1.BÖLÜM
İKTİSADİ MODELLEMELERE GİRİŞ

GİRİŞ

Giovanni Ceva (İlk matematiği iktisada uygulama 1711)
07 Aralık 1647, Milano, İtalya – 15 Haziran 1734, Mantova, İtalya

HÂSILA, MALİYET VE KÂR FONKSİYONLARI

Bir firmanın en temel amacı kârını maksimize etmektir.

Toplam Hasıla

1.1. Tanım: Bir malın satışından elde edilen miktarına toplam hasıla (toplam gelir, toplam ciro) (T_R), malın fiyatı (P) ile satılan mal miktarının (Q) çarpımına eşittir:

$$T_R = P \cdot Q$$

1.2. Tanım: Üretimde toprak, makine teçhizat, bina gibi kısa dönemde değiştirilmesi zor olan maliyetleri sabit maliyetler denir. F_c ile gösterilir. Uzun dönemde ise tüm maliyetler değişkendir.

1.3. Tanım: Üretimde hammadde, enerji, işçi maliyetleri gibi değişken maliyet kalemlerine değişken maliyetler denir. V_C ile gösterilir. Eğer değişken maliyet çıktının birim maliyetini ifade ediyorsa, bu durumda Q birim malın üretimindeki toplam değişken maliyet (T_{VC})

$$T_{VC} = V_C \cdot Q$$

ile hesaplanır.

Sabit ve değişken maliyetlerin toplamından oluşan toplam maliyet ise

$$T_C = F_C + V_C \cdot Q$$

ile bulunur. Eğer birim başına değişken maliyet sabitse, T_C fonksiyonu doğrusal bir fonksiyon olur.

Toplam Maliyet

Ekonomik açıdan toplam maliyet önemlidir. Mesela, uluslararası bir traktör firmasının biri Türkiye'de diğeri de Almanya'da olmak üzere iki üretim tesisi olduğunu varsayalım. Bu tesislerden Türkiye'de olanın yıllık toplam maliyeti ₺50 milyon, Almanya'da olanınki ise ₺200 milyon olsun. Türkiye'deki tesisin yıllık toplam maliyeti daha düşük olduğu için bunu daha verimli ya da daha başarılı olarak değerlendiremeyiz.

Bu analizi yapabilmek için aynı zamanda her iki tesiste üretilen toplam traktör sayısını da bilmemiz gerekir. Dolayısıyla burada önemli olan toplam maliyet değil, traktör başına ortalama maliyettir. Eğer Almanya'daki fabrika yılda 100 000, Türkiye'deki fabrika yılda 20 000 traktör üretiyorsa bu durumda ortalama maliyetler

$$A_{C1} = \frac{200\,000\,000}{100\,000} = ₺2\,000\text{ , } A_{C2} = \frac{50\,000\,000}{20\,000} = ₺2\,500$$

olarak hesaplanır.

Bu durumda Almanya'daki tesisin ortalama maliyeti daha düşük olduğundan daha verimli çalıştığını söyleyebiliriz.

Basitleştirilmiş varsayımlara göre toplam maliyet fonksiyonunu doğrusal olarak belirlenir. Ancak bazen toplam maliyet fonksiyonunun biçimi daha farklıdır. Bu farkın nedenleri nelerdir ve iktisat teorisine göre toplam maliyet fonksiyonunun biçimi nasıl olmalıdır?

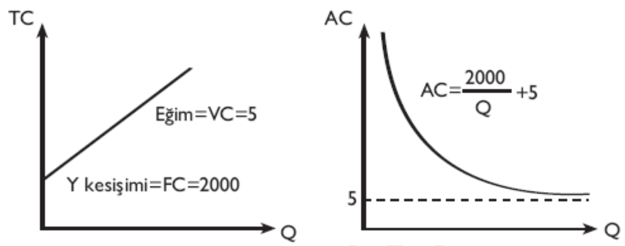
Genel olarak ortalama maliyet fonksiyonu (A_C) toplam maliyet fonksiyonunu çıktıya bölerek elde edilir.

$$A_C = \frac{T_C}{Q} = \frac{F_C + V_C \cdot Q}{Q} = \frac{F_C}{Q} + V_C$$

Örneğin sabit maliyetler 2 000 ve değişken maliyetler birim başına 5 ise, T_C ve A_C fonksiyonlarını belirleyerek grafiklerini çizelim. $T_C = 2000 + 5Q$ olur. Buradan ortalama maliyet de olarak belirlenir.

$$A_C = \frac{2\,000}{Q} + 5$$

Toplam maliyet fonksiyonu doğrusal bir fonksiyon olduğundan grafiğinde y kesişimi sabit maliyete ve eğimi de değişken maliyete eşit olur. Ortalama maliyet fonksiyonunun grafiği ise L şeklinde olur.



