8. BÖLÜM
$\mathbb{R}^{n}$'DE EŞİTSİZLİKLER

Bu bölümde matematiğin çeşitli konularında kullanılan ünlü eşitsizliklerden bazılarını vermeye çalışacağız.

ARİTMETİK, GEOMETRİK ve HARMONİK ORTALAMA EŞİTSİZLİĞİ

8.1. Teorem (AO-GO-HO): $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$ ise

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}}$$

Aritmetik Ortalama $\geq$ Geometrik Ortalama $\geq$ Harmonik Ortalama

eşitsizliği mevcuttur.

İspat: $a, b \geq 0$ olsun.

$$(a-b)^2 \geq 0$$
$$a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$$
$$a^2 + b^2 \geq 2ab$$
$$\frac{a^2+b^2}{2} \geq ab$$

yazılabilir. Burada $a^2 = x_1, b^2 = x_2$ alınırsa

$$\frac{x_1+x_2}{2} \geq \sqrt{x_1 x_2}$$

bulunur. Buna göre;

$$x_1 + x_2 \geq 2\sqrt{x_1 x_2}$$

dir. Şimdi genellemeye çalışalım. $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$ ise

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \cdots + x_{n-3} + x_{n-2} + x_{n-1} + x_n$$
$$\geq 2\sqrt{x_1 x_2} + 2\sqrt{x_3 x_4} + \cdots + 2\sqrt{x_{n-3} x_{n-2}} + 2\sqrt{x_{n-1} x_n}$$
$$= 2(\sqrt{x_1 x_2} + \sqrt{x_3 x_4} + \cdots + \sqrt{x_{n-3} x_{n-2}} + \sqrt{x_{n-1} x_n})$$
$$\geq 2(\sqrt{2\sqrt{x_1 x_2}\sqrt{x_3 x_4}} + \cdots + \sqrt{2\sqrt{x_{n-3} x_{n-2}}\sqrt{x_{n-1} x_n}})$$

$$= 2^2\left(\sqrt[2^2]{x_1x_2x_3x_4} + \cdots + \sqrt[2^2]{x_{n-3}x_{n-2}x_{n-1}x_n}\right)$$
$$\ldots$$
$$= 2^k\left(\sqrt[2^k]{x_1x_2x_3x_4 \cdots x_{2^k-3}x_{2^k-2}x_{2^k-1}x_{2^k}}\right)$$
$$= n\left(\sqrt[n]{x_1x_2x_3x_4 \cdots x_{n-3}x_{n-2}x_{n-1}x_n}\right) \quad , \qquad (2^k = n)$$

olur. Buna göre

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1x_2 \ldots x_n} \qquad (1)$$

eşitsizliği elde edilir. (1) eşitsizliğinde $x_1 = \dfrac{1}{y_1}, x_2 = \dfrac{1}{y_2}, \ldots, x_n = \dfrac{1}{y_2} \geq 0$ alınırsa

$$\frac{\frac{1}{y_1}+\frac{1}{y_2}+\cdots+\frac{1}{y_n}}{n} \geq \sqrt[n]{\frac{1}{y_1}\cdot\frac{1}{y_2}\cdots\frac{1}{y_n}}$$

$$\sqrt[n]{y_1y_2 \ldots y_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{y_1}+\frac{1}{y_2}+\cdots+\frac{1}{y_n}} \qquad (2)$$

eşitsizliği elde edilir. (1) ve (2) eşitsizliğinden;

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1x_2 \ldots x_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}}$$

elde edilir.

Örnek: $a, b, c > 0$ ve $abc = 1$ ise $(a + b + c)(ab + bc + ca)$ çarpımının en küçük değerini bulunuz.

Çözüm: $AO \geq GO$ olduğundan

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} \text{ ve } \frac{ab+bc+ca}{3} \geq \sqrt[3]{ab\cdot bc\cdot ca}$$

$$a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc} \text{ ve } ab + bc + ca \geq 3\sqrt[3]{ab\cdot bc\cdot ca}$$

olur. Bu iki eşitsizliği taraf tarafa çarpılırsa;

$$(a + b + c)(ab + bc + ca) \geq 9\sqrt[3]{abc}\sqrt[3]{ab\cdot bc\cdot ca}$$

$$(a + b + c)(ab + bc + ca) \geq 9$$

bulunur.

