1. BÖLÜM
VEKTÖR CEBİRİ

GİRİŞ

Vektörler lineer cebir derslerinde anlatılmıştır. Vektörel Analiz derslerinde 3 boyutlu uzayda vektörlerin cebiri, fonksiyonları, türevi, integrali konularını inceleyeceğiz. 3 boyutlu analizi yaparken yer yer 2 boyut uzay üzerinde de örnekler verilecektir. Yalnız vektörler lineer cebir derslerinde geniş çaplı izah edildiğinden burada vektörel analiz dersleri için ihtiyaç olunan yerler bahsedilecektir. Ayrıca vektörler birer doğru olduğundan ve $\mathbb{R}^3$ de doğru denklemleri incelendiğinden o konuya havale ederek, vektörler ile düzlem arasındaki ilişkilerden fazla bahsedilmeyecektir. "Üç Boyutlu Uzayda Doğrular" konusuna havale edilecektir.

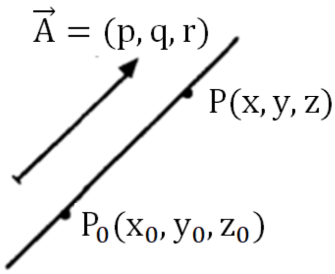
DOĞRU DENKLEMLERİ

Düzlemde veya uzayda herhangi iki nokta verildiği zaman bu iki noktadan yalnız bir doğru geçtiğini geometri derslerinden biliyoruz. Sadece bir nokta verildiğinde bu noktadan sonsuz tane doğru geçer. O halde, bir noktadan geçen doğru denklemi için sadece bu nokta yeterli değildir. Noktayla birlikte doğrunun paralel olduğu bir vektöründe verilmesi gerekir.

Şimdi vektörleri kullanarak bir doğru denkleminin nasıl elde edileceğini gösterelim.

1. Bir Noktadan Geçen ve Bir Vektöre Paralel Olan Doğrunun Denklemi

1.1. Tanım: $\mathbb{R}^3$ deki $P_0(x_0, y_0, z_0)$ noktasından geçen ve $\vec{A} = (p, q, r)$ vektörüne paralel (çakışık) olan doğru ve doğru üzerinde herhangi bir nokta $P(x, y, z)$ olsun. $\vec{A}$ vektörüne doğrunun doğrultman vektörü, p, q, r sayılarına da doğrultman parametreleri denir.



Örnek: Aşağıdaki doğrularının doğrultman vektörlerini bulunuz.

A) $\frac{x+1}{4} = \frac{y+2}{3} = z$

B) $\frac{x-1}{5} = \frac{1-z}{3}, y = 4$

C) $\frac{x-1}{2} = y + 3 = \frac{2z-1}{4}$

D) $x = 3t - 8, y = 5t - 6, z = 4t + 5$

Çözüm: A) $\vec{A} = (4, 3, 1)$

B) $\frac{x-1}{5} = \frac{z-1}{-3}, y = 4$ ise $\vec{A} = (5, 0, -3)$

C) $\frac{x-1}{2} = y + 3 = \frac{z-1/2}{3/2}$ ise $\vec{A} = \left(2, 1, \frac{3}{2}\right)$

D) $\vec{A} = (3, 5, 4)$

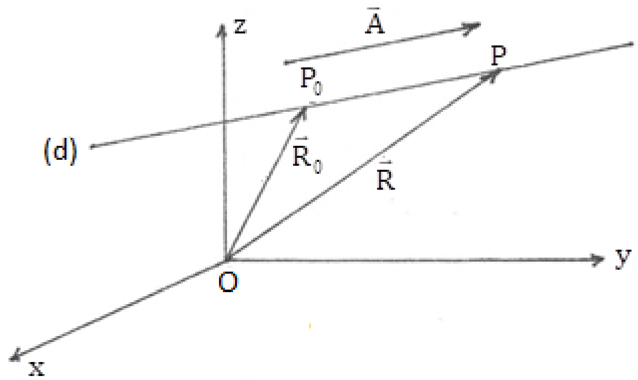
Örnek: $\mathbb{R}^3$ deki $2x + 3y + 4z = 12$ doğrusunun doğrultman vektörü nedir?

Çözüm: Doğru denklemi $\frac{x}{6} + \frac{y}{4} + \frac{z}{3} = 1$ yazılabilir. Bu denklemin doğrultman vektörü $\vec{A} = (6, 4, 3)$ olur.

1.1. Teorem: $\mathbb{R}^3$ deki $P(x_0, y_0, z_0)$ noktasından geçen ve $\vec{A} = (p, q, r)$ vektörüne paralel (veya çakışık) olan doğrunun denklemi:

$$\frac{x-x_0}{p}=\frac{y-y_0}{q}=\frac{z-z_0}{r}$$

dir.



İspat: $\mathbb{R}^3$ de bir $P(x_0, y_0, z_0)$ noktası ve bir de $\vec{A}(p, q, r)$ vektörü verilmiş olsun. P_0 noktasından geçen ve $\vec{A}$ vektörüne paralel olan bir tek doğru vardır.

P_0 noktasının yer vektörü R_0 olsun.

$$\vec{R}_0 = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k}$$

d doğrusu üzerinde bulunan herhangi bir $P(x, y, z)$ hareketli noktasını göz önüne alırsak

$$\overrightarrow{OP} = R = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

olup $\overrightarrow{P_0P}$ vektörü $\vec{A}$ ya paraleldir. O halde $\overrightarrow{P_0P} = t\vec{A}$ (t skaler) yazılabilir. Diğer taraftan $\overrightarrow{P_0P} = \overrightarrow{0P} - \overrightarrow{0P_0}$ dır. O halde $t\vec{A} = \vec{R} - \overrightarrow{R_0}$ veya $\vec{R} = \overrightarrow{R_0} + t\vec{A}$ olur.

Bu eşitlik d doğrusunun vektörel denklemini gösterir.

Bu denklemin koordinatlarını yazarsak

$$\begin{aligned}(x, y, z) &= (x_0, y_0, z_0) + t(p, q, r)\\ &= (x_0 + tp, y_0 + tq, z_0 + tr)\end{aligned}$$

olup,

$$\begin{aligned}x &= x_0 + tp\\ y &= y_0 + tq\\ z &= z_0 + tr\end{aligned}$$

bulunur. // t parametresi $-< t < +\infty$ aralığında değiştikçe (x, y, z) ler doğrunun tüm noktalarını tarar. Bu eşitliklere d doğrusunun parametrik denklemi denir.

Parametrik denklemdeki t'yi çekersek

$$t = \frac{x-x_0}{p} = \frac{y-y_0}{q} = \frac{z-z_0}{r}$$
$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = t(p, q, r)$$
elde edilir.

1.2. Tanım: $\mathbb{R}^3$ deki $P(x_0, y_0, z_0)$ noktasından geçen ve $\vec{A} = (p, q, r)$ vektörüne paralel (veya çakışık) olan doğrunun denklemine d doğrusunun simetrik formu veya Kartezyen (nokta koordinatları cinsinden) denklemi denir.

Örnek: $P(-1, 3, 4)$ noktasından geçen ve $\vec{A} = 2\vec{i} + 8\vec{j} + 5\vec{k}$ vektörüne paralel olan doğrunun parametrik denklemini bulunuz.

Çözüm: P_0 noktasından geçen $\vec{A}$ vektörüne paralel olan doğrunun parametrik denklemi $\overrightarrow{OP_0} - \overrightarrow{OP} = t\,\vec{A}$ olduğundan,
$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = t(p, q, r)$$
$$(x - (-1), y - 3, z - 4) = t(2, 8, 5)$$
ve
$$\left.\begin{aligned} x &= 2t - 1 \\ y &= 8t + 3 \\ z &= 5t + 4 \end{aligned}\right\}$$
$$t = \frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{8} = \frac{z-4}{5}$$
olur.

Örnek: Doğrultman vektörü $\vec{A} = 8\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ olan ve $P(1, 2, 0)$ noktasından geçen doğrunun simetrik ve parametrik denklemlerini bulunuz.

Çözüm: $(x - 1, y - 2, z - 0) = t(8, 2, -1)$
doğrunun parametrik denklemi ve
$$\left.\begin{aligned} x - 1 &= 8t \\ y - 2 &= 2t \\ z &= -t \end{aligned}\right\}$$
$$t = \frac{x-1}{8} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{-1}$$
$t \in \mathbb{R}$ doğrunun simetrik formu olur.

Örnek: Orijinden geçen ve $\vec{A} = (-2, 3, 5)$ vektörüne paralel olan doğrunun denklemi nedir?

Çözüm: $O(0, 0, 0)$ dan geçecek ve $\vec{A} = (-2, 3, 5)$ vektörüne paralel olacağından,

$$\frac{x-0}{-2} = \frac{y-0}{3} = \frac{z-0}{5}$$

$$\frac{x}{-2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5}$$

bulunur.

Örnek: $\frac{x-2}{3} = \frac{y+6}{5} = \frac{z-4}{-2}$ olan doğrunun doğrultman vektörünü ve bu doğru üzerinde herhangi iki noktayı bulunuz.

Çözüm: Doğrultman vektörü $\vec{A} = (3, 5, -2)$ dir.

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+6}{5} = \frac{z-4}{-2} = t$$

$$x = 3t + 2, y = 5t - 6, z = -2t + 4$$

elde edilir. Doğrular üzerindeki tüm noktalar $(3t + 2, 5t - 6, -2t + 4)$ biçimindedir.

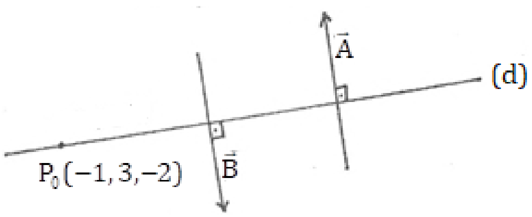
$k = 0$ için $A(2, -6, 4)$

$k = 1$ için $A(5, -1, 2)$

bulunur.

Örnek: $P_0 = (-1, 3, -2)$ noktasından geçen ve $\vec{A} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}$ ve $\vec{B} = \vec{i} + 2\vec{j} + 5\vec{k}$ vektörlerine dik olan doğrunun parametrik denklemlerini bulunuz?

Çözüm:



$$\vec{A} \perp d \text{ ve } \vec{B} \perp d \text{ ise } \vec{A} \times \vec{B} \perp d$$

dir. O halde

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & 4 & 1\\ 1 & 2 & 5\end{vmatrix}=18\vec{i}-14\vec{j}+2\vec{k}$$

vektörü d doğrusunun doğrultman vektörüdür. Buna göre P(x, y, z) doğru üzerinde herhangi bir nokta ise, $\overrightarrow{P_0P} = t(\vec{A}\times\vec{B})$ dır. Bunu da koordinatlar cinsinden yazarsak,

$$(x-x_0, y-y_0, z-z_0) = t(p, q, r)$$

buradan

$$\left.\begin{aligned} x-x_0 &= 18t\\ y-y_0 &= -14t\\ z-z_0 &= 2t \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} x+1 &= 18t\\ y-3 &= 14t\\ z+2 &= 2t \end{aligned}\right\}$$

olur. t ye göre çözülerek doğrunun parametrik denklemi

$$\left.\begin{aligned} x &= 18t-1\\ y &= 14t+3\\ z &= 2t-2 \end{aligned}\right\}$$

$$t=\frac{x+1}{18}=\frac{y-3}{14}=\frac{z+2}{2}$$

olarak bulunur.

1.1. Not: $\frac{x-x_1}{p}=\frac{y-y_1}{q}=\frac{z-z_1}{r}$ doğru denkleminde;

i) Doğrultman parametrelerinden biri sıfır ise, mesela $P=0$ ise, doğrultman vektörü x eksenine dik olur. Bu durumda doğru $y\circ z$ düzlemine paraleldir ve denklemi,

$$x-x_1=0 \text{ ve } \frac{y-y_1}{q}=\frac{z-z_1}{r}$$

olur.

ii) Doğrultman parametrelerinden ikisi sıfır ise, mesela $P=q=0$ ise, doğrultman vektörü $x\circ y$ düzlemine dik olur. Bu durumda doğru z eksenine paraleldir ve denklemi,

$$x-x_1=0 \text{ ve } y-y_1=0$$

olur.

2. İki Noktadan Geçen ve Bir Vektöre Paralel Olan Doğrunun Denklemi

1.2. Teorem: $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ ve $P_1 = (x_1, y_2, z_1)$ gibi iki noktadan geçen doğru denklemini bulmak için yukarıda yapılan işlemlerde P_o yerine yine P_0, $\vec{A}$ vektörü yerine de $\overrightarrow{P_0P_1} = \vec{A}$ alınması yeterlidir. O halde P_0 ve P_1 den geçen doğru denkleminin simetrik formu,

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{y-y_0}{y_0-y_1} = \frac{z-z_0}{z_0-z_1}$$

yazılabilir.

Bu teorem 1.1. teoremin bir sonucudur.

Örnek: $P_0(10, -1, 4)$ ve $P_1(-8, 3, 5)$ noktasından geçen doğrunun simetrik formunu bulunuz.

Çözüm: $\dfrac{x-10}{-8-10} = \dfrac{y-(-1)}{3-(-1)} = \dfrac{z-4}{5-4}$

$$\frac{x-10}{-18} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-4}{1}$$

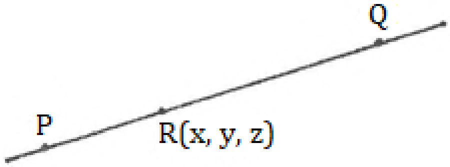
Örnek: $P_0(6, 2, 3)$ ve $P_1(-1, 4, 0)$ noktalarından geçen doğrunu denklemi nedir?

Çözüm: $\dfrac{x-6}{-1-6} = \dfrac{y-2}{4-2} = \dfrac{z-3}{0-3}$

$$\frac{x-10}{-7} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-4}{-3}$$

Örnek: $P(2, -1, 1)$ ve $Q(3, 1, 1)$ noktalarından geçen doğru denkleminin simetrik formunu bulunuz?

