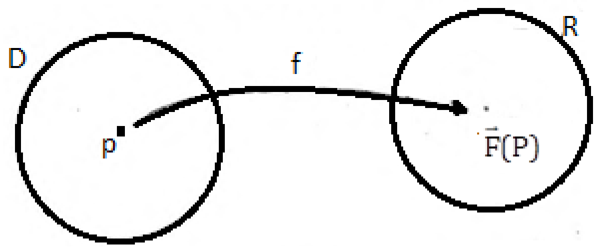
2. BÖLÜM
VEKTÖREL FONKSİYONLAR

TEK REEL DEĞİŞKENLİ VEKTÖREL FONKSİYONLAR

2.1. Tanım: D bölgesindeki her bir P noktasına bir tek $\vec{F}(P)$ vektörü karşılık gelecek şekilde tanımlanan bir $\vec{F}$ bağıntısına D de tanımlanmış bir "vektör değerli fonksiyon" ya da kısaca bir vektörel fonksiyon denir.



Bu tip fonksiyonlarda değişken genellikle t harfi ile gösterilir. Bir $\vec{F}$ fonksiyonunun t'deki değeri $\vec{F}(t)$ ile ifade edilir.

[a, b] kapalı aralığında tanımlanmış bir $\vec{F}(t)$ vektör fonksiyonu,

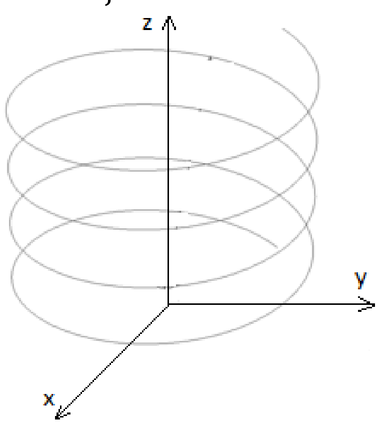
$$\vec{F}(t) = f_1(t)\vec{i} + f_2(t)\vec{j} + f_3(t)\vec{k}, a \leq t \leq b$$

ile gösterelim. f_1, f_2, f_3 ler t'nin aynı aralıkta tanımlanmış reel fonksiyonları olup, $\vec{F}$ vektör fonksiyonun bile şenleri olarak bilinirler. Vektör fonksiyonu bazen kısaca,

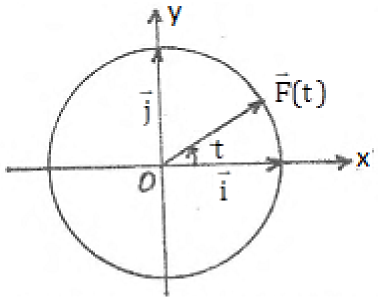
$$\vec{F}(t) = [f_1(t), f_2(t), f_3(t)]$$

şeklinde yazılır.

Örnek: $\vec{F}(t) = 2\cos t\,\vec{i} + 4\sin t\,\vec{j} + t\,\vec{k}$



Örnek: $\vec{F}(t) = \cos t\,\vec{i} + \sin t\,\vec{j}, 0 \le t \le 2\pi$ vektör fonksiyonu xy-düzleminde bir eğri tanımlar. t parametresi $[0, 2\pi]$ aralığında değişirken bu fonksiyonun tanımladığı vektörler merkezi birim çemberi çizer.



VEKTÖREL FONKSİYONLARININ CEBİRİ

2.2. Tanım: Bir [a, b] aralığında tanımlanmış ve bileşenleri $f_1(t), f_2(t), f_3(t)$ olan bir $\vec{F}(t)$ vektör fonksiyonunun büyüklüğü her $t \in [a, b]$ için

$$\|\vec{F}(t)\| = [f_1^2(t) + f_2^2(t) + f_3^2(t)]^{1/2}$$

ile verilir ki bu t'nin reel değerli bir fonksiyonudur. Bazı vektör değerli fonksiyonlar için büyüklük sabit olabilir.

Örnek: $\vec{F}(t) = 5\,\vec{i} + 12\,\vec{j}$ vektör fonksiyonunun büyüklüğü her $t \in [0,2\pi]$ için

$$\|\vec{F}(t)\| = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$$

dir.

2.1. Teorem: Şimdi de bir [a, b] aralığında tanımlanmış,

$$\vec{F}(t) = f_1(t)\vec{i} + f_2(t)\vec{j} + f_3(t)\vec{k}$$
$$\vec{G}(t) = g_1(t)\vec{i} + g_2(t)\vec{j} + g_3(t)\vec{k}$$

vektör fonksiyonları ile aynı aralıkta tanımlanmış h(t) skaler (reel) fonksiyonu göz önüne alalım.

1. $\vec{F}$ ve $\vec{G}$ nin toplamı:

$$\begin{aligned}(\vec{F} + \vec{G})(t) &= \overrightarrow{F(t)} + \overrightarrow{G(t)} \\ &= [f_1(t)\vec{i} + f_2(t)\vec{j} + f_3(t)\vec{k}] + [g_1(t)\vec{i} + g_2(t)\vec{j} + g_3(t)\vec{k}] \\ &= [f_1(t) + g_1(t)]\vec{i} + [f_2(t) + g_2(t)]\vec{j} + [f_3(t) + g_3(t)]\vec{k}\end{aligned}$$

2. $\vec{F}$ in h ile çarpımı:

$$\begin{aligned}(h\vec{F})(t) &= h(t)\overrightarrow{F(t)} \\ &= h(t)[f_1(t)\vec{i} + f_2(t)\vec{j} + f_3(t)\vec{k}] \\ &= [h(t)f_1(t)\vec{i} + h(t)f_2(t)\vec{j} + f_3(t)\vec{k}]\end{aligned}$$

3. $\vec{F}$ ve $\vec{G}$ nin skaler çarpımı:

$$(\vec{F}\cdot\vec{G})(t) = \overrightarrow{F(t)}\cdot\overrightarrow{G(t)}$$
$$= [f_1(t)\vec{i} + f_2(t)\vec{j} + f_3(t)\vec{k}][g_1(t)\vec{i} + g_2(t)\vec{j} + g_3(t)\vec{k}]$$
$$= f_1(t)\cdot g_1(t) + f_2(t)\cdot g_2(t) + f_3(t)\cdot g_3(t)$$

4. $\vec{F}$ ve $\vec{G}$ nin vektörel çarpımı:

$$(\vec{F}\times\vec{G})(t) = \overrightarrow{F(t)}\times\overrightarrow{G(t)} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ f_1(t) & f_2(t) & f_3(t) \\ g_1(t) & g_2(t) & g_3(t) \end{vmatrix}$$

Bu teoremin ispatı vektörler kavramındaki gibi olduğundan tekrar gösterilmemiştir.

Örnek: $\vec{F}(t) = [t, 1-t^2, t^3]$, $\vec{G}(t) = [1+t, -t, t^2]$, $t > 0$ olsun.
$\vec{F}+\vec{G}, \vec{F}\cdot\vec{G}, \vec{F}\times\vec{G}, \|\vec{F}\|, \|\vec{G}\|$
yi hesaplayınız?

Çözüm:
a) $\vec{F}(t) + \vec{G}(t) = [2t+1, 1-t-t^2, t^3+t^2]$

b) $\vec{F}(t)\cdot\vec{G}(t) = [t+t^2, t^3-t, t^5]$

c) $$\vec{F}(t)\times\vec{G}(t) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ t & 1-t^2 & t^3 \\ 1+t & -t & t^2 \end{vmatrix}$$
$$= t(-t^3 - t^2 + t + 1)\vec{i} + t^4\,\vec{j} - (t^3 + t + 1)\,\vec{k}$$

d) $\|\vec{F}(t)\| = \sqrt{t^2 + (1-t^2)^2 + (t^3)^2} = \sqrt{t^6 + t^4 - t^2 + 1}$

e) $\|\vec{G}(t)\| = \sqrt{(1+t)^2 + (-t)^2 + (-t^2)^2} = \sqrt{t^4 + 2t^2 + 2t + 1}$

Örnek: $\vec{F}(t) = 3t\,\vec{i} + t^2\,\vec{j} + t\,\vec{k}$ ve $\vec{G}(t) = 2e^t\,\vec{i} - t\,\vec{j} + t^2\,\vec{k}$, $(t \geq 0)$ olduğuna göre $4\vec{F} - 2\vec{G}, \vec{F}\cdot\vec{G}, \|\vec{F}+\vec{G}\|, \vec{F}\cdot\vec{G}$ bulunuz.

Çözüm:
$$4\vec{F} - 2\vec{G} = 4[3t\,\vec{i} + t^2\,\vec{j} + t\,\vec{k}] - 2[2e^t\,\vec{i} - t\,\vec{j} + t^2\,\vec{k}]$$
$$= (12t - 4e^t)\vec{i} + 6t^2\,\vec{j} + (4t - 2t^2)\,\vec{k}$$

$$\vec{F}\cdot\vec{G} = \left[3t\,\vec{i} + t^2\,\vec{j} + t\,\vec{k}\right]\cdot\left[2e^t\,\vec{i} - t\,\vec{j} + t^2\,\vec{k}\right] = 6te^t\,\vec{i} - t^3\,\vec{j} + t^3\,\vec{k}$$

$$\begin{aligned}\|\vec{F}+\vec{G}\| &= \left\|\left[3t\,\vec{i} + t^2\,\vec{j} + t\,\vec{k}\right] + \left[2e^t\,\vec{i} - t\,\vec{j} + t^2\,\vec{k}\right]\right\| \\ &= \left\|(3t+2e^t)\vec{i} + (t^2 - t)\,\vec{j} + (t+t^2)\,\vec{k}\right\| \\ &= \sqrt{(3t+2e^t)^2 + (t^2-t)^2 + (t+t^2)^2} \\ &= \sqrt{(3t+2e^t)^2 + 2t^4(t^2+1)}\end{aligned}$$

$$\vec{F}\times\vec{G} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3t & t^2 & t \\ 2e^t & -t & t^2 \end{vmatrix}$$

$$= (t^4 - t^2)\vec{i} + (2te^t + 3t^4)\,\vec{j} + (-t^2 + 2t^2e^t)\,\vec{k}$$

Örnek: $\vec{F}(t) = \cos t\,\vec{i} + \sin t\,\vec{j} + t\,\vec{k}$ ve $\vec{G}(t) = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $(t \geq 0)$ olduğuna göre $\vec{F}-\vec{G}, \vec{F}\cdot\vec{G}, \vec{F}\times\vec{G}$ ve $\|\vec{F}\|$ bulunuz.

Çözüm:

$$\begin{aligned}\vec{F}(t) - \vec{G}(t) &= \left[\cos t\,\vec{i} + \sin t\,\vec{j} + t\,\vec{k}\right] - [\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}] \\ &= (-1+\cos t)\,\vec{i} + (-1+\sin t)\,\vec{j} + (t-1)\,\vec{k}\end{aligned}$$

$$\vec{F}(t)\cdot\vec{G}(t) = \left[\cos t\,\vec{i} + \sin t\,\vec{j} + t\,\vec{k}\right]\cdot\left[\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}\right] = t + \cos t + \sin t$$

$$\vec{F}\times\vec{G} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos t & \sin t & t \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (t + \sin t)\,\vec{i} + (t + \cos t)\,\vec{j} + (\cos t - \sin t)\,\vec{k}$$

$$\|\vec{F}(t)\| = \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t + t^2} = \sqrt{1+t^2}$$

2.1. Not: Vektörlerdeki lineer bağımlılık ve diklik kavramları vektör fonksiyonlara da aynı şekilde uygulanır.

Örnek: a) $\vec{F}(t) = t\cos t\,\vec{i} + t\sin t\,\vec{j} + \sqrt{2t+1}\,\vec{k}$

b) $\vec{G}(t) = e^{-t}\vec{i} + e^{-t}\vec{j} + t\,\vec{k}$

olsun. $t \geq 0$ için $\|h(t)\vec{F}(t)\| = 1$ ve $\|h(t)\vec{G}(t)\| = 1$ biçimde bir h skaler fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm:

a) $\left\| h(t)\vec{F}(t) \right\| = 1$

$$\left\| h(t)(t\cos t\ \vec{i} + t\sin t\ \vec{j} + \sqrt{2t+1}\ \vec{k}) \right\| = 1$$

$$\sqrt{h^2(t)(t^2\cos^2 t + t^2\sin^2 t + 2t + 1\,)} = 1$$

$$h(t)\sqrt{t^2 + 2t + 1}\ = 1$$

$$h(t)(t+1) = 1$$

$$h(t) = \frac{1}{t+1}$$

b) $\left\| h(t)\vec{G}(t) \right\| = 1$

$$\left\| h(t)(e^{-t}\vec{i} + e^{-t}\vec{j} + t\,\vec{k}) \right\| = 1$$

$$\sqrt{h^2(t)(e^{-2t} + e^{-2t} + t^2)} = 1$$

$$h(t)\sqrt{2e^{-2t} + t^2} = 1$$

$$h(t) = \frac{1}{\sqrt{2e^{-2t}+t^2}}$$

2.3. Tanım: $[a, b]$ de tanımlı $\vec{F}, \vec{G}, \vec{H}$ fonksiyonları her $t \in [a, b]$ için

$$\vec{F}(t)\left[\vec{G}(t) \times \vec{H}(t)\right] = 0$$

eşitliği sağlanıyorsa lineer bağımlıdır denir.

