle x - y, -a\rangle \geq 0\\ &\Leftrightarrow -\langle a, x\rangle + \langle a, y\rangle \geq 0\\ &\Leftrightarrow \langle a, x\rangle \leq \langle a, y\rangle\\ &\Leftrightarrow \langle a, x\rangle \leq \langle a, x_0 - a\rangle\\ &\Leftrightarrow \langle a, x\rangle \leq \langle a, x_0\rangle - \langle a, a\rangle\\ &\Leftrightarrow \langle a, x\rangle \leq \langle a, x_0\rangle - \varepsilon_0\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla $x \in M$ için $\langle a, x\rangle \leq \langle a, x_0\rangle - \varepsilon_0$ dir. Eğer $b = \langle a, x_0\rangle - \varepsilon_0$ alınırsa $x \in M$ için $\langle a, m\rangle \leq b \leq \langle a, n\rangle$ eşitsizlikleri elde edilir, bu ise (x_0) tek nokta konveks kümesi ile M konveks kümesinin $\{x : \langle a, x\rangle = b\}$ hiperdüzlemi tarafından ayrıldığı anlamına gelir.

3.23. Teorem: $M \subset \mathbb{R}^n$ konveks bir küme ve $x_0 \notin M$ olsun. Bu durumda öyle bir $a \neq 0$ noktası vardır ki her $x \in M$ için $\langle a, x\rangle \leq \langle a, x_0\rangle$ olur.

İspat: $x_0 \notin M$ ve $x_0 \notin \overline{M}$ ise 3.22. teorem nedeniyle her $x \in M$ için $\langle a, x\rangle \leq \langle a, x_0\rangle$ olur ve ispat biter. //

Şimdi $x_0 \notin M$ ve $x_0 \notin \overline{M}$ olsun. Bu durumda x_0 noktası M kümesine ait olmayan bir sınır noktası olur. Dolayısıyla $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \notin \overline{M}$ ve $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ gerçekleyen bir (x_n) dizisi vardır. Bu durumda 3.22. teorem nedeniyle $\forall n \in \mathbb{N}$ için $a_n \neq 0$ noktası ve $\varepsilon_0 > 0$ sayısı vardır ki $\forall x \in M$ için

$$\langle a_n, x\rangle \leq \langle a_n, x_n\rangle - \varepsilon_n < \langle a_n, x_n\rangle$$

gerçeklenir. Eşitsizliğin her iki tarafı kank $\|a_n\| \neq 0$ ile bölünürse $\forall n \in \mathbb{N}$ ve $\forall x \in M$ için

$$\langle \frac{a_n}{\|a_n\|}, x\rangle \leq \langle \frac{a_n}{\|a_n\|}, x_n\rangle \qquad (3)$$

dir. Ayrıca $\left\|\frac{a_n}{\|a_n\|}\right\| = 1$ olduğundan $\left(\frac{a_n}{\|a_n\|}\right)$ dizisi sınırlıdır. Dolayısıyla $\lim_{k\to\infty} \frac{a_{n_k}}{\left\|a_{n_k}\right\|} = a \in \mathbb{R}^n$ olan yakınsak bir $\left(\frac{a_n}{\|a_n\|}\right)$ alt dizisi vardır. Bu durumda $\forall n \in \mathbb{N}$ ve $\forall x \in M$ için (2) eşitsizliği nedeniyle

$$\langle \frac{a_{n_k}}{\|a_{n_k}\|}, x\rangle < \langle \frac{a_{n_k}}{\|a_{n_k}\|}, x_{n_k}\rangle$$

denklemi geçerlidir. Burada $k \to 1$ için limite geçildiginde $\forall x \in M$ için $\langle a, x\rangle \leq \langle a, x_0\rangle$ bulunur. Dikkat edilirse $\|a\| = 1$ ve dolayısıyla da $a \neq 0$ dır.

3.24. Teorem: $M_1, M_2 \subset \mathbb{R}^n$ konveks kümeler ve $M_1 \cap M_2 = \emptyset$ olsun. Bu durumda öyle bir $a \neq 0$ noktası vardır ki her $x_1 \in M_1$ ve her $x_2 \in M_2$ için $\langle a, x_1 \rangle \leq \langle a, x_2 \rangle$ olur.

İspat: $M = M_1 - M_2$ diyelim. $M_1 \cap M_2 = \emptyset$ olduğundan $0 \notin M$ dir. 3.23. teorem nedeniyle öyle bir $a \neq 0$ noktası vardır ki her $x \in M$ için $\langle a, x \rangle \leq \langle a, 0 \rangle$ olur. Ayrıca

$$x \in M = M_1 - M_2 \Leftrightarrow x = x_1 - x_2, x_1 \in M_1, x_2 \in M_2$$

olduğundan $\forall\, x_1 \in M_1, \forall\, x_2 \in M_2$ için

$$\langle a, x_1 - x_2 \rangle \leq 0 \Leftrightarrow \langle a, x_1 \rangle \leq \langle a, x_2 \rangle$$

bulunur.