Eğer üretim düzeyi düşükse $\frac{F_C}{Q}$ değeri büyür. Bu nedenle A_C grafiği düşük çıktı düzeylerinde hızla yukarı doğru yönelir. Üretim düzeyi arttığında ise $\frac{F_C}{Q}$ değeri azalacağından grafik aşağı doğru yönelerek düzleşir. Çünkü sabit maliyet çok sayıda birim üzerine bölünmektedir. Bu nedenle A_C eğrisi L şeklindedir.

Toplam Kâr

1.4. Tanım: Toplam hâsıla ile toplam maliyet arasındaki farka kâr denir. Kâr Ω, Toplam hâsıla T_R, toplam maliyet T_C ile gösterilmek üzere,

$$\Omega = T_R - T_C$$

dir. Toplam hâsıla bir firmanın, sattığı mallardan elde ettiği kazançtır. Toplam maliyet ise firmanın, malların üretimi için harcadığı para miktarıdır. Bir firma Q miktarındaki malı, P fiyatından satarsa elde edeceği kazanç

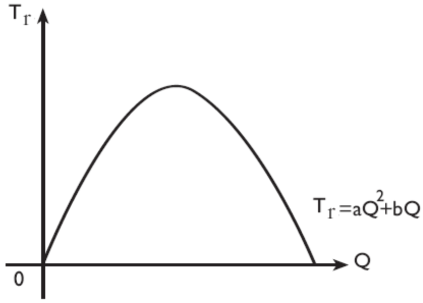
$$T_R = P \cdot Q$$

kadar olur. Doğrusal bir talep fonksiyonumuz varsa

$$P = aQ + b, \quad (a < 0, b > 0)$$

Toplam hâsıla fonksiyonunu rahatlıkla belirleyebiliriz.

$$T_R = P \cdot Q = (aQ + b)\,Q = aQ^2 + bQ$$



Toplam Hasıla Fonksiyonu

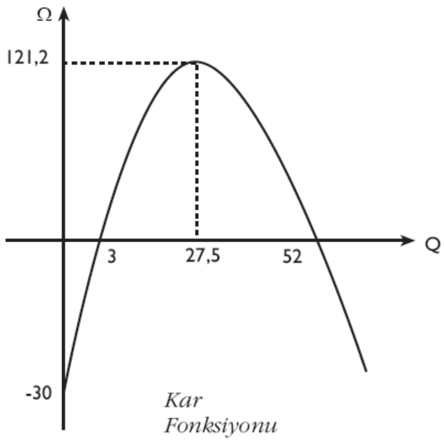
Örnek: $P = 100 - 2Q$ şeklinde ifade edilen bir talep fonksiyonu, bize aşağıdaki toplam hasıla fonksiyonunu verecektir:

$$T_R = Q(100 - 2Q) = 100Q - 2Q^2$$

Örnek: $\Omega = -0{,}2Q^2 + 11Q - 30$ biçimindeki kâr fonksiyonunun tepe noktasını bularak maksimum kâr değerini bulunuz.

Çözüm: Verilen ikinci dereceden fonksiyonun tepe noktası $T(r, k)$ ile gösterirsek,

$$r = -\frac{11}{2\cdot(-0{,}2)} = 27{,}5 \text{ ve } k = \frac{4\cdot(-0{,}2)\cdot(-30) - 11^2}{4\cdot(-0{,}2)} = 121{,}25$$



Kar Fonksiyonu

bulunur.

TÜKETİM FONKSİYONU

1.5. Tanım: Mal ve hizmetlere yapılan toplam tüketim harcamaları (C), harcanabilir gelir (Y_d) olmak üzere

$$C = f(Y_d)$$

fonksiyonuna tüketici fonksiyonu denir. Tüketim fonksiyonu herhangi bir eğri oluştururrsa

$$C = f(Y_d)$$

biçimindedir. Eğer tüketim fonksiyonunun doğrusal olduğu varsayılırsa

$$C = aY_d + b$$

şeklinde ifade edilir. Burada eğimi ifade eden a, iktisatta marjinal tüketim eğilimi olarak adlandırılır. (Marjinal tüketim eğilimi marjinal fonksiyonlarda incelenecektir.)