2.4. Tanım: Her $t \in [a, b]$ için

$$\vec{F}(t) \cdot \vec{G}(t) = 0$$

oluyorsa $\vec{F}$ ve $\vec{G}$ fonksiyonları $[a, b]$ da dik (ortogonal) dir.

Örnek: $\vec{F}(t) = 3(\cos t\ \vec{i} + \sin t\ \vec{j})$ ve $\vec{G}(t) = 5(\sin t\ \vec{i} - \cos t\ \vec{j})$ fonksiyonlarının her $t \in [0,2\pi]$ için dik (ortogonal) olduğunu gösteriniz?

Çözüm: $\vec{F}(t) \cdot\ \vec{G}(t) = 15(\cos t\ \sin t - \sin t \cos t\,) = 0$ olduğundan her $t \in [0,2\pi]$ için $\vec{F}$ ve $\vec{G}$ diktir.

Örnek: a) $\vec{F}(t) = 4\cos t\ \vec{i} + 4\sin t\ \vec{j} + 2\,\vec{k}$ ve $\vec{G}(t) = -\sin t\ \vec{i} + \cos t\ \vec{j},\ 0 \le t \le 2\pi$ için $\vec{F}(t)$ ve $\vec{G}(t)$ lerin dik olduklarını gösteriniz.

Çözüm: $\vec{F}(t) \cdot \vec{G}(t) = 0$

$$\left(4\cos t\ \vec{i} + 4\sin t\ \vec{j} + 2\,\vec{k}\right) \cdot (-\sin t\ \vec{i} + \cos t\ \vec{j}) = 0$$

$$-4\cos t \sin t + 4\ \sin t\ \cos t = 0$$

Örnek: a) $\vec{F}(t) = 3\cos t\ \vec{i} + 3\sin t\ \vec{j} + 2\,\vec{k}$ ve $\vec{G}(t) = -\sin t\ \vec{i} + \cos t\ \vec{j},\ 0 \le t \le 2\pi$ için $\vec{F}(t) \times \vec{G}(t)$ ye paralel bir birim vektör bulunuz.

Çözüm: $\vec{F}(t) \times \vec{G}(t)$ nin oluşturduğu birim vektör daima $\vec{F}(t) \times \vec{G}(t)$ ye paralel olacaktır.

$$\vec{F} \times \vec{G} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3\cos t & 3\sin t & 2 \\ -\sin t & \cos t & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -2\cos t\,\vec{i} - 2\sin t\,\vec{j} + 3\,\vec{k}$$

$$\frac{\vec{F}(t) \times \vec{G}(t)}{\|\vec{F}(t) \times \vec{G}(t)\|} = -\frac{2\cos t}{\sqrt{13}}\vec{i} - \frac{2\sin t}{\sqrt{13}}\vec{j} + \frac{3}{\sqrt{13}}\vec{k}$$

VEKTÖREL FONKSİYONLARDA LİMİT

2.5. Tanım: $a \leq t \leq b$ aralığında tanımlı bir vektör fonksiyon $\vec{F}$ ve bu aralıkta belirli bir nokta t_0 olsun. Eğer verilen herhangi bir $\varepsilon > 0$ için bir $\delta > 0$ sayısı varsa öyle ki $0 < |t - t_0| < \delta$ için

$$|\vec{F}(t) - \vec{A}| < \varepsilon$$

eşitsizliği sağlanıyorsa $t \to t_0$ için $\vec{F}$ nin limiti $\vec{A}$ sabit vektörüdür denir ve

$$\lim_{t \to t_0} \vec{F}(t) = \vec{A}$$

yazılır.

2.2. Teorem: $\vec{F}(t) = f_1(t)\vec{i} + f_2(t)\vec{j} + f_3(t)\vec{k}$ olsun. $\vec{F}$ fonksiyonunun t_0 da bir limite sahip olması için gerek ve yeter şart f_1, f_2, f_3 fonksiyonlarının t_0 da birer limite sahip olmasıdır. Limitin var olması durumunda

$$\lim_{t \to t_0} \vec{F}(t) = \left[\lim_{t \to t_0} f_1(t)\right]\vec{i} + \left[\lim_{t \to t_0} f_2(t)\right]\vec{j} + \left[\lim_{t \to t_0} f_3(t)\right]\vec{k}$$

olur.

İspat: $\Rightarrow$: $\lim_{t \to t_0} \vec{F}(t) = L = a\,\vec{i} + b\,\vec{j} + c\,\vec{k}$ olsun. Buna göre $\varepsilon > 0$ verildiğinde öyle bir $\delta > 0$ bulunabilir ki $0 < |t - t_0| < \delta$ bağıntısını sağlayan tüm t parametreleri için $\|\vec{F}(t) - L\| < \varepsilon$ kalır. Bu t parametreleri için

$$\begin{aligned} |f_1(t) - a| &= \sqrt{(f_1(t) - a)^2} \\ &\leq \sqrt{(f_1(t) - a)^2 + (f_2(t) - b)^2 + (f_3(t) - c)^2} \\ &= \|\vec{F}(t) - L\| \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

olur ki bu $\lim_{t \to t_0} f_1(t) = a$ demektir. Benzer şekilde

$$\lim_{t \to t_0} f_2(t) = b \text{ ve } \lim_{t \to t_0} f_3(t) = c$$

olacağını gösterebilir.

$\Leftarrow$: Kabul edelim ki $\lim\limits_{t\to t_0} f_1(t)=a$, $\lim\limits_{t\to t_0} f_2(t)=b$, $\lim\limits_{t\to t_0} f_3(t)=c$ ve $L = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ olsun. $\varepsilon > 0$ verildiğinde öyle bir $\delta > 0$ bulunabilir ki $0 < |t - t_0| < \delta$ bağıntısını sağlayan tüm t parametreleri için

$$|f_1(t) - t_0| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}},\quad |f_2(t) - t_0| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}},\quad |f_3(t) - t_0| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}$$

olur. Aynı parametreleri için

$$\|\vec{F}(t) - L\| = \sqrt{(f_1(t) - a)^2 + (f_2(t) - b)^2 + (f_3(t) - c)^2} < \sqrt{\frac{\varepsilon}{\sqrt{3}} + \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}} + \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}} = \varepsilon$$

bulunur ki, bu bize

$$\lim_{t\to t_0}\vec{F}(t) = L$$

olduğunu gösterir.

Örnek: $\lim\limits_{t\to 0}\left[\frac{\ln\cos t}{t^2}\vec{i} + \left(\frac{1}{t^2} - \frac{\cos t}{t^2}\right)\vec{j} + \frac{\ln(e^t + 2t)}{t}\vec{k}\right]$ nin sonucu nedir?

Çözüm:

<u>i ekseni:</u> $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\ln\cos t}{t^2} = \frac{0}{0} = \lim\limits_{t\to 0}\frac{-\sin t}{2t\cos t} = \lim\limits_{t\to 0}\frac{-\cos t}{2\cos t - 2t\sin t} = -\frac{1}{2}$

<u>j ekseni:</u> $\lim\limits_{t\to 0}\left(\frac{1}{t^2} - \frac{\cos t}{t^2}\right) = \infty - \infty$

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{t^2} - \frac{\cos t}{t^2}\right) = \lim_{t\to 0}\frac{1 - \cos t}{t^2} = \lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{2t} = \lim_{t\to 0}\frac{\cos t}{2} = \frac{1}{2}$$

<u>k ekseni:</u> $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\ln(e^t + 2t)}{t} = \frac{0}{0} = \lim\limits_{t\to 0}\frac{e^t + 2}{1} = 3$

Buna göre

$$\lim_{t\to 0}\left[\frac{\ln\cos t}{t^2}\vec{i} + \left(\frac{1}{t^2} - \frac{\cos t}{t^2}\right)\vec{j} + \frac{\ln(e^t + 2t)}{t}\vec{k}\right] = -\frac{1}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j} + 3\vec{k}$$

olur.

Örnek: $\lim\limits_{t\to 0}\left[\frac{\ln(2t + 4)}{t + 10}\vec{i} + \frac{t^2 - 4}{t - 2}\vec{j} + \frac{\sin^2 t}{1 - \cos t}\vec{k}\right]$ nin sonucu nedir?

Çözüm:

<u>i ekseni:</u> $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\ln(2t + 1)}{t} = \lim\limits_{t\to 0}\frac{2}{2t + 1} = 2$

j ekseni: $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t^2-4}{t-2}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{2t}{1}=4$

k ekseni: $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin^2 t}{1-\cos t}=\dfrac{0}{0}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{2\sin t\cos t}{\sin t}=2$

Buna göre

$$\lim_{t\to 0}\left[\frac{\ln(2t+4)}{t+10}\vec{i}+\frac{t^2-4}{t-2}\vec{j}+\frac{\sin^2 t}{1-\cos t}\vec{k}\right]=2\vec{i}+4\vec{j}+2\vec{k}$$

olur.

Örnek: $\lim\limits_{t\to\infty}\left[\left(1-\dfrac{5}{t}\right)^{2t}\vec{i}+\dfrac{t}{\sqrt[3]{t^3+8}}\vec{j}\right]$ nin sonucu nedir?

Çözüm:

i) $\lim\limits_{t\to\infty}\left(1-\dfrac{5}{t}\right)^{2t}=e^{-10}$

j) $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{t}{\sqrt[3]{t^3+10}}=\dfrac{\infty}{\infty}=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[3]{1+\dfrac{10}{t^3}}}=1$

Buna göre

$$\lim_{t\to\infty}\left[\left(1-\frac{5}{t}\right)^{2t}\vec{i}+\frac{t}{\sqrt[3]{t^3+8}}\vec{j}\right]=e^{-10}\vec{i}+\vec{j}$$

olur.

2.2. Teorem: $\vec{F}$ ve $\vec{G}$ vektörel fonksiyonlar ve h, [a, b] aralığında tanımlı bir skaler fonksiyon olsun. Kabul edelim ki

$$\lim_{t\to t_0}\vec{F}(t)=\vec{A},\ \lim_{t\to t_0}\vec{G}(t)=\vec{B},\ \lim_{t\to t_0}h(t)=m$$

olsun. Bu takdirde aşağıdakiler yazılabilir.

1. $\lim\limits_{t\to t_0}[\vec{F}(t)+\vec{G}(t)]=\vec{A}+\vec{B}$
2. $\lim\limits_{t\to t_0}[\vec{F}(t)\cdot\vec{G}(t)]=\vec{A}\cdot\vec{B}$
3. $\lim\limits_{t\to t_0}[\vec{F}(t)\times\vec{G}(t)]=\vec{A}\times\vec{B}$
4. $\lim\limits_{t\to t_0}h(t)\vec{F}(t)=m\vec{A}$

Bu teoremin ispatı vektörler kavramındaki gibi olduğundan tekrar gösterilmemiştir.