3.16. Tanım: $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kümesine $\lambda > 0$ ve $x \in K$ için $\lambda x \in K$ ise yani pozitif skaler çarpım altında kapalı ise K kümesine bir koni denir. Eğer K konisi aynı zamanda konveks bir küme ise K'ya konveks koni denir.

$\{0\}$ kümesi, lineer alt uzaylar, orjinden geçen hiperdüzlemlerin belirledigi açık ve kapalı yarı-uzaylar, pozitif dördül kümesi: $\{x \in \mathbb{R}^n : x > 0\}$, negatif olmayan dördül kümesi: $\{x \in \mathbb{R}^n : x \geq 0\}$ birer konveks konidirler.

$x_1, x_2, \dots, x_m \in \mathbb{R}^n$, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m > 0$ olmak üzere $x_1\lambda_1 + x_2\lambda_2 + \cdots + x_m\lambda_m$ toplamına $x_1, x_2, \dots, x_m$ noktalarının konik kombinasyonu denir.

3.25. Teorem: $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kümesinin konveks koni olması için gerek ve yeter şart $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ ve $x_1, x_2 \in K$ için $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in K$ olmasıdır.

İspat: K bir konveks koni, $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ ve $x_1, x_2 \in K$ olsun. Bu durumda

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = \underbrace{(\lambda_1 + \lambda_2)}_{>0}\left(\underbrace{\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2} x_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2} x_2}_{\in K}\right)$$

yazılabilir. Burada $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ olduğundan $\lambda_1 + \lambda_2 > 0$, $\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}, \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2} \in (0,1)$ ve $\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2} = 1$ olur. K konveks olduğundan $\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2} x_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2} x_2 \in K$ olur. Ayrıca bir koni olduğundan $(\lambda_1 + \lambda_2)\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2} x_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2} x_2\right) \in K$ elde edilir.

Tersine $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ ve $x_1, x_2 \in K$ için

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in K \qquad (1)$$

geçerli olsun. K'nın bir koni olduğunu gösterelim: $\lambda > 0$ ve $x \in K$ için

$$\lambda x = \frac{\lambda}{2}x + \frac{\lambda}{2}x \in K$$

yazılabildiginden K bir koni olur. Şimdi K'nın konveks bir küme olduğunu gösterelim:

$0 \leq \lambda \leq 1$, $x_1, x_2 \in K$ olsun. $\lambda = 0$ için $x_1 \in K$, $\lambda = 1$ için $x_2 \in K$ olur. Şimdi $0 \leq \lambda \leq 1$ olsun, bu durumda (1) nedeniyle

$$\underbrace{(1-\lambda)}_{>0}x_1 + \underbrace{\lambda}_{>0} x_2 \in K$$

içermesi gerçeklenir, bu ise K'nın konveks olması demektir. Böylece K hem koni hem de konveks olduğundan konveks bir koni olur. //

Böylece konveks koniler herhangi iki elemanının konik kombinasyonunu içeren kümeler olarak da tanımlanabilir.

3.17. Tanım: $\emptyset \neq K \subseteq \mathbb{R}^n$ bir koni olmak üzere

$$K^* = \{x^* \in \mathbb{R}^n : \forall\, x \in K, \langle x, x^* \rangle \geq 0\}$$

kümesine K konisinin dual konisi denir.

3.26. Teorem: $\emptyset \neq K \subseteq \mathbb{R}^n$ herhangi bir koni olmak üzere K^* dual konisi daima konveks ve kapalı bir konidir.

Bu teoremin ispatı okuyucuya bırakılmıştır.

3.27. Teorem: $\emptyset \neq K \subseteq \mathbb{R}^n$ bir koni olmak üzere K ve $\overline{K}$ aynı dual koniye sahiptir, yani $K^* = (\overline{K})^*$ geçerlidir.

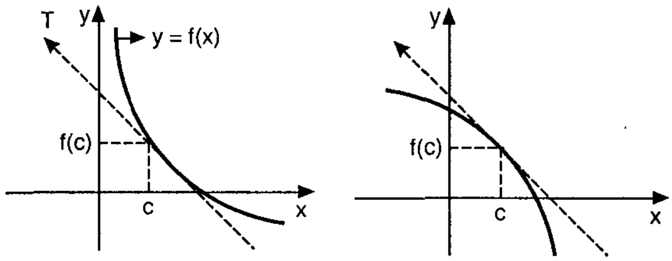
İspat: $x^* \in (\overline{K})^*$ ise $\forall\, x \in \overline{K}$ için $\langle x, x^* \rangle \geq 0$ ve dolayısıyla $\forall\, x \in K$ için $\langle x, x^* \rangle \geq 0$ gerçeklenir, bu ise $x^* \in K^*$ demektir. Tersine $x^* \in K^*$ olsun. Bu durumda $\forall\, x \in K$ için $\langle x, x^* \rangle \geq 0$ geçerlidir. Şimdi $\bar{x} \in \overline{K}$ olsun, bu durumda elemanları K konisinden olan ve $x_k \to \bar{x}$ sağlayan bir (x_k) dizisi vardır. Böylece $\forall\, k \in \mathbb{N}$ için $\langle x_k, x^* \rangle \geq 0$ gerçeklenir. Şimdi $k \to \infty$ için limite geçilirse $\langle \bar{x}, x^* \rangle \geq 0$ elde edilir, buradaki $\bar{x} \in \overline{K}$ herhangi olduğundan $x^* \in (\overline{K})^*$ elde edilir.