Örnek: $n \in \mathbb{Z}^+$ ise

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

eşitsizliğini gerçekleyiniz.

Çözüm: Kabul edelim ki $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1 + \frac{1}{n}$ ve $x_{n+1} = 1$ olarak alalım. GO $\leq$ AO olduğundan

$$\sqrt[n+1]{x_1 x_2 \ldots x_n x_{n+1}} \leq \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n+x_{n+1}}{n+1}$$

$$\sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot 1} \leq \frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)+1}{n+1}$$

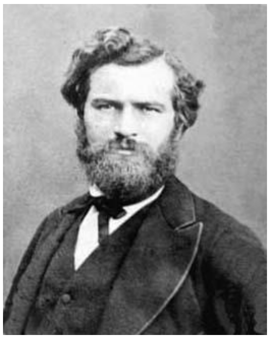
$$\sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \leq \frac{n+1+1}{n+1}$$

$$\sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \leq 1+\frac{1}{n+1}$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

bulunur.

JORDAN EŞİTSİZLİĞİ



Marie Ennemond Camille Jordan

05 Ocak 1838, Lyon, Fransa - 22 Ocak 1922, Paris, Fransa

8.2. Teorem: Her $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ için $\frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x$ dir.

İspat: $f(x) = x - \sin x$ alalım $f'(x) = 1 - \cos x \geq 0$ olduğundan f fonksiyonu artandır. Şu halde her $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ için

$f(x) \geq f(0)$

$x - \sin x \geq 0 - \sin 0$

$$\sin x \le x \tag{3}$$

yazılabilir. Yine $g(x) = \frac{2}{\pi}x - \sin x$ alalım $g'(x) = \frac{2}{\pi} - \cos x \le 0$ olduğundan g fonksiyonu azalandır. Şu halde her $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ için

$$g(x) \le g(0)$$

$$\frac{2}{\pi}x - \sin x \le 0 - \sin 0$$

$$\frac{2}{\pi}x - \sin x \le 0 \tag{4}$$

yazılabilir. (3) ve (4) eşitsizliğinden

$$\frac{2}{\pi}x \le \sin x \le x$$

elde edilir.

Örnek: Her $\frac{1}{k(k+1)} \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ için $\frac{2}{\pi} \le \sum_{k=1}^{\infty} \sin\frac{1}{k(k+1)} \le 1$ eşitsizliğini Jordan eşitsizliği yardımıyla gerçekleyiniz.

Çözüm: Jordan eşitsizliğinde özel olarak $x = \frac{1}{k(k+1)}$ seçilirse;

$$\frac{2}{\pi}\frac{1}{k(k+1)} \le \sin\frac{1}{k(k+1)} \le \frac{1}{k(k+1)}$$

$$\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)} \le \sum_{k=1}^{\infty}\sin\frac{1}{k(k+1)} \le \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)} \tag{5}$$

yazılabilir. Burada

$$=(S_n) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$$

kısmi toplamlar dizisi olsun.

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

olduğundan (5) eşitsizliğinden

$$\frac{2}{\pi} \le \sum_{k=1}^{\infty}\sin\frac{1}{k(k+1)} \le 1$$

elde edilir.

YOUNG EŞİTSİZLİĞİ

William Henry Young
20 Ekim 1863 Londra İngiltere – 07 Temmuz 1942 Lozan İsviçre

8.3. Teorem: $p > 1$ ve q da $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olacak şekilde tanımlansın. α ve β herhangi iki pozitif sayı olmak üzere,

$$\alpha\beta \leq \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q}$$

eşitsizliği vardır. Burada p ve q sayılarına eşlenik üsler denir.