Çözüm:



$\overrightarrow{PQ} // \overrightarrow{PR}$ ise $\overrightarrow{PR} = t\,\overrightarrow{PQ}$

$(x-2, y-(-1), z-1) = t(3-2, 1-(-1), 1-1)$

$(x-2, y+1, z-1) = t(1, 2, 0)$

$$\left.\begin{array}{r} x-2=t \\ y+1=2t \\ z-1=0 \end{array}\right\}$$

buradan doğru denkleminin simetrik formu,

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{2}, z=1$$

bulunur.

3. İki Doğrunun Paralel Olma Durumu

1.3. Teorem: $\vec{d}_1$ doğrusunun doğrultman vektörü $\vec{A}=(p_1, q_1, r_1)$ ve $\vec{d}_2$ doğrusunun doğrultman vektörü $\vec{B}=(p_2, q_2, r_2)$ olsun. Bu takdirde,

$$\vec{d}_1 // \vec{d}_2 \Leftrightarrow \frac{p_1}{p_2}=\frac{q_1}{q_2}=\frac{r_1}{r_2}$$

dir.

İspat: $\vec{d}_1: \frac{x-x_1}{p_1}=\frac{y-y_1}{q_1}=\frac{z-z_1}{r_1}$

$\vec{d}_2: \frac{x-x_2}{p_2}=\frac{y-y_2}{q_2}=\frac{z-z_2}{r_2}$

doğrularının paralel olması demek doğrultman vektörlerinin paralel olması demektir. $\vec{d}_1$ doğrusunun doğrultman vektörü $\vec{A}=(p_1, q_1, r_1)$ ve $\vec{d}_2$ doğrusunun doğrultman vektörü $\vec{B}=(p_2, q_2, r_2)$ olduğundan,

$$\vec{d}_1 // \vec{d}_2 \Leftrightarrow \frac{p_1}{p_2}=\frac{q_1}{q_2}=\frac{r_1}{r_2}$$

elde edilir.

Örnek: Parametrik denklemi, $(x=3t+1, y=2t-1, z=4t)$ olan doğruya paralel olan ve $P(2,1,0)$ noktasından geçen doğrunun denklemini bulunuz.

Çözüm: Doğrunun doğrultman vektörü $\vec{A}=(3,2,4)$ olacağından,

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{4}$$

elde edilir.

4. İki Doğrunun Çakışık Olması

İki doğrunun denklemleri bazen farklı görünse de, aynı doğruyu ifade ediyor olabilirler. Böyle doğrulara çakışık doğrular denir. Örneğin,

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{2} = z \text{ ve } x - 1 = y - 1 = 2z - 1$$

doğrularının her ikisi de aynı doğruyu ifade ederler. İki doğrunun çakışık olduğunu, doğrultmanlarının paralel olduğunu ve bir ortak noktalarını bularak gösterebiliriz.

Yukarıda verilen iki doğrunun doğrultmanları paraleldir ve P(2, 2, 1) noktasının her iki doğruyu da sağladığı kolayca görülebilir. Her iki doğruyu da sağlayan sonsuz sayıda nokta bulunabilir.

1.4. Teorem: $\vec{d}_1$ ve $\vec{d}_2$ doğruları çakışık olması için gerek ve yeter şart

i) Doğrultmanları paralel ($\vec{A}//\vec{B}$)
ii) Ortak noktaları vardır

Bu teoremin ispatı aşikardır.

Örnek: $\frac{x-2}{3} = y = 1 - z$ ve $\frac{2x-1}{6} = \frac{y-k}{m} = \frac{s-3z}{n}$ doğruları çakışık ise $k + m + n + s$ nedir?

Çözüm: i) Doğrultman vektörleri aynı olmalıdır. Buna göre, $m = 1$ ve $n = 3$ olur.

ii) Birinci doğruyu sağlayan (2, 0, 1) noktasını ikinci doğruda yerine yazarsak,

$$\frac{4-1}{6} = \frac{0-k}{1} = \frac{s-3\cdot 1}{3}$$

eşitliğinden, $k = -\frac{1}{2}$ ve $s = \frac{9}{2}$ bulunur. O halde $k + m + n + s = 8$ olur.

5. İki Doğrunun Dik Olma Durumu

1.5. Teorem: $\vec{d}_1$ doğrusunun doğrultman vektörü $\vec{A} = (p_1, q_1, r_1)$ ve $\vec{d}_2$ doğrusunun doğrultman vektörü $\vec{B} = (p_2, q_2, r_2)$ olsun. Bu takdirde,

$$\vec{d}_1 \perp \vec{d}_2 \Leftrightarrow p_1 p_2 + q_1 q_2 + r_1 r_2 = 0$$

dir.

İspat: $\vec{d}_1 : \frac{x-x_1}{p_1} = \frac{y-y_1}{q_1} = \frac{z-z_1}{r_1}$

$$\vec{d}_2 : \frac{x-x_2}{p_2} = \frac{y-y_2}{q_2} = \frac{z-z_2}{r_2}$$

doğrularının paralel olması demek doğrultman vektörlerinin dik olması demektir. $\vec{d}_1$ doğrusunun doğrultman vektörü $\vec{A} = (p_1, q_1, r_1)$ ve $\vec{d}_2$ doğrusunun doğrultman vektörü $\vec{B} = (p_2, q_2, r_2)$ olduğundan,

$$\vec{d}_1 \perp \vec{d}_2 \Leftrightarrow \vec{d}_1\vec{d}_2 = 0 \Leftrightarrow p_1p_2 + q_1q_2 + r_1\, r_2 = 0$$

elde edilir.

Örnek: $\vec{d}_1 : \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-5}{2}$

$$\vec{d}_2 : \frac{x-4}{a} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{5}$$

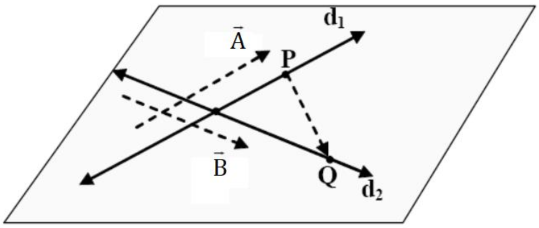
doğruları paralel ise $m + n$ nedir?

Çözüm: $\vec{d}_1$ ve $\vec{d}_2$ doğrularının doğrultman vektörleri $\vec{A} = (3, 4, 2)$ ve $\vec{B} = (a, 2, 5)$ dir.

$$p_1p_2 + q_1q_2 + r_1\, r_2 = 0$$
$$3a + 4 \cdot 2 + 2 \cdot 5 = 0$$
$$a = -6$$

6. İki Doğrunun Kesişmesi ve Aykırı Doğrular

Paralel olmayan iki doğru aynı düzlemde iseler bir noktada kesişirler. Yani paralel olmama ve aynı düzlemde olma şartıyla iki doğru birbirleriyle kesişir.



$\mathbb{R}^3$ de Herhangi iki $\vec{d}_1$ ve $\vec{d}_2$ doğrularının aynı düzlemde olması için, düzlem üzerinde seçilecek üç vektörün lineer bağımlı olmalıdır. Lineer bağımlı olması için determinantlarının sıfır olması gerekir. Bunun için $\vec{d}_1$ ve $\vec{d}_2$ doğruları ile $\overrightarrow{PQ}$ doğrusunun oluşturduğu determinant uygulanmalıdır. Yani,

$$\det(\vec{A}, \vec{B}, \overrightarrow{PQ}) = 0 \text{ ve } \vec{A} \nparallel \vec{B}$$

olmalıdır.

Örnek: $\frac{x-1}{2}=\frac{z+1}{3}, y=1$ ve $x-2=\frac{2-y}{k}, z=1$

a) Doğrularının kesişmesi için k kaç olmalıdır?
b) Bu doğruların kesişme noktası nedir?

Çözüm: a) $\vec{A}=(2,0,3), \vec{B}=(1,-k,0)$, $P(1,1,-1)$ ve $Q(2,2,1)$ için

$$\det(\vec{A},\vec{B},\overrightarrow{PQ})=\begin{vmatrix}2 & 0 & 3\\ 1 & -k & 0\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix}=-k+3=0$$

eşitliğinden $k=1$ elde edilir.

b) Kesişme noktasını bulmak için denklemleri ortak çözelim. İki denkleme göre, $x=1$ ve $z=1$'dir. Buna göre, $x=\frac{7}{3}$ olur. Kesişme noktaları $K\left(\frac{7}{3},1,1\right)$ olur.

1.3. Tanım: Eğer iki doğru birbirleriyle aynı düzlem üzerinde değillerse aykırı doğrular denir. Buna göre aykırı doğrular $\det(\vec{A},\vec{B},\overrightarrow{PQ})\neq 0$ dir.

Örnek: $\frac{x}{4}=\frac{y-1}{3}=z$ ve $\frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{2}=z-1$ doğrularının aykırı doğrular olduğunu gösteriniz.

Çözüm: a) $\vec{A}=(4,3,1), \vec{B}=(3,2,1)$, $P(0,1,0)$ ve $Q(1,-1,1)$ için

$$\det(\vec{A},\vec{B},\overrightarrow{PQ})=\begin{vmatrix}4 & 3 & 1\\ 3 & 2 & 1\\ 1 & -2 & 1\end{vmatrix}=2\neq 0$$

olduğundan aykırı doğrulardır.

7. İki Doğru Arasındaki Açı

1.6. Teorem: $\vec{d}_1$ doğrusunun doğrultman vektörü $\vec{A} = (p_1, q_1, r_1)$ ve $\vec{d}_2$ doğrusunun doğrultman vektörü $\vec{B} = (p_2, q_2, r_2)$ olsun. Bu takdirde iki doğru arasındaki açı,

$$\cos\theta = \frac{\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2}{\|\vec{d}_1\| \|\vec{d}_2\|}$$

dir.

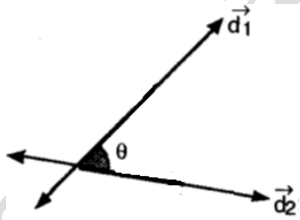
Bu teoremin ispatı lineer cebir derslerinde yapıldığından tekrar ispatı yapılmamıştır.

Örnek: $\vec{d}_1 : \frac{x-3}{-1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+3}{-\sqrt{2}}$

$\vec{d}_2 : \frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-5}{\sqrt{2}}$

doğruları arasındaki açı kaç derecedir?

Çözüm: $\vec{d}_1$ ve $\vec{d}_2$ doğrularının doğrultman vektörleri $\vec{A} = (-1, 1, \sqrt{2})$ ve $\vec{B} = (1, 1, \sqrt{2})$ dir.



$$\cos\theta = \frac{\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2}{\|\vec{d}_1\| \|\vec{d}_2\|} = \frac{(-1)\cdot 1 + 1\cdot 1 + (-\sqrt{2})\sqrt{2}}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-\sqrt{2})^2}\sqrt{1^2 + 1^2 + \sqrt{2}^2}} = -\frac{1}{2}$$

$\theta = 120^0$

bulunur.

Örnek: $\frac{x-2}{1} = \frac{y+4}{2} = \frac{z-3}{1}$ ve $\frac{x-2}{2} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z-3}{2}$

doğruları arasındaki açının kosinüsünü bulunuz.

Çözüm: Doğrultman vektörleri: $\vec{A} = (1, 2, 1)$ ve $\vec{B} = (2, -1, 2)$ dür.

$$\cos\theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{\|\vec{A}\| \|\vec{B}\|} = \frac{(1,2,1)(2,-1,2)}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2}\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{2}{3}$$

olur.

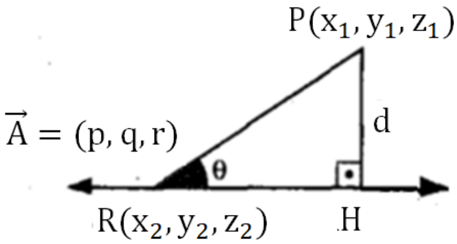
8. Bir Noktanın Bir Vektörüne Uzaklığı

1.7. Teorem: $P(x_1, y_1, z_1)$ noktasının $\vec{A} = (p, q, r)$ vektörüne en kısa uzaklığı,

$$d = \|\overrightarrow{PR}\| \sin\theta$$

dir.

İspat: $\vec{A} = (p, q, r)$ vektör üzerinde $R(x_2, y_2, z_2)$ noktasını alalım.



PRH dik üçgeninde $\sin\theta = \dfrac{d}{\|\overrightarrow{PR}\|}$ olduğundan $d = \|\overrightarrow{PR}\| \sin\theta$ olur.

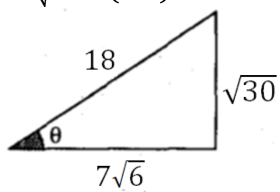
Örnek: $\dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y-3}{-2} = z - 1$ denklemi ile verilen $\vec{A}$ vektörüne $P(2, 1, 3)$ noktasına en kısa uzaklığı nedir?

Çözüm: $\vec{A} = (2, -2, 1)$ ve R noktası $R(-2, 3, 1)$ dir.

$\overrightarrow{RP} = \vec{P} - \vec{R} = (2, 1, 3) - (-2, 3, 1) = (4, -2, 2)$

$\|\overrightarrow{PR}\| = \sqrt{4^2 + (-2)^2 + 2^2} = 2\sqrt{6}$

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{PR} \cdot \vec{A}}{\|\overrightarrow{PR}\| \|\vec{A}\|} = \frac{4 \cdot 2 + (-2) \cdot (-2) + 2 \cdot 1}{2\sqrt{6} \cdot \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{14}{6\sqrt{6}} = \frac{7\sqrt{6}}{18}$$



$$d = \|\overrightarrow{PR}\| \sin\theta = 2\sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{30}}{18} = \frac{2\sqrt{5}}{3}$$

9. Bir Noktası Bilinen ve İki Vektöre Dik Olan Doğrunun Denklemi

1.1. Sonuç: Herhangi iki vektöre dik olan bir doğrunun doğrultman vektörünü, verilen vektörlerin vektörel çarpımını olur. Buna göre P noktası ve $\vec{B}$ ve $\vec{C}$ vektörlerine dik ise P noktasından geçen doğrunun doğrultman vektörü $\vec{A} = \vec{B} \times \vec{C}$ dir.

