3. BÖLÜM
YÖNLÜ TÜREV

SKALER ve VEKTÖR ALANLARI

3.1. Tanım: Üç boyutlu uzayda bir D bölgesi verilsin;

i) Eğer D bölgesi üzerinde tanımlı bir f fonksiyonu çok değişkenli (skaler) bir fonksiyon ise bu D bölgesine f fonksiyonun skaler alanı denir.

ii) Eğer D bölgesi üzerinde tanımlı bir $\vec{F}$ fonksiyonu vektörel bir fonksiyon ise bu D bölgesine $\vec{F}$ fonksiyonun vektörel alanı denir.

Örnek: Atmosferin her P noktasına T deki sıcaklığı gösteren bir T(P) sayısı karşılık getirilirse T fonksiyonu ile bir skaler alan verilmiş olur.

Skaler alanlar için diğer bazı örnekler; atmosferdeki havanın yoğunluğu, bir atmosferin basıncı ve uzaydaki yerçekimi potansiyeli gösterilebilirler.

Örnek: Atmosferin her bir P noktasına o noktadaki rüzgâr hızını gösteren bir $\vec{V}(p)$ vektör fonksiyonu karşılık getirilsin. Böylece bir vektör alanı tanımlanmış olur ki buna hız alanı denir.

Vektör alanlar için diğer bazı örnekler; elektrik alanı, magnetik alan ve yerçekimi alanı gösterilebilirler.

VEKTÖR ALANININ CEBİRİ

3.2. Tanım: Vektör fonksiyonlarda olduğu gibi $\vec{F}$ vektör alanı da

$$\vec{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\,\vec{i}+Q(x,y,z)\,\vec{j}+R(x,y,z)\,\vec{k}$$

şeklinde analitik olarak ifade edilebilir. Burada P, Q, R ler $\vec{F}$ ile aynı bölgede tanımlanmış skaler alanlar olup, $\vec{F}$ vektör alanını n-bileş enleri adını alırlar.

3.1. Teorem: D bölgesinde tanımlı iki vektör alanı

$$\vec{F}=P\,\vec{i}+Q\,\vec{j}+R\,\vec{k} \text{ ve } \vec{G}=U\,\vec{i}+V\,\vec{j}+W\,\vec{k}$$

ve aynı D bölgesinde tanımlı bir skaler alan f olsun. O takdirde aşağıdakiler yazılabilir.

i) $\vec{F} \pm \vec{G} = (P \pm U)\,\vec{i} + (Q \pm V)\,\vec{j} + (R \pm W)\,\vec{k}$

ii) $f\vec{F} = fP\,\vec{i} + fQ\,\vec{j} + fR\,\vec{k}$

iii) $\vec{F}.\vec{G} = (P\,U) + (Q\,V) + (R\,W)$

iv) $\vec{F}.\vec{G} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ P & Q & R \\ U & V & W \end{vmatrix}$

$\vec{F} \pm \vec{G}$, $f\vec{F}$ ile $\vec{F} \times \vec{G}$ çarpımları yine bir vektör alan olduğu halde $\vec{F}.\vec{G}$ skaler çarpımı bir skaler alandır.

Bu vektörler üzerinde yaptığımız işlemler vektör alanlarına da olduğu gibi uygulanacağından teoremin ispatı vektörel fonksiyonlardaki gibi yapılır.

BİR SKALER ALANIN YÖNLÜ TÜREVİ

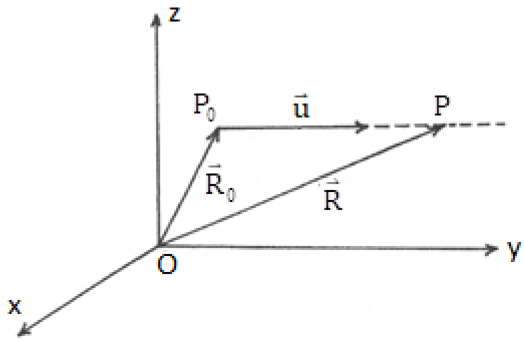
Tek değişkenli skaler fonksiyonlarda türev eğer limit sağdan yaklaşıyorsa sağdan türev, eğer soldan yaklaşıyorsa soldan türev adı verilir. Ama bu durum vektörlerde çok fazladır. Yani sadece sağdan ve soldan olmayıp vektörlerin durumlarına göre değişir.

f, D skaler bir alan üzerinde türevlenebilir olsun. f nin $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial f}{\partial z}$ kısmi türevleri sırasıyla x, y, z eksenleri yönündeki değişim oranlarını yani türevlerini göstermektedir. Bazı durumlarda f nin herhangi bir yöndeki değişim oranının bilinmesi gerekir. Bu bizi yönlü türevin tanımlanmasına sevk eder. Şimdi bu yönlü türevi tanımını verelim.