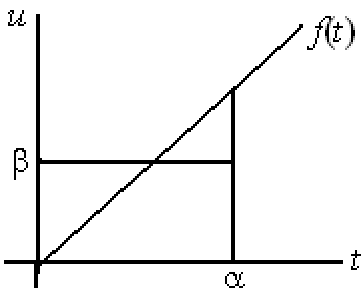
İspat: $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olduğundan $(p-1)(q-1) = 1$ yazılabilir. Buna göre

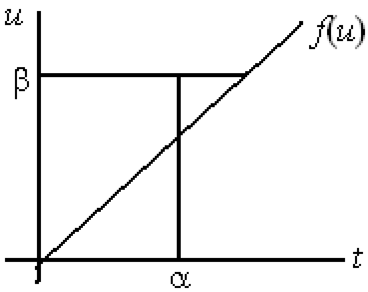
$$p - 1 = \frac{1}{q-1} \text{ veya } q - 1 = \frac{1}{p-1}$$

dir. Burada

$$f: \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$
$$t \rightarrow f(t) = t^{p-1} = u$$

şeklinde tanımlanan f fonksiyonunu alalım. $t^{p-1} = u \Leftrightarrow t = u^{1/p-1} = u^{p-1}$ olacaktır. Burada şu iki şekli verelim.





Şimdi bu şekilleri inceleyelim. Bu şekillere göre α ve β nın çarpımları şekildeki dikdörtgenlerin alanlarını verecektir. Bu dikdörtgenin alanları fonksiyonun sağında ve solundaki alanlardan küçük kalacaklarına dikkat edelim. O halde

$$\alpha\beta \leq \int_0^\alpha t^{p-1} + \int_0^\beta u^{q-1} = \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q} \qquad (6)$$

eşitsizliğini elde ederiz. //

Bu eşitsizliğin α veya β'nın birinin veya her ikisinin sıfır olması durumunda eşitsizlik aşikârdır.

Örnek: $\int_0^a \log(x+1)\,dx + \int_0^b 10^x - 1 \geq ab$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: (6) eşitsizliğinde t ve u fonksiyonlarına dikkat edersek,

$\log(x+1) = y$ için $x = 10^y - 1$ ise $f^{-1}(x) = 10^x - 1$

$$\int_0^a \log(x+1)\,dx + \int_0^b 10^x - 1 \geq ab$$

elde edilir.

BERNOULLİ EŞİTSİZLİĞİ

Jacob Bernoulli
06 Ocak 1655 Basel İsviçre – 16 Ağustos 1705 Basel İsviçre

8.4. Teorem: $r \in (1, +\infty), x \in (-1, +\infty)$ için

$$(1+x)^r \geq 1 + xr$$

dir.

İspat: $r \in (1, +\infty), x \in (-1, +\infty)$ için
$f(x) = (1+x)^r - 1 - xr$
olsun. Bu takdirde

$$f'(x) = r(1+x)^{r-1} - r = 0$$
$$r[(1+x)^{r-1} - 1] = 0$$
$$(1+x)^{r-1} = 1$$
$$x = 0$$

ve

$$f'(x) < 0, -1 < x < 0 \text{ ise } (1+x) < 1 \text{ yani } (1+x)^{r-1} < 1$$
$$f'(x) > 0,\ 0 < x < \infty \text{ ise } (1+x) > 1 \text{ yani } (1+x)^{r-1} > 1$$

f fonksiyonu $x = 0$ noktasında yerel minimuma sahiptir.

$$f(x) \geq f(0)$$
$$(1+x)^{r-1} - 1 - r \geq 0$$
$$(1+x)^r \geq 1 + xr$$

olur.

Örnek: $(1+\sqrt{2})^3 \geq 1 + 3\sqrt{2}$

NESBITT EŞİTSİZLİĞİ

Cecil James Nesbitt
10 Ekim 1912, Thunder Bay, Kanada – 2001

8.5. Teorem: a, b, c pozitif sayı,

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

eşitsizliği mevcuttur.