Örnek: $\vec{F}(t) = t^3\,\vec{i} + t^3\,\vec{j} + t\,\vec{k}$ ve $\vec{G}(t) = t^2\,\vec{i} - \vec{j} + 2t\,\vec{k}$, $(t \geq 0)$ olsun. Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

a) $\lim\limits_{t\to 1}\left\|\vec{F}(t)+\vec{G}(t)\right\|$, b) $\lim\limits_{t\to 1}\left\|\vec{F}(t)\cdot\vec{G}(t)\right\|$, c) $\lim\limits_{t\to 1}\vec{F}(t)\times\vec{G}(t)$

Çözüm:

a) $\vec{F}(t) + \vec{G}(t) = (t^3\,\vec{i} + t^3\,\vec{j} + t\,\vec{k}) + (t^2\,\vec{i} - \vec{j} + 2t\,\vec{k})$
$= (t^3 + t^2)\vec{i} + (t^2 - 1)\,\vec{j} + 3t\,\vec{k}$

$$\lim_{t\to 1}\left\|\vec{F}(t)+\vec{G}(t)\right\| = \lim_{t\to 1}\sqrt{(t^3+t^2)^2+(t^2-1)^2+9t^2} = 5$$

b) $\vec{F}(t)\cdot\vec{G}(t) = \left(t^3\,\vec{i} + t^3\,\vec{j} + t\,\vec{k}\right)\cdot\left(t^2\,\vec{i} - \vec{j} + 2t\,\vec{k}\right) = \sqrt{3t^5 + t^2}$

$$\lim_{t\to 1}\left\|\vec{F}(t)\cdot\vec{G}(t)\right\| = \lim_{t\to 1}\sqrt{3t^5+t^2} = 2$$

c) $$\vec{F}(t)\times\vec{G}(t) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ t^3 & t^2 & t \\ t^2 & -1 & 2t \end{vmatrix} = (2t^3 + t)\vec{i} + 2t^3(1+t)\,\vec{j} + (t^4 + t^3)\,\vec{k}$$

$$\lim_{t\to 2}\vec{F}(t)\times\vec{G}(t) = 18\,\vec{i} + 48\,\vec{j} + 24\,\vec{k}$$

VEKTÖREL FONKSİYONLARDA SÜREKLİLİK

2.6. Tanım: Eğer bir $\vec{F}$ vektör fonksiyonu tanım bölgesindeki bir t_0 değeri için

$$\lim_{t\to t_0}\vec{F}(t) = \vec{F}(t_0)$$

eşitliğini sağlıyorsa $\vec{F}$ ye t_0 noktasında süreklidir denir. Bu tanıma göre $\vec{F}$ vektörel fonksiyonunun t_0 da sürekli olması için,

1. $\vec{F}$ fonksiyonu t_0 da tanımlı olmalı,
2. $\lim\limits_{t\to t_0}\vec{F}(t)$ var olmalı,
3. Bu limit $\vec{F}(t_0)$ vektörüne eşit olmalıdır.

2.1. Sonuç: Eğer $\vec{F}, \vec{G}$ ve h belirli bir aralıkta sürekli fonksiyonlar ise o takdirde,

i) $\vec{F} + \vec{G}$ ii) $\vec{F}\cdot\vec{G}$ iii) $\vec{F}\times\vec{G}$ iv) $h\vec{F}$

fonksiyonları da aynı aralıkta süreklidir.

Örnek: Aşağıda verilen fonksiyonlar karşılarında belirtilen aralıkta süreklidirler.

a) $\vec{F}(t) = t^4\,\vec{i} + (t^2 - 1)\vec{j} + e^t\,\vec{k}, t > 0$

b) $\vec{G}(t) = e^{-t}\,\vec{i} + \ln t\,\vec{j} + 2t\,\vec{k}, t > 0$
c) $\vec{H}(t) = \vec{A}\cos t\,\vec{i} + \vec{B}\sin t\,\vec{j} + \vec{C}\,\vec{k}, t \in [0,2\pi], \vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ sabit vektör.

VEKTÖREL FONKSİYONLARDA TÜREV

2.7. Tanım: $\vec{F}$, [a, b] aralığında tanımlanmış bir vektör fonksiyonu olsun. $\vec{F}$ nin bir $t \in (a,b)$ noktasındaki türevi

$$\vec{F}'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{F}(t+\Delta t) - \vec{F}(t)}{\Delta t}$$

limitinin değeri olarak tanımlanır. Eğer her $t \in (a,b)$ için $\vec{F}'(t)$ türevi varsa o takdirde $\vec{F}$ ye (a, b) aralığında diferensiyellenebilir denir.

Limit özellikleri göz önüne alınarak $\vec{F}(t)$ fonksiyonunun bileşenleri cinsinden türevi,

$$\vec{F}'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f_1(t+\Delta t) - f_1(t)}{\Delta t}\vec{i} + \frac{f_2(t+\Delta t) - f_2(t)}{\Delta t}\vec{j} + \frac{f_3(t+\Delta t) - f_3(t)}{\Delta t}\vec{k}$$

dir. Eğer f_1, f_2, f_3 bileşenleri diferensiyellenebilir fonksiyonlar ise, o takdirde

$$\vec{F}'(t) = f'_1(t)\vec{i} + f'_2(t)\vec{j} + f'_3(t)\vec{k}$$

yazılabilir.

2.2. Sonuç: $\vec{F}$, (a, b) de diferensiyellenebilirdir olması için gerek ve yeter şart $\vec{F}$ nin bileşenleri (a, b) de diferensiyellenebilir olmasıdır.

2.3. Sonuç: Bir vektörel fonksiyon bir noktada diferensiyellenebilir ise o noktada süreklidir.

2.2. Not: Diferensiyellenebilirlik ile türevlenebilirlik aynı anlamda kullanılmaktadır.

Vektör fonksiyonlarının türevi, skaler fonksiyonlar olarak bildiğimiz türev kuralları aynen geçerlidir.

2.3. Teorem: $\vec{F}, \vec{G}$ ve h fonksiyonları $t \in (a,b)$ aralığında türevlenebilir olsun. Bu takdirde;

i) $[\vec{F}(t) \pm \vec{G}(t)]' = \vec{F}'(t) \pm \vec{G}'(t)$
ii) $[h(t)\vec{F}(t)]' = h'(t)\vec{F}'(t)$
iii) $[\vec{F}(t) \cdot \vec{G}(t)]' = \vec{F}'(t) \cdot \vec{G}(t) + \vec{F}(t) \cdot \vec{G}'(t)$
iv) $[\vec{F}(t) \times \vec{G}(t)]' = \vec{F}'(t) \times \vec{G}(t) + \vec{F}(t) \times \vec{G}'(t)$
v) $\vec{F}(u(t))' = \vec{F}'(u(t))u'(t)$

dir.

İspat: i ve ii okuyucuya bırakılmıştır.

iii) $\vec{F}(t)=[f_1,f_2,f_3]$ ve $\vec{G}(t)=[g_1,g_2,g_3]$

$$\begin{aligned}
[\vec{F}(t)\cdot\vec{G}(t)]' &= [(f_1,f_2,f_3)(g_1,g_2,g_3)]' \\
&= [f_1g_1+f_2g_2+f_3g_3]' \\
&= f'_1g_1+f_1g'_1+f'_2g_2+f_2g'_2+f'_3g_3+f_3g'_3 \\
&= [f'_1g_1+f'_2g_2+f'_3g_3]+[f_1g'_1+f_2g'_2+f_3g'_3 \\
&= [(f'_1,f'_2,f'_3)(g_1,g_2,g_3)]+[(f_1,f_2,f_3)(g'_1,g'_2,g'_3)] \\
&= \vec{F}'(t)\cdot\vec{G}(t)+\vec{F}(t)\cdot\vec{G}'(t)
\end{aligned}$$

iv) $[\vec{F}(t)\times\vec{G}(t)]'=\dfrac{d}{dt}\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ f_1 & f_2 & f_3\\ g_1 & g_2 & g_3\end{vmatrix}$

$$\begin{aligned}
&=\frac{d}{dt}[(f_2g_3-g_2f_3)\vec{i}+(f_3g_1-g_3f_1)\vec{j}+(f_1g_2-g_1f_2)\vec{k}] \\
&=[(f'_2g_3+f_2g'_3-g'_2f_3-g_2f'_3)\vec{i}+(f'_3g_1+f_3g'_1-g'_3f_1-g_3f'_1)\vec{j} \\
&\qquad +(f'_1g_2+f_1g'_2-g'_1f_2-g_1f'_2)\vec{k}] \\
&=\{(f'_2g_3-g'_2f_3)\vec{i}+(f'_3g_1-g'_3f_1)\vec{j}+(f'_1g_2-g'_1f_2)\vec{k}\}+\{(f_2g'_3-g_2f'_3)\vec{i}+ \\
&\qquad (f_3g'_1-g_3f'_1)\vec{j}+(+f_1g'_2-g_1f'_2)\vec{k}\}
\end{aligned}$$

$$=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ f'_1 & f'_2 & f'_3\\ g_1 & g_2 & g_3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ f_1 & f_2 & f_3\\ g'_1 & g'_2 & g'_3\end{vmatrix}$$

$$=\vec{F}'(t)\times\vec{G}(t)+\vec{F}(t)\times\vec{G}'(t)$$

v) $\vec{F}$ türevlenebilir bir vektör, $\vec{u}$ da türevlenebilir bir vektör olsun.

$$\begin{aligned}
\vec{F}(\vec{u}(t))' &= \frac{d}{dt}[f_1\,\vec{i}+f_2\,\vec{j}+f_3\,\vec{k}] \\
&= \frac{df_1}{dt}\,\vec{i}+\frac{df_2}{dt}\,\vec{j}+\frac{df_3}{dt}\,\vec{k} \\
&= \frac{df_1}{du}\,\frac{du}{dt}\vec{i}+\frac{df_2}{du}\frac{du}{dt}\,\vec{j}+\frac{df_3}{du}\,\frac{du}{dt}\vec{k} \\
&= \left(\frac{df_1}{du}\,\vec{i}+\frac{df_2}{du}\,\vec{j}+\frac{df_3}{du}\,\vec{k}\right)\frac{du}{dt} \\
&= \vec{F}'(u(t))u'(t)
\end{aligned}$$

Örnek: $\vec{F}(t)=-\sin t\ \vec{i}+t^2\,\vec{j}, t>0$

$\vec{G}(t)=e^t\,\vec{i}+\ln t\ \vec{k}$

ise $\vec{F}(t)\cdot\vec{G}(t)$ türevini bulunuz.

1. Yol: $\vec{F}(t)\cdot\vec{G}(t)=-e^t\sin t$

$$\left[\vec{F}(t)\cdot\vec{G}(t)\right]'=\frac{d}{dt}(-e^t\sin t)=e^t(\cos t-\sin t)$$

2. Yol: $[\vec{F}(t)\cdot\vec{G}(t)]' = \vec{F}'(t)\cdot\vec{G}(t) + \vec{F}(t)\cdot\vec{G}'(t)$

$$
\begin{aligned}
[\vec{F}(t)\cdot\vec{G}(t)]' &= (\cos t\ \vec{i} + 2t\,\vec{j})(e^t\,\vec{i} + \ln t\ \vec{k}) + (e^t\,\vec{i} + \frac{1}{t}\,\vec{k})(-\sin t\ \vec{i} + t^2\,\vec{j}) \\
&= (e^t\cos t\,) + (-e^t\sin t) \\
&= e^t(\cos t - \sin t)
\end{aligned}
$$

Örnek: $\vec{F}(t) = 3t\,\vec{i} + 4\,\vec{j} - 2t^2\,\vec{k}$ ve $\vec{G}(t) = t^2\,\vec{i} + t\,\vec{j} + t^3\,\vec{k}$, $(t \geq 0)$ fonksiyonlar için $\vec{F}(t)\cdot\vec{G}(t)$ ve $\vec{F}(t)\times\vec{G}(t)$ nin türevlerini bulunuz.

Çözüm:

$$
\begin{aligned}
&[\vec{F}(t)\cdot\vec{G}(t)]' = \vec{F}'(t)\cdot\vec{G}(t) + \vec{F}(t)\cdot\vec{G}'(t) \\
&= (3\,\vec{i} - 4t\,\vec{k})\cdot\left(t^2\,\vec{i} + t\,\vec{j} + t^3\,\vec{k}\right) + \left(3t\,\vec{i} + 4\,\vec{j} - 2t^2\,\vec{k}\right)\cdot\left(2t\,\vec{i} + \ \vec{j} + 3t^2\,\vec{k}\right) \\
&= 6t^4 + 8t^3 + 15t + 4
\end{aligned}
$$

$$
[\vec{F}(t)\times\vec{G}(t)]' = \vec{F}'(t)\times\vec{G}(t) + \vec{F}(t)\times\vec{G}'(t)
$$

$$
= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 0 & -4t \\ t^2 & t & t^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3t & 4 & -2t^2 \\ 2t & t & t^3 \end{vmatrix}
$$

$$
= (6t^3 + 4t^2)\vec{i} - (11t^2 + 3t^4)\,\vec{j} + (3t^2 - 5t)\,\vec{k}\ //
$$

Vektör değerli fonksiyonların skaler çarpımının türevinden önemli bir teorem şudur:

2.4. Teorem: $\vec{F}$, (a, b) de diferensiyellenebilir bir vektör fonksiyon olsun. Her $t \in (a,b)$ için $\|\vec{F}(t)\|$ büyüklüğü sabit kalsın. O takdirde; $\vec{F}(t)$ ile $\vec{F}'(t)$ diktir (ortogonaldir).