3.2. Tanım: f fonksiyonunun P_0 noktasında, $\vec{u} = u_1\,\vec{i} + u_2\,\vec{j} + u_3\,\vec{k}$ birim vektörü yönündeki yönlü türevi,

$$\frac{df}{ds}(P_0) = \lim_{s \to 0} \frac{f(x_0 + su_1, y_0 + su_2, z_0 + su_3) - f(x_0, y_0, z_0)}{s}$$

sayısıdır. Burada limiti var olması gerekir. Yönlü türev bazen yönlendirilmiş türev veya doğrultu türevi de denir. Gerçekten D deki bir $P_0(x_0, y_0, z_0) \in D$ noktasının yer vektörü R_0 olsun. $\vec{u} = u_1\,\vec{i} + u_2\,\vec{j} + u_3\,\vec{k}$ birim vektörü P_0 da bir yön tanımlamaktadır. Aşağıdaki şekilde görülmektedir.



$\vec{u}$ vektörü yönünde bulunan ve başlangıcı P_0 olan yarı doğru üzerindeki herhangi bir $P(x,y,z)$ noktası $\vec{R}=\vec{R}_0+s\,\vec{u}$ yer vektörü ile bellidir. Burada s, P_0 dan P noktasına olan uzaklıktır. Bu yer vektörü koordinatlar cinsinden;

$$x=x_0+s\,u_1\,,\ y=y_0+s\,u_2\,,\ z=z_0+s\,u_3$$

demektir.

Başlangıcı P_0 noktasında ve $\vec{u}$ birim vektörü yönünde f nin yönlü türevini şu şekilde de yazabiliriz.

$$\frac{df}{ds}(P_0)=\lim_{s\to 0}\frac{f(P)-f(P_0)}{s}$$

Bu eşitliği açık şekilde yazarsak,

$$\frac{df}{ds}(P_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(P_0)\,u_1+\frac{\partial f}{\partial y}(P_0)\,u_2+\frac{\partial f}{\partial z}(P_0)\,u_3$$
$$=f_x(P_0)\,u_1+f_y(P_0)\,u_2+f_z(P_0)\,u_3$$

olur.

Örnek: $f(x,y,z)=3x^2+2xy+yz^2$ skaler alanının $P_0(1,-1,2)$ noktasındaki $\vec{A}=3\vec{i}-2\,\vec{j}+\sqrt{12}\,\vec{k}$ vektörü yönündeki yönlü türevini bulunuz.

Çözüm: $\dfrac{\partial f}{\partial x}=f_x=6x+2y$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=f_y=2x+z^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}=f_z=2yz$$

olup, $P_0(1,-1,2)$ noktasındaki değerleri,

$$f_x(P_0)=6.1+2(-1)=4\,,\ f_y(P_0)=2.1+2^2=6\,,\ f_z(P_0)=2(-1)2=-4$$

ve

$$\|\vec{A}\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + \sqrt{12}^2} = 5$$

olup, $\vec{A}$ ile aynı yöndeki birim vektör

$$\vec{u} = \frac{\vec{A}}{\|\vec{A}\|} = \frac{3}{5}\vec{i} - \frac{2}{5}\vec{j} + \frac{\sqrt{12}}{5}\vec{k}$$

dır. Bura da $u_1 = \frac{3}{5}$, $u_2 = -\frac{2}{5}$, $u_3 = \frac{\sqrt{12}}{5}$ dür. O halde vektörü yönündeki yönlü türev

$$\frac{df}{ds}((1,-1,2)) = 4.\left(\frac{3}{5}\right) + 6.\left(-\frac{2}{5}\right) - 4\left(\frac{\sqrt{12}}{5}\right) = -\frac{4\sqrt{12}}{5}$$

olur.

Örnek: $f(x,y) = x^2y + 2e^y$ skaler alanının $P_0(1,1)$ noktasındaki ve x-ekseni ile pozitif yönde yaptığı açının ölçüsü $\alpha = 30^0$ ise bu açı yönündeki yönlü türevi nedir?