İspat: A0-GO-HO eşitsizliğinde $a+b, b+c, c+a$ sayıları için uygulanırsa,

$$\frac{(a+b)+(b+c)+(c+a)}{3} \geq \frac{3}{\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}}$$

$$((a+b)+(b+c)+(c+a))\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right) \geq 9$$

$$2(a+b+c)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right) \geq 9$$

$$\frac{a+b+c}{a+b} + \frac{a+b+c}{b+c} + \frac{a+b+c}{c+a} \geq \frac{9}{2}$$

$$1+\frac{c}{a+b}+1+\frac{a}{b+c}+1+\frac{b}{c+a}\geq\frac{9}{2}$$

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}$$

PERMÜTASYON (YENİDEN DÜZENLEME) EŞİTSİZLİĞİ

8.6. Teorem: $0<a_1\leq a_2\leq\cdots\leq a_n, 0<b_1\leq b_2\leq\cdots\leq b_n$ için

$$a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n\geq a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1$$

$$\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\geq\sum_{k=1}^{n}a_kb_{n-k+1}$$

dir. (Eğer verilen c_i artan değilse a_i artan permütasyon dizilimi yazılabilir.)

İspat: Tümevarım yöntemini uygulayalım.

$n=2$ için $a_1\leq a_2, b_1\leq b_2$ ise

$$a_1-a_2\leq 0, b_1-b_2\leq 0$$
$$(a_1-a_2)(b_1-b_2)\geq 0$$
$$a_1b_1-a_1b_2-a_2b_1+a_2b_2\geq 0$$
$$a_1b_1+a_2b_2\geq a_1b_2+a_2b_1$$

bulunur.

$n=k+1$ için doğru olsun, yani

$$a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_{k+1}b_{k+1}\geq a_1b_{k+1}+a_2b_k+\cdots+a_{k+1}b_1$$

olsun. $n=k$ için

$$a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_kb_k\geq a_1b_k+a_2b_{k-1}+\cdots+a_kb_1$$

olduğunu göstermeliyiz. Her k için $b_k\leq b_{k+1}$ olmak üzere

$$a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_kb_k$$
$$=(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_kb_k+a_{k+1}b_{k+1})-a_{k+1}b_{k+1}$$
$$\geq(a_1b_{k+1}+a_2b_k+\cdots+a_{k+1}b_1)-a_{k+1}b_{k+1}$$
$$\geq a_1b_{k+1}+a_2b_k+\cdots+a_kb_2+a_{k+1}b_1$$
$$\geq a_1b_k+a_2b_{k-1}+\cdots+a_kb_1+0,\quad (\text{Her k için } a_{k-1}\leq a_k, b_{k-1}\leq b_k)$$

olur.

Örnek: $c_1, c_2, \cdots, c_n$ birer farklı pozitif reel sayı olmak üzere,

$$\frac{c_1}{1^2}+\frac{c_2}{2^2}+\cdots+\frac{c_n}{n^2} \geq 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$$

eşitsizliği gerçekleyiniz.

Çözüm. Kabul edelim ki, $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ dizilimi c_i'lerin artan sırayla dizilimi olsun. a_i'ler farklı pozitif reel saylar olduğuna göre, $a_1 \geq 1, a_2 \geq 2, \cdots, a_n \geq n$ diyebiliriz.

$$\begin{aligned}\frac{c_1}{1^2}+\frac{c_2}{2^2}+\cdots+\frac{c_n}{n^2} &\geq \frac{a_1}{1^2}+\frac{a_2}{2^2}+\cdots+\frac{a_n}{n^2}\\ &\geq \frac{1}{1^2}+\frac{2}{2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\\ &= 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\end{aligned}$$

8.1. Sonuç: $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n > 0, b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n > 0$ için

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \leq a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_nb_1$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \geq \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k+1}$$

dir.

Örnek: $x \geq y \geq z$ ve $xyz = 1$ olsun. Bu takdirde

$$\frac{x^2}{z+y}+\frac{y^2}{x+z}+\frac{z^2}{x+y} \geq \frac{3}{2}$$

dir. Gösteriniz.