KONVEKS ve KONKAV FONKSİYONLAR

3.18. Tanım: $A \subset \mathbb{R}, f: A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon, $c \in A$ ve T doğrusu, $y = f(x)$ eğrisinin $(c, f(c))$ noktasındaki teğeti olsun.

(i) Eğri c'nin en az bir komşuluğunda T teğetinin üst tarafında kalıyorsa, f fonksiyonu $x = c$ de konvekstir (çukurdur veya içbükeydir) denir.

(ii) Eğri c'nin en az bir komşuluğunda T teğetinin üst tarafında kalıyorsa, f fonksiyonu $x = c$ de konkavdır (tümsektir veya dışbükeydir) denir.



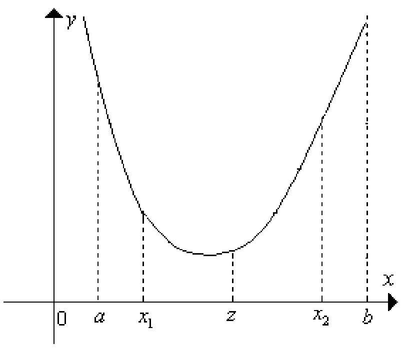
1. Şekildeki f fonksiyonu $(c, f(c))$ de konvekstir (içbükeydir veya çukurdur).
2. Şekildeki f fonksiyonu $(c, f(c))$ de konkavdır (tümsektir veya dışbükeydir).

3.28. Teorem: $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon, her $x_1, x_2 \in [a, b]$ ve her $\lambda \in [0, 1]$ için

(i) $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$ oluyorsa f fonksiyonu [a, b] aralığında konvekstir (çukurluktur).

(ii) $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$ oluyorsa f fonksiyonu [a, b] aralığında konkavdır (tümsekliktir).

İspat: (i) $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ şekildeki gibi konveks bir fonksiyon olsun,



$a \leq x_1 < x_2 \leq b$ olacak şekilde $x_1, x_2 \in [a, b]$ seçelim. $\lambda \in [0, 1]$ olmak üzere

$$z = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$$

denilirse $x_1 < z < x_2$ dir. Bu eşitliğin her iki yanına $-\lambda z$ eklenirse,

$$z - \lambda z = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 - \lambda z$$

elde edilir. Basit bir işlemle,

$$(1-\lambda)(x_2 - z) = \lambda(z - x_1) \qquad (1)$$

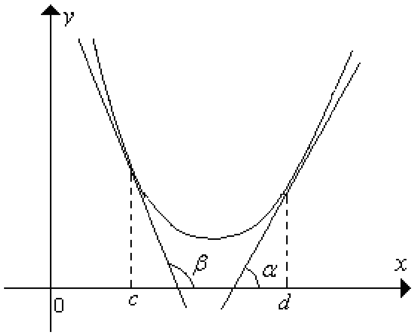
yazılabilir. Ortalama değer teoreminden

$$f(z) - f(x_1) = f'(c)(z - x_1) \qquad (2)$$

olacak şekilde en az bir $c \in (x_1, z)$ ve

$$f(x_2) - f(z) = f'(d)(x_2 - z) \qquad (3)$$

olacak şekilde en az bir $d \in (z, x_2)$ vardır. Bu durumda,



şekildeki gibi c ve d noktalarınıteğetlerini çizelim. Bu iki teğete dikkat edersek,

$$\tan\beta \le \tan\alpha$$

olduğunu görürüz. Şu halde "Bir fonksiyonun türevi o noktadaki teğetin eğimine eşittir" teoremine göre,

$$f'(c) \le f'(d) \qquad (4)$$

dir. (1), (3) ve (4) den,

$$\begin{aligned}\lambda[(f(z) - f(x_1)] &= f'(c)\lambda(z - x_1) \\ &\le f'(d)\lambda(z - x_1) && \text{(4'den)} \\ &= f'(d)(1-\lambda)(x_2 - z) && \text{(1'den)} \\ &= (1-\lambda)[f(x_2) - f(z)] && \text{(3'den)}\end{aligned}$$

bulunur. Şu halde $\lambda[(f(z) - f(x_1)] \le (1-\lambda)[f(x_2) - f(z)]$ dir. Buradan

$$\lambda\, f(z) - \lambda\, f(x_1) \le f(x_2) - f(z) - \lambda\, f(x_2) + \lambda\, f(z)$$

$$f(z) \le \lambda\, f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

olur. z'nin değeri yerine konulursa

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \le \lambda\, f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

bulunur.