İspat: Her $t \in (a,b)$ için $\|\vec{F}(t)\|$ sabit kaldığından

$$
\|\vec{F}(t)\|^2 = \vec{F}(t)\cdot\vec{F}(t)
$$

$$
\frac{d}{dt}\|\vec{F}(t)\|^2 = 2\vec{F}'(t)\cdot\vec{F}(t) = 0
$$

olur. Yani $\vec{F}'(t)\cdot\vec{F}(t) = 0$ dır. $\vec{F}'(t)$ ile $\vec{F}(t)$ nin skaler çarpımları t'ye bağlı olmaksızın sıfır olduğundan her $t \in (a,b)$ için bu $\vec{F}'(t)$ ve $\vec{F}(t)$ vektörleri birbirine diktir.

Örnek: $\vec{F}(t) = (4\cos t)\,\vec{i} + (4\sin t)\,\vec{j} + 3\,\vec{k}$ vektörü $\vec{F}'(t)$ vektörüne diktir. Gösteriniz.

Çözüm: $\vec{F}(t)$ vektörü a yarıçaplı merkezcil çemberin vektörel denklemidir.

$$\left\|\vec{F}(t)\right\| = \sqrt{(4^2\cos^2 t) + (4^2\sin^2 t) + 3^2} = 5$$

Diğer taraftan,

$$\vec{F}'(t) = (-4\sin t)\,\vec{i} + (4\cos t)\,\vec{j}$$

dir.

$$\vec{F}(t)\cdot\vec{F}'(t) = (4\cos t)(-4\sin t)\ + (4\sin t)(4\cos t) + 3\cdot 0 = 0//$$

Bu da gösteriyor ki $\vec{F}(t)$ vektörü $\vec{F}'(t)$ türev vektörüne diktir (ortagonaldir).

UZAY EĞRİLERİ ve TEĞET VEKTÖRLER

2.8. Tanım: Üç boyutlu uzayda bir eğri C olsun. $(x, y, z) \in C$ noktasında, noktanın koordinatları bir t parametresine bağlı sürekli fonksiyonlar ise, C eğrisinde sürekli bir eğri olacak ve

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t)$$

denklemlerine C eğrisinin parametrik denklemleri denir.

2.9. Tanım: Uzayda bir noktanın koordinatları ile o noktayı orijine birleştiren yer vektörlerinin bileşeni aynı olduğundan C eğrisi üzerindeki noktalar

$$\vec{R}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \quad a \le t \le b$$

vektörü yardımıyla tanımlanır. Bu vektöre C uzay eğrisinin vektörel denklemi denir.

Burada a ve b sabitler olup, C eğrinin uç noktalarına karşılık gelen parametre değerleridir.

Bazen xy-düzleminde işlem yapmamız gerekebilir. O takdirde C eğrisini düzlemsel bir eğri olarak alırız. Böyle bir eğrinin parametrik denklemleri $x = x(t), y = y(t)$ dir. Vektörel denklemi ise,

$$\vec{R}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}, \quad a \le t \le b$$

şeklindedir. xz ve yz-düzlemlerindeki eğriler için vektörel denklemler sırasıyla,

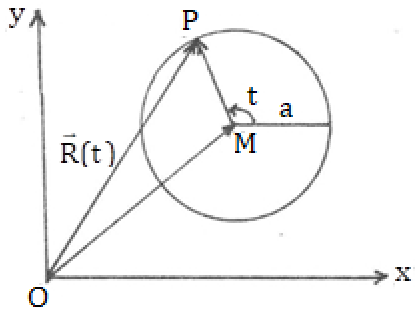
$$\vec{R}(t) = x(t)\vec{i} + z(t)\vec{j}, \quad a \le t \le b$$

$$\vec{R}(t) = y(t)\vec{i} + z(t)\vec{j}, \quad a \le t \le b$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek: xy-düzleminde $M(x_0, y_0)$ merkezli ve a yarıçaplı çemberin parametrik ve vektörel denklemlerini bulunuz?

Çözüm: $P(x, y)$ çember üzerinde herhangi bir nokta olsun.



$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MP}$, $\quad \overrightarrow{MP} = (a\cos t)\,\vec{\imath} + (a\sin t)\,\vec{\jmath}$, $\overrightarrow{OM} = x_0\,\vec{\imath} + y_0\,\vec{\jmath}$, $\overrightarrow{OP} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath}$

$\overrightarrow{OP} = \vec{R}(t) = (x_0\,\vec{\imath} + y_0\,\vec{\jmath}) + [(a\cos t)\,\vec{\imath} + (a\sin t)\,\vec{\jmath}]$
çemberin vektörel denklemidir. $0 \le t \le 2\pi$ dir. //

Aynı çemberin parametrik denklemleri:
$\overrightarrow{OP} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} = (x_0 + a\cos t)\,\vec{\imath} + (y_0 + a\sin t)\,\vec{\jmath}$
den
$x = x_0 + a\cos t,\ y = y_0 + a\sin t,\ 0 \le t \le 2\pi$
parametrik denklemleri kullanarak, çember denkleminin simetrik formunu elde ederiz.
$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = (a\cos t)^2 + (a\sin t)^2 = a^2$
dir.

2.10. Tanım: $x(t), y(t), z(t)$ ler t parametresinin türevlenebilir fonksiyonları olmak üzere,

$$\vec{R}(t) = x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath} + z(t)\vec{k}$$

vektörel denklemi uzayda bir eğri tanımlar. Öyle ki bu eğri üzerindeki her noktada bir tek teğet vektöre sahiptir. Eğri üzerindeki bir nokta $t = t_0$ parametre değerine karşılık gelsin. Eğrinin bu noktadaki teğet vektörü,

$$\frac{d\vec{R}}{dt}(t_0) = \vec{R}'(t_0)$$

türev vektörüdür. t_0 'a karşılık gelen noktadaki birim teğet vektörü $\vec{t}_0$ ile gösterirsek,

$$\vec{t}_0 = \frac{\vec{R}'(t_0)}{\|\vec{R}'(t_0)\|}$$

olup,

$$\vec{t}_0 = \frac{x'(t)\,\vec{\imath} + y'(t)\,\vec{\jmath} + z'(t)\,\vec{k}}{[x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2]^{1/2}}$$

dır.

Örnek: $\vec{R}(t) = (e^t\cos t)\,\vec{\imath} + (e^t\sin t)\,\vec{\jmath} + t\,\vec{k}, \quad t > 0$
vektör denkleminin tanımladığı eğrinin $t_0 = \frac{\pi}{2}$ noktasındaki birim teğet vektörünü ve teğet doğrusunun denklemini bulunuz?

Çözüm:
1. Teğet denklemini bulalım.

$$\vec{R}'(t) = e^t(\cos t - \sin t)\,\vec{i} + e^t(\sin t + \cos t)\,\vec{j} + \vec{k}$$

olur. O halde

$$\vec{R}'\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{2}\right)\vec{i} + e^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2}\right)\vec{j} + \vec{k}$$
$$= -e^{\frac{\pi}{2}}\,\vec{i} + e^{\frac{\pi}{2}}\,\vec{j} + \vec{k}$$

olup $t_0 = \frac{\pi}{2}$ noktasındaki teğet vektördür.

2. Bu noktadaki birim teğet vektör

$$\vec{t}_0 = \frac{\vec{R}'(t_0)}{\|\vec{R}'(t_0)\|} = \frac{-e^{\frac{\pi}{2}}\,\vec{i} + e^{\frac{\pi}{2}}\,\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{1+2e^{\pi}}}$$

olur.

YAY UZUNLUĞUNUN PARAMETRE ÖZELLİĞİ

2.5. Teorem: Düzgün bir C eğrisi

$$\vec{R}(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j} + z(t)\,\vec{k}\,, \quad a \le t \le b$$

vektörel denklemi ile verilsin. Eğrinin $\vec{R}(a)$ sabit ve $\vec{R}(t)$ değişken noktaları arasında kalan uzunluğuna $s(t)$ dersek,

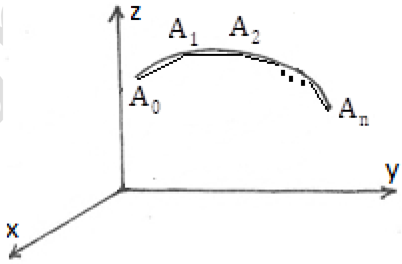
$$s(t) = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\,dt$$

biçimindedir.

İspat: $\vec{R}(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j} + z(t)\,\vec{k}\,, \quad a \le t \le b$ için

$$P = \{t_0, t_1, t_2, \dots, t_n\}$$

parçalanmasını göz önüne alalım. Eğri üzerinde $t_0, t_1, t_2, \dots, t_n$ parametresine karşılık gelen noktalar sırasıyla $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$ olsun.



$[A_0, A_1], [A_1, A_2], \dots, [A_{n-1}, A_n]$ doğru parçalarının uzunluğunu s_k ile gösterirsek,

$$s_k = \sqrt{(x(t_k) - x(t_{k-1}))^2 + (y(t_k) - y(t_{k-1}))^2 + (z(t_k) - z(t_{k-1}))^2} \qquad (1)$$

olur. Diferansiyel hesabın ortalama değer teoreminden $[t_k - t_{k-1}]$ aralığı

$$x(t_k) - x(t_{k-1}) = x'(t_k)\Delta t_k$$
$$y(t_k) - y(t_{k-1}) = y'(t_k)\Delta t_k$$
$$z(t_k) - z(t_{k-1}) = z'(t_k)\Delta t_k$$

olacak şekilde en az birer tane u_k, v_k ve w_k noktaları vardır. Bu değerler (1) denkleminde yerine yazılırsa

$$s_k = \sqrt{(x'(u_k))^2 + (y'(v_k))^2 + (z'(w_k))^2}\,\Delta t_k$$

olur. P parçalanmasının normu çok küçük alınırsa, C eğrisinin $s(t)$ uzunluğu yaklaşık uzunluğu $\sum_{k=1}^{n} s_k$ toplamına eşittir. Dolayısıyla

$$\sum_{k=1}^{n}\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\ \Delta t_k$$

bulunur. $\|P\| \to 0$ için $[t_k - t_{k-1}]$ aralığının boyu sıfıra gideceğinden u_k, v_k ve w_k noktaları çakışır. Buna göre

$$s(t)=\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\ \Delta t_k$$

$$s(t)=\int_a^b\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\ dt$$

olur. //

İntegrali $\|\vec{R}'(t)\|$ olduğundan yukarıdaki eşitlik

$$s(t)=\int_a^b\|R'(t)\|\,dt$$

şekline dönüşür. Bu bize yay uzunluğu ile t parametresi arasındaki ilişkiyi verir. Her iki yanın türevi alınırsa $\frac{ds}{dt} = \left\|\frac{d\vec{R}}{dt}\right\| > 0$ elde edilir. Buradan görülüyor ki s yay uzunluğu t nin artan bir fonksiyonudur.

t parametresi s yay uzunluğu cinsinden ifade edilebildiğine göre C eğrisinin $\vec{R}(t)$ vektörel denklemi de s'ye bağlı olarak $\vec{R}'(s)$ şeklinde ifade edilebilir. Bu durumda C eğrisinin $\vec{t}$ birim teğet vektörü doğrudan doğruya

$$\vec{t} = \frac{d\vec{R}}{ds}$$

olarak yazılabilir.

Örnek: $\vec{R}(t) = 5\cos t\ \vec{\imath} + 5\sin t\ \vec{\jmath} + \vec{k},\ \ 0 \le t \le 2\pi$ dairesel helis denklemini s yay uzunluğu cinsinden ifade ediniz ve dairesel helisin birim teğet vektörünü bulunuz?

Çözüm: $\left\|\frac{d\vec{R}}{dt}\right\| = \sqrt{(-5)^2\sin^2 t + 5^2\cos^2 t} = 5$

$$s(t)=\int_0^{2\pi}\left\|\frac{d\vec{R}}{dt}\right\|dt=\int_0^{2\pi}5\,dt=5\,t\Big|_0^{2\pi}=10\pi\ \text{br}$$

Böylece $\vec{R}$ vektörü s yay uzunluğu cinsinden $t = \frac{s}{5}$ konularak

$$\vec{R}(t) = 5\cos\frac{s}{5}\ \vec{\imath} + 5\sin\frac{s}{5}\ \vec{\jmath} + \vec{k}$$

yazılabilir. $\vec{t}$ birim teğet vektörü ise,

$$\vec{t} = \frac{d\vec{R}}{ds} = -\sin\frac{s}{5}\ \vec{\imath} + \cos\frac{s}{5}\ \vec{\jmath}$$

olarak bulunur.