Çözüm: $x \geq y \geq z$ ve $xyz = 1$ olduğundan

$$x^2 \geq y^2 \geq z^2 \text{ ve } \frac{1}{z+y} \geq \frac{1}{x+z} \geq \frac{1}{x+y}$$

yazılabilir. Permütasyon eşitsizliği uygulanırsa

$$\frac{x^2}{z+y}+\frac{y^2}{x+z}+\frac{z^2}{x+y} \geq \frac{x^2}{x+y}+\frac{y^2}{x+z}+\frac{z^2}{z+y} \tag{7}$$

bulunur. Burada;

$$x \geq y$$
$$x^2 \geq xy$$
$$2x^2 \geq x^2 + xy$$
$$\frac{x^2}{x+y} \geq \frac{x}{2}$$

olacağından, benzer şekilde $\frac{y^2}{x+z} \geq \frac{y}{2}, \frac{z^2}{z+y} \geq \frac{z}{2}$ bulunur. (7) eşitsizliği

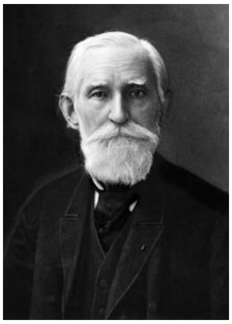
$$\frac{x^2}{z+y} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{x+y} \geq \frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{z}{2}$$

olur. AO-GO-HO dan

$$\frac{x^2}{z+y} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{x+y} \geq \frac{x+y+z}{2} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{xyz} = \frac{3}{2}$$

elde edilir.

ÇEBİŞEV (CHEBYSHEV) EŞİTSİZLİĞİ



Pafnuti Lvoviç Çebişov (Pafnuty Lvovich Chebyshev)
16 Mayıs 1821, District, Rusya - 08 Aralık 1894, St. Petersburg, Rusya

8.7. Teorem: $0 < a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n, 0 < b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$ için

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \geq \frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)(b_1+b_2+\cdots+b_n)}{n}$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \geq \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right)$$

dir.

İspat permütasyon eşitsizliğinde olduğu gibi tümevarım yöntemiyle yapılır.

Örnek: $a, b, c > 0$ ise

$$a^a b^b c^c \geq (abc)^{(a+b+c)/3}$$

olduğunu gerçekleyiniz.

Çözüm: (a,b,c) ve $(\log a, \log b, \log c)$ sayı kümelerini alalım. Çebişov eşitsizliğini uygulamalıyız.

$$a\log a + b\log b + c\log c \geq (a+b+c)(\log a + \log b + \log c)\frac{1}{3}$$
$$\log a^a + \log b^b + \log c^c \geq \frac{(a+b+c)}{2}(\log abc)$$
$$\log a^a b^b c^c \geq \log abc^{(a+b+c)/3}$$
$$a^a b^b c^c \geq (abc)^{(a+b+c)/3}$$

Örnek: $0 \leq a_k < 1, k = 1,2,3,\dots,n$ ve $S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ ise
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{1-a_k} \geq \frac{nS}{n-S}$$
olduğunu gerçekleyiniz.

Çözüm: Genelliği bozmadan $0 < a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ alalım.
$1 - a_1 \geq 1 - a_2 \geq \cdots \geq 1 - a_n > 0$ ve $\frac{a_1}{1-a_1} \leq \frac{a_2}{1-a_2} \leq \cdots \leq \frac{a_n}{1-a_n}$
Çebişov eşitsizliğini uygularsak,
$$S = \frac{a_1}{1-a_1}(1-a_1) + \frac{a_2}{1-a_2}(1-a_2) + \cdots + \frac{a_n}{1-a_n}(1-a_n)$$
$$\leq \frac{1}{n}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{1-a_k}\right]\left[\sum_{k=1}^{n}1-a_{n-k}\right]$$
$$\leq \frac{n-S}{n}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{1-a_k}\right]$$
bulunur. Buna göre;
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{1-a_k} \geq \frac{nS}{n-S}$$
elde edilir.

KUVVET ORTALAMASI EŞİTSİZLİĞİ

8.8. Teorem: $a_1, a_2, \cdots, a_n > 0$ ve $s < t$ için

$$\left(\frac{a_1^s + a_2^s + \cdots + a_n^s}{n}\right)^{1/s} \leq \left(\frac{a_1^t + a_2^t + \cdots + a_n^t}{n}\right)^{1/t}$$

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k^s\right)^{1/s} \le \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k^t\right)^{1/t}$$

dir.

İspat permütasyon eşitsizliğinde olduğu gibi tümevarım yöntemiyle yapılır.