Örnek: $\vec{B} = (4, -1,2)$ ve $\vec{C} = (2, 3, 0)$ vektörlerine dik olan ve $P(1, 3, 2)$ noktasından geçen doğru denklemini bulunuz.

Çözüm: İstenen doğrunun doğrultman vektörü, $\vec{A} = \vec{B} \times \vec{C}$ eşitliğinden,

$$\vec{A} = \begin{vmatrix} \imath & j & k \\ 4 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = (-6, 4, 10)$$

olacaktır. Buna göre, $P(1, 3, 2)$ noktasından geçtiğine göre, doğrunun denklemi

$$\frac{x-1}{-6} = \frac{y-3}{5} = \frac{z-2}{10}$$

bulunur.

Örnek: $\frac{x-1}{3} = \frac{z-2}{4}, y = 1$ ve $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = z$ doğrularına dik olan ve $P(1, -1, 2)$ noktasından geçen doğrunun denklemini bulunuz.

Çözüm: $\vec{A} = \vec{B} \times \vec{C}$ istenen doğrunun doğrultman vektörüdür.

$$\vec{A} = \begin{vmatrix} \imath & j & k \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (-12, 11, 9)$$

olduğundan, $P(1, -1, 2)$ den geçen doğrunun denklemi

$$\frac{x-1}{-12} = \frac{y+1}{11} = \frac{z-2}{9}$$

olur.

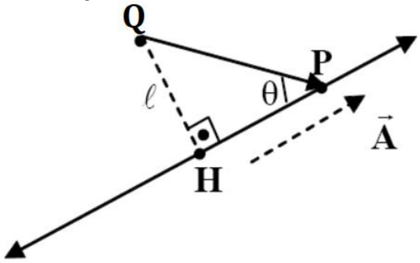
10. Bir Noktanın Bir Doğruya Uzaklığı

1.8. Teorem $\mathbb{R}^n$ de bir P ve Q noktasından geçen ve $\vec{A}$ doğrultmanına olan doğruya uzaklığı

$$\ell = \frac{\sqrt{\left\|\overrightarrow{PQ}\right\|^2 \left\|\vec{A}\right\|^2 - \langle \overrightarrow{PQ}, \vec{A} \rangle^2}}{\left\|\vec{A}\right\|}$$

kadardır.

İspat: θ açısı, $\vec{A}$ vektörüyle $\overrightarrow{PQ}$ vektörü arasındaki açı olsun. Buna göre



$$\ell = \|\overrightarrow{PQ}\| \sin\theta$$

olacaktır. Ayrıca

$$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1 - \frac{\langle \overrightarrow{PQ}, \vec{A}\rangle^2}{\|\overrightarrow{PQ}\|^2 \|\vec{A}\|^2}} = \frac{1}{\|\overrightarrow{PQ}\|\|\vec{A}\|}\sqrt{\|\overrightarrow{PQ}\|\|\vec{A}\| - \langle \overrightarrow{PQ}, \vec{A}\rangle}$$

olur. Lineer Cebir derslerinde iç çarpımla alan bulma denklemi kullanılarak

$$\ell = \|\overrightarrow{PQ}\| \frac{1}{\|\overrightarrow{PQ}\|\|\vec{A}\|}\sqrt{\|\overrightarrow{PQ}\|\|\vec{A}\| - \langle \overrightarrow{PQ}, \vec{A}\rangle} = \frac{\sqrt{\|\overrightarrow{PQ}\|^2\|\vec{A}\|^2 - \langle \overrightarrow{PQ}, \vec{A}\rangle^2}}{\|\vec{A}\|}$$

elde edilir. //

Bu teorem $\ell = \frac{\text{Alan}}{\text{Taban}}$ ifadesinin bir sonucudur. Alanın, tabana oranı yüksekliği (yani en kısa uzaklığı) verecektir.

Örnek: $\mathbb{R}^3$ uzayında Q(1, 1, 2) noktasının $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = z$ doğrusuna uzaklığını bulunuz.

Çözüm: $P(2,3,0)$, $\vec{A} = (2,2,1)$ ve $\overrightarrow{QP} = (1,2,-2)$ 'dir.

$$\text{Alan}(\overrightarrow{QP}, \vec{A}) = \sqrt{\|\overrightarrow{QP}\|\|\vec{A}\| - \langle \overrightarrow{QP}, \vec{A}\rangle^2} = \sqrt{3\cdot 3 - 2^2} = \sqrt{5}\ \text{br}^2$$

$$\text{Taban}\ \vec{A} = 3$$

olduğundan,

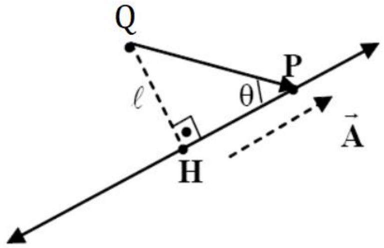
$$\ell = \frac{\text{Alan}}{\text{Taban}} = \frac{\sqrt{5}}{3}\ \text{br}$$

bulunur.

1.9. Teorem: $\mathbb{R}^3$ de, bir P noktası ile Q noktasından geçen ve doğrultmanı $\vec{A}$ olan doğruya uzaklığı

$$\ell = \frac{\|\overrightarrow{PQ}\times\vec{A}\|}{\|\vec{A}\|}$$

dır.



İspat: θ, $\overrightarrow{PQ}$ ile $\vec{A}$ doğrultman vektörü arasındaki açıyı göstermek üzere,

$$\ell = \|\overrightarrow{PQ}\| \sin\theta$$

olacaktır. $\|\overrightarrow{PQ} \times \vec{A}\| = \|\overrightarrow{PQ}\|\|\vec{A}\| \sin\theta$ eşitliği göz önüne alınırsa,

$$\ell = \|\overrightarrow{PQ}\| \frac{\|\overrightarrow{PQ}\times\vec{A}\|}{\|\overrightarrow{PQ}\|\|\vec{A}\|} = \frac{\|\overrightarrow{PQ}\times\vec{A}\|}{\|\vec{A}\|}$$

bulunur.

Örnek: A(2, 1, 2) noktasının $\frac{x-2}{-2} = \frac{y-2}{2} = z$ doğrusuna olan uzaklığını bulunuz.

Çözüm: P(2, 1, 2), Q(2, 2, 0) ise, $\overrightarrow{PQ} = (0, 1, -2)$ ve $\vec{A} = (-2, 2, 1)$ olduğundan,

$$\overrightarrow{PQ} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (5, 4, 2)$$

ve

$$\|\overrightarrow{PQ} \times \vec{A}\| = \sqrt{5^2 + 4^2 + 2^2} = 3\sqrt{5}$$
$$\|\vec{A}\| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 1^2} = 3$$

elde edilir. Böylece $\ell = \frac{\|\overrightarrow{PQ}\times\vec{A}\|}{\|\vec{A}\|} = \frac{3\sqrt{5}}{3} = \sqrt{5}$ br olur.

11. Aykırı İki Doğru Arasındaki Uzaklık

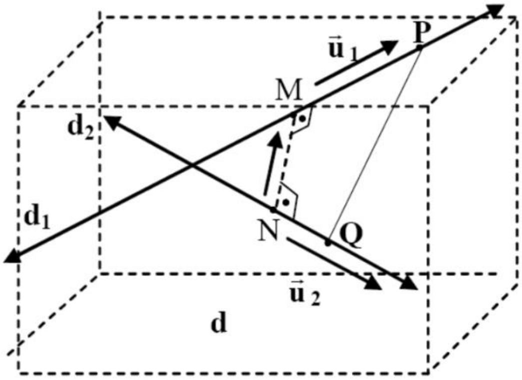
Aykırı iki doğru arasındaki uzaklık denilince, bu iki doğrunun arasındaki en kısa uzaklık anlaşılır. Şimdi, aykırı iki doğru arasındaki en kısa uzaklığı bulalım.

1.10. Teorem: $\mathbb{R}^3$ de, P noktasından geçen ve doğrultmanı $\vec{A}$ olan doğru ile Q noktasından geçen ve doğrultmanı $\vec{B}$ olan doğru arasındaki en kısa uzaklık

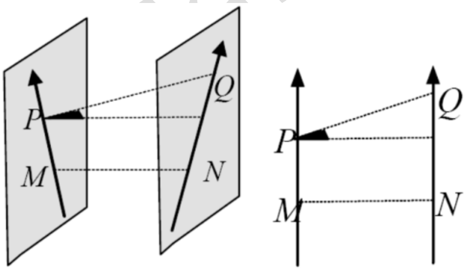
$$\ell = \frac{\left\| \det(\vec{A},\vec{B},\overrightarrow{PQ}) \right\|}{\left\| \vec{A}\times\vec{B} \right\|}$$

dır.

İspat: Doğrular üzerinde M ve N gibi öyle iki koordinat bulunabilir ki, [MN] doğru parçası her iki doğruya da diktir. [MN] doğru parçasının uzunluğu, bize en kısa uzaklığını verir. MN doğrultusundaki vektör $\vec{A} \times \vec{B}$ vektörüdür. Çünkü hem $\vec{A}$, hem de $\vec{B}$ vektörüne dik olduğundan, MN'nin doğrultusu $\vec{A} \times \vec{B}$ olacaktır.



Yukarıdaki gibi ayrık iki doğruya bakış açısını değiştirerek, aşağıdaki gibi görmek daima mümkündür.



Buna göre $|MN| = \ell$ alınırsa, $\ell = \overrightarrow{PQ}\cos\theta$ yazılabilir. Buradan, MN doğrultusundaki vektörün $\vec{A} \times \vec{B}$ olduğu kullanılarak,

$$\ell = \left\|\overrightarrow{PQ}\right\|\cos\theta = \left\|\overrightarrow{PQ}\right\| \frac{\langle \overrightarrow{PQ}, \vec{A}\times\vec{B}\rangle}{\left\|\overrightarrow{PQ}\right\|\left\|\vec{A}\times\vec{B}\right\|} = \frac{\left\|\det(\vec{A},\vec{B},\overrightarrow{PQ})\right\|}{\left\|\vec{A}\times\vec{B}\right\|}$$

bulunur. //

$\left\|\det(\vec{A},\ \vec{B}, \overrightarrow{PQ})\right\|$ ifadesinin $\vec{A},\ \vec{B}, \overrightarrow{PQ}$ vektörleriyle oluşturulan paralelyüzlünün hacmini verdiğini göstermiştik. $\left\|\vec{A} \times \vec{B}\right\|$ ise taban alanını ifade etmektedir. Buna göre yukarıdaki teoremle ifade ettiğimiz denklem

$$\ell = \frac{\text{Hacim}}{\text{Taban}}$$

ifadesinin doğal bir sonucudur. Hacmin taban alanına oranı bize yüksekliği yani, en kısa uzaklığı verecektir.

Örnek: $\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z+1}{2}$ ve $x-2=\frac{z-2}{3}, y=1$ doğruları arasındaki en kısa uzaklığı bulunuz.

Çözüm : $\vec{A}=(2,-3,2), \vec{B}=(1,0,-3)$ olduğuna göre $\overrightarrow{PQ}=(1,0,3)$ olur. Buradan,

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix} \imath & j & k \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}=(-9,-4,3)$$

olur. Böylece,

$$\ell=\frac{\langle(1,0,3)(-9,-4,3))\rangle}{\sqrt{(-9)^2+(-4)^2+3^2}}=0$$

eşitliğinden $\ell=0$ olarak bulunur. Yani, verilen iki doğru kesişmektedirler.

Örnek: $\frac{2x-1}{4}=\frac{1-y}{2}=z+1$ ve $\frac{2x-1}{2}=\frac{z-2}{3}, y=3$ doğruları arasındaki en kısa uzaklığı bulunuz.

Çözüm : $\vec{A}=(2,-2,1), \vec{B}=(1,0,3)$ ve $\vec{P}(1/2,1,-1), \vec{Q}(1/2,3,2)$ olduğuna göre $\overrightarrow{PQ}=(0,2,3)$ olur. Buradan,

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix} \imath & j & k \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}=(-6,-5,2)$$

olur. Böylece,

$$\ell=\frac{\langle(0,2,3)(-6,-5,2))\rangle}{\sqrt{(-6)^2+(-5)^2+2^2}}=\frac{4}{\sqrt{65}}$$

olur.

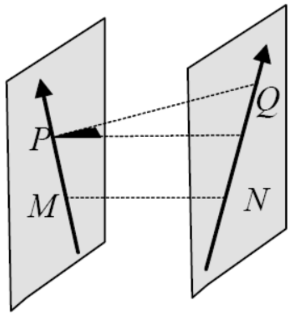
1.11. Teorem: $\mathbb{R}^3$ de, P noktasından geçen, doğrultmanı $\vec{A}$ olan ve Q noktasından geçen, doğrultmanı $\vec{B}$ olan doğruların birbirlerine en yakın oldukları noktaların koordinatları:

$$k_1=\frac{\langle\overrightarrow{PQ}\times\vec{B},\vec{A}\times\vec{B}\rangle}{\|\vec{A}\times\vec{B}\|} \text{ ve } k_2=\frac{\langle\overrightarrow{PQ}\times\vec{A},\vec{A}\times\vec{B}\rangle}{\|\vec{A}\times\vec{B}\|}$$

olmak üzere sırasıyla,

$$M=P+k_1\vec{A} \text{ ve } N=Q+k_2\vec{B}$$

dir.



İspat: Dikme ayaklarının, yani ayrık iki doğrunun birbirine en yakın olan noktalarının koordinatlarını yine vektörel hesaplamalarla elde edebiliriz. Öncelikle, $\overrightarrow{MN}$ vektörünü $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ türünden yazmaya çalışalım.