Örnek: $\vec{R}(t) = e^t\cos t\ \vec{\imath} + e^t\sin t\ \vec{\jmath}, 0 \le t \le \pi$ ile verilen denklemin yanında yazılı parametrelere karşılık gelen parçasının uzunluğunu bulunuz.

Çözüm: $s(t)=\int_a^b \sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\,dt$

$x(t) = e^t \cos t \Leftrightarrow x'(t) = e^t \cos t - e^t \sin t$
$y(t) = e^t \sin t \Leftrightarrow y'(t) = e^t \sin t + e^t \cos t$

$$\left\|\frac{d\vec{R}}{dt}\right\| = \sqrt{(-5)^2 \sin^2 t + 5^2 \cos^2 t} = 5$$

$$\left\|\frac{\vec{R}(t)}{dt}\right\| = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$$
$$= \sqrt{(e^t \cos t - e^t \sin t)^2 + (e^t \sin t + e^t \cos t)^2}$$
$$= \sqrt{2}e^t$$

$$s(t)=\int_a^b \left\|\frac{d\vec{R}}{dt}\right\| dt = \sqrt{2}\int_0^{\pi} e^t\,dt = \sqrt{2}(e^{\pi}-1)$$

Örnek: $\vec{R}(t) = 3t\,\vec{i} + \sqrt{7}t\,\vec{j} + 3t\,\vec{k}$, (a ve b sabitler) $0 \leq t \leq 2\pi$ olan dairesel helisin uzunluğunu bulunuz.

Çözüm: $s(t)=\int_a^b \sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\,dt$

$x(t) = 3t \Leftrightarrow x'(t) = 3$
$y(t) = \sqrt{3}t \Leftrightarrow y'(t) = \sqrt{3}$
$z(t) = 5t \Leftrightarrow z'(t) = 5$

$$\left\|\frac{\vec{R}(t)}{dt}\right\| = \sqrt{x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)}$$
$$= \sqrt{3^2 + \sqrt{7}^2 + 3^2}$$
$$= 5$$

$$s(t)=\int_a^b \left\|\frac{d\vec{R}}{dt}\right\| dt = \int_0^{\pi} 5\,dt = 5\pi \text{ br}$$

BİRİM NORMAL VEKTÖR

2.11. Tanım: $\vec{R}$ bir vektör olmak üzere

$$\vec{t} = \frac{\frac{d\vec{R}}{dt}}{\left\|\frac{d\vec{R}}{dt}\right\|}$$

ifadesine birim normal vektör veya normal vektör denir.

Örnek: Bir önceki örnekte birim normal vektörünü bulunuz.

Çözüm:

$$\vec{t} = \frac{\frac{d\vec{R}}{dt}}{\left\|\frac{d\vec{R}}{dt}\right\|} = \frac{-a\sin t\,\vec{i} + a\cos t\,\vec{j}}{a} = -\sin t\ \vec{i} + \cos t\ \vec{j}\,//$$

Bir C eğrisi üzerindeki $\vec{t} = \vec{t}(s)$ birim teğet vektörünü göz önüne alalım.

$\vec{t}(s)$ birim olduğundan büyüklüğü sabit ve $\|\vec{t}(s)\| = 1$ dir. O halde $\vec{t}$ ve $\frac{d\vec{t}}{ds}$ vektörleri birbirine diktir. Yani $\vec{t} \cdot \frac{d\vec{t}}{ds} = 0$ dır.

Eğer $\frac{d\vec{t}}{ds} = 0$ ise, $\vec{t}$ sabit bir vektördür. Büyüklüğü ve yönü değişmez. Bu durumda C eğrisi bir doğru gösterir.

Eğer $\frac{d\vec{t}}{ds} \neq 0$ ise yazılabilir. Burada $\vec{n}$ vektörü $\frac{d\vec{t}}{ds}$ vektörü ile ayni doğrultu ve yönde yeni bir birim vektör olup, $\vec{t}$ ye diktir.

ESAS NORMAL ve BİNORMAL VEKTÖRLER

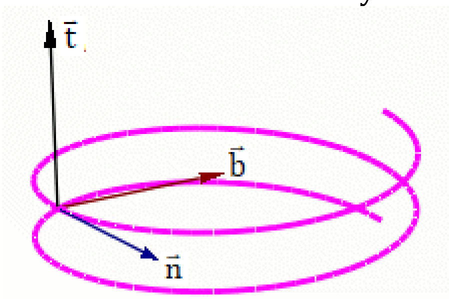
2.12. Tanım: $\vec{n}(s) = \frac{\vec{t}'(s)}{\|\vec{t}'(s)\|}$ vektörüne C eğrisinin s değerine karşılık gelen bir noktasındaki esas normal vektörü denir.

2.13. Tanım: C eğrisinin her bir noktasında eğrinin bir birim teğet vektör $\vec{t}$ ve bir de $\vec{t}$ ye dik $\vec{n}$ birim normal vektörü vardır.

$$\vec{b}(s) = \vec{t}(s) \times \vec{n}(s)$$

olarak tanımlanan $\vec{b}(s)$ vektörü hem $\vec{t}$ ye hem de $\vec{n}$ ye dik yeni bir birim vektördür. Bu $\vec{b}$ vektörüne eğrinin binormal vektörü denir.

2.14. Tanım: C eğrisinin her bir noktasında birbirine dik $\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}$ gibi üç vektör tanımlanabilmektedir. Bu vektörlere frenet vektörleri ya da frenet üçlüsü adı verilir.



2.15. Tanım: $\vec{t}$ ve $\vec{n}$ vektörleri birbirine dik iki vektör olup her zaman bir düzlem belirtirler. Bu iki vektörün içinde bulunduğu düzleme oskülatör düzlemi denir.

2.16. Tanım: $\vec{n}$ ve $\vec{b}$ vektörleri birbirine dik iki vektör olup her zaman bir düzlem belirtirler. Bu iki vektörün içinde bulunduğu düzleme normal düzlemi denir.

2.17. Tanım: $\vec{t}$ ve $\vec{b}$ vektörleri birbirine dik iki vektör olup her zaman bir düzlem belirtirler. Bu iki vektörün içinde bulunduğu düzleme rektifiyan düzlemi denir.

Şimdi de $\vec{t}$ ve $\vec{n}$ vektörleri ve K eğriliğini t parametresi cinsinden veren aşağıdaki denklemleri yazalım.

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{\vec{t}\prime(s)}{\|\vec{R}\prime(t)\|} \text{ buradan } \frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{d\vec{t}}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{\frac{d\vec{t}}{dt}}{\frac{dt}{ds}}$$

ve

$$\vec{n}(t) = \frac{\vec{t}'(t)}{\|\vec{t}'(t)\|}, \vec{K}(t) = \frac{\|\vec{t}'(t)\|}{\|\vec{R}'(t)\|} = \frac{\|\vec{R}'(t)\times\vec{R}''(t)\|}{\|\vec{R}'(t)\|^3}$$

dir.

Örnek: $\vec{R}(t) = 5t^2\,\vec{i} + \sqrt{63}t^2\,\vec{j} + 9t^2\,\vec{k}, t > 0$ vektörel denklemi ile verilen dairesel helis eğrisinin eğriliğini, esas normal ve binormal vektörlerini elde ediniz.

Çözüm: $\vec{R}(t) = 5t^2\,\vec{i} + \sqrt{63}t^2\,\vec{j} + 9t^2\,\vec{k}$

olduğundan

$$\vec{t}(t) = \frac{\vec{R}'(t)}{\|\vec{R}'(t)\|} = \frac{10t\,\vec{i}+2\sqrt{63}t\,\vec{j}+18t\,\vec{k}}{\sqrt{10^2+(2\sqrt{63})^2+18^2}} = \frac{10t\,\vec{i}+2\sqrt{63}t\,\vec{j}+18t\,\vec{k}}{13}$$

dir. $\vec{t}(t)$ nin türevini alırsak,

$$\vec{t}'(t) = \frac{5\,\vec{i}+\sqrt{63}\,\vec{j}+9\,\vec{k}}{13}$$

$$\|\vec{t}'(t)\| = 1$$

dir. Buradan

$$\vec{K}(t) = \frac{\|\vec{t}'(t)\|}{\|\vec{R}'(t)\|} = \frac{1}{13}$$

olur. Bu gösteriyor ki dairesel helis her noktasında sabit eğriliğe sahiptir.

Şimdi de esas normal vektörünü bulalım.

$$\vec{n}(t) = \frac{\vec{t}'(t)}{\|\vec{t}'(t)\|} = \frac{5\,\vec{i}+\sqrt{63}\,\vec{j}+9\,\vec{k}}{13}$$

dir.

Şimdi de binormal vektörü bulalım.

$$\vec{b}(t)=\vec{t}(t)\times\vec{n}(t)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 5t & \sqrt{63}t & 9t\\ \frac{5}{13} & \frac{\sqrt{63}}{13} & \frac{9}{13}\end{vmatrix}=0$$

elde edilir.

Örnek: $\vec{R}(t)=(t-\sin t)\vec{i}+(1-\cos t)\vec{j}, 0\leq t\leq 2\pi$ vektörel denklemi verilen eğrinin yanlarında yazılı parametrelerine karşılık gelen noktasındaki, teğet, normal ve binormal vektörlerini bulunuz.

Çözüm:

$\vec{R}(t)=(t-\sin t)\vec{i}+(1-\cos t)\vec{j}$

$\vec{R}'(t)=(1-\cos t)\vec{i}+\sin t\ \vec{j}$

$$\|\vec{R}'(t)\|=\sqrt{(1-\cos t)^2+\sin t^2}$$
$$=\sqrt{1-2\cos t+\cos^2 t+\sin t^2}$$
$$=\sqrt{2(1-\cos t)}$$

Teğet vektörü:

$$\vec{t}(t)=\frac{\vec{R}'(t)}{\|\vec{R}'(t)\|}=\frac{(1-\cos t)\,\vec{i}+\sin t\,\vec{j}}{\sqrt{2(1-\cos t)}}$$

Esas Normal Vektör:

$$\vec{t}'(t)=\frac{\sin t\,\vec{i}-(1-\cos t)\,\vec{j}}{2\sqrt{2(1-\cos t)}}=\sqrt{\frac{\sin^2 t-(1-\cos t)^2}{2\sqrt{2(1-\cos t)}}}=\frac{1}{2}$$

$$\vec{n}(t)=\frac{\vec{t}'(t)}{\|\vec{t}'(t)\|}=\frac{\frac{\sin t\,\vec{i}-(1-\cos t)\,\vec{j}}{2\sqrt{2(1-\cos t)}}}{\frac{1}{2}}=\frac{\sin t\,\vec{i}-(1-\cos t)\,\vec{j}}{\sqrt{2(1-\cos t)}}$$

Binormal Vektör:

$$\vec{b}(t)=\vec{t}(t)\times\vec{n}(t)=\frac{1}{2(1-\cos t)}\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1-\cos t & \sin t & 0\\ \sin t & -1+\cos t & 0\end{vmatrix}=-\vec{k}\ //$$

$\|\vec{n}(s)\|=1$ olduğundan $K(s)=\frac{\|d\vec{t}\|}{\|ds\|}$ elde edilir. K(s) ifadesi negatif olmayan bir skaler olup, C eğrisinin s parametresine karşılık gelen noktasındaki eğriliği adını alır.

Eğriliği kısaca eğrinin teğet doğrultusundan ne kadar ayrıldığını gösteren ölçüsü olarak ifade edebiliriz, s yay uzunluğu değiştiğinde $K = K(s)$ de eğri üzerindeki noktalara göre değişir.

Doğru için $K = 0$, R yarıçaplı çember için $K = \frac{1}{R}$ dir.

2.18. Tanım: C eğrisi üzerinde parametrenin s değerine karşılık gelen bir noktasında $K(s) \neq$ olmak üzere,

$$\rho(s) = \frac{1}{K(s)}$$

sayısına karşılık gelen değere eğrinin o noktasındaki eğrilik yarıçapı adı verilir.

Örnek: $\vec{R}(t) = (t + \sin t)\,\vec{i} + (1 - \cos t)\vec{j} + 4\sin\frac{t}{2}\vec{k}, t > 0, t = \frac{\pi}{2}$ vektörel denklemi verilen eğrinin yanında yazılı parametresine karşılık gelen noktasındaki eğrilik merkezinin koordinatları ve eğrilik yarıçapın bulunuz.