ℓ_p UZAYI

8.1. Tanım: $x = (x_n)$ Kompleks terimli bir dizi olmak üzere $p \ge 1$ için $\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p < \infty$ olacak şekilde $x = (x_n)$ dizilerin uzayına ℓ_p uzayı denir.

$$\ell_p = \{x = (x_n) : \sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p < \infty,\ \forall\, n \in \mathbb{N}, x_n \in \mathbb{C}, p \ge 1\}$$

dir. Özel olarak ℓ_2 uzayına Hilbert uzayı adı verilir.

HÖLDER EŞİTSİZLİĞİ

Otto Ludwig Hölder Stuttgart
22 Aralık 1859, Stuttgart, Almanya - 29 Ağustos 1937, Leipzig, Almanya

8.7. Teorem: p ve $q > 1$, ayrıca $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. Bu takdirde $x = (x_i) \in \ell_p, y = (y_i) \in \ell_p$ için

$$\sum_{i=1}^{\infty}|x_i y_i| \le \left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{m=1}^{\infty}|y_m|^q\right)^{1/q}$$

eşitsizliği gerçekleşir.

İspat $x=(x_i)\in \ell_p, y=(y_i)\in \ell_p$ dizlerinden biri ya da her ikisi sıfır dizisi ise eşitsizliğin sağlandığı açıktır. Bu nedenle kabul edelim ki her ikisi de sıfırdan farklı yakınsak diziler olsun. Burada $(\tilde{x}_i)$ ve $(\tilde{y}_i)$ dizilerini

$$\sum_{i=1}^{\infty}|\tilde{x}_i|^p=1 \text{ ve } \sum_{i=1}^{\infty}|\tilde{y}_i|^p=1 \qquad (8)$$

olacak şekilde alalım. Young eşitsizliği de $\alpha=|\tilde{x}_i|$ ve $\beta=|\tilde{y}_i|$ alırsak

$$|\tilde{x}_i\cdot\tilde{y}_i|\le\frac{1}{p}|\tilde{x}_i|^p+\frac{1}{q}|\tilde{y}_i|^q \qquad (9)$$

elde ederiz. (9) yi i üzerinden toplam alırsak (8) den

$$\sum_{i=1}^{\infty}|\tilde{x}_i.\tilde{y}_i|\le\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{p}|\tilde{x}_i|^p+\frac{1}{q}|\tilde{y}_i|^q\right)=\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{\infty}|\tilde{x}_i|^p+\frac{1}{q}\sum_{i=1}^{\infty}|\tilde{y}_i|^q=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \qquad (10)$$

bulunur. (x_i) ve (y_i) yakınsak

$$\tilde{x}_i=\frac{x_i}{\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p\right)^{1/p}}\ ,\ \tilde{y}_i=\frac{y_i}{\left(\sum_{m=1}^{\infty}|y_m|^q\right)^{1/q}} \qquad (11)$$

seçersek (8) eşitliği sağlanır. Gerçekten;

$$\sum_{i=1}^{\infty}|\tilde{x}_i|^p=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{|x_i|^p}{\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p}=\frac{\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p}{\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p}=1\ ,\ \sum_{i=1}^{\infty}|\tilde{y}_i|^p=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{|y_i|^q}{\sum_{m=1}^{\infty}|y_m|^q}=\frac{\sum_{i=1}^{\infty}|y_i|^q}{\sum_{m=1}^{\infty}|y_m|^q}=1$$

bulunur. (11) ifadesini (10) de yerine yazılırsa

$$\sum_{i=1}^{\infty}|\tilde{x}_i.\tilde{y}_i|\le 1$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left|\frac{x_i}{\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p\right)^{1/p}}.\frac{y_i}{\left(\sum_{m=1}^{\infty}|y_m|^q\right)^{1/q}}\right|\le 1$$

$$\frac{1}{\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{m=1}^{\infty}|y_m|^q\right)^{1/q}}\sum_{i=1}^{\infty}|x_i.y_i|\le 1$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}|x_i.y_i|\le\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{m=1}^{\infty}|y_m|^q\right)^{1/q}$$

olur.