Çözüm: Buna göre $\vec{u} = \cos 30\vec{i} + \sin 30\vec{j}$ ve

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = 2xy\,, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = f_y = x^2 + 2e^y$$

dir. $P_0(1,1)$ noktasındaki değeri $f_x(P_0) = 2.1.1 = 2$, $f_y(P_0) = 1^2 + 2e^1 = 1 + 2e$ olur.

Birim vektörü $\vec{u} = \cos 30\vec{i} + \sin 30\vec{j}$ dir.

O halde $\vec{u}$ yönündeki yönlü türevi,

$$\frac{df}{ds}(1,1) = 2\cos 30 + (1+2e)\sin 30 = \sqrt{3} + \frac{1+2e}{2}$$

olur.

Örnek: $f(x,y) = xy - \ln y$ skaler alanının $P_0(3,2)$ noktası ve $\vec{R}(t) = \cos t\,\vec{i} + 2\sin t\,\vec{j}$, $t \geq 0$ eğrisi üzerindeki yönlü türevini bulunuz.

Çözüm: $\vec{R}(t) = \cos t\,\vec{i} + 2\sin t\,\vec{j}$

$$\vec{R}'(t) = -\sin t\,\vec{i} + 2\cos t\,\vec{j}$$

$$\|\vec{R}'(t)\| = \sqrt{(-\sin t)^2 + (2\cos t)^2} = \sqrt{1 + 3\cos^2 t}$$

$$\vec{U} = \frac{\vec{R}'(t)}{\|\vec{R}'(t)\|} = -\frac{\sin t}{\sqrt{1+3\cos^2 t}}\vec{i} + \frac{2\cos t}{\sqrt{1+3\cos^2 t}}\vec{j}$$

$$f_x(x,y)=y-\ln y \Rightarrow f_x(3,2)=2-\ln 2$$
$$f_y(x,y)=x-\frac{1}{y} \Rightarrow f_y(3,2)=3-\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$$
$$\frac{df}{ds}(3,2)=\frac{(2-\ln 2)\sin t}{\sqrt{1+3\cos^2 t}}+\frac{5\cos t}{\sqrt{1+3\cos^2 t}}$$

BİR SKALER ALANIN GRADİYENTİ

Diferansiyellenebilir bir f fonksiyonun doğrultu türevini hesaplamak için daha etkin bir denklemden bahsedelim. O da şudur:

$P_0(x_0, y_0, z_0)$ dan geçen ve $\vec{u}=u_1\,\vec{i}+u_2\,\vec{j}+u_3\,\vec{k}$ birim vektörü yönünde artan yay uzunluğu parametresi s ile parametrize edilen

$$x_0+su_1, y_0+su_2, z_0+su_3$$

doğrusuyla işe başlarız. Bu durumda zincir kuralını kullanarak

$$\frac{df}{ds}(P_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(P_0)\frac{dx}{ds}+\frac{\partial f}{\partial y}(P_0)\frac{dy}{ds}+\frac{\partial f}{\partial z}(P_0)\frac{dz}{ds}$$
$$=\frac{\partial f}{\partial x}(P_0)u_1+\frac{\partial f}{\partial y}(P_0)u_2+\frac{\partial f}{\partial z}(P_0)u_3$$
$$=\left[\frac{\partial f}{\partial x}(P_0)\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}(P_0)\vec{j}+\frac{\partial f}{\partial z}(P_0)\vec{k}\right][u_1\,\vec{i}+u_2\,\vec{j}+u_3\,\vec{k}]$$

bulunur.

3.4. Tanım: D bölgesinde tanımlı f skaler alanının $P(x,y,z)\in D$ noktası olsun.

$$\operatorname{grad} f(P)=\frac{\partial f}{\partial x}(P)\,\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}(P)\,\vec{j}+\frac{\partial f}{\partial z}(P)\,\vec{k}$$

olarak tanımlanan vektöre f skaler alanının P noktasındaki gradiyenti denir.

$$\vec{\nabla}=\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

gösterimine Nabla operatörü ya da Del operatörü adı verilir. Bu operatör yardımıyla,

$$\operatorname{grad} f(P)=\vec{\nabla} f(p)$$

şeklinde yazılabilir.

Gradiyent tanımını kullanarak f'nin P noktasında ve $\vec{u}$ birim vektörü yönündeki yönlü türevi kısaca,

$$\frac{df}{ds}(P)=\text{grad}\, f(P).\vec{u}=\vec{\nabla} f(p).\vec{u}$$

şeklinde ifade edilir.