Harcanabilir gelirin ve tüketimin milyon TL olarak ölçüldüğünü düşünürsek marjinal tüketim eğilimi, harcanabilir gelirdeki ₺1 milyonluk artış sonucunda tüketimin kaç milyon TL artacağını gösterir. Marjinal tüketim eğilimi 0 ile 1 arasında bir değer alır. Bunun anlamı harcanabilir gelir ile tüketim arasında pozitif bir ilişkinin olduğu, yani harcanabilir gelir arttığında tüketimin de artacağı ancak tüketimdeki artışın, gelirdeki artış kadar olmayacağıdır. Fonksiyonun kesişme terimi olan a ise iktisatta otonom harcamalar olarak adlandırılır. Bu da gelirin olmaması ya da sıfıra eşit olması durumunda yapılacak tüketim harcamalarının düzeyini temsil eder.

Mesela, Türkiye ekonomisine ait makro tüketim fonksiyonu 1998'in 1. çeyreği ile 2011'in 2. çeyreği arasındaki veriler kullanılarak aşağıdaki gibi tahmin edilmiştir.

$$C = 860851{,}9 + 0{,}69Y_d$$

Burada marjinal tüketim eğilimi 0,69 olarak belirlenmiştir. Yani gelirdeki 1 birimlik artış sonucunda tüketim harcamaları 0,69 birim artmaktadır.

Örnek: Türkiye ekonomisine ait makro tüketim fonksiyonu 20_0'in 1. çeyreği ile 20_5'in 2. çeyreği arasındaki veriler kullanılarak aşağıdaki gibi tahmin edilmiştir.

$$C = 0{,}65Y_d + 860\,851$$

Burada marjinal tüketim eğilimi 0,65 olarak belirlenmiştir. Yani gelirdeki 1 birimlik artış sonucunda tüketim harcamaları 0,65 birim artmaktadır.

Örnek: Başlangıçta ₺2 000 masrafı olan bir ürün 100 adetinde ₺5 000 ye çıkmaktadır. Bu ürünün oluşturduğu doğrusal tüketici fonksiyonunu bulunuz ve 600 adet üretilen bu ürün toplam maliyetini bulunuz.

Çözüm: Verilere göre doğrusal fonksiyon (0; 2 000) ve (100; 5 000) noktalarından geçtiğinden

$$\frac{y-5000}{2000-5000}=\frac{x-100}{0-100}$$

$$y = 30x + 2\,000$$

elde edilir. 600 adet üretiminde

$$y = 30 \cdot 600 + 2\,000 = ₺20\,000$$

oluşur.

ENFLASYON

1.6. Tanım: Paranın satın alma gücündeki azalmasına veya paranın değer kaybetmesine enflasyon denir. i ile gösterilir. Enflasyon oranları genellikle yıllık olarak ölçülür ve zaman geçtikçe ürün fiyatlarının değişimi dolayısıyla sürekli olur. Faiz kavramı konusunu hatırlayalım.

Eğer t zamanı göstermek üzere t anındaki paranın satın alma gücünün oranı $\frac{dP}{dt}$ paranın satın alma gücü ile orantılıdır. Bu orantı katsayısı enflasyondur. Enflasyon dolayısıyla paranın satın alma gücü i enflasyon olmak üzere;

$$\frac{dP}{dt} = i \cdot P$$

yazılır. Böylece $P(0) = P_0$ olmak üzere bu denklemin çözümü $P(t) = P_0e^{-it}$ olur. $P(t)$ fonksiyonuna paranın gelecek değeri denir ve F_v şeklinde gösterilir. Paranın satın alma gücüne şimdiki satın alma gücü denir ve P_v ile gösterilir.

$$F_v = P_ve^{-it}$$

olur.

Benzer şekilde bir bankaya yüzde i oranında faizle PV miktarda para yatılırsa paranın t anındaki miktarı

$$F_v = P_ve^{-it}$$

olarak bulunur. (İntegral konusunda bu denklemin elde edilişi izah edilmişti.)