CAUCAHY-SCHWARZ EŞİTSİZLİĞİ

Hermann Amandus Schwarz
25 Ocak 1843 Jerzmanowa, Polonya - 30 Kasım 1921, Berlin, Almanya

8.2. Sonuç (Caucahy - Schwarz Eşitsizliği): $x = (x_i) \in \ell_2, y = (y_i) \in \ell_2$ olmak üzere

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i y_i| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{m=1}^{\infty} |y_m|^2 \right)^{1/2}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i y_i| \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 \right) \left(\sum_{m=1}^{\infty} |y_m|^2 \right)$$

eşitsizliği gerçekleşir. Bu sonuç, Hölder eşitsizliğinde özel olarak $p = q = 2$ alınarak kolaylıkla elde edilir.

Örnek: $a, b \in \mathbb{R}$, $(a\cos t + b\sin t)^2 \leq a^2 + b^2$ dir. Gösteriniz.

Çözüm: Caucahy - Schwarz eşitsizliğinde

$$x_1 = a, x_2 = b, y_1 = \cos t, y_2 = \sin t$$

seçilirse

$$(x_1 y_1 + x_2 y_2)^2 \leq (x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2)$$
$$(a\cos t + b\sin t)^2 \leq (a^2 + b^2)(\cos^2 t + \sin^2 t)$$
$$(a\cos t + b\sin t)^2 \leq a^2 + b^2$$

elde edilir.

Örnek: $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$,

$$a + b + c + d + e = 10 \text{ ve } a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 = 20$$

ise e'nin değeri nedir?

Çözüm: Caucahy - Schwarz eşitsizliği uygulanırsa

$$(a + b + c + d)^2 \leq (1 + 1 + 1 + 1)(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$$

$(10-e)^2 \leq 4(20-e^2)$
$100-20e+e^2 \leq 80-4e^2$
$5e^2-20e+20 \leq 0$
$e^2-4e+4 \leq 0$
$(e-2)^2 \leq 0$
$e=2$
bulunur.

Örnek: $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$

Çözüm: Kabul edelim ki $a_k = k, a_k = \frac{1}{2^k}$ olsun. Caucahy - Schwarz eşitsizliğini kullanırsak,

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k y_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^2\right)^{1/2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} k^2\right)^{1/2} \left(\sum_{m=1}^{n} \left(\frac{1}{2^k}\right)^2\right)^{1/2}$$

yazılabilir. Burada,

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right] \tag{12}$$

olduğunu hatırlayalım. Ayrıca,

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{n} \left(\frac{1}{2^k}\right)^2 &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \cdots + \frac{1}{4^n} \\ &= \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{4^{n-1}}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{1-\frac{1}{4^n}}{3}\right) \\ &\leq \frac{1}{3} \qquad (13)\end{aligned}$$

olur. (12) ve (13) eşitsizliğinden

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

bulunur. //

Hermann Minkowski
(22 Haziran 1864 Kaunas, Litvanya - 12 Ocak 1909 Göttingen, Almanya)

8.3. Teorem (Minkowski Eşitsizliği): $p > 1$ olsun. Bu takdirde $x = (x_i) \in \ell_p, y = (y_i) \in \ell_p$ için

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i + y_i|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^p\right)^{1/p}$$

eşitsizliği gerçekleşir.

İspat: $x = (x_i) \in \ell_p, y = (y_i) \in \ell_p$ dizilerinin biri veya her ikisi de sıfır dizisi ise eşitsizlik doğrudur. Bu nedenle her ikisi de sıfır dizisi olmasın. Mutlak değerin üçgen eşitsizliğinden her i için

$$|x_i + y_i| \leq |x_i| + |y_i|$$

olduğunu hatırlayalım. Buna göre

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p &= \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^{p-1}.|x_i + y_i| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^{p-1}(|x_i| + |y_i|) \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^{p-1}|x_i| + \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^{p-1}|y_i|\end{aligned}$$

yazılır. Bu eşitsizliğin sağ yanındaki her terime Höldor eşitsizliğini uygularsak

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p &\leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^{(p-1)q}\right)^{1/q}\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^{(p-1)q}\right)^{1/q}\left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\right)^{1/p} \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^{(p-1)q}\right)^{1/q}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\right)^{1/p}\right)\end{aligned}$$

bulunur. Buna göre

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^{(p-1)q}\right)^{1-\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\right)^{1/p}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^p\right)^{1/q} \le \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^p\right)^{1/p}$$

eşitsizliği elde edilir. $n\to\infty$ için bu eşitsizliğin iki yanının limiti alınırsa

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i+y_i|^p\right)^{1/p} \le \left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{\infty}|y_i|^p\right)^{1/p}$$

elde edilir.