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QN}$$

yazılabilir. Burada

$$\overrightarrow{MN} = -k_1\vec{A} \text{ ve } \overrightarrow{QN} = -k_2\vec{B}, k_1, k_2 \in \mathbb{R}$$

olsun. Bu durumda

$$\overrightarrow{MN} + k_1\vec{A} + k_2\vec{B} = \overrightarrow{PQ}$$

olacaktır. Şimdi $\overrightarrow{MN}$ vektörünü sırasıyla $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ vektörleriyle çarpıp, $\overrightarrow{MN} \perp \vec{A}$ ve $\overrightarrow{MN} \perp \vec{B}$ olduğunu kullanırsak

$$k_1\langle\vec{A},\vec{A}\rangle + k_2\langle\vec{B},\vec{A}\rangle = \langle\overrightarrow{PQ},\vec{A}\rangle$$
$$k_1\langle\vec{A},\vec{B}\rangle + k_2\langle\vec{B},\vec{B}\rangle = \langle\overrightarrow{PQ},\vec{B}\rangle$$

denklem sistemi elde edilir. Cramer kuralı ve Lagrange özdeşliği göz önüne alınırsa,

$$k_1 = \frac{\langle\overrightarrow{PQ}\times\vec{B},\vec{A}\times\vec{B}\rangle}{\|\vec{A}\times\vec{B}\|} \text{ ve } k_2 = \frac{\langle\overrightarrow{PQ}\times\vec{A},\vec{A}\times\vec{B}\rangle}{\|\vec{A}\times\vec{B}\|}$$

bulunur, böylece

$$\overrightarrow{MP} = -k_1\vec{A} \text{ ise } M = P + k_1\vec{A}$$
$$\overrightarrow{QN} = -k_2\vec{A} \text{ ise } N = Q + k_2\vec{B}$$

eşitliklerinden M ve N noktalarının koordinatları bulunur.

Örnek: $\frac{x-1}{2} = 1 - y, z = 1$ ve $x - 1 = z - 1, y = 2$ doğrularının birbirlerine en yakın oldukları noktaların koordinatlarını bulunuz.

Çözüm: $P(1,1,1), Q(1,2,1), \overrightarrow{PQ} = (0,1,0), \vec{A} = (2,-1,0)$ ve $\vec{B} = (1,0,0)$ olduğundan

$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1,-2,1)$$

$$\overrightarrow{PQ} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \imath & j & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (0,0,-2)$$

$$\overrightarrow{PQ} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \imath & j & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1,0,-1)$$

eşitlikleri 1.11 teoremi uygulanırsa,

$$k_1 = \frac{\langle \overrightarrow{PQ}\times\vec{B}, \vec{A}\times\vec{B}\rangle}{\|\vec{A}\times\vec{B}\|^2} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$$

$$k_2 = \frac{\langle \overrightarrow{PQ}\times\vec{A}, \vec{A}\times\vec{B}\rangle}{\|\vec{A}\times\vec{B}\|^2} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$$

olduğundan

$$M = P + k_1\vec{A} = (1,1,1) - \frac{1}{3}(2,-1,0) = \left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, 1\right)$$

$$N = Q + k_2\vec{B} = (1,2,1) - \frac{1}{3}(1,0,1) = \left(\frac{2}{3}, 2, \frac{2}{3}\right)$$

elde edilir.

DÜZLEM DENKLEMLERİ

Daha önceden analitik olarak ele alınan düzlem denklemleri burada vektörel olarak incelenecektir.

$\mathbb{R}^3$ de bir $P(x_1, y_1, z_1)$ noktası ve $\vec{A} = (p, q, r)$ vektörü verilmiş olsun. P'dan geçen ve $\vec{A}$ ya dik olan bir tek düzlem vardır.

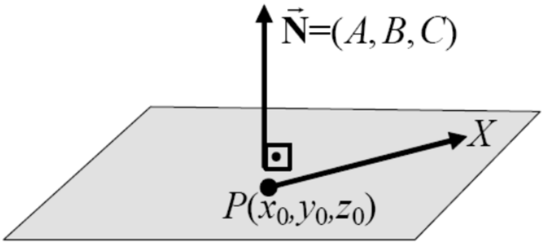
1.4. Tanım: Bir düzleme dik olan vektöre düzlemin normalı denir ve $\vec{N}$ ile gösterilir. $\vec{N}$ vektörü birim vektör ise, $\vec{N}$'ye düzlemin birim normali denir.

1. Bir Noktası ve Normali Bilinen Düzlemin Denklemi

1.11. Teorem $\mathbb{R}^3$ uzayında, bir $P(x_1, y_1, z_1)$ noktasından geçen ve $\vec{N} = (A, B, C)$ vektörüne dik olan düzlemin denklemi

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0$$

dir.



İspat: $X(x, y, z)$ düzlemin değişken noktasını göstermek üzere, $\overrightarrow{PX}$ vektörü daima $\vec{N}$ vektörüne diktir. O halde $\langle \overrightarrow{PN}, \vec{N} \rangle = 0$ eşitliği sağlanmalıdır. $P(x_1, y_1, z_1)$ ve $\vec{N} = (A, B, C)$ olmak üzere,

$$\langle (x - x_1, y - y_1, z - z_1), (A, B, C) \rangle = 0$$

eşitliğinden,

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0$$

elde edilir.// Bu eşitlik düzenlenirse, düzlem denklemlerinin

$$Ax + By + Cz = Ax_1 + By_1 + Cz_1 = D$$

formunda olacağı görülebilir.

1.2. Sonuç: $\mathbb{R}^3$ uzayında xyz dik koordinat sistemine göre verilen,

$$Ax + By + Cz = D$$

biçimindeki bir düzlem denklemine göre, değişkenlerin katsayıları ile oluşturulan $\vec{N} = (A, B, C)$ vektörü, bu düzlemin normal vektörüdür.

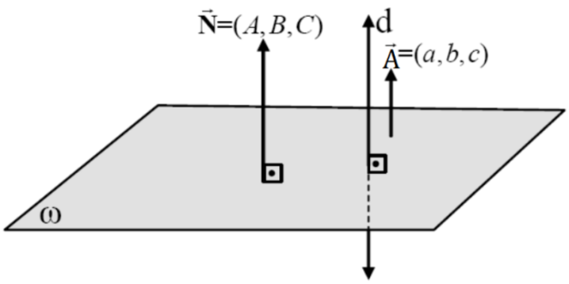
Örnek: $P(1, 2, -1)$ noktasından geçen ve $\vec{N} = (2, 3, 1)$ vektörüne dik olan düzlemin denklemini bulunuz.

Çözüm: $2(x - 1) + 3(y - 2) + 1(z + 1) = 0$ den $2x + 3y + z = 7$ elde edilir.

Örnek: $2x + 4y - \sqrt{5}z = 12$ düzleminin birim normalini yazınız.

Çözüm: x, y, z koordinat eksenlerinin katsayıları düzlemin bir normal vektörü olduğundan, bu düzlemin normali $\vec{N} = (2, 4, -\sqrt{5})$ ve birim normali de $\vec{N} = \pm\frac{1}{5}(2, 4, -\sqrt{5})$ vektörü olur.

Örnek: $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{4}$ doğrusuna dik olan ve $P(5, 1, 2)$ noktasından geçen düzlemin denklemini bulunuz.



Çözüm: Doğru düzleme dik olduğundan doğrunun doğrultman vektörü, düzlemin normali olarak alınabilir. Buna göre, $\vec{N}=\vec{A}=(2,3,4)$ olduğundan, düzlem denklemi:

$$2(x-5)+3(y-1)+4(z-2)=0$$

eşitliğinden $2x+3y+4z=21$ bulunur.

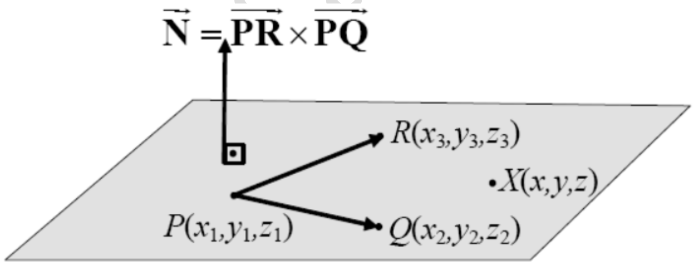
2. Üç Noktası Bilinen Düzlem Denklemi

Üç noktası bilinen düzlem denklemi konusunda iki teorem verilecektir.

1.12. Teorem: D düzlemi üzerinde P, Q, R noktaları verilsin. Bu düzlem üzerindeki S gezisi nokta olmak üzere D düzleminin denklemi;

$$\overrightarrow{PS}\cdot(\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR})$$

dir.



İspat: P, Q, R verilmiş sabit noktalar ve $S(x,y,z)\in D$ gezici bir nokta olsun. $\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR}$ vektörlerinin her biri $\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}$ vektörüne diktir ve 1.4. teorem gereği D bölgesi gibi bir alan oluşturur. $S\in D$ gezici bir nokta olmak üzere düzlem içindeki $\overrightarrow{PS}$ vektörü $\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}$ vektörüne dik olur. Buna göre;

$$\overrightarrow{PS}\cdot\left(\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}\right)=0$$

dır. Bu da D düzleminin vektörel denklemini gösterir.

$$\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}=(p,q,s) \text{ ve } \overrightarrow{PS}=(x-x_1,y-y_1,z-z_1)$$

olduğu göz önüne alınırsa

$$\overrightarrow{PS}\cdot\left(\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}\right)=p(x-x_1)+q(y-y_1)+r(z-z_1)$$

düzlem denkleminin koordinatlar cinsinden ifadesi elde edilmiş olur. //

Burada özel durumlar söz konusudur. Bunlar;

1. XY düzleminin denklemi: Bu düzlem $(0,0,0)$ noktasından geçen ve $\vec{k}=(0,0,1)$ vektörüne dik olan bir düzlemdir. Bu düzlemin denklemi

$$0\cdot(x-0)+0\cdot(y-0)+1\cdot(z-0)=0$$

dir. Buna göre $z=0$ dır.

2. XZ düzleminin denklemi: $y=0$

3. YZ düzleminin denklemi: $x=0$

Örnek: $P(2,1,3)$, $Q(1,2,-1)$ ve $R(3,-2,1)$ noktalarından geçen düzlemin denklemini bulunuz?

Çözüm: Burada P, Q, R verilmiş sabit noktalar ve $S(x,y,z)\in D$ gezici bir noktadır. $\overrightarrow{PQ}$ ve $\overrightarrow{PR}$ vektörleri D düzleminin içinde olup $\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}\perp D$ düzlemidir. O halde düzlemin $\vec{N}$ normal vektörü

$$\vec{N}=\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1-2 & 2-1 & -1-3\\ 3-2 & -2-1 & 1-3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & 1 & -4\\ 1 & -3 & -2\end{vmatrix}=-14\vec{i}-6\vec{j}+2\vec{k}$$

olur. Diğer taraftan

$$\overrightarrow{PS}=\overrightarrow{OS}-\overrightarrow{OP}=(x-2,y-1,z-3)$$

vektörü de D düzlemi içinde olup $\vec{N}$ normaline diktir. O halde $\overrightarrow{PS}\cdot\vec{N}=0$ sağlanır. Bu da

$$-14(x-2)+10(y-1)-8(z-3)=0$$
$$-14x+28+10y-10-8z+24=0$$
$$-14x+10y-8z+38=0$$
$$7x-5y+4z-19=0$$

düzlem denklemini verir.

Örnek: $P(5,-1,6), Q(-2,3,4)$ ve $R(-3,-8,7)$ noktalarından geçen düzlemin denklemini bulunuz.

Çözüm: $P(5,-1,6), Q(-2,3,4)$ ve $R(-3,-8,7)$ ve gezici nokta $S(x,y,z)$ olsun.

$$\overrightarrow{PQ}=(-7,4,-2),\ \overrightarrow{PR}=(-8,-9,1)$$
$$\overrightarrow{PS}=(x-5,y+1,z-6)$$

$$\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -7 & 4 & -2\\ -8 & -9 & 1\end{vmatrix}=-16\vec{i}+23\vec{j}+31\vec{k}$$

$$\overrightarrow{PS}\cdot\left(\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}\right)=-16(x-5)+23(y+1)+31(z-6)=0$$

$$-16x+23y+31z-83=0$$

veya

$$\overrightarrow{PS}.(\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR})=\begin{vmatrix}x-5 & y+1 & z-6\\ -7 & 4 & -2\\ -8 & -9 & 1\end{vmatrix}=0$$

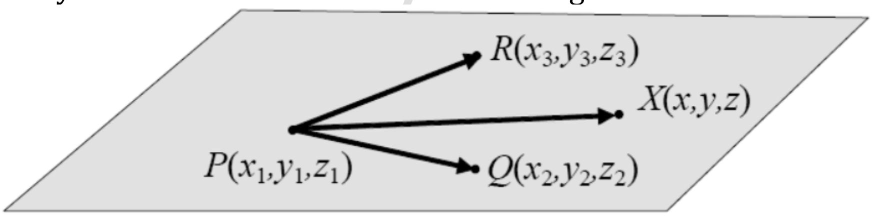
dan $-16x+23y+31z-83=0$ bulunur.

1.13. Teorem: $\mathbb{R}^3$ uzayında, $P(x_1,y_1,z_1)$, $Q(x_2,y_2,z_2)$, $R(x_3,y_3,z_3)$ noktasından geçen düzlemin denklemi;

$$\begin{vmatrix}x-x_1 & x_2-x_1 & x_3-x_1\\ y-y_1 & y_2-y_1 & y_3-y_1\\ z-z_1 & z_2-z_1 & z_3-z_1\end{vmatrix}=0$$

dır.

İspat: Verilen P, Q, R noktalarından biri başlangıç noktası kabul edilerek, üç vektör oluşturalım. X değişken noktayı göstermek üzere, $\overrightarrow{PX}$, $\overrightarrow{PQ}$ ve $\overrightarrow{PR}$ vektörleri aynı düzlemde olduklarından lineer bağımlıdırlar.



Buna göre, $\det\left(\overrightarrow{PX},\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR}\right)=0$ determinantı bize düzlem denklemini verir. O halde, $P(x_1,y_1,z_1)$, $Q(x_2,y_2,z_2)$, $R(x_3,y_3,z_3)$ noktaları için,

$$\begin{vmatrix}x-x_1 & x_2-x_1 & x_3-x_1\\ y-y_1 & y_2-y_1 & y_3-y_1\\ z-z_1 & z_2-z_1 & z_3-z_1\end{vmatrix}=0$$

veya

$$\begin{vmatrix}x & y & z & 1\\ x_1 & y_1 & z_1 & 1\\ x_2 & y_2 & z_2 & 1\\ x_3 & y_3 & z_3 & 1\end{vmatrix}=0$$

eşitliği düzlemin denklemini verir.