Örnek: Yıllık enflasyon %15 ise ₺200 sinin 10 yıl sonraki satın alma gücünü bulalım. Bu durumda $i = 0{,}15$, $P_v = ₺200$ dir. Buna göre

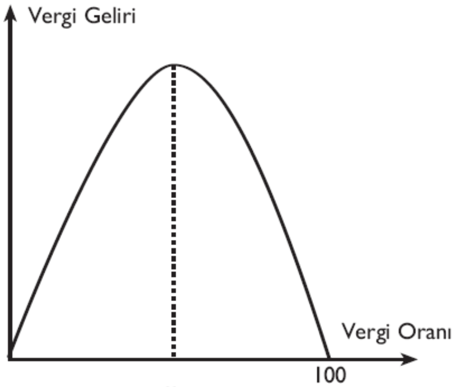
$$F_v = P_ve^{-it}$$

$$F_v = 200e^{-0{,}15\cdot 10} = ₺44{,}63$$

olur. Yani 200 TL, 10 yılda $200 - 44{,}63 = ₺155{,}37$ lik değer kaybına uğrar.

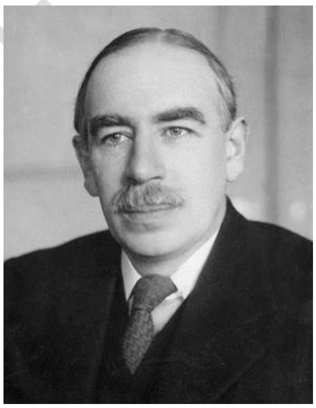
LAFFER EĞRİSİ

1.7. Tanım: Vergi oranları ile devletin tahsil edeceği toplam vergi gelirleri arasındaki ilişkiyi gösteren eğriye Laffer eğrisi denir. Buna göre, bireyler vergi oranlarında yapılacak artışlara tepki verirler. Vergi düzeyindeki artış belli bir noktaya kadar devletin vergi gelirlerinin artmasını sağlarken, vergilerin daha da yükseltilmesi bireylerin vergi ödemekten kaçınma eğilimi göstermesine, dolayısıyla devletin vergi gelirlerinin azalmasına yol açar. Uç durumları ele alırsak; vergi oranı %0 ise elbette vergi geliri de sıfır olacaktır, vergi oranı %100 olduğunda ise kimse tüm kazancını devlete vergi olarak vermek istemeyeceğinden gene vergi geliri sıfır olur.



Laffer Eğrisi

KEYNES TEORİSİ


John Maynard Keynes
05 Haziran 1883, Cambridge, Birleşik Krallık – 21 Nisan 1946, Sussex, Birleşik Krallık

1.1. Teorem: Devlet harcamalarında yatırımlar artarsa ulusal gelir düzeyi artar.

İspat: Bu önerme de

p = yatırımlar artar ve q = ulusal gelir düzeyi artar

olsun. Bu $p \Rightarrow q$ biçiminde bir önermedir.

Söz konusu Keynes'çi modelde bu önermenin doğru olduğunu biliyoruz. Yani bu tür bir modelde p doğru olduğunda q doğrudur. Ya da başka bir deyişle q, p için gereklidir. Buna karşılık, aynı modelde kamu harcamalarındaki bir artış da geliri artıracağından p yanlış olduğunda bile q doğru olabilir. Dolayısı ile p, q için bir yeterli şarttır. Nitekim Y gelir, C tüketim, I yatırım ve G kamu harcamalarını gösterdiğinde basit Keynes'çi modeli

$$Y = C + I + G$$

biçiminde yazabiliriz. Denge geliri Y^e ile gösterirsek, yatırımlar gelir harcamasına bağlı olduğundan

$$Y^e = cY^e + I$$

olacak şekilde $0 < c < 1$ vardır. Buna göre

$$Y^e = \frac{1}{1-c} I$$

dir. Şu halde

$$Y^e = \frac{1}{1-c}(I + G), \quad 0 < c < 1$$

olacak şekilde Y^e vardır. Şimdi yatırımın ΔI kadar arttığını kabul edelim. $(\Delta I > 0)$. Bu durumda yeni denge geliri Y^f ile gösterirsek

$$Y^f = \frac{1}{1-c}(I + \Delta I + G)$$

$$Y^f = \frac{1}{1-c}(I + G) + \frac{1}{1-c}\Delta I$$

$$Y^f = Y^e + \frac{1}{1-c}\Delta I$$

$$Y^f - Y^e = \frac{1}{1-c}\Delta I > 0$$

olacaktır. Bu ise denge gelir düzeyini arttığını gösterecektir. O halde yatırım, arttığında gelir, bu model çerçevesinde mutlaka artacaktır. Buna karşılık, kamu harcamalarında da ΔG kadar bir artış olduğunda yine denge gelirinin

$$Y^f - Y^e = \frac{1}{1-c}\Delta G > 0$$

biçiminde artacağını gösterebiliriz. O halde gelirin artması için yatırımların artması yeterli fakat gerekli olmayan bir şarttır.