(ii) Benzer şekilde ispat edilir.

Örnek: $f: [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ fonksiyonunun konveks olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) - \lambda\, f(x_1) - (1-\lambda) f(x_2)$$

$$[\lambda\, x_1 + (1-\lambda)x_2]^2 - \lambda\, x_1^2 - (1-\lambda)x_2^2$$

$$\lambda^2 x_1^2 - 2\lambda(1-\lambda)x_1 x_2 + (1-\lambda)^2\, x_2^2 - \lambda\, x_1^2 - (1-\lambda)x_2^2$$

$$(\lambda^2-\lambda)[x_1^2-2x_1x_2+x_2^2]$$
$$(\lambda^2-\lambda)(x_1-x_2)^2$$
olur. $\lambda\in[0,1]$ için $\lambda^2<\lambda$ olduğundan $\lambda^2-\lambda<0$ olduğundan,
$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)-\lambda f(x_1)-(1-\lambda)f(x_2)\leq 0$$
$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\leq \lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$$
olur. Şu halde verilen f fonksiyonu konvekstir.

Örnek: $x\in\mathbb{R}^n$ için $f(x)=\|x\|$ şeklinde tanımlanan norm fonksiyonu bir konveks fonksiyon olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $x_1,x_2\in\mathbb{R}^n$ ve $0\leq\lambda\leq 1$ için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:
$$\|\lambda x_1+(1-\lambda)x_2\|\leq\|\lambda x_1\|+\|(1-\lambda)x_2\|=\lambda\|x_1\|+(1-\lambda)\|x_2\|$$
dir.

Örnek: $\emptyset\neq K\subseteq\mathbb{R}^n$ kapalı konveks küme olmak üzere $\forall\, x\in\mathbb{R}^n$ noktasının K kümesine uzaklığını veren $f(x)=\underbrace{\min}_{k\in K}\|x-k\|$ fonksiyonu konveks fonksiyon olduğunu gösteriniz.

Çözüm: K kapalı konveks küme olduğundan 3.15. sonuç nedeniyle bir $x_1\in\mathbb{R}^n$ için $\exists\, k_1\in K, f(x_1)=\min\|x_1-k\|$ ve bir $\exists\, k_2\in K, f(x_2)=\min\|x_2-k\|$ geçerlidir. Ayrıca K konveks olduğundan $0\leq\lambda\leq 1$ için $(1-\lambda)x_1+\lambda x_2$ geçerli olur. Buna göre
$$f((1-\lambda)x_1+\lambda x_2)=\min\|(1-\lambda)x_1+\lambda x_2-k\|$$
$$\leq\|(1-\lambda)x_1+\lambda x_2-(1-\lambda)k_1+\lambda k_2\|$$
$$=\|(1-\lambda)(x_1-k_1)+\lambda(x_2-k_2)\|$$
$$\leq(1-\lambda)\|x_1-k_1\|+\lambda\|x_2-k_2\|$$
$$=(1-\lambda)f(x_1)+\lambda f(x_2)$$
elde edilir.

3.19. Tanım: Eğer $x_1\neq x_2$ ve $0\leq\lambda\leq 1$ için
$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)<\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$$
ise f fonksiyonu kesin konvekstir
$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)>\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$$
ise f fonksiyonu kesin konkavdır denir.

Johan Ludwig William Valdemar Jensen
08 Mayıs 1859, Nakskov, Danimarka - 05 Mart 1925, Kopenhag, Danimarka

3.29. Teorem (Jensen Eşitsizliği): $x_1, x_2, \dots, x_m \in \mathbb{R}^n$ ve $\lambda_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$ için

i) f konveks fonksiyon olmak üzere
$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_m x_m) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \cdots + \lambda_m f(x_m)$
eşitsizliği geçerlidir.

ii) f konkav fonksiyon olmak üzere
$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_m x_m) \geq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \cdots + \lambda_m f(x_m)$
eşitsizliği geçerlidir.

İspat: Tümevarım yöntemiyle ispatı yapalım.

i) P(2) için $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2$ ve $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$, $\sum_{i=1}^{2} \lambda_i = 1$ için $\lambda_1 = 1 - \lambda_2$ dir.

$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$
$f(\lambda_1 x_1 + (1 - \lambda_1) x_2) \leq \lambda_1 f(x_1) + (1 - \lambda_1) f(x_2)$
olup doğrudur.

P(k) için $x_1, x_2, \dots, x_k \in \mathbb{R}^k$ ve $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \geq 0$, $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$ için

$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_k x_k) < \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \cdots + \lambda_k f(x_k)$
doğru olduğunu kabul edelim.