Örnek: $P(2,1,0), Q(2,3,1), R(0,2,4)$ noktalarından geçen düzlemin denklemini bulunuz.

Çözüm:

$$\begin{vmatrix} x-2 & 2-2 & 0-2 \\ y-1 & 3-1 & 2-1 \\ z-0 & 1-0 & 4-0 \end{vmatrix} = 0$$

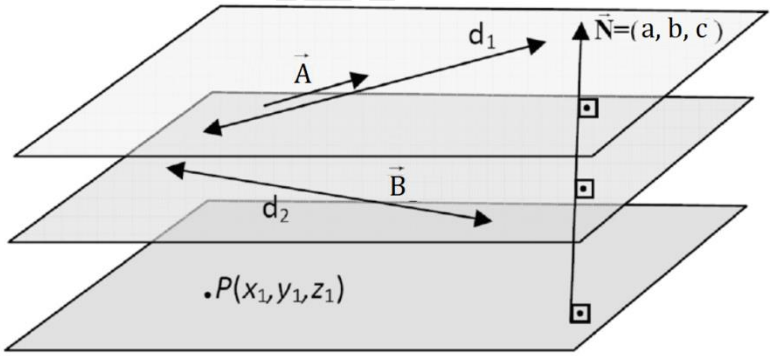
eşitliğinden $7x + 2y + 4z = 16$ bulunur.

3. İki Doğruya Paralel Olan ve Bir Noktası Verilen Düzlemin Denklemi

Eğer bir düzlem, iki doğruya paralel ise, bu doğruların doğrultu vektörlerine de paraleldir. Bu durumda, düzlemin normal vektörü, doğruların doğrultman vektörlerine dik olacaktır. Doğruların doğrultmanları $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ olmak üzere $\vec{N} = \vec{A} \times \vec{B}$ alınabilir. Böylece normali ve bir noktası bilinen düzlem denklemini bulabiliriz. Buna göre P düzlem üzerinde bir nokta ve X düzlem üzerinde herhangi bir noktayı göstermek üzere,

$$\langle \vec{A} \times \vec{B}, \overrightarrow{PX} \rangle = \det(\vec{A}, \vec{B}, \overrightarrow{PX}) = 0$$

eşitliği düzlem denklemini verir.



Örnek: $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{2} = z$ ve $\frac{x-1}{2} = \frac{z-2}{3}$, $y = 1$ doğrularına paralel olan ve $P(1, 2, 3)$ noktasından geçen düzlemin denklemini bulunuz.

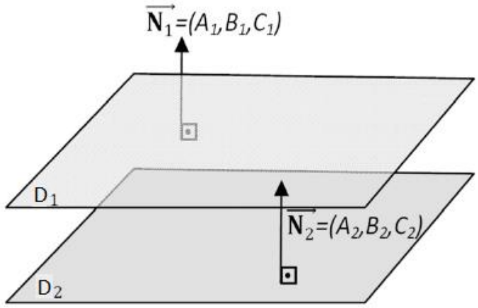
Çözüm: Doğruların doğrultmanları, $\vec{A} = (2,2,1)$ ve $\vec{B} = (2,0,3)$ biçimindedir.

$$\det(\vec{A}, \vec{B}, \overrightarrow{PX}) = \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6x - 4y - 4z + 14 = 0$$

eşitliğinden $3x - 2y - 2z + 7 = 0$ elde edilir.

4. İki Düzlemin Birbirlerine Paralel ve Dik Olması

1.14. Teorem: İki düzlem birbirlerini kesmiyorlar ise paraleldirler. İki düzlem birbirini kesiyorsa bir doğru boyunca keser. D_1 ve D_2 düzlemlerinin normalleri sırasıyla $\vec{N}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ ve $\vec{N}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ olmak üzere, D_1 ve D_2 düzlemlerinin paralel olması için $\vec{N}_1 // \vec{N}_2$ olmalıdır. Buna göre



$\vec{N}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ ve $\vec{N}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ ise $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} = k$
olması gerekir.

Teoremin ispatı aşikârdır.

Örnek: $2x - 5y + 4z = 8$ düzlemine paralel olan ve $P(4, -2, 3)$ noktasından geçen düzlemin denklemini yazınız.

Çözüm: Düzlemler paralel olacağından, normalleri aynı alınabilir. Buna göre,

$$2(x-4) - 5(y+2) + 4(z-3) = 0$$
$$2x - 5y + 4z = 24$$

düzlemi elde edilir.

1.15. Teorem: D_1 ve D_2 şeklindeki iki düzlemin normalleri sırasıyla $\vec{N}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ ve $\vec{N}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ ise D_1 ve D_2 düzlemleri birbirine dik olması için,

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$$

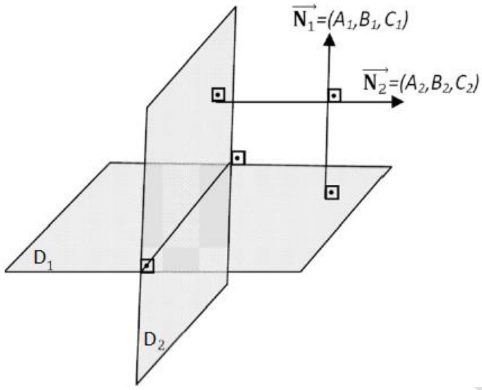
olmalıdır.

İspat: $\vec{N}_1 \perp \vec{N}_2 = 0$ olduğundan $\langle \vec{N}_1, \vec{N}_2 \rangle = 0$ yazılabilir. Buna göre

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$$

olur.

Örnek: $4x - 3y + z = 3$ ve $x + ky + 2z = 4$ düzlemlerinin dik kesişmesi için k kaç olmalıdır?



Çözüm: $\vec{N}_1 = (2,-3,1)$ ve $\vec{N}_2 = (1,k,2)$ olduğundan $\langle\vec{N}_1,\vec{N}_2\rangle = 0$ eşitliğine göre $4 - 3k + 2 = 0$ olmalıdır. Buradan $k = 2$ bulunur.

5. İki Düzlem Arasındaki Açı

1.16. Teorem: D_1 ve D_2 şeklindeki iki düzlemin normalleri sırasıyla $\vec{N}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ ve $\vec{N}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ ise D_1 ve D_2 düzlemlerinin arasındaki açı,

$$\cos\theta = \frac{\langle\vec{N}_1,\vec{N}_2\rangle}{\|\vec{N}_1\|\|\vec{N}_2\|}$$

dir. (Bu değer pozitif ise, düzlemler arasındaki dar açının kosinüsü, negatif ise, düzlemler arasındaki geniş açının kosinüsü bulunmuş olur.)

Bu teoremin ispatı okuyucuya bırakılmıştır.

Örnek: $x - 2y + 2z = 3$ ve $4x - 2y + 4z = 5$ düzlemleri arasındaki açıyı bulunuz.

Çözüm : $\vec{N}_1 = (1,-2,2)$ ve $\vec{N}_2 = (4,-2,4)$ olduğundan,

$$\cos\theta = \frac{\langle(1,-2,2),(4,-2,4)\rangle}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}\sqrt{4^2+(-2)^2+4^2}} = \frac{4-8+8}{3\cdot 6} = \frac{2}{9}$$

bulunur. O halde, $\theta = \arccos\frac{2}{9} = 77^0 09' 37''$ olur.

6. İki Düzlemin Arakesit Doğrusunun Denklemi

İki düzlemin arakesit doğrusunun bulunması demek, iki düzlemin denklemlerinin ortak çözümünün bulunması demektir.

Her iki düzlemi de sağlayan bir nokta bulunur. Düzlemlerin normallerinin vektörel çarpımı aranan arakesit doğrusunun doğrultmanı olacağından, doğru denklemine ulaşılabilir.

Örnek: $2x - y + 2z = 3$ ve $x - 2y + 2z = 4$ düzlemlerinin arakesit doğrusunun denklemini bulunuz.

Çözüm: Her iki düzlemi de sağlayan bir ortak nokta bulalım. Mesela $y = 0$ alınırsa

$$2x + 2z = 3 \text{ ve } x + 2z = 4$$

denklem sisteminden, $x = -1$ ve $z = 5/2$ olur. Yani, $P(-1, 0, 5/2)$ noktası arakesit doğrusunun bir noktasıdır. Doğrultmanı ise,

$$\vec{A} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = \begin{vmatrix} \imath & j & k \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = (2, -2, -3)$$

olduğundan, arakesit doğrusu:

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y}{-2} = \frac{z+\frac{5}{2}}{-3}$$

$$\frac{x+1}{-1} = y = \frac{2z+5}{3}$$

elde edilir.

7. Bir Doğru ile Bir Düzlemin Birbirine Göre Durumları

Bir doğru ile bir düzlem için, üç durum söz konusudur.

1. Doğru düzleme paraleldir.
2. Doğru düzlemin içindedir.
3. Doğru düzlemi keser.

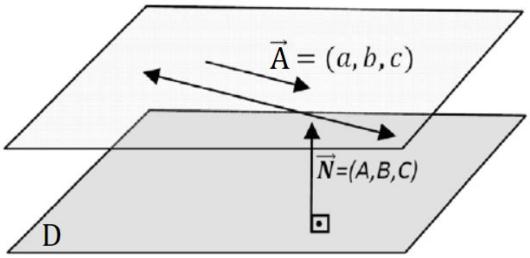
Bir $\frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{c}$ bir doğrusu ile bir $Ax + By + Cz + D = 0$ düzlemi verilsin. Buna göre doğrunun doğrultmanı $\vec{A} = (a, b, c)$ ve düzlemin normali ise $\vec{N} = (A, B, C)$ olmak üzere doğru ve düzlemin birbirlerine göre durumlarını inceleyelim.

a. Bir Doğrunun Bir Düzleme Paralel olması

d: $\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{c}$ doğrusu ile D: $Ax+By+Cz+D=0$ düzleminin birbirine paralel olması için, doğrunun doğrultmanı ile düzlemin normalinin birbirine dik olması ve doğru üzerinde bulunan $P(x_1,y_1,z_1)$ noktasının D düzleminde bulunmaması gerekir. Buna göre,

$$\text{Doğru//Düzlem} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{A}\perp\vec{N} \Leftrightarrow aA+bB+cC+D=0 \\ \quad Ax_1+By_1+Cz_1+D\neq 0 \end{cases}$$

şeklinde ifade edebiliriz.



Örnek: $x-3y+2z=6$ düzlemine paralel olan ve orijinden geçen üç doğru yazınız.

Çözüm: Düzlemin normali $\vec{N}=(1,-3,2)$ dir. Doğrunun paralel olması için, doğrunun doğrultmanı normale dik olmalıdır. Buna göre $\langle\vec{A},\vec{N}\rangle=0$ olacak şekilde $\vec{A}$ vektörleri seçmeliyiz.

1. $\vec{A}=(1,1,1)$ ise $x=y=z$
2. $\vec{A}=(-1,1,2)$ ise $x=y=\frac{z}{2}$
3. $\vec{A}=(-5,-1,1)$ ise $\frac{x}{-5}=-y=z$

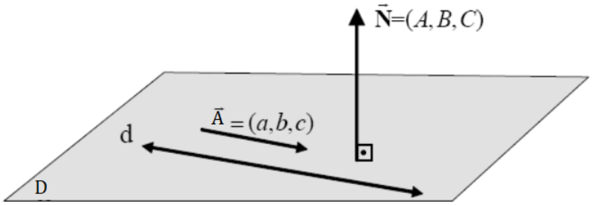
seçilebilir.

b. Bir Doğrunun Bir Düzlem İçinde Olması

Doğru düzlemin içinde ise, doğrunun tüm noktaları düzlem denklemini sağlamalıdır. Ayrıca, doğrunun doğrultmanı ile düzlemin normali birbirine dik olur. O halde $P(x_1,y_1,z_1)$, doğrunun bir noktası olmak üzere,

$$\text{Doğru düzlemin içindedir} \Leftrightarrow \begin{cases} \quad Ax_1+By_1+Cz_1+D=0 \\ \vec{A}\perp\vec{N} \Leftrightarrow aA+bB+cC+D=0 \end{cases}$$

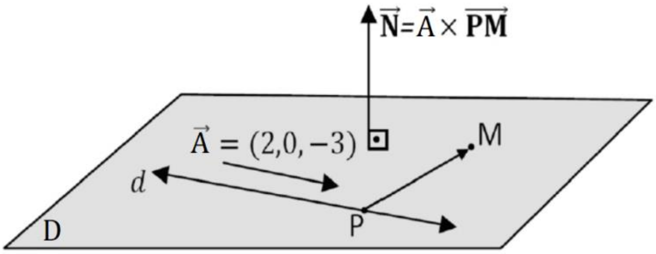
şeklinde ifade edebiliriz.



Örnek: $2x - 3y + z = 5$ düzleminin içinde bulunan ve $P(2,1,4)$ noktasından geçen bir doğru yazınız.

Çözüm: Doğru $\frac{x-2}{a} = \frac{y-1}{b} = \frac{z-4}{c}$ biçiminde olmalıdır. Bu doğrunun doğrultmanı düzlemin normaline $\vec{N} = (2,-3,1)$ vektörüne dik olması gerektiğinden $\vec{A} = (1,1,1)$ alınabilir. Buna göre, $x - 2 = y - 1 = z - 4$ doğrusu istenen biçimdedir.

Örnek: $\frac{x-1}{2} = \frac{z-1}{-3}$, $y = 1$ doğrusunu içinde bulunduran ve $M(1,2,3)$ noktasından geçen düzlemin denklemini bulunuz.