Çözüm:

$$\vec{R}(t) = (t + \sin t)\,\vec{i} + (1 - \cos t)\vec{j} + 4\sin\frac{t}{2}\vec{k}$$

$$\vec{R}'(t) = (1 + \cos t)\,\vec{i} + \sin t\,\vec{j} + 2\cos\frac{t}{2}\vec{k}$$

$$\|\vec{R}'(t)\| = \sqrt{(1 + \cos t)^2 + \sin^2 t + 4\cos^2\frac{t}{2}} = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{t}{2}\right)$$

$$\left\|\vec{R}'\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\| = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\right) = 2$$

$$\vec{R}''(t) = -\sin t\ \vec{i} + \cos t\,\vec{j} - \sin\frac{t}{2}\vec{k}$$

$$\vec{R}'(t) \times \vec{R}''(t) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1+\cos t & \sin t & 2\cos\frac{t}{2} \\ -\sin t & \cos t & -\sin\frac{t}{2} \end{vmatrix}$$

$$= \left(-\sin\frac{t}{2}\sin t - 2\cos\frac{t}{2}\cos t\right)\,\vec{i} - 2\cos\frac{t}{2}(\cos t - \sin t)\vec{j} + \cos t + \cos 2t\,\vec{k}$$

$$\vec{R}'\left(\frac{\pi}{2}\right) \times \vec{R}''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} + \vec{k}$$

$$\left\|\vec{R}'\left(\frac{\pi}{2}\right) \times \vec{R}''\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\| = \sqrt{2}$$

$$\vec{K}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\left\|\vec{R}'\left(\frac{\pi}{2}\right) \times \vec{R}''\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\|}{\left\|\vec{R}'\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\|^3} = \frac{\sqrt{2}}{8}$$

$$\rho = \frac{1}{K\left(\frac{\pi}{2}\right)} = 4\sqrt{2}$$

2.19. Tanım: Eğrinin her noktasında eğri ile aynı K(s) eğriliğine sahip ve yarıçaplı bir çember vardır. Bu çembere, eğrinin belirtilen noktadaki eğrilik çemberi denir.

BURULMA ve FRENET-SERRET FORMÜLLERİ

2.20. Tanım: Uzayda düzgün bir C eğrisi

$$\vec{R}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \quad a \le t \le b$$

vektörel denklemi ile verilmiş olsun. $\vec{b}$ binormal vektörünün s yay uzunluğuna göre türevini aldığımızda

$$\frac{d\vec{b}}{ds} = -\tau(s) \cdot \vec{n}(s)$$

elde ederiz. Burada τ(s) skaler çarpanına eğrinin s parametresine karşılık gelen noktasındaki burulması denir. Burulmayı kısaca eğrinin Oskülatör düzlem ders ayrılma miktarının ölçüsü olarak ifade edebiliriz. C eğrisinin t parametresine bağlı olarak verilmiş olması halinde,

$$\tau(s) = \frac{(\vec{R}'(t)\times\vec{R}''(t))\cdot\vec{R}'''(t)}{K^2(t)\|\vec{R}'(t)\|^6} = \frac{(\vec{R}'(t)\times\vec{R}''(t))\cdot\vec{R}'''(t)}{\|\vec{R}'(t)\times\vec{R}''(t)\|^2}$$

dir.

C eğrisi s yay uzunluğu cinsinden ifade edildiğinde Frenet üçlüsü olarak bilinen $\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}$ birim vektörleri aşağıdaki önemli denklemleri gerçeklemektedir.

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = K\vec{n}$$
$$\frac{d\vec{n}}{ds} = -K\vec{t} + \tau\vec{b}$$
$$\frac{d\vec{b}}{ds} = -\tau\vec{n}$$

denklemlerine frenet-serret formülleri denir.

Örnek: a ve b pozitif sabitler olmak üzere

$$\vec{R}(t) = a\cos t\,\vec{i} + a\sin t\,\vec{j} + bt\,\vec{k}, \quad t \ge 0$$

vektörel denklemi ile verilen dairesel helis eğrisinin herhangi bir $\vec{t}$ parametresine karşılık gelen noktasındaki eğriliğini ve burulmasını hesap ediniz?

Çözüm:

$$\vec{R}(t) = a\cos t\,\vec{i} + a\sin t\,\vec{j} + bt\,\vec{k}$$
$$\vec{R}'(t) = -a\sin t\,\vec{i} + a\cos t\,\vec{j} + b\,\vec{k}$$
$$\vec{R}''(t) = -a\cos t\,\vec{i} - a\sin t\,\vec{j}$$
$$\vec{R}'''^{(t)} = a\sin t\,\vec{i} - a\cos t\,\vec{j}$$
$$\vec{K}(t) = \frac{\|\vec{R}'(t)\times\vec{R}''(t)\|}{\|\vec{R}'(t)\|^3}$$

denkleminden K(t) eğriliğini hesaplayalım.

$$\vec{R}'(t)\times\vec{R}''(t)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -a\sin t & a\cos t & b\\ -a\cos t & -a\sin t & 0\end{vmatrix}=ab\sin t\,\vec{i}-ab\cos t\,\vec{j}+a^2\,\vec{k}$$

$$\left\|\vec{R}'(t)\times\vec{R}''(t)\right\|=\sqrt{a^2b^2\sin^2 t+a^2b^2\cos^2 t+a^4}=a\sqrt{a^2+b^2}$$
$$\left\|\vec{R}'(t)\right\|=\sqrt{a^2\sin^2 t+a^2\cos^2 t+b^2}=\sqrt{a^2+b^2}$$

bu ifadeler K(t) de yerine yazılırsa,

$$\vec{K}(t)=\frac{\left\|\vec{R}'(t)\times\vec{R}''(t)\right\|}{\left\|\vec{R}'(t)\right\|^3}=\frac{a}{a^2+b^2}$$

eşitliği bulunur. Şimdi de

$$\tau(t)=\frac{(\vec{R}'(t)\times\vec{R}''(t))\cdot\vec{R}'''(t)}{\left\|\vec{R}'(t)\times\vec{R}''(t)\right\|^2}$$

burulmasını hesap edelim.

$$\begin{aligned}(\vec{R}'(t)\times\vec{R}''(t))\cdot\vec{R}'''(t)&=(ab\sin t\,\vec{i}-ab\cos t\,\vec{j}+a^2\,\vec{k})(a\sin t\,\vec{i}-a\cos t\,\vec{j})\\ &=a^2b\sin^2 t+a^2b\cos^2 t+0\\ &=a^2b\end{aligned}$$

Bu ifadeler τ(t) de yerine konursa

$$\tau(t)=\frac{a^2b}{\left(a\sqrt{a^2+b^2}\right)^2}=\frac{b}{a^2+b^2}$$

elde edilir.

2.3. Not: Dairesel helis eğrisi her noktasında sabit eğriliğe ve sabit burulmaya sahiptir.

Örnek: $\vec{R}(t)=a(t-\sin t)\vec{i}+a(1-\cos t)\,\vec{j},a>0,0\le t\le 2\pi$ vektörel denklemi verilen eğrinin yanlarında yazılı parametrelerine karşılık gelen noktasındaki eğrilik ve burulmasını bulunuz.

Çözüm:

$$\vec{R}(t)=a(t-\sin t)\vec{i}+a(1-\cos t)\,\vec{j}$$
$$\vec{R}'(t)=a(1-\cos t)\vec{i}+a\sin t\,\vec{j}$$
$$\begin{aligned}\vec{R}'(t)&=\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}\\ &=a\sqrt{(1-\cos t)^2+\sin^2 t}\\ &=a\sqrt{1-2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t}\\ &=a\sqrt{2(1-\cos t)}\end{aligned}$$
$$\vec{R}''(t)=a\sin t\,\vec{i}+a\cos t\,\vec{j}$$
$$\vec{R}'(t)\times\vec{R}''(t)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a(1-\cos t) & a\sin t & 0\\ a\sin t & a\cos t & 0\end{vmatrix}=a^2(1-\cos t)\,\vec{k}$$

Eğrilik:

$$\vec{K}(t) = \frac{\|\vec{R}'(t)\times\vec{R}''(t)\|}{\|\vec{R}'(t)\|^3} = \frac{1}{2^{3/2}\,a(1-\cos t)^{1/2}}$$

Burulma:

$\vec{R}'''(t) = a\cos t\ \vec{i} - a\sin t\ \vec{j}$

$(\vec{R}'(t)\times\vec{R}''(t))\cdot\vec{R}'''(t) = [-a^2(1-\cos t)\ \vec{k}][a\cos t\ \vec{i} - a\sin t\ \vec{j}] = 0$

$$\tau(t) = \frac{(\vec{R}'(t)\times\vec{R}''(t))\cdot\vec{R}'''(t)}{\|\vec{R}'(t)\times\vec{R}''(t)\|^2} = 0$$

EGRİSEL HAREKETLERE UYGULAMALAR

2.21. Tanım: $\vec{R}(t)$, uzayda düzgün bir eğri boyunca ilerleyen bir parçacığın konum vektörü olmak üzere,

$$\vec{V}(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{R}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{R}}{dt}(t)$$

ifadesine parçacığın, eğriye teğet olan hız vektörü denir. t-anındaki hızın büyüklüğü ise,

$$\vec{V}(t) = \|\vec{V}(t)\| = \left\|\frac{d\vec{R}}{dt}\right\| = \frac{ds}{dt}$$

olur. Buna göre $\vec{R}(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j} + z(t)\,\vec{k}$ ise hız vektörü,

$$\vec{V}(t) = x'(t)\,\vec{i} + y'(t)\,\vec{j} + z'(t)\,\vec{k}$$

olup, t-zamanındaki hızın değeri

$$\vec{V}(t) = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} = \frac{ds}{dt}$$

elde edilir.

Eğer hareket esnasında hızı ya da hareketin doğrultusu (ya da her ikisi de) değişiyor iseler o zaman hız vektörü de değişir. $\vec{V}$ nin değişimi onun türevi ile ölçülür ve $\vec{a}$ ile gösterilir.

2.22. Tanım: Herhangi bir t anında, $\vec{v}$'nin yönü hareketin yönü, $\vec{v}$'nin büyüklüğü parçacığın sürati ve

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{V}}{dt}(t) = \frac{d^2\vec{R}}{dt^2}(t)$$

vektörü varsa, parçacığın ivme vektörü denir. $\vec{a}(t)$ ivmesi kendi bileşenleri cinsinden,

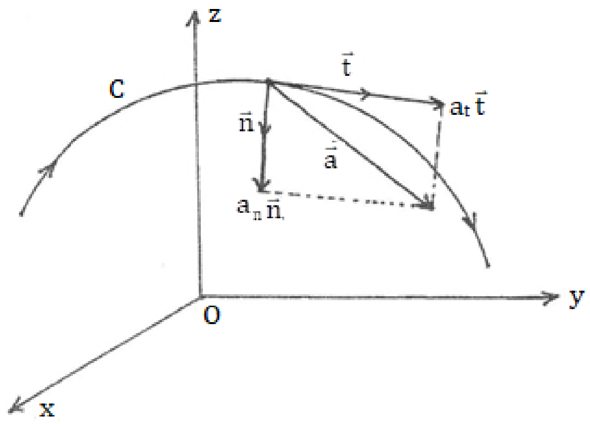
$$\vec{a}(t) = \frac{d^2x}{dt^2}(t)\,\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}(t)\,\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}(t)\,\vec{k}$$

yazılır. İvmenin büyüklüğü ise,

$$\vec{a}(t) = \|\vec{a}(t)\| = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}$$

dir.

2.4. Not: Hız vektöründe olduğu gibi ivme vektörünün yönü hareketin yörüngesine teğet değildir.



$\vec{a}$ vektörü daima biri $\vec{t}$ teğet birim vektörüne ve diğeri $\vec{n}$ birim normal vektörüne paralel iki vektörün toplamı olarak yazılabilir. Bu yazılış aşağıdaki biçimdedir.