P(k + 1) için $x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1} \in \mathbb{R}^{k+1}$ ve $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, \lambda_{k+1} \geq 0$, $\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i = 1$ için k yerine k + 1 alınmasında sakınca olmayacağından

$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_{k+1} x_{k+1}) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \cdots + \lambda_{k+1} f(x_{k+1})$
eşitsizliği gerçeklenir.

ii) (i) ye benzer yöntemle yapılır.

3.30. Teorem: $\forall\, i = \{1, 2, \dots, m\}$ için f_i fonksiyonları konveks ve $\alpha_i \geq 0$ olmak üzere

$$f(x) = \alpha_1 f_1(x_1) + \alpha_2 f_2(x_2) + \cdots + \alpha_m f_m(x_m)$$

fonksiyonu da konvekstir.

İspat: $x, y \in \mathbb{R}^n$ ve $0 \leq \lambda \leq 1$ olsun.

$$\begin{aligned}
&f(\lambda x + (1-\lambda)y)\\
&= \alpha_1 f_1(\lambda x + (1-\lambda)y) + \alpha_2 f_2(\lambda x + (1-\lambda)y) + \cdots + \alpha_m f_m(\lambda x + (1-\lambda)y)\\
&\leq \alpha_1(\lambda f_1(x) + (1-\lambda) f_1(y)) + \alpha_2(\lambda f_2(x) + (1-\lambda) f_2(y))) + \cdots\\
&\qquad + \alpha_m(\lambda f_m(x) + (1-\lambda) f_m(y))\\
&= \lambda(\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \cdots + \alpha_m f_m(x)) + (1-\lambda)(\alpha_1 f_1(y) + \alpha_2 f_2(y) + \cdots\\
&\qquad + \alpha_m f_m(y))\\
&= \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)
\end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla f konvekstir.

3.31. Teorem: $\forall\, i \in I$ için f_i fonksiyonları konveks ise $f(x) = \underbrace{\sup}_{i\in I} f_i(x)$ şeklinde tanımlanan konveks fonksiyonların supremum fonksiyonu da konvekstir.

İspat: $\underbrace{\sup}_{i\in I} f_i(x) = \alpha$ olmak üzere

$$f(x) = \underbrace{\sup}_{i\in I} f_i(x) \Leftrightarrow \forall\, i \in I, \alpha \geq f_i(x) \Leftrightarrow \alpha \geq \bigcap_{i\in I} f_i$$

dir. $\forall\, i \in I$ için f_i fonksiyonları konveks olduğundan $\alpha \geq \bigcap_{i\in I} f_i$ vardır. Bu da $f(x) = \underbrace{\sup}_{i\in I} f_i(x)$ konveks olduğunu gösterir.

3.32. Teorem: $I \subseteq \mathbb{R}$ açık bir aralık, $a, b, x \in I$, $a < x < b$ ve $f : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu konveks olsun. Buna göre

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(b)-f(x)}{b-x}$$

dir.

İspat: $x = \frac{b-x}{b-a} \cdot a + \frac{x-a}{b-a} \cdot b$

$$f(x) = f\left(\frac{b-x}{b-a}\cdot a + \frac{x-a}{b-a}\cdot b\right)$$
yazılabilir. f konveks olduğundan
$$f(x) \le \frac{b-x}{b-a}\cdot f(a) + \frac{x-a}{b-a}\cdot f(b)$$
eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlikte her taraftan f(a) çıkartılırsa
$$f(x) - f(a) \le \frac{b-x}{b-a}\cdot f(a) + \frac{x-a}{b-a}\cdot f(b) - f(a)$$
$$f(x) - f(a) \le \frac{x-a}{b-a}\cdot [f(b) - f(a)]$$
elde edilir. Böylece $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \le \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ eşitsizliği gösterilmiş olur. $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \le \frac{f(b)-f(x)}{b-x}$ eşitsizliği de benzer biçimde gösterilir.

3.34. Teorem: $(a,b) \subset \mathbb{R}$, $f: (a,b) \to \mathbb{R}$, $f(x) = y$ fonksiyonu (a,b) aralığında birinci ve ikinci türevlenebilen olsun.

(i) Her $x \in (a,b)$ için $f''(x) > 0$ ise, f fonksiyonu (a,b) aralığında konvekstir (içbükeydir).

(ii) Her $x \in (a,b)$ için $f''(x) < 0$ ise, f fonksiyonu (a,b) aralığında konkavdır (dışbükeydir).

İspat: (i) $f''(x) > 0$ olması (a,b) aralığında $f'(x)$ fonksiyonunun artan olduğunu türevin uygulamaları konusunda gösterildi. Şu halde $c < d$ için $f'(c) < f'(d)$ dir. Buna göre, $a \le x_1 < x_2 \le b$, $x_1, x_2 \in [a,b]$ için, $x_1 \le z \le x_2$ alınırsa, Ortalama değer teoreminden
$$f(z) - f(x_1) = f'(c)(z - x_1)$$
olacak şekilde en az bir $c \in (x_1, z)$ ve
$$f(x_2) - f(z) = f'(d)(x_2 - z)$$
olacak şekilde en az bir $d \in (z, x_2)$ yazılabilir. Önceki teoremde kullanıldığı gibi düzenleme yapılırsa,
$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \le \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$$
bulunur.