Çözüm: Doğrunun doğrultmanı $\vec{A} = (2,0,-3)$ ve doğrunun bir noktası $P(1,1,1)$ dir. Ayrıca, $\overrightarrow{PM} = (0,1,2)$ de düzlem içinde bir vektördür. $\vec{N}$ vektörü hem $\vec{A}$ vektörüne hem de $\overrightarrow{PM}$ vektörüne dik olduğundan düzlemin normali

$$\vec{N} = \vec{A} \times \overrightarrow{PM} = \begin{vmatrix} \imath & j & k \\ 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (3,-4,2)$$

ile bulunabilir. Buradan, düzlem denklemi:

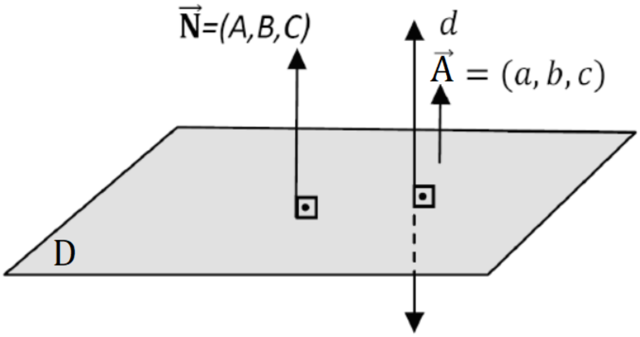
$$3(x-1) - 4(y-2) + 2(z-3) = 0$$

eşitliğinden $3x - 4y + 2z = 1$ bulunur.

c. Bir Doğrunun Bir Düzlemle Bir Noktada Kesişmesi

Bir doğru bir düzleme dik ise doğrunun doğrultmanı ile düzlemin normali birbirine paralel olur. O halde,

$$\text{Doğru} \perp \text{Düzlem} \Leftrightarrow \vec{A}//\vec{N} \Leftrightarrow \frac{a}{A} = \frac{b}{B} = \frac{c}{C}$$



şeklinde ifade edebiliriz.

Örnek: $\frac{x-1}{2} = \frac{z-1}{-3}, y = 1$ doğrusu ile $2x - 3y - z = 5$ düzleminin kesişim noktasını bulunuz.

Çözüm: $\frac{x-1}{2} = \frac{z-1}{-3} = \lambda, y = 1$ eşitliğinden $x = 2\lambda + 1, z = 1 - 3\lambda, y = 1$ yazılabilir. Bu değerler düzlem denkleminde yazılırsa,

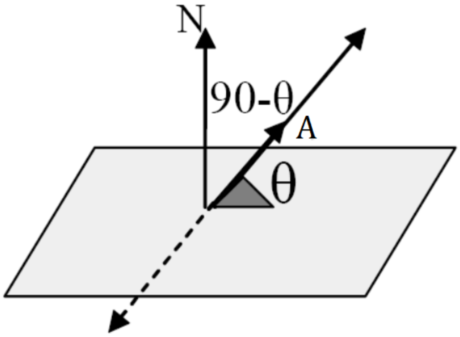
$$2\,(2\lambda + 1) - 3 - (1 - 3\lambda) = 5$$

denkleminden $\lambda = 1$ olur. O halde $x = 3, y = 1$ ve $z = -2$ olacağından kesişme noktası $K(3, 1, -2)$ olur.

d. Bir Doğru ile Bir Düzlem Arasındaki Açı

Bir doğru ile bir düzlem arasındaki açıyı, doğrunun doğrultmanı ve düzlemin normalini kullanarak bulunabilir. Doğru ile düzlemin arasındaki açı θ ise doğrunun doğrultmanı ile düzlemin normali arasındaki açı $90 - \theta$ olacaktır. Buna göre,

$$\cos(90 - \theta) = \frac{\langle \vec{A}, \vec{N} \rangle}{\|\vec{A}\|\|\vec{N}\|} \quad \text{veya} \quad \sin\theta = \frac{\langle \vec{A}, \vec{N} \rangle}{\|\vec{A}\|\|\vec{N}\|}$$



eşitliği istenen açıyı verecektir.

Örnek: $\frac{x-1}{2} = \frac{z-1}{-3} = y$ doğrusu $2x - 3y - z = 5$ düzlemi arasındaki açının kosinüsü nedir?

Çözüm: $\vec{A} = (2, 1, -3)$ ve $\vec{N} = (2, -3, -1)$ olduğundan,

$\sin\theta = \frac{4-3+3}{\sqrt{14}\sqrt{14}} = \frac{2}{7}$ ise $\cos\theta = \frac{3\sqrt{5}}{7}$

olur.

1.2. Not: Paralel olmayan iki düzlemin arakesiti bir doğru olacağından, bazen, bir doğru denklemi, iki düzlem denklemiyle birlikte verilebilir.

Örnek: $x + y - 3z = 5$ ve $x - y + z = 3$ doğrularına dik olan ve $P(2, 1, 3)$ noktasından geçen düzlem denklemini bulunuz.

Çözüm: Önce doğru denklemini bulalım. $z = t$ olsun. Buna göre,

$x + y = 5 + 3t$ ve $x - y = 3 - t$

$2x = 8 + 2t$

$x = 4 + t$, $y = 2t + 1$

bulunur. Buna göre doğru denklemi

$t = \frac{x-4}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$

şeklindedir ve $\vec{A} = (1, 2, 1)$ dir. İstenilen düzlem bu doğruya dik olduğundan, düzlemin normali, doğrunun doğrultmanına paraleldir. O halde $\vec{N} = (1, 2, 1)$ alınabilir. Böylece $P(2, 1, 3)$ den geçen düzlem :

$(x - 2) + 2(y - 1) + (z - 3) = 0$

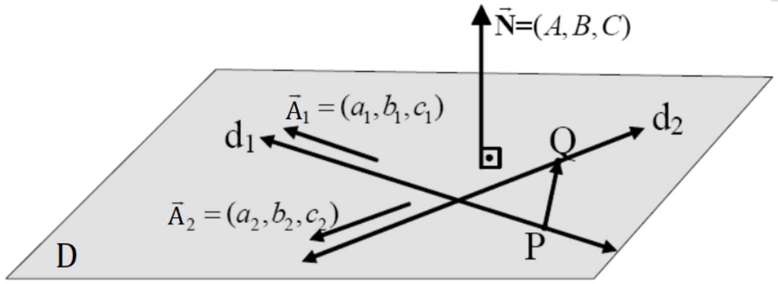
eşitliğinden $x + 2y + z = 7$ olur.

8. Üzerindeki İki Doğrusu Bilinen Düzlemin Denklemi

Üzerindeki iki doğrusu bilinen düzlemin denklemini bulabilmek için, öncelikle düzlemin normalini bulmak gerekir. Normali üç farklı şekilde bulmak mümkündür. Doğruların doğrultmanları $\vec{A}_1$ ve $\vec{A}_2$ doğru üzerindeki noktalar da P ve Q olmak üzere,

1) $\vec{N} = \vec{A}_1 \times \vec{A}_2$
2) $\vec{N} = \vec{A}_1 \times \overrightarrow{PQ}$
3) $\vec{N} = \vec{A}_2 \times \overrightarrow{PQ}$

eşitliklerinden biri kullanılabilir. Bundan sonra düzlem denklemini belirlenir.



Örnek: $\frac{x-1}{2} = z, y = 1$ ve $x - 2 = \frac{y-2}{-k}, z = 1$ doğruları içinde bulunduran düzlemin denklemini bulunuz.

Çözüm: Düzlemin normalini $\vec{N} = \vec{A}_1 \times \overrightarrow{PQ}$ ile bulabiliriz.

$$\vec{N} = \vec{A}_1 \times \overrightarrow{PQ} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1,-1,2)$$

olduğundan düzlem ayrıca P(1, 1, 0) noktasından geçtiğinden,

$$(-1)(x-1) + (-1)(y-1) + 2\,(z-0) = 0$$

eşitliğinden $x + y - 2z = 7$ elde edilir.

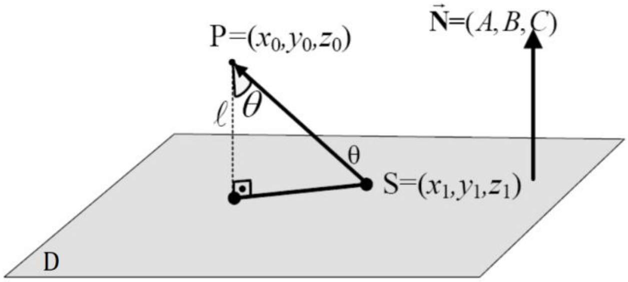
9. Bir Noktanın Bir Düzleme Olan Uzaklığı

1.17. Teorem: $\mathbb{R}^3$ uzayında verilen bir P noktasının, normali $\vec{N}$ olan bir düzleme (veya hiperdüzleme) uzaklığı; S düzlem üzerinde herhangi bir nokta olmak üzere,

$$\ell = \frac{|\langle \vec{N}, \overrightarrow{SP} \rangle|}{\|\vec{N}\|}$$

dir.

İspat: Normali $\vec{N}$ olan bir D düzleminin dışındaki bir P noktasının, düzleme uzaklığını yine iç çarpım yardımıyla bulabiliriz. Düzlem üzerindeki herhangi bir S noktası için $\overrightarrow{SP}$ vektörünü göz önüne alalım. $\overrightarrow{SP}$ vektörü ile P'den düzleme inilen dikme arasındaki açı θ ise P noktasının düzleme uzaklığı ℓ olmak üzere,



$$\ell = \|\overrightarrow{SP}\| \cos\theta$$

ile verilebilir. Ayrıca θ, $\vec{N}$ ile $\overrightarrow{SP}$ arasındaki açı olduğundan,

$$\cos\theta = \frac{\langle \vec{N}, \overrightarrow{SP} \rangle}{\|\vec{N}\| \|\overrightarrow{SP}\|}$$

yazılabilir. Böylece

$$\ell = \|\overrightarrow{SP}\| \frac{\langle \vec{N}, \overrightarrow{SP} \rangle}{\|\vec{N}\| \|\overrightarrow{SP}\|} = \frac{\langle \vec{N}, \overrightarrow{SP} \rangle}{\|\vec{N}\|}$$

eşitliği noktanın düzleme uzaklığını verir.

Örnek: $\mathbb{R}^3$ uzayında $P(1,1,1)$ noktasının $x - y - z = 1$ düzlemine uzaklığını bulunuz.

Çözüm: Düzlemin normali: $\vec{N} = (1,-1,-1)$ dir. Düzlem üzerindeki herhangi bir nokta da $S(2,1,1)$ alınabilir. Buna göre $\overrightarrow{SP} = (-1,0,0)$ olduğundan,

$$\ell = \frac{|\langle \vec{N}, \overrightarrow{SP} \rangle|}{\|\vec{N}\|} = \frac{|-1+0+0|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+(-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

elde edilir.

1.18. Teorem: $P(x_1, y_1, z_1)$ noktasının $Ax + By + Cz + D = 0$ düzlemine uzaklığı

$$\ell = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

ile bulunur.

İspat: $S(x_2, y_2, z_2)$ düzlem üzerindeki bir nokta olsun. Bu durumda,

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 = -D$$

olur. Bu eşitliği kullanarak,

$$\begin{aligned}\ell &= \frac{|\langle \vec{N}, \overrightarrow{SP} \rangle|}{\|\vec{N}\|} \\ &= \frac{|\langle (A,B,C),(x_1-x_2, y_1-y_2, z_1-z_2)\rangle|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \\ &= \frac{|(Ax_1+By_1+Cz_1)-(Ax_2+By_2+Cz_2)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \\ &= \frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\end{aligned}$$

bulunur.

Örnek: $P(1, 2, 3)$ noktasının $2x - 3y + 4z = 1$ düzlemine uzaklığını bulunuz.

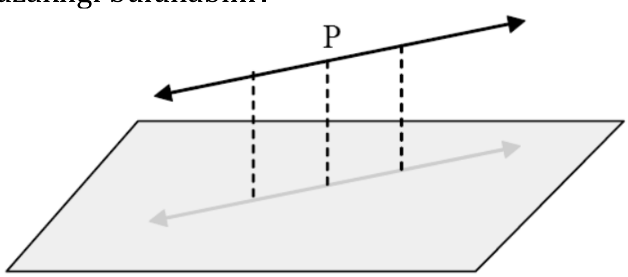
Çözüm: $\vec{N} = (2, -3, 3)$ olduğundan,

$$\ell = \frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{|2\cdot 1-3\cdot 2+4\cdot 3-1|}{\sqrt{2^2+3^2+4^2}} = \frac{7}{\sqrt{29}} \text{br}$$

bulunur.

10. Paralel Doğru ve Düzlem Arasındaki Uzaklık

Bir doğru ile bir düzlem arasındaki uzaklıktan bahsedebilmek için, doğru ve düzlemin paralel olmaları gerekir. Aksi halde kesiştikleri için aralarındaki en kısa uzaklık sıfır olacaktır. Doğru ve düzlem paralel ise doğru üzerindeki her noktanın düzleme uzaklığı eşit olacağından, doğru üzerinde rastgele bir nokta alınarak, bir noktanın bir düzleme uzaklık denklemi kullanılarak, doğrunun düzleme uzaklığı bulunabilir.



Örnek: $\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{-3}=z$ doğrusunun $x+y+z=8$ düzlemine uzaklığın bulunuz.

Çözüm: Doğru ile düzlemin paralel olduklarını görünüz. Yani, $\vec{A}\perp\vec{N}$ dir. Doğru üzerinde rastgele bir nokta alalım. $P(1,1,0)$ alabiliriz. Buna göre,

$$\ell=\frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|1\cdot1+1\cdot1+1\cdot0-5|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\sqrt{3}\text{ br}$$

olur.

11. Paralel İki Düzlem Arasındaki Uzaklık

1.19. Teorem: $\mathbb{R}^3$ uzayında, $Ax_1+By_1+Cz_1+D_1=0$ ve $Ax_2+By_2+Cz_2+D_2=0$ paralel düzlemleri arasındaki uzaklık

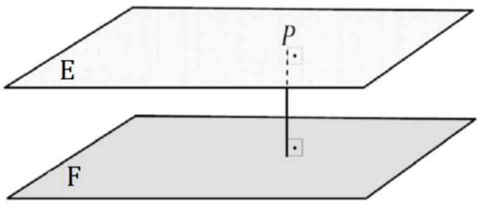
$$\ell=\frac{|D_1-D_2|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

ile bulunur.

İspat: F düzleminin üzerinde bir $P(x_1,y_1,z_1)$ noktası alalım. Bu noktanın E düzlemine uzaklığı

$$\ell=\frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D_1|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

ile bulunur. P, E düzlemi üzerinde olduğundan, $Ax_1+By_1+Cz_1=-D_2$ olur.