Örnek: $f(x,y)=x^3\cos y+xy+z^2$ skaler alanı verilen $P_0(2,0,1)$ noktasındaki gradiyentini bulunuz.

Çözüm:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2\cos y\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial x}(2,0,1)=3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=-x^3\sin y+x\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial y}(2,0,1)=2$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}=2z\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial z}(2,0,1)=2$$

$$\text{grad}\, f(x,y)=3\,\vec{i}+2\,\vec{j}+2\,\vec{k}$$

Örnek: Bir skaler alanın gradiyenti üzerine $\vec{R}=x\,\vec{i}+y\,\vec{j}+z\,\vec{k}$ ve $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ olmak üzere $\text{grad}\, r^n=n.r^{n-2}\vec{R}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$$\text{grad}\, r^n=\vec{\nabla}r^n$$

$$=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)(x^2+y^2+z^2)^{n/2}$$

$$=\left[2x\frac{n}{2}(x^2+y^2+z^2)^{\frac{n}{2}-1},2y\frac{n}{2}(x^2+y^2+z^2)^{\frac{n}{2}-1},2z\frac{n}{2}(x^2+y^2+z^2)^{\frac{n}{2}-1}\right]$$

$$=n(x^2+y^2+z^2)^{\frac{n}{2}-1}(x,y,z)$$

Örnek: u ve v diferansiyellenebilir iki fonksiyon olsun. Bu takdirde;

$$\vec{\nabla}^2(uv)=u.\vec{\nabla}^2v+2\vec{\nabla}u.\vec{\nabla}v+v.\vec{\nabla}^2u$$

dur.

Çözüm:

$$\vec{\nabla}^2(uv)=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)(uv)$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(v.\frac{\partial u}{\partial x}+u.\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(v.\frac{\partial u}{\partial y}+u.\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(v.\frac{\partial u}{\partial z}+u.\frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

$$=\left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+v.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+u\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}+v.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+u\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)+$$
$$+\left(\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial z}+v.\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial z}+u\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)$$
$$=\left(2\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+v.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+u\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)+\left(2\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+v.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+u\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)+$$
$$+\left(2\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}+v.\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+u\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)$$
$$=2\vec{\nabla}u.\vec{\nabla}v+u.\vec{\nabla}^2 v+v.\vec{\nabla}^2 u$$
$$=u.\vec{\nabla}^2 v+2\vec{\nabla}u.\vec{\nabla}v+v.\vec{\nabla}^2 u\ //$$

Vektörel analizde önemli rol oynayan $\vec{\nabla}$ operatörünün ve dolayısıyla gradiyentin sağladığı bazı özellikleri verelim.

3.2. Teorem: D bölgesinde diferansiyellenebilir iki skaler alan f ve g olsunlar. Bu takdirde;

1. $\vec{\nabla}(f+g)=\vec{\nabla}f+\vec{\nabla}g$
2. $\vec{\nabla}(cf)=c\vec{\nabla}f$, c bir sabit
3. $\vec{\nabla}(f.g)=f\,\vec{\nabla}g+g\,\vec{\nabla}f$
4. $\vec{\nabla}\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{g\,\vec{\nabla}f-f\,\vec{\nabla}g}{g^2}$

dir.

İspat: Bu eşitliklerin her biri $\vec{\nabla}$ nın tanımı kullanılarak kolayca gösterilebilir. Biz burada 3. şıkkın ispatını göstereceğiz.

$$\vec{\nabla}(f.g)=\frac{\partial f}{\partial x}(f.g)\,\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}(f.g)\,\vec{j}+\frac{\partial f}{\partial z}(f.g)\,\vec{k}$$
$$=\left(f\frac{\partial g}{\partial x}+g\frac{\partial f}{\partial x}\right)\vec{i}+\left(f\frac{\partial g}{\partial y}+g\frac{\partial f}{\partial y}\right)\vec{j}+\left(f\frac{\partial g}{\partial z}+g\frac{\partial f}{\partial z}\right)\vec{k}$$
$$=f\left(\frac{\partial g}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial g}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial g}{\partial z}\vec{k}\right)+g\left(\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}\right)$$
$$=f\,\vec{\nabla}g+g\,\vec{\nabla}f$$

elde edilir.