Örnek: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$ fonksiyonu için $f''(x) = 2 > 0$ olduğundan $(-\infty, +\infty)$ aralığından konvekstir.

Örnek: $f(x) = -\ln x$ fonksiyonu için $f'(x) = -\frac{1}{x}$ ve $f''(x) = \frac{1}{x^2} > 0$ olduğundan $(0, +\infty)$ aralığından konvekstir.

Örnek: $f(x) = \sin x$ fonksiyonu için $f'(x) = \cos x$ ve $f''(x) = -\sin x < 0$ olduğundan $[0, \pi]$ aralığından konkavdır.

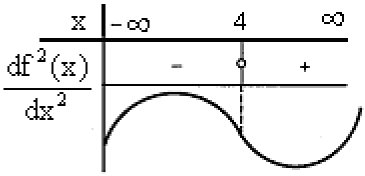
Örnek: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 12x^2 + 10$ fonksiyonunun konveks ve konkav aralıklarını bulunuz.

Çözüm: $f'(x) = 3x^2 - 24x$

$f''(x) = 6x - 24 = 0$

$x = 4$

dir. Buna göre,



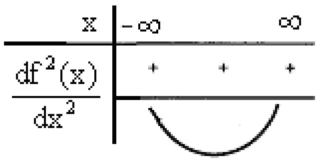
Her $x \in (4, \infty)$ için $f''(x) > 0$ olduğundan f bu aralıkta konvekstir.
Her $x \in (-\infty, 4)$ için $f''(x) < 0$ olduğundan f bu aralıkta konkavdır.

Örnek: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 4x$ fonksiyonunun konveks aralıklarını bulunuz.

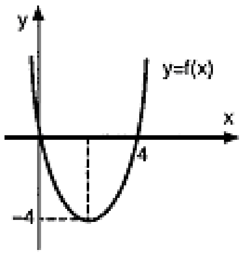
Çözüm: $f'(x) = 2x - 4$

$f''(x) = 2 > 0$

dir. Buna göre,



olduğundan $\mathbb{R}$ de konveks olduğunu gösterir. Bu fonksiyonun grafiği,



biçimindedir.

3.2. Not: $I \subseteq \mathbb{R}$ açık bir aralık ve $f: I \to \mathbb{R}$ ikinci mertebeden sürekli türevlenebilir bir fonksiyon olsun. Eğer her $x \in I$ için $f''(x) > 0$ ise f fonksiyonu kesin konvekstir. Ancak tersi her zaman doğru degildir, yani f fonksiyonu kesin konveks ise I üzerinde $f''(x) > 0$ olmayıp $f''(x) = 0$ da olabilir. Örnegin $\mathbb{R}$ üzerinde $f(x) = x^4$ fonksiyonu kesin konvekstir ancak $f'(x) = 12x^2 > 0$ degildir, çünkü $f''(0) = 0$ dır.

3.17. Sonuç: $I \subseteq \mathbb{R}$ açık bir aralık ve $f: I \to \mathbb{R}$ ikinci mertebeden sürekli türevlenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda $0 < \lambda < 1$ ve $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere aşağıdakiler geçerlidir:

$\forall\, x \in I$ için $f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow f$ konveks $\Leftrightarrow f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leq \lambda\, f(a) + (1-\lambda)f(b)$
$\forall\, x \in I$ için $f''(x) > 0 \Leftrightarrow f$ kesin konveks $\Leftrightarrow f(\lambda a + (1-\lambda)b) < \lambda\, f(a)$
$+(1-\lambda)f(b)$

Örnek: $(-\infty, +\infty)$ üzerinde $f(x) = e^x$ fonksiyonu $f''(x) = e^x > 0$ nedeniyle kesin konveks, dolayısıyla da konvekstir.

Örnek: $(0, +\infty)$ üzerinde $f(x) = -\ln x$ fonksiyonu $f''(x) = \frac{1}{x^2} > 0$ nedeniyle kesin konveks, dolayısıyla da konvekstir.

30.35. Teorem: $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n > 0$ ve $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ ise

$$x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \dots x_n^{\lambda_n} \leq \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n$$

eşitsizliği mevcuttur.

İspat: $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$, $f(x) = -\ln x$ ve $x \in (0, +\infty)$ olsun. $f''(x) = \frac{1}{x^2} > 0$ olduğundan $f(x) = -\ln x$ fonksiyonu konvekstir, dolayısıyla Jensen eşitsizliği uygulanabilir.