Buradan,

$$\ell=\frac{|D_1-D_2|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

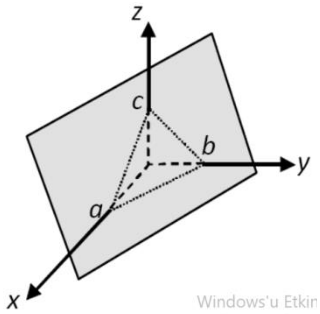
elde edilir.

12. Eksenleri Kestiği Koordinatları Verilen Düzlem Denklemi

1.20. Teorem: Bir E düzleminin x, y, z eksenlerini kestiği noktalar sırasıyla a, b, c ise bu düzlemin denklemi

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

ile bulunur.



İspat: İstenen düzlemin denklemi

$$Ax+By+Cz+D=0$$

olsun. Buna göre,

i) $x=a$ iken $y=z=0$ olduğundan $Aa+D=0$ olup $A=-\frac{D}{a}$ olur.

ii) $y=b$ iken $x=z=0$ olduğundan $Bb+D=0$ olup $B=-\frac{D}{b}$ olur.

iii) $z=c$ iken $x=y=0$ olduğundan $Cc+D=0$ olup $C=-\frac{D}{c}$ olur.

Buna göre, düzlem denklemi

$$-\frac{D}{a}x-\frac{D}{b}y-\frac{D}{c}z=-D$$

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

olarak bulunur.

Örnek: Eksenleri kestiği noktalar sırasıyla $x=4, y=3$ ve $z=-2$ olan düzlemin denklemini bulunuz.

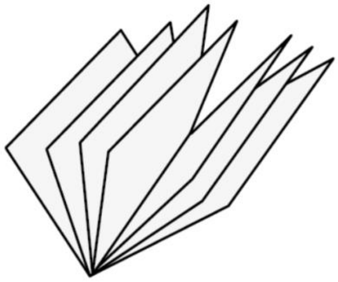
Çözüm: $\frac{x}{4}+\frac{y}{3}+\frac{z}{-2}=1$ veya $3x+4y-6z=12$ olur.

DÜZLEM DEMETİ

$E:\ A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ ve $F:\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ düzlemleri birlikte bir doğru belirtir. Bu arakesit doğrusunu üzerinde bulunduran sonsuz tane düzlem vardır. Bu sonsuz tane düzlemin denklemi, verilen bu iki düzlemi kullanarak ifade edilebilir.

$$\alpha(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\beta(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0 \qquad (1)$$

denklemini inceleyelim. Bu denklem α ve β değiştikçe yeni bir düzlem denklemi olacaktır.



Şimdi, arakesit doğrusu üzerinde bulunan P ve Q noktalarını göz önüne alalım. P noktası her iki düzlem denklemini de sağlar. O halde, (1) denklemini de sağlayacaktır. Benzer şekilde Q noktası her iki düzlem denklemini de sağladığından, (1) denklemini sağlayacaktır. Bu durum (1) düzleminin arakesit doğrusundan geçtiğini gösterir. Hatta $\alpha = 0, \beta \neq 0$ ise F düzlemi $\beta = 0, \alpha \neq 0$ ise E düzlemi elde edilir. Şimdi tek bilinmeyenle çalışmak için (1) denklemini α'ya bölerek, $\frac{\beta}{\alpha} = \lambda$ diyelim. Bu durumda arakesit doğrusundan geçen düzlem ailesinin denklemini

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0 \qquad (2)$$

biçiminde ifade etmek mümkün olur. (2) denklemi λ değiştikçe, arakesit doğrusundan geçen yeni bir düzlem belirtir. Bu nedenle (2) denklemine düzlem demeti denir. Bu düzlem demetindeki düzlemlerden herhangi birini bulabilmek için F düzlemi ya da arakesit doğrusu üzerinde olmayan herhangi bir noktasının verilmesi yeterlidir.

Örnek: $2x + 3y + z = 1$ ve $x - 2y + z = 3$ düzlemlerinin arakesitinden ve $P(1, 0, 3)$ noktasından geçen düzlemin denklemini bulunuz.

Çözüm: Verilen düzlemlerin arakesitinden geçen düzlem demetinin denklemi:

$$(2x + 3y + z - 1) + \lambda(x - 2y + z - 3) = 0$$

biçimindedir. Bu denklem $P(1, 0, 3)$ noktasını sağlamalıdır. Buna göre,

$$(2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + 3 - 1) + \lambda(1 - 2 \cdot 0 + 3 - 3) = 0$$

denkleminin çözümünden $\lambda = -4$ bulunur. O halde istenen düzlemin denklemi:

$$(2x + 3y + z - 1) - 4(x - 2y + z - 3) = 0$$

$$-2x + 11y - 3z + 11 = 0$$

bulunur.

DÜZLEM DENKLEMİNİN PARAMETRİK GÖSTERİMİ

Kartezyen koordinatlarda bir düzlem denklemini $Ax + By + Cz + D = 0$ biçiminde gösterebiliriz. Ayrıca iki parametre kullanarak düzlem denklemini parametrik olarak göstermek de mümkündür. Bunun için değişkenlerden birine u başka birine de v denilir ve son değişken (u, v) cinsinden yazılır. Mesela, $x + y - z = 3$ düzlemini parametrik olarak,

$$x = u, y = v, z = u + v - 3$$

şeklinde yazabiliriz. Bu gösterimi genellikle,

$$\varphi(u, v)(u, v, u + v - 3)$$

şeklinde yazarız.

Örnek: Parametrik denklemi $x = u + v, y = u - v, z = 2u - v$ olan düzlemin birim normalini bulunuz.

Çözüm: $x = u + v, y = u - v$ eşitliklerini taraf tarafa toplarsak,

$$x + y = 2u \text{ ise } u = \frac{x+y}{2}$$

taraf tarafa çıkarırsak da,

$$x - y = 2v \text{ ise } v = \frac{x-y}{2}$$

elde edilir. O halde,

$$z = 2\left(\frac{x+y}{2}\right) - \left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$x + 3y - 2z = 0$$

düzlem denklemi bulunur. Birim normali: $\vec{N} = \frac{1}{\sqrt{14}}(1, 3, -2)$ vektörüdür.

ÇÖZÜMLÜ ALIŞTIRMALAR

Doğru Denklemleri

1. $P(5, 2, -1)$ noktasından geçen ve $\vec{A} = (-2,3,1)$ vektörüne dik olan düzlemin denklemi nedir?

Çözüm: $P(5, 2, -1)$ noktasından geçen ve $\vec{A} = (-2,3,1)$ vektörüne dik olan düzlemin denklemi,

$$-2(x - 5) + 3(y - 2) + 1(z - (-1)) = 0$$
$$-2x + 10 + 3y - 6 + z + 1 = 0$$
$$2x - 3y - z - 5 = 0$$

olur.

2. Denklemleri

$$\vec{d}_1 : \frac{x+5}{-2} = \frac{y-8}{3} = \frac{z-7}{-1}$$

$$\vec{d}_2 : \frac{x-2}{a} = \frac{y+6}{2} = \frac{z-1}{-4}$$

olan doğrunun birbirine dik durumlu olması için a kaç olmalıdır?

Çözüm: d_1 doğrusunun konum vektörü, $\vec{A} = (-2,3,-1)$

d_2 doğrusunun konum vektörü, $\vec{B} = (a,2,-4)$

$d_1 \perp d_2$ ise $(-2,3,-1)(a,2,-4) = 0$

$$(-2) \cdot a + 3 \cdot 2 + (-1) \cdot (-4) = 0$$

$$a = 5$$

3. Uzayda verilen $x - 2y - z = 0$ düzlemiyle $x + z + 1 = 0$ düzleminin arakesit doğrusu (a, 1, 3) vektörüne diktir. Buna göre, a'nın değeri nedir?

Çözüm: "Üç Boyutlu Uzayda Doğrular" konusunda anlatılanları vektörlere aktaralım. Buna göre düzlemlerin normallerinin vektörel çarpımı, arakesit doğrusunun doğrultmanını verir.

$N_1 = (1,-2,-1)$ ve $N_2 = (1,0,1)$

$$\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-2,-2,2)$$

Doğru ile verilen vektör dik ise doğrultman ile de diktir. İç çarpımdan;

$$\langle (a,1,3), (-2,-2,-2) \rangle$$

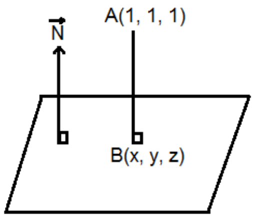
$$a(-2) + 1 \cdot (-2) + 3 \cdot 2 = 0$$

$$a = 2$$

olur.

4. Uzayda; A(1, 1, 1) noktasından geçen ve $x + y + z = 15$ düzlemine dik olan doğru, bu düzlemi B noktasında kesmektedir. Buna göre, |AB| uzunluğu kaç birimdir?

Çözüm:



$|AB| = (x-1, y-1, z-1)$

$\vec{N}//|AB|$ ise $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{1} = t$

$x = t+1, y = t+1, z = t+1$

$x + y + z = 15$

$t + 1 + t + 1 + t + 1 = 15$

$t = 4$

$B(5,5,5)$ ve $|AB| = (4,4,4)$

$|AB| = \sqrt{4^2 + 4^2 + 4^2} = 4\sqrt{3}$

5. $\vec{d}_1 : \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{m} = \frac{z-5}{1}$ ve $\vec{d}_2 : \frac{x-4}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{n}$ doğruları paralel ise $m + n$ nedir?

Çözüm: $\vec{d}_1$ ve $\vec{d}_2$ doğrularının doğrultman vektörleri $\vec{A} = (3, m, 1)$ ve $\vec{B} = (1, 2, n)$ dir.

$$\vec{d}_1 // \vec{d}_2 \Leftrightarrow \frac{3}{1} = \frac{m}{2} = \frac{1}{n}$$
$$m = 6 \text{ ve } n = \frac{1}{3}$$
$$m + n = 6 + \frac{1}{3} = \frac{19}{3}$$

6. $\vec{d}_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{2} = z - 1$ doğrusunun y ekseniyle yaptığı açının kosinüsü nedir?

Çözüm: $\vec{A} = (2,2,1)$ vektörünün $\vec{B} = (0,1,0)$ vektörüyle yaptığı açıyı bulalım. Buna göre,

$$\cos\theta = \frac{\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle}{\|\vec{A}\|\|\vec{B}\|} = \frac{2}{3}$$

olur.

7. P(1, 1,2) noktasının $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{6}$ doğrusuna en kısa uzaklığı bulunuz.

Çözüm : $\vec{A} = (2,3,6), \vec{Q} = (0,0,0)$ dır.

$$\ell = \frac{\text{Alan}}{\text{Taban}} = \frac{\|\overrightarrow{QP} \times \vec{A}\|}{\|\vec{A}\|} = \frac{\begin{vmatrix} \imath & j & k \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 6 \end{vmatrix}}{\sqrt{2^2+3^2+6^2}} = \frac{\|(0,-2,1)\|}{7} = \frac{\sqrt{5}}{7}$$

olur. Böylece,

$$\ell = \frac{\langle (0,2,3)(-6,-5,2)\rangle}{\sqrt{(-6)^2+(-5)^2+2^2}} = \frac{4}{\sqrt{65}}$$

olur.

8. P(1, 1, 1) ve Q(4, 2, k) noktalarından geçen doğrunun, x eksenini kestiği bilindiğine göre,

a) k'nın değeri nedir?

b) Doğru x eksenini hangi noktada keser?

Çözüm: P ve Q noktalarından geçen doğru:

$$\frac{x-1}{4-1} = \frac{y-1}{2-1} = \frac{z-1}{k-1}$$

dir. x eksenini kestiği noktada $y = z = 0$ olmalıdır.

$$\frac{x-1}{3} = \frac{0-1}{1} = \frac{0-1}{k-1}$$

eşitliğinden $k = 2$ olur. Doğru x eksenini $x = -2$ noktasında keser.

9. $\alpha(t) = (t-1, 2t-2, 2t)$ doğrusuyla, $x - 1 = y = 1 - 2z$ doğrusunun arasındaki açının kosinüsü nedir?

Çözüm: α doğrusunun doğrultmanı $\vec{A} = (1,2,2)$ ve ikinci doğrunun doğrultmanı ise $\vec{B} = (1,1,-1/2)$ dir. Burada kolaylık olması amacıyla $\vec{B} = (2,2,-1)$ alınabilir. Buna göre bu iki doğrunun arasındaki açı θ olmak üzere,

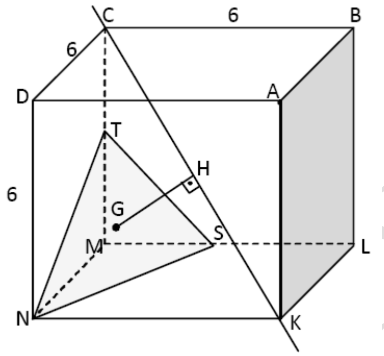
$$\cos\theta = \frac{\langle \vec{A},\vec{B}\rangle}{\|\vec{A}\|\|\vec{B}\|} = \frac{2}{9}$$

elde edilir.

10. Şekildeki küp şeklindeki bir odanın, kenar uzunlukları 6 br'dir.

$$|CT| = |TM|, |SM| = |SL|$$

olmak üzere, G noktası TNS üçgeninin ağırlık merkezidir. G noktasının, |CK| doğrusuna en yakın uzaklığını bulunuz.



Çözüm: TNS üçgeninin ağırlık merkezi,

$$G = \frac{(6,0,0)+(0,3,0)+(0,0,3)}{3} = (2,1,1)$$

'dir. Öncelikle |CK| doğrusunun denklemini bulalım. Doğru, C(0, 0, 6) ve K(6,6,0) noktalarından geçtiğine göre;

$$\frac{x-0}{6} = \frac{y-0}{6} = \frac{z-6}{-6} = \lambda$$

veya $x = y = 6 - z = k$ yazılabilir. Buna göre G noktasının |CK| doğrusuna uzaklığı;

$$\ell = \frac{\text{Alan}}{\text{Taban}} = \frac{\|\vec{A}\times\overrightarrow{CG}\|}{\|\vec{A}\|}$$

eşitliğinden $\vec{A} = (1,1,-1)$ ve $\overrightarrow{CG} = (2,1,-5)$ ve

$$\vec{A}\times\overrightarrow{CG} = \begin{vmatrix} \imath & \jmath & k \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -5 \end{vmatrix} = (-4,3,-1)$$

olduğundan,

$$\ell = \frac{\text{Alan}}{\text{Taban}} = \frac{\sqrt{(-4)^2+3^2+(-1)^2}}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}} = \frac{\sqrt{26}}{\sqrt{3}}$$

bulunur.