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{R}}{dt}\right)$$
$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{R}}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}\right)$$
$$= \frac{d}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}\left(\frac{d\vec{R}}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}\right)$$
$$= \frac{d}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}\left(\vec{t}\cdot\frac{ds}{dt}\right)$$
$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{t}}{dt}\cdot\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \left(\vec{t}\cdot\frac{d^2s}{dt^2}\right)$$

ayrıca

$$\frac{d\vec{t}}{dt} = K\cdot\vec{n}, \quad \frac{ds}{dt} = \vec{V}$$

olduğundan.

$$\vec{a} = K\cdot\vec{n}\cdot V^2 + \vec{t}\frac{dV}{dt} = \underbrace{K\cdot V^2}_{a_n}\cdot\vec{n} + \underbrace{\frac{dV}{dt}}_{a_n}\vec{t} = \frac{V^2}{\rho}\vec{n} + \frac{dV}{dt}\vec{t}$$

Burada $\rho = \frac{1}{K}$ eğrilik yarıçapıdır. Böylece $\vec{a}$ ivme vektörü birbirine dik iki vektörün toplamıdır. Bunlardan biri teğet doğrultusu olup büyüklüğü,

$$a_t = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

dir. Diğeri ise normal doğrultusunda olup büyüklüğü,

$$a_n = K\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = KV^2 = \frac{V^2}{\rho}$$

dir. Burada a_t ye ivmenin <u>teğet bileşeni</u>, a_n ye ise ivmenin <u>normal bileşeni</u> adı verilir.

$$a^2 = \|\vec{a}\|^2 = a_t^2 + a_n^2$$

eşitliği sağlanır.

Eğer parçasının eğri üzerinde sabit hızla hareket ediyorsa ivmenin teğet bile şeni sıfırdır. Eğer parçası doğrusal bir yol boyunca hareket ediyorsa K eğriliği sıfır olacağından normal bileşeni sıfırdır. Bu durumda sadece teğetsel ivme vardır.

Yukarıdaki izahı şu tanımla özetleyelim.

1. Hız, konumun türevi: $\vec{V}(t) = \frac{d\vec{R}}{dt}$

2. Sürat hızın büyüklüğü: $\|\vec{V}(t)\| = \left\|\frac{d\vec{R}}{dt}\right\|$

3. İvme hızın türevi: $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt}$

4. $\frac{\vec{V}}{\|\vec{V}\|}$ vektörü hareketin t anındaki yönüdür.

Örnek: $\vec{R}(t) = (\sin t - t\cos t)\vec{\imath} + (\cos t + t\sin t)\,\vec{\jmath}$
vektörel denklemi ile tanımlanan bir yörünge üzerindeki bir parçanın hareketi göz önüne alınıyor.

i) Hız,
ii) İvme,
iii) Herhangi bir t-anında ivmenin teğet ve normal bileşenlerini bulunuz.

Çözüm: i) $\vec{R}(t)$ nin türevini alarak $\vec{V}(t)$ hız vektörü bulunur.

$$\vec{V}(t) = \frac{d\vec{R}}{dt} = t\sin t\ \vec{\imath} + t\cos t\ \vec{\jmath}$$

dir. Buradan hızın değeri

$$\|\vec{V}(t)\| = \sqrt{t^2\sin^2 t + t^2\cos^2 t} = t = \frac{ds}{dt}$$

dir.

ii) $\vec{R}(t)$ nin ikinci türevini alırsak $\vec{a}(t)$ ivme vektörü bulunur.

$$\vec{a}(t) = \frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{R}}{dt}\right) = (\sin t - t\cos t)\,\vec{\imath} + (\cos t - t\sin t)\,\vec{\jmath}$$

dir. Buradan ivmenin değeri,

$$\sqrt{\vec{a}(t)} = \sqrt{(\sin t - t\cos t)^2 \ + (\cos t - t\sin t)^2} = \sqrt{1 + t^2}$$

olur.

iii) İvmenin teğet ve normal bileşenlerini bulalım.

İvmenin teğet bileşeni,

$$\vec{a}(t) = \frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right) = \frac{d}{dt}(t) = 1$$

İvmenin normal bileşeni,

$$a^2 = a_t^2 + a_n^2$$

$$a_n = \sqrt{a^2 + a_t^2} = \sqrt{(1 + t^2) - 1} = t$$

elde edilir.

Örnek: Planör üzerindeki bir kişi, konum vektörü

$\vec{R}(t) = (3\cos t)\vec{i} + (3\sin t)\,\vec{j} + 2t^2\vec{k}$

olan bir yol üzerinde, hızla yükselen hava nedeniyle helezon çizerek yükselmektedir. Buna göre;

a) Hız ve ivme vektörlerini
b) Planörün herhangi bir t anındaki süratini
c) Varsa, cismin ivmesinin hızına ortogonal olduğu zamanlarını bulunuz.

Çözüm: a) $\vec{R}(t) = (3\cos t)\vec{i} + (3\sin t)\,\vec{j} + 2t^2\vec{k}$

$$\vec{V}(t) = \frac{d\vec{R}}{dt} = -(3\sin t)\vec{i} + (3\cos t)\,\vec{j} + 4t\,\vec{k}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{V}}{dt} = -(3\cos t)\vec{i} - (3\sin t)\,\vec{j} + 4\,\vec{k}$$

b) Sürat v'nin büyüklüğüdür:

$$\left\|\vec{V}(t)\right\| = \sqrt{(-3\sin t)^2 + (3\cos t)^2 + (4t)^2} = \sqrt{9 + 16t^2}$$

planör yolu üzerinde yükseldikçe daha hızlı hareket eder.

c) v ve a'nın ortogonal olduğu zamanları bulmak için

$$\vec{V}(t)\vec{a}(t) = 9\sin t\cos t - 9\sin t\cos t + 16t = 0$$

olmasını sağlayan t değerlerini aralım. Böylece, ivme vektörünün $\vec{v}$'ye dik olduğu tek an $t = 0$'dır.

KUTUPSAL KOORDİNATLARDA HIZ ve İVME

Bir parça, düzlemde hareket ediyorsa, dik koordinat sistemine göre bunun yörüngesi

$\vec{R}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$

denklemi ile verilebilir. Bazı durumlarda böyle bir hareketi incelemek için kutupsal koordinatlırı kullanmak dik koordinatlardan daha uygun olur.

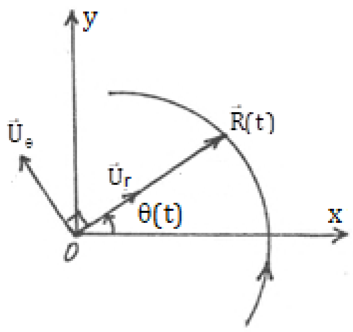
Düzlemde (x, y) koordinatlarının r ve θ kutupsal koordinatlarına, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ denklemleri ile bağlı olduğunu dikkate alırsak kutupsal koordinatlardaki vektörel denklemi,

$\vec{R}(t) = r(t)[\cos\theta\;\vec{i} + \sin\theta\;\vec{j}] = r(t)\vec{U}_r$

şeklinde ifade edilir. Burada,

$\vec{U}_r = \cos\theta\;\vec{i} + \sin\theta\;\vec{j}$

olup, r(t) ve θ(t) ler sırasıyla parçanın t-anındaki kutupsal yarıçap ve kutupsal açıyı belirtmektedir.



$\vec{U}_r$ nin $\vec{R}(t)$ ile aynı yönde bir birim vektör olduğu açıktır. Ayrıca büyüklüğü sabit ve 1 sayısına eşit olan $\vec{U}_r$ nin türev vektörü kendisine dik olacaktır. Bu vektörü $\vec{U}_\theta$ ile gösterirsek,

$$\vec{U}_\theta = \frac{d\vec{U}_r}{d\theta} = -\sin\theta\ \vec{i} + \cos\theta\ \vec{j}$$

olup, $\vec{U}_\theta$ da bir birim vektördür. Diğer taraftan,

$$\frac{d\vec{U}_\theta}{d\theta} = -\cos\theta\ \vec{i} - \sin\theta\ \vec{j} = \vec{U}_r$$

olur. Dik koordinatlarda $\vec{i},\vec{j}$ birim vektörlerinin rolünü kutupsal koordinatlarda $\vec{U}_r, \vec{U}_\theta$ birim vektörleri almaktadır.

Şimdi,

$$\vec{R}(t) = r(t)[\cos\theta(t)\ \vec{i} + \sin\theta(t)\ \vec{j}] = r(t)\vec{U}_r$$

denkleminin tanımladığı harekete ait hız ve ivmeyi bulalım:

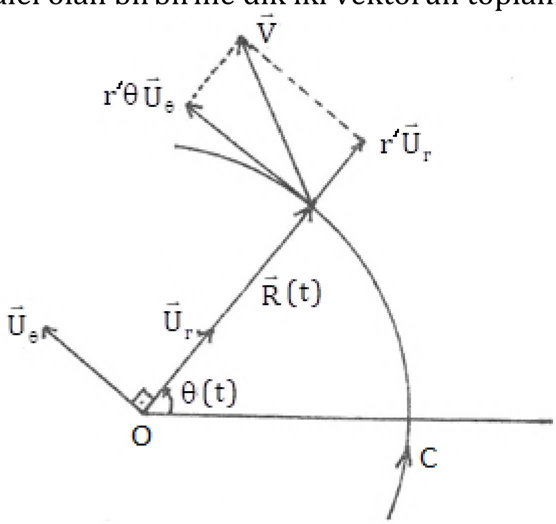
θ açısı zamanın ya da t-parametresinin bir fonksiyonu olduğundan, $\vec{U}_r$ birim vektörü de aynı değişkenin fonksiyonudur. Böylece türevde zincir kuralının uygulanmasıyla,

$$\vec{V}(t) = \frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt}\vec{U}_r + r\,\frac{d\vec{U}_r}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt}, \qquad \frac{d\vec{U}_r}{d\theta} = \vec{U}_\theta$$

den

$$\vec{V}(t) = \frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt}\vec{U}_r + r\,\frac{d\theta}{dt}\vec{U}_\theta$$

dır. Bu denklem kutupsal koordinatlarda hız formülüdür. Böylece hız vektörü biri $\vec{U}_r$ ye paralel diğeri $\vec{U}_\theta$ ya paralel olan birbirine dik iki vektörün toplamı olur.



$\vec{U}_r$ ve $\vec{U}_\theta$ ın katsayıları olan $\dfrac{dr}{dt}$ ve $\dfrac{d\theta}{dt}$ skaler çarpanlarına hızın kutupsal bileşenleri adı verilir.

$\vec{U}_r$ ve $\vec{U}_\theta$ birim vektörleri dik olduğundan

$$\|\vec{V}(t)\| = \vec{V}\cdot\vec{V} = \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

yazılır. Böylece bir parçanın kutupsal koordinatlarda $\vec{V}$ hızının ifadesi,

$$\vec{V} = \sqrt{\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2}$$

olur.

Eğer parçanın orijin merkezli bir çember üzerinde hareket ediyorsa o takdirde r sabit olacağından $\dfrac{dr}{dt} = 0$ olup $\vec{V}$ hız vektörü,

$$\vec{V} = r\frac{d\theta}{dt}\vec{U}_\theta$$

dır.

Hızın değeri ise $V = \|\vec{V}\| = r\dfrac{d\theta}{dt}$ olur. Bu durumda $w = \dfrac{d\theta}{dt}$ ifadesine açısal hız adı verilir. Buna göre $V = rw$ olur ki dairesel harekette yörünge üzerindeki hız, açısal hızın yarıçap ile çarpımına eşit olduğu ortaya çıkar.

Kutupsal koordinatlarda ivmeyi elde edebilmek için $\vec{R}(t) = r(t)\vec{U}_r$ denkleminin iki defa türevi alınırsa,

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{R}}{dt^2}\vec{U}_r = \frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\frac{d\vec{U}_r}{d\theta} + \frac{d}{dt}\left(r\frac{d\theta}{dt}\right)\vec{U}_\theta + r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\frac{d\vec{U}_\theta}{d\theta}$$

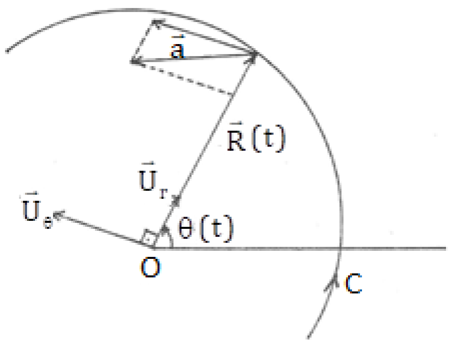
$$\vec{a} = \left[\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\vec{U}_r\right] + \left[r\frac{d^2\vec{\theta}}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\right]\vec{U}_\theta$$

$$\vec{a} = [r'' - r\,\theta^2]\vec{U}_r + [r\,\theta'' + 2r'\theta']\vec{U}_\theta$$

dir. Bu denklem kutupsal koordinatlarda ivme vektörüdür. Bunun bileşenleri sırasıyla,

$$r'' - r\,\theta^2 \text{ ve } + r\,\theta'' + 2r'\theta'$$

olmaktadır.