BASİT MİKTAR KURAMI

1.2. Teorem: Piyasadaki para miktarı arttığında ancak ve ancak ulusal gelir düzeyi veya enflasyon artar.

İspat: Basit miktar kuramında
M Piyasaya Sulunan Miktarı
V Paranın devir hızı
P Piyasadeki Para Miktarı
Y Ulusal gelir düzeyi
olduğundan

$$M \cdot V = P \cdot Y$$

biçimindedir. Eğer para sunumu arttığında, miktar denkleminin sağlanabilmesi için sağ tarafta da bir şeylerin artması gerekmektedir. Ulusal gelir düzeyi sabit kabul edildiğinden, bu durumda tek artabilecek olan fiyat düzeyidir. Veya enflas sabit olduğunda ulusal gelir düzeyi artar.

LOJİSTİK EĞRİSİ

1.8. Tanım: A, B ve k'nın pozitif birer sabit olduğu $Q(t) = \frac{B}{1+Ae^{-Bkt}}$ fonksiyonunun grafiğine lojistik eğrisi denir. Lojistik eğrisi her türlü büyüme işlemi için kullanılabilir. Eğer büyüme işleminde çevresel faktörlerin büyüme oranını frenleyecek etkisi varsa, o zaman lojistik eğrisi bu büyüme işlemini tanımlayabilmek için kullanılır.

Örnek: $Q(t) = \frac{1}{1+e^{-t}}$ tipindeki lojistik eğrisinin büyüme oranının $(1 - Q(t))$ e eşit olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Önce Q'nın zamana göre değişimini türev yardımıyla ölçelim. Unutmayalım ki bu ölçüm bize zamana göre büyümeyi gösterecektir.

$$Q(t) = \frac{-e^{-t}(-1)}{(1+e^{-t})^2} = \frac{e^{-t}}{(1+e^{-t})^2}$$

Büyümeyi yukarıda elde ettiğimize göre artık büyüme oranını tanımlayabiliriz. Eğer yukarıdaki büyümeyi, Q'nun kendisiyle oranlarsak o zaman büyüme oranını elde ederiz:

$$\frac{Q'(t)}{Q(t)} = \frac{e^{-t}}{1+e^{-t}}$$

Büyüme oranını bu denklemdeki gibi gösterdikten sonra, son olarak bu ifadenin $1 - Q(t)$ ile aynı olduğunu göstermemiz gerekiyor. Öyleyse,

$$1 - Q(t) = \frac{1+e^{-t}-1}{1+e^{-t}} = \frac{e^{-t}}{1+e^{-t}}$$

olduğunu yazmak bizi çözüme götürür.

Örnek: Yapılan bir araştırmaya göre bir tür grip salgını baş gösterdikten t hafta sonra yaklaşık olarak $Q(t) = \frac{20}{1+19e^{-1,2t}}$ bin kişi hastalığa yakalanmaktadır. Bu bilgiye göre:

a) Hastalık kendini ilk gösterdiğinde kaç kişi hasta olmuştur? 2 hafta sonra kaç kişi hastadır?

b) Yaklaşık olarak ne kadar süre sonra hastalığın yayılması azalmaya başlayacaktır?

c) Eğer eğilim hep böyle devam ederse, sonunda yaklaşık kaç kişi hastalığa yakalanmış olacak?

KAYNAKÇA

1. Prof. Dr. Mahmut KOÇAK, Analiz Ders Notları, Osmangazi Üniversitesi, 2012, Eskişehir.
2. Komisyon, Matematiksel İktisat, Anadolu Üniversitesi, 2012, Eskişehir.
3. Arş. Gör. Sefa ERKUŞ, Matematiksel İktisat Ders Notları, Karabük Üniversitesi, 2012, Karabük.