$-\ln(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1(-\ln x_1) + \lambda_2(-\ln x_2) + \dots + \lambda_n(-\ln x_n)$
$\lambda_1 \ln x_1 + \lambda_2 \ln x_2 + \dots + \lambda_n \ln x_n \leq \ln(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n)$
$\ln x_1^{\lambda_1} + \ln x_2^{\lambda_2} + \dots + \ln x_n^{\lambda_n} \leq \ln(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n)$
$\ln(x_1^{\lambda_1}\, x_2^{\lambda_2} \dots x_n^{\lambda_n}) \leq \ln(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n)$

olur. ln x fonksiyonu $(0,+\infty)$ üzerinde kesin artan olduğundan yukarıdaki son eşitsizlikten $x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\dots x_n^{\lambda_n} \leq \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n$ eşitsizliği elde edilir.

KUADRATİK FORM ve KUADRATİK FONKSİYONLAR

3.20. Tanım: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ve Q bir $n \times n$ reel simetrik matris olmak üzere $f(x) = \langle x, Qx\rangle$ şeklinde tanımlanan fonksiyona bir kuadratik form denir.

$a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $g(x) = \langle a, x\rangle + b$ şeklindeki fonksiyon afin fonksiyondur ve tüm afin fonksiyonlar bu biçimde yazılabilir.

Bir kuadratik form ile bir afin fonksiyonun toplamı biçiminde yazılan fonksiyona bir kuadratik fonksiyon denir, yani kuadratik fonksiyonlar

$$h(x) = \langle x, Qx\rangle + \langle a, x\rangle + b$$

şeklinde yazılabilen fonksiyonlardır.

Bir $Q_{n\times n}$ simetrik reel matrisine, eger$\forall\, x \in \mathbb{R}^n$ için $\langle x, Qx\rangle \geq 0$ sağlanıyor ise pozitif yarı-tanımlı matris ve $\langle x, Qx\rangle$ kuadratik formuna da pozitif yarı-tanımlı form denir. Eğer $\forall\, x \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ için $\langle x, Qx\rangle > 0$ sağlanıyor ise pozitif tanımlı matris ve $\langle x, Qx\rangle$ kuadratik formuna da pozitif tanımlı form denir.

3.21. Tanım: Q bir $n \times n$ reel matris olsun ve elemanları a_{ij} ile gösterilsin.

$$\Delta_1 = a_{11},\ \ \Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}, k = 2,3,\dots,n$$

şeklinde tanımlanan Δ_k determinantlarına Q matrisinin öncü esas minörleri denir.

3.36. Teorem: $f :\ C \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonu açık konveks bir C kümesi üzerinde reel değerli ve ikinci mertebeden sürekli türevlenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda f fonksiyonunun C üzerinde konveks olabilmesi için gerek ve yeter şart Hessian matris denilen

$$H(x) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(x)\right), \qquad i, j = 1,2,\dots,n$$

şeklinde tanımlanmıs simetrik matrisin her $x \in C$ için pozitif yarı-tanımlı olmasıdır.

Eğer $H(x)$ matrisi her $x \in C$ için pozitif tanımlı ise o zaman f kesin konveks fonksiyondur.

Bu teoremin ispatı okuyucuya bırakılmıştır.

3.18. Sonuç: Eğer Hessian matris pozitif yarı-tanımlı değil ise fonksiyon konveks değildir.

3.37. Teorem (Sylvester Kriteri): Simetrik bir $A_{n\times n}$ matrisin pozitif tanımlı olması için gerek ve yeter şart tüm öncü esas minörlerin hepsinin pozitif olması yani her $k = 1, 2, \dots, n$ için $\Delta_k > 0$ gerçeklenmesidir.

Bu teoremin ispatı okuyucuya bırakılmıştır.

3.19. Sonuç: Pozitif yarı-tanımlı olma kriteri: $2^n - 1$ tane olan ve adlarına esas minörler denilen hepsi aynı anda sıfır olmayan determinatların pozitif olması halinde A matrisi pozitif yarı-tanımlıdır.

$n = 2$ durumunda: $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$

A matrisinin esas minörleri $a \geq 0, c \geq 0$ ve $\det(A) = ac - b^2 \geq 0$ gerçekleniyor ve bunların hepsi birden sıfır değil ise A simetrik matrisi pozitif yarı-tanımlıdır.

$n = 3$ durumunda: $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix}$

A matrisinin esas minörleri $a, d, f, ad - b^2, af - c^2, df - e^2$ ve $\det(A)$ değerlerinin pozitif olması halinde A matrisi pozitif yarı-tanımlıdır. $n > 3$ için benzer durum söz konusudur.

Örnek: $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xy + 2xz$ fonksiyonunun $\mathbb{R}^3$'de konveksligini inceleyelim. Hessian matrisini oluşturalım.