Eğer parça bir çember üzerinde sabit bir hız ile hareket ediyorsa, r sabit olup,

$$\frac{dr}{dt} = 0 \text{ ve } \frac{d\theta}{dt} = \text{sabit olup } \frac{d^2r}{dt^2} = 0 \text{ ve } \frac{d^2\theta}{dt^2} = 0$$

olacağından,

$$\vec{a} = -r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \vec{U}_r$$

şekline dönüşür ki bu çemberin merkezine doğru yönelmiş bir normal ivmedir. İvmenin değeri ise,

$$a = \|\vec{a}\| = r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = r\,w^2$$

olarak bulunur.

Örnek: $\vec{R}(t) = (e^t \cos t)\,\vec{i} + (e^t \sin t)\,\vec{j}\,,(t > 0)$ vektör denkleminin tanımladığı eğrinin $t_0 = \frac{\pi}{4}$ noktasındaki birim teğet vektörünü ve teğet doğrusunun denklemini bulunuz?

Çözüm: Verilen eğrinin parametrik denklemi: $x = \cos t\,, y = \cos t\,,(t > 0)$ olup $x^2 + y^2 = e^{2t} = r^2$ den bu eğrinin kutupsal denklemi $r = e^t$ dir.

Bu noktadaki teğet doğrusunun denklemini bulalım:

$$\vec{R}_0\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(e^{\pi/4}\cos\frac{\pi}{2}\right)\vec{i} + \left(e^{\pi/4}\sin\frac{\pi}{2}\right)\vec{j} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\pi/4}(\vec{i}+\vec{j})$$

vektörünün belirttiği noktadan geçen ve doğrultman vektörü $\vec{t}_0 = \vec{j} = (0;1)$ vektörüdür. O halde

$$\frac{x - x_0}{0} = \frac{y - y_0}{1} \Leftrightarrow x = x_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\pi/4}$$

doğrusudur. $x = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\pi/4}$ doğrusu (oy-eksenine paralel) olur.

Örnek: $\vec{R}(t) = t^2 \cos 3t\;\vec{i} + t^2 \sin 3t\;\vec{j}$ vektörel denklemi ile tanımlanan yörünge üzerindeki bir parçanın hareketi göz önüne alınıyor. Hız vektörünü, hızın büyüklüğünü, ivme vektörünü, ivmenin büyüklüğünü, hızın kutupsal bileşenlerini hesaplayınız.

Çözüm:

$$\vec{R}(t) = r(t)[\cos\theta(t)\;\vec{i} + \sin\theta(t)\;\vec{j}] = r(t)\vec{U}_r$$

$$\vec{U}_r = \cos\theta(t)\;\vec{i} + \sin\theta(t)\;\vec{j}$$

$$\vec{U}_r = \frac{d\vec{U}_r}{d\theta} = -\sin\theta\;\vec{i} + \cos\theta\;\vec{j}$$

Hız vektörü:

$$\begin{aligned}\vec{V}(t) &= \frac{d\vec{R}}{dt}\\ &= 2t(\cos 3t\;\vec{i} + \sin 3t\;\vec{j}) + t^2(-3\sin 3t\;\vec{i} + 3\cos 3t\;\vec{j})\\ &= 2t\,\vec{U}_r + 3t^2\vec{U}_\theta\end{aligned}$$

Burada hızın bileşenleri $2t$ ve $3t^2$ dir.

Hız büyüklüğü $V = \|\vec{V}\| = \sqrt{(2t)^2 + (3t)^2} = 4\sqrt{4 + 9t^2}$

İvme vektörü: $\vec{a} = \dfrac{d\vec{V}}{dt} = \dfrac{d^2\vec{R}}{dt^2}$

$= (2-3^2t^2)(\cos 3t\ \vec{i} + \sin 3t\ \vec{j}) + (4t-3)(-\sin 3t\ \vec{i} + 3\cos 3t\ \vec{j})$
$= (2-9t^2)\vec{u}_r + (4t-3)\vec{u}_\theta$

İvme büyüklüğü: $a = \|\vec{a}\| = \sqrt{(2-9t^2)^2 + (4t-3)^2}$

Buna göre ivmenin bileşenleri $2-9t^2$ ve $4t-3$ dir.

VEKTÖR DEĞERLİ FONKSİYONLARIN İNTERALİ

Vektör değerli fonksiyonların integrali Riemann toplamları oluşturularak tanımlandığında integral yine bileşen fonksiyonların integraline indirgenir. Bu nedenle integralin tanımını doğrudan bileşen fonksiyonların integralleri cinsinden tanımlıyoruz.

2.22. Tanım: f_1, f_2, f_3, $[a,b]$ üzerinde integrallenebilen fonksiyonlar olmak üzere,

$$\vec{F}(t) = f_1(t)\,\vec{i} + f_2(t)\,\vec{j} + f_3(t)\,\vec{k}$$

fonksiyonunun $[a,b]$ aralığındaki belirli integrali

$$\int_a^b \vec{F}(t)\,dt = \left(\int_a^b f_1(t)\,dt\right)\vec{i} + \left(\int_a^b f_2(t)\,dt\right)\vec{j} + \left(\int_a^b f_3(t)\,dt\right)\vec{k}$$

vektörü, belirsiz integrali

$$\int \vec{F}(t)\,dt = \left(\int f_1(t)\,dt\right)\vec{i} + \left(\int f_2(t)\,dt\right)\vec{j} + \left(\int f_3(t)\,dt\right)\vec{k}$$

vektör değerli fonksiyonudur.

Örnek: $\vec{F}(t) = 2t\,\vec{i} + 6t^2\,\vec{j} + 3\,\vec{k}$ fonksiyonu için $\int \vec{F}(t)\,dt$ ve $\int_0^1 \vec{F}(t)\,dt$ integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$\int \vec{F}(t)\,dt = \int 2t\ \vec{i}\ dt + \int 6t^2\ dt\ \vec{j} + \int 3\,dt\ \vec{k}$$
$$= t^2\,\vec{i} + 2t^3\,\vec{j} + 3t\,\vec{k}$$

$$\int_0^1 \vec{F}(t)\,dt = \int_0^1 2t\,dt\ \vec{i} + \int_0^1 6t^2\,dt\ \vec{j} + \int_0^1 3\,dt\ \vec{k}$$
$$= t^2\,\vec{i} + 2t^3\,\vec{j} + 3t\,\vec{k}\Big|_0^1$$
$$= \vec{i} + 2\,\vec{j} + 3\,\vec{k}$$

ÇÖZÜMLÜ ALIŞTIRMALAR

1. $\vec{F}$ vektörel fonksiyon iki defa diferensiyellenebilir olsun. Bu takdirde

$$[\vec{F}(t) \times \vec{F}'(t)]' = \vec{F}(t) \times \vec{F}''(t)$$

dir. Gösteriniz.

Çözüm: $[\vec{F}(t) \times \vec{F}'(t)]' = \vec{F}'(t) \times \vec{F}'(t) + \vec{F}(t) \times \vec{F}''(t)$

$$\vec{F}'(t) \times \vec{F}'(t) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x'(t) & y'(t) & z'(t) \\ x'(t) & y'(t) & z'(t) \end{vmatrix} = 0$$

olduğundan

$$[\vec{F}(t) \times \vec{F}'(t)]' = \vec{F}(t) \times \vec{F}''(t)$$

elde edilir.

2. $\vec{F}$ vektör değerli diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $F(t) = \|\vec{F}(t)\|$ ise $\vec{F}(t) \cdot \vec{F}'(t) = F(t) \cdot F'(t)$ dir. Gösteriniz.

Çözüm:

$$\begin{aligned} \|\vec{F}(t)\| = F(t) &\Leftrightarrow \vec{F}(t) \cdot \vec{F}(t) = F^2(t) \\ &\Leftrightarrow \left[\vec{F}(t) \cdot \vec{F}(t)\right]' = [F^2(t)]' \\ &\Leftrightarrow \vec{F}'(t) \cdot \vec{F}(t) + \vec{F}(t) \cdot \vec{F}'(t) = 2F(t)\,F'(t) \\ &\Leftrightarrow 2\vec{F}'(t) \cdot \vec{F}(t) = 2F(t)\,F'(t) \\ &\Leftrightarrow \vec{F}'(t) \cdot \vec{F}(t) = F(t)\,F'(t) \end{aligned}$$

3. Eğer $G(t) = \vec{F}(t) \times \vec{F}'(t) \cdot \vec{F}''(t)$ ise $G'(t) = \vec{F}(t) \times \vec{F}'(t) \cdot \vec{F}'''(t)$ dir. Gösteriniz.

Çözüm: 1. Soruya dikkat edelim.

$$\begin{aligned} G'(t) &= ([\vec{F}(t) \times \vec{F}'(t)] \cdot \vec{F}''(t))' \\ &= [\vec{F}(t) \times \vec{F}'(t)]' \cdot \vec{F}''(t) + [\vec{F}(t) \times \vec{F}'(t)] \cdot \vec{F}'''(t) \\ &= [\vec{F}'(t) \times \vec{F}'(t) + \vec{F}(t) \times \vec{F}''(t)] \cdot \vec{F}''(t) + [\vec{F}(t) \times \vec{F}'(t)] \cdot \vec{F}'''(t) \\ &= \vec{F}(t) \times \vec{F}''(t) \cdot \vec{F}''(t) + \vec{F}(t) \times \vec{F}'(t) \cdot \vec{F}'''(t) \\ &= \vec{F}(t) \times \vec{F}'(t) \cdot \vec{F}'''(t) \end{aligned}$$

4. $\vec{R}(t) = 3t\,\vec{i} + 3t^2\,\vec{j} + 2t^3\,\vec{k}$, $(t = 1)$ vektörel denklemi ile tanımlanan yörüngeler üzerindeki bir hareket göz önüne alınıyor. Hız vektörü, hızın büyüklüğü, ivme vektörü, ivmenin büyüklüğü ve ivmenin bileşenlerini bulunuz.

Çözüm:

Hız vektörü: $\vec{V}(t) = \dfrac{d\vec{R}}{dt} = 3\,\vec{i} + 6t\,\vec{j} + 6t^2\,\vec{k}$

$t = 1$ noktasındaki hız vektörü $\vec{V}(1) = 3\,\vec{i} + 6\,\vec{j} + 6\,\vec{k}$

Hızın büyüklüğü: $\vec{V}(t) = \|\vec{V}(t)\| = \sqrt{3^2 + (6t)^2 + (6t^2)^2} = 3\sqrt{1 + 4t^2 + 4t^4}$

$t = 1$ noktasındaki hızın büyüklüğü $\vec{V}(1) = \|\vec{V}(1)\| = 3\sqrt{1 + 4 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1^4} = 15$

İvme vektörü: : $\vec{a} = \dfrac{d\vec{V}}{dt} = \dfrac{d^2\vec{R}}{dt^2} = 6\,\vec{j} + 12t\,\vec{k}$

$t = 1$ noktasındaki ivme vektörü $\vec{a} = 6\,\vec{j} + 12\,\vec{k}$

İvme büyüklüğü: $a = \|\vec{a}(t)\| = \sqrt{6^2 + 12^2} = 6\sqrt{5}$
$t = 1$ noktasındaki ivme büyüklüğü $a = 6\sqrt{5}$

İvmenin teğet bileşeni: $a_t = \dfrac{d\vec{V}}{dt} = \dfrac{d}{dt}(9) = 0$
$t = 1$ noktasındaki ivmenin teğet bileşeni $a_t = 0$

Normal bileşeni: $a_n = kV^2 = \dfrac{V^2}{\rho}$ veya $a^2 = a_t^2 + a_n^2$
$a_n^2 = a^2 - a_t^2 = (6\sqrt{5})^2 - 0^2$ ise $a_n = 6\sqrt{5}$

KAYNAKÇA

1. Doç. Dr. M. Kemal Sağel, Vektörel Analiz, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi döner sermaye işletmesi yayınları, No: 67, 2003, Ankara.
2. Prof. Dr. Mustafa BALCI, Matematik Analiz II, Bilim Kitap Kırtasiye Ltd. Şti., Ankara, 1997.
3. Prof. Dr. Mustafa BAYRAKTAR, Analiz, Korza yayıncılık a.ş., Ankara, 2017.
4. Murray R. Spiegel, İleri Matematik, Çev. Prof. Dr. H. Hilmi HACISALİHOĞLU, Schaum Yayınları, Nobel Yayın Dağıtım, 1997, Ankara.
5. Thomas Calculus 2, George B. Thomas Jr., Massachusetts Institute of Technology, Maurice D. Weir, Naval Postgraduate School, Joel Hass, University of California Davis, Frank R. Giordano, Naval Postgraduate School, Çeviren: Recep Korkmaz, Beta Yayıncılık, İstanbul, 2010.