4.3. Sonuç (Üçgen Eşitsizliği): Minkowski eşitsizliğinde $p=2$ alınırsa

$$\|x+y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^2} \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n}y_i^2} = \|x\|+\|y\|$$

elde edilir.

ÇÖZÜMLÜ ALIŞTIRMALAR

1. $\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k(k-1)} \le \frac{n^2}{2}$ olduğunu AO-GO-HO eşitsizliği kullanılarak gösteriniz.

Çözüm: $x_1=k-1, x_2=k$ alırsak AO-GO-HO eşitsizliğinden

$$\sqrt{k(k-1)} \le \frac{k+k+1}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k(k-1)} \le \sum_{k=1}^{n}\frac{k+k-1}{2} = \sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2} = \sum_{k=1}^{n}k - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2} = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n}{2} = \frac{n^2}{2}$$

olur.

2. $\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k} \le \frac{n^2+3n}{4}$ olduğunu AO-GO-HO eşitsizliği kullanılarak gösteriniz.

Çözüm: $x_1=1, x_2=k$ alırsak AO-GO-HO eşitsizliğinden

$$\sqrt{k} \le \frac{k+k1}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k} \le \sum_{k=1}^{n}\frac{k+k}{2} = \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2} + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n}{2} = \frac{n^2+3n}{4}$$

olur.

3. $\sum_{k=1}^{n} k^{3/2}(n-k+1)^{3/2} \leq \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

Çözüm: Kabul edelim ki $a_k = k^{3/2}, a_k = (n-k+1)^{3/2}$ olsun. Caucahy - Schwarz eşitsizliğini kullanırsak,

$$\sum_{k=1}^{n}|x_k y_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{k=1}^{n}|y_k|^2\right)^{1/2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^{3/2}(n-k+1)^{3/2} \leq \left(\sum_{k=1}^{n}(k^{3/2})^2\right)^{1/2}\left(\sum_{k=1}^{n}((n-k+1)^{3/2})^2\right)^{1/2}$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} k^3\right)^{1/2}\left(\sum_{k=1}^{n} k^3\right)^{1/2}$$

$$= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

4. $\sum_{k=1}^{n} k(n-k+1) \leq \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$

Çözüm: Kabul edelim ki $a_k = k, a_k = n-k+1$ olsun. Caucahy - Schwarz eşitsizliğini kullanırsak,

$$\sum_{k=1}^{n}|x_k y_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{k=1}^{n}|y_k|^2\right)^{1/2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k(n-k+1) \leq \left(\sum_{k=1}^{n} k^2\right)^{1/2}\left(\sum_{k=1}^{n}(n-k+)^2\right)^{1/2}$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} k^2\right)^{1/2}\left(\sum_{k=1}^{n} k^2\right)^{1/2}$$

$$= \left(\frac{n(n+1)(2n+)}{2}\right)^2$$

KAYNAKÇA

1. Prof. Dr. Hüseyin ÇAKALLI, Maltepe Üniversitesi, Foksiyonel Analiz Ders Notları, İstanbul, 2013.

2. Prof. Dr. Mustafa BAYRAKTAR, Fonksiyonel Analiz, 5. Baskı, Koza Yayıncılık, Ankara, 2017.

3. Prof. Dr. A. Turan GÜRKANLI, Genel Topoloji, Ondokuz Mayıs Üniversitesi Yayınları, Yayın No: 73, Samsun, 1993.

4. Prof. Dr. Öner ÇAKAR, Fonksiyonel Analize Giriş, Ankara Üniversitesi, Döner Sermaye İşletmesi Yayınları, 5. Baskı, No: 13, Ankara, 2007.