Çözüm: $f_x = 2x + 2y + 2z,\ f_y = 4y + 2x,\ f_z = 6z + 2x$

$f_{xx} = 2, f_{xy} = 2, f_{xz} = 2, f_{yx} = 2, f_{yy} = 4, f_{yz} = 0, f_{zx} = 2, f_{zy} = 0, f_{zz} = 6$

$$H(x,y,z)=\begin{bmatrix}2 & 2 & 2\\ 2 & 4 & 0\\ 2 & 0 & 6\end{bmatrix}$$

dir. Şimdi de öncü esas minörlerini hesaplayalım,

$$\Delta_1 = 2 > 0,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix}2 & 2\\ 2 & 4\end{vmatrix} = 4 > 0\ ,\ \Delta_3 = \begin{vmatrix}2 & 2 & 2\\ 2 & 4 & 0\\ 2 & 0 & 6\end{vmatrix} = 8 > 0$$

her $x \in \mathbb{R}^3$ için $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3 > 0$ gerçekledigine göre Sylvester Kriteri nedeniyle Hessian matrisi pozitif tanımlı bir matristir. Dolayısıyla 3.36. teorem nedeniyle f fonksiyonu $\mathbb{R}^3$ üzerinde kesin konveks bir fonksiyondur.

Örnek: $f(x,y,z) = x + y^2 + z^3 - xy - 3z$ fonksiyonunun $\mathbb{R}^3$'de konveksligini inceleyelim. Hessian matrisini oluşturalım.

Çözüm: $f_x = 1 - y,\ f_y = 2y - x,\ f_z = 3z^2 - 3$
$f_{xx} = 0, f_{xy} = -1, f_{xz} = 0, f_{yx} = -1, f_{yy} = 2, f_{yz} = 0, f_{zx} = 2, f_{zy} = 0, f_{zz} = 6z$

$$H(x,y,z)=\begin{bmatrix}0 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 6z\end{bmatrix}$$

dir. Şimdi de öncü esas minörlerini hesaplayalım,

$$\Delta_1 = 0 > 0,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix}0 & -1\\ -1 & 2\end{vmatrix} = -1 > 0\ ,\ \Delta_3 = \begin{vmatrix}0 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 6z\end{vmatrix} = -6z$$

her $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ için esas minörlerinden olan 6z esas minörü $z < 0$ için $6z < 0$ olacağından Hessian matris pozitif yarı-tanımlı olmadıgı için f fonksiyonu $\mathbb{R}^3$ üzerinde konveks bir fonksiyon değildir.

3.20. Sonuç: Bir $C \subset \mathbb{R}^n$ açık konveks kümesi üzerinde tanımlı konveks fonksiyon C üzerinde süreklidir.

3.3. Not: Bir $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $x_0 \in \mathbb{R}^n$ noktasında diferansiyellenebilir ise $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$ kısmi türevleri vardır. Fakat tersi her zaman doğru değildir. Örneğin $\mathbb{R}^2$ de tanımlı aşağıdaki

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

fonksiyonu için (0, 0) noktasında kısmi türevler var ve $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$ dır, ancak f fonksiyonu (0, 0) noktasında sürekli olmadığı için diferansiyellenebilir değildir.

3.38. Teorem: D bir açık küme olmak üzere $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ herhangi bir fonksiyon ve $x_0 \in D$ olsun. Eğer f fonksiyonu x_0 noktasının bir komşulugunda her bir değiskene göre sürekli kısmi türevlere sahip ise x_0 noktasında diferansiyellenebilirdir.

SEVİYE KÜMELERİ

3.22. Tanım: $\alpha \in \mathbb{R}$, C konveks bir küme ve $f: C \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ olmak üzere $L_{f,\alpha} = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq \alpha\}$ kümesine f fonksiyonunun α seviye kümesi denir.

3.39. Teorem: C konveks bir küme olmak üzere $f: C \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonu konveks ise her $\alpha \in \mathbb{R}$ için $L_{f,\alpha}$ seviye kümeleri konvekstir.

İspat: $\alpha \in \mathbb{R}, x_1 x_2 \in L_{f,\alpha}$ ve $0 < \lambda < 1$ olsun. f konveks olduğu için
$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) \leq \lambda\alpha + (1-\lambda)\alpha = \alpha$
olur, bu ise $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \in L_{f,\alpha}$ nedeniyle $L_{f,\alpha}$ kümelerinin konveks olması demektir.

3.4. Not: Bu teoremin tersi her zaman doğru değildir. Örnegin ℝ'de tanımlanmış $f(x) = x^3$ fonksiyonunun her $\alpha \in \mathbb{R}$ için $L_{f,\alpha}$ seviye kümeleri konvekstir, ancak $f(x) = x^3$ fonksiyonu ℝ üzerinde konveks degildir.

KAYNAKÇA

1. Prof. Dr. Mustafa BALCI, Matematik Analiz I, Bilim kitap kırtasiye A.Ş., Ankara, 1997.
2. Özkan Değer, Konveks Analize Giriş ders noktaları, İÜ Matematik Bölümü, ozkandeger.org, 2020, İstanbul.