11. $\frac{x-1}{2} = y = z - 1$ ve $x - 1 = \frac{y}{2} = z - 2$ doğruları arasındaki uzaklığı ve birbirlerine en yakın oldukları noktaların koordinatlarını bulunuz.

Çözüm: $\vec{A} = (2,1,1), \vec{B} = (1,2,1), \overrightarrow{PQ} = (0,0,1)$ olduğuna göre,

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \imath & \jmath & k \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1,-1,3)$$

ve

$$\det(\vec{A}, \vec{B}, \overrightarrow{PQ}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

olur ki, en kısa uzaklık:

$$\ell = \frac{\text{Hacim}}{\text{Taban Alanı}} = \frac{\det(\vec{A},\vec{B},\overrightarrow{PQ})}{\|\vec{A}\times\vec{B}\|} = \frac{3}{\sqrt{11}} = \frac{3\sqrt{11}}{11}$$

elde edilir. En yakın oldukları koordinatlar ise,

$$\vec{A} \times \vec{B} = (-1,-1,3)$$
$$\overrightarrow{PQ} \times \vec{B} = (0,0,1) \times (1,2,1) = (-2,1,0)$$
$$\overrightarrow{PQ} \times \vec{A} = (0,0,1) \times (2,1,1) = (-1,2,0)$$

olduğu da göz önüne alınırsa,

$$k_1 = \frac{\langle \overrightarrow{PQ}\times\vec{B}, \vec{A}\times\vec{B}\rangle}{\|\vec{A}\times\vec{B}\|^2} = \frac{\langle(-2,1,0),(-1,-1,3)\rangle}{11} = \frac{1}{11}$$

$$k_2 = \frac{\langle \overrightarrow{PQ}\times\vec{A}, \vec{A}\times\vec{B}\rangle}{\|\vec{A}\times\vec{B}\|^2} = \frac{\langle(-1,2,0),(-1,-1,3)\rangle}{11} = -\frac{1}{11}$$

olduğundan,

$$M = P + k_1\vec{A} = (1,0,1) + \frac{1}{11}(2,1,1) = \left(\frac{13}{11}, \frac{1}{11}, \frac{12}{11}\right)$$
$$N = Q + k_2\vec{B} = (1,0,2) - \frac{1}{11}(1,2,1) = \left(\frac{10}{11}, -\frac{2}{11}, \frac{21}{11}\right)$$

bulunur.

Düzlem Denklemleri

12. Aşağıdakilerden hangisi $2x + y - z = 3$ düzlemine diktir?

A) $x = y = \frac{z}{3}$ B) $\frac{x}{2} = y = \frac{z}{-1}$ C) $x = y = z$

D) $x = 2y = -z$ E) $\frac{x}{3} = y = z$

Çözüm: $P(2,1,-1)$ noktasından geçen ve normali $\vec{N} = \left(\frac{1}{2},1,-1\right)$ olan vektörler

$$\left\langle (2,1,-1), \left(\frac{1}{2},1,-1\right) \right\rangle = 0$$

olduğundan $\frac{x}{2} = y = \frac{z}{-1}$ doğrusu $2x + y - z = 3$ düzlemine diktir.

13. $\vec{W} = (1,2,3)$ vektörü aşağıdaki düzlemlerden kaç tanesine paralel-dir?

A) $x + 2y + 3z = 0$ B) $2x + 4y + 6z = 0$ C) $x + y - z = 0$
D) $2x + y + z = 0$ E) $x + y + z = 0$

Çözüm: $\vec{W}$ vektörü düzleme paralel ise düzlemin normaline dik olmalıdır. Buna göre C şıkkındaki düzlemin normali $\vec{N} = (1,1,-1)$ olup

$$\langle (1,2,3), (1,1,-1) \rangle = 0$$

bulunur.

14. $\alpha(t) = (t-1, 2t-2, 2t)$ doğrusuyla $x + 2y - 2z = 2$ düzleminin arasındaki açının kosinüsü nedir?

Çözüm: Doğrunun doğrultmanı $\vec{A} = (1,2,2)$ ve düzlemin normali $\vec{N} = (1,2,-2)$ olduğundan doğru ve düzlemin arasındaki açı θ olmak üzere,

$$\sin\theta = \frac{\langle \vec{A}, \vec{N} \rangle}{\|\vec{A}\| \|\vec{N}\|} = \frac{1}{9}$$

elde edilir. O halde $\cos\theta = \frac{\sqrt{80}}{9} = \frac{4\sqrt{5}}{9}$ olur.

15. $P(1,1,0), Q(3,2,4)$ ve $R(-1,2,1)$ noktalarından geçen düzlemin denklemini bulunuz.

Çözüm: P, Q ve R'den geçen düzlem denklemini,

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-0 \\ 3-1 & 2-1 & 4-0 \\ -1-1 & 2-1 & 1-0 \end{vmatrix} = 0$$

matrisinden düzlemin denklemi $3x + 10y + 4z = 13$ olarak buluruz.

15. $\vec{x} = (1,1,0)$ ve $\vec{y} = (2,3,2)$ vektörlerinin içinde bulunduğu düzleme dik olan ve $P(1,1,1)$ noktasından geçen doğruyu bulunuz.

Çözüm: $\vec{x}$ ve $\vec{y}$ vektörlerinin içinde bulunduğu düzlemin normali:

$$\vec{N} = \vec{x} \times \vec{y} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (2, -2, 1)$$

bulunur. Bu düzleme dik olan doğrunun doğrultmanı, düzlemin normaline paralel olmalıdır. Buna göre $\vec{A} = \vec{N}$ alınabilir. Böylece istenen doğrunun denklemi

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-2} = z - 1$$

olur.

16. Q(1, 1, 1) noktasını ve $\frac{x-1}{2} = y = \frac{z}{2}$ doğrusunu içinde bulunduran düzlemin denklemini bulunuz.

Çözüm: İstenen düzlemin normali $\vec{N} = \overrightarrow{PQ} \times \vec{A}$ ile bulunabilir. Buna göre $\vec{A} = (2, 1, 2)$ ve $\vec{P} = (1, 0, 0)$ olduğundan,

$$\vec{N} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1, -2, 2)$$

elde edilir. Düzlem A(1, 1, 1) noktasından geçtiğinden,

$$-(x-1) - 2(y-1) + 2(z-1) = 0$$
$$x + 2y - 2z = 1$$

elde edilir.

17. Parametrik denklemi, $\phi(u, v) = (u, u + v, 2u + v)$ olan düzlemin birim normalini bulunuz.

Çözüm: $x = u, y = u + v, z = 2u + v$ eşitliklerinden u ve v'yi yok edelim.

$$y = x + v \text{ ise } v = y - x$$

olduğundan,

$$z = 2x + y - x$$
$$x + y - z = 0$$

elde edilir. Birim normali $\vec{N} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, -1)$ olur.

18. $\phi_1(u, v) = (u - 2, v - 1, u + v - 3)$
$\phi_2(u, v) = (u, 2v - 1, ku + v - 3)$
düzlemleri birbirine dik ise k'nın değeri nedir?

Çözüm: ϕ_1 denkleminde $u = x + 2, v = y + 1$ eşitliğinden $z = x + y$ ve ϕ_2 denkleminde $u = x, v = \frac{y+1}{2}$ ve $z = kx + \frac{y+1}{2} - 3$ eşitliğinden $2kx + y - 2z = 5$ düzlem denklemleri bulunur. Buna göre,

$$\vec{N}_1 = (1, 1, -1) \text{ ve } \vec{N}_2 = (2k, 1, -2)$$

oldug˘undan,

$$\vec{N}_1 \perp \vec{N}_2 \Leftrightarrow 2k + 1 + 2 = 0 \Leftrightarrow k = -\frac{3}{2}$$

elde edilir.

19. $x + y + 3z + 2 = 0$ ve $x + 2z + 3 = 0$ düzlemlerinin arakesitinden ve A(3, 1, 0) noktasından geçen düzlemin denklemini bulunuz.

Çözüm: $(x + y + 3z + 2) + \lambda(x + 2z + 3) = 0$ arakesit düzlemlerinin ailesinin denklemini verir. İstenen düzlem A(3, 1, 0) noktasından geçtiği için,

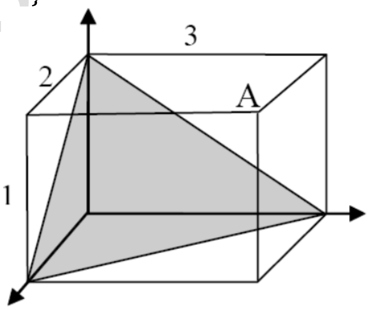
$$(3 + 1 + 0 + 2) + \lambda(3 + 0 + 3) = 0$$
$$\lambda = -1$$

olmalıdır. O halde $\lambda = -1$ yazılırsa,

$$(x + y + 3z + 2) - (x + 2z + 3) = 0$$
$$y + z = 1$$

elde edilir.

20. $2 \times 3 \times 1$ boyutlarında dikdörtgenler prizması şeklinde bir odanın üç köşesi şekildeki gibi birleştirilerek bir üçgen duvar yapılıyor. A köşesinin bu üçgen duvara uzaklığı kaç birimdir?



Çözüm: Taralı üçgenin bulunduğu düzlemin denklemi;

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{1} = 1$$

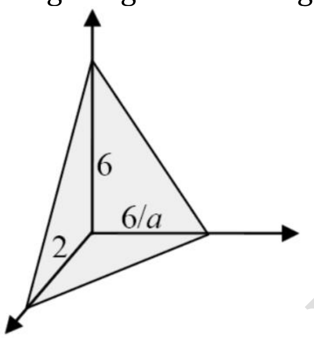
$$3x + 2y + 6z = 6$$

olduğundan A(2, 3, 1) noktasının bu düzleme uzaklığı;

$$\ell = \frac{|3\cdot 2+2\cdot 3+6\cdot 1|}{\sqrt{3^2+2^2+6^2}} = \frac{12}{7}$$

olur.

21. $3x + ay + z = 6, x = 0, y = 0$ ve $z = 0$ düzlemleriyle sınırlanan kapalı bölgenin hacmi 12 br^3 olduğuna göre a'nın değeri nedir?



Çözüm: Düzlem denklemini $\frac{x}{2} + \frac{y}{6/a} + \frac{z}{6} = 1$ şeklinde yazabiliriz. Bu düzlemin koordinat düzlemleriyle sınırladığı bölgenin hacmi bir dik üçgensel piramit olup, hacmi

$$V = \frac{1}{3}(\text{Taban Alanı})(\text{Yükseklik}) = \frac{1}{3}\left(\frac{2\cdot 6/a}{2}\right) = \frac{12}{a}$$

$a = 1$

bulunur.

22. $x + y - z = 3, x - 2y + z = 2$ ve $x + ny - 5z = m$ düzlemleri bir doğru boyunca kesiştiklerine göre m ve n kaçtır?

Çözüm: Bu üç düzlemin bir doğru boyunca kesişmeleri demek aynı düzlem demetinde bulunmaları demektir. Buna göre

$$a(x + y - z - 3) + b(x - 2y + z - 2) = x + ny - 5z - m$$

olacak şekilde a, b reel sayıları olmalıdır. Burada, katsayıların eşitliğinden,

$$a + b = 1\ , a - 2b = n, -a + b = -5, 3a + 2b = m$$

denklem sistemi elde edilir. Buradan $a = 3, b = -2, m = 5, n = 7$ bulunur.

23. Uzayda $E = \{(x, y, z) : x + 2y - 2z + 10 = 0\}$ düzlemi veriliyor. P(1, 2, 3) noktasından geçen ve bu düzleme dik olan d doğrusu, E düzlemini T noktasında kestiğine göre, T noktasının orijine uzaklığı kaç birimdir?

Çözüm: Doğru düzleme dik ise doğrultmanı olarak düzlemin normali alınabilir. Buna göre doğrunun denklemi;

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{-2} = \lambda$$

olacaktır. Bu doğrunun düzlemle kesişimi ise,

$$(\lambda + 1) + 2(2\lambda + 2) - 2(-2\lambda + 3) + 10 = 0$$

$$\lambda = -1$$

olduğundan T(0, 0, 5) bulunur. T'nin orijine uzaklığı 5 birimdir.

24. Uzayda verilen $x + 2y + 3z = 18$ düzlemi koordinat eksenlerini A, B ve C noktalarında kesmektedir. Buna göre, ABC üçgeninin ağırlık merkezinin koordinatları toplamını bulunuz.

Çözüm: Düzlem denklemini $\frac{x}{18} + \frac{y}{9} + \frac{z}{6} = 1$ biçiminde yazarsak bu düzlemin koordinat eksenlerini A(18, 0, 0), B(0, 9, 0) ve C(0, 0, 6) noktalarında kestiğini görürüz. Buna göre ağırlık merkezinin koordinatları G(6, 3, 2) olduğundan 11 olarak bulunur.

KAYNAKÇA

1. Doç. Dr. M. Kemal Sağel, Vektörel Analiz, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi döner sermaye işletmesi yayınları, No: 67, 2003, Ankara.
2. Thomas Calculus 2, George B. Thomas Jr., Massachusetts Institute of Technology, Maurice D. Weir, Naval Postgraduate School, Joel Hass, University of California Davis, Frank R. Giordano, Naval Postgraduate School, Çeviren: Recep Korkmaz, Beta Yayıncılık, İstanbul, 2010.
3. Murray R. Spiegel, İleri Matematik, Çev. Prof. Dr. H. Hilmi HACISALİHOĞLU, Schaum Yayınları, Nobel Yayın Dağıtım, 1997, Ankara.
4. Prof. Dr. Mustafa ÖZDEMİR, Analitik Geometri ve Çözümlü Problemler, Altın Nokta Yayınevi, İzmir, 2017.