Örnek: $f(x,y)=x^2+y^2$, $g(x,y)=3xy$ ise $\vec{\nabla}(f.g)$ ve $\vec{\nabla}\left(\frac{f}{g}\right)$ yi bulunz.

Çözüm: $\vec{\nabla}f=2x\,\vec{i}+2y\,\vec{j}$ ve $\vec{\nabla}g=3y\,\vec{i}+3x\,\vec{j}$

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}(f.g)&=f\,\vec{\nabla}g+g\,\vec{\nabla}f\\&=(2x)(3y\,\vec{i}+3x\,\vec{j})+3xy(2x\,\vec{i}+2y\,\vec{j})\\&=6xy(x+1)\,\vec{i}+6x(x+y^2)\,\vec{j}\end{aligned}$$

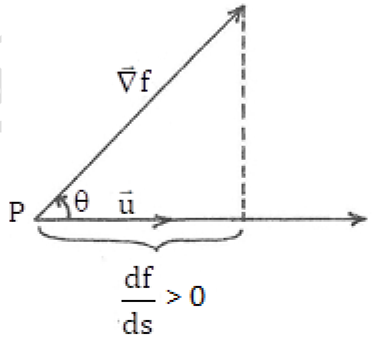
$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\left(\frac{f}{g}\right)&=\frac{g\,\vec{\nabla}f-f\,\vec{\nabla}g}{g^2}\\&=\frac{(2x)(3y\,\vec{i}+3x\,\vec{j})-3xy(2x\,\vec{i}+2y\,\vec{j})}{(3xy)^2}\\&=\frac{6x(x-y)\,\vec{i}+6x(x-y^2)\,\vec{j}}{9x^2y^2}\end{aligned}$$

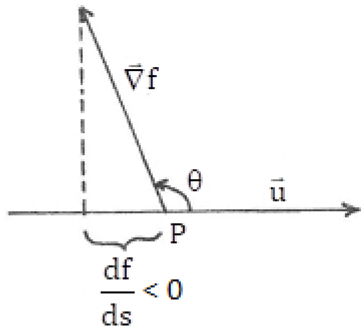
3.3. Teorem: f'nin yönlü türevinin maksimum değeri $\frac{d\vec{F}}{ds}(P_0)=\left\|\vec{\nabla}f(P_0)\right\|$ dir.

İspat: Kabul edelim ki $\vec{\nabla}f(p)\neq 0$ olsun ve $\vec{\nabla}f(p)$ ile $\vec{u}$ vektörü arasındaki açı θ ile gösterilsin. Skaler çarpımın geometrik özelliğinden,

$$\frac{df}{ds}(P)=\vec{\nabla}f(p).\vec{U}=\left\|\vec{\nabla}f(p)\right\|\underbrace{\left\|\vec{U}\right\|}_{1}\cos\theta=\left\|\vec{\nabla}f(p)\right\|\cos\theta$$

elde ederiz. Bu türev $0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$ ise pozitif, $\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\pi$ ise negatiftir.





$$\frac{df}{ds}(P)=\left\|\vec{\nabla}f(p)\right\|\cos\theta$$

eşitliğinde $\cos\theta = 1 \Leftrightarrow \theta = 0$ iken yönlü türev maksimum değerini alır. Bu değer $\|\vec{\nabla} f\|$ olur. Bu durumda $\vec{\nabla} f$ nin $\vec{u}$ ile aynı yönde olması halinde doğrudur.

Örnek: $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$ skaler alanının $P_0(2,1,1)$ noktasında f'nin yönlü türevinin maksimum olduğu değeri bulunuz.

Çözüm: f'nin yönlü türevinin maksimum değeri $\dfrac{d\vec{F}}{ds}(P_0) = \|\vec{\nabla} f(P_0)\|$ dir.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(P_0) = 2x \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(2,1,1) = 4$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(P_0) = 4y \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(2,1,1) = 4$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(P_0) = 6z \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(2,1,1) = 6$$

$$\vec{\nabla} f(2,1,1) = 4\,\vec{i} + 4\,\vec{j} + 6\,\vec{k}$$

$$\|\vec{\nabla} f(2,1,1)\| = \sqrt{4^2 + 4^2 + 6^2} = 2\sqrt{17}$$

Örnek: $f(x,y,z) = x^2 y + y^2 z + xy$ olsun. $P_0(1,2,-1)$ noktasında f'nin yönlü türevinin maksimum olduğu yönü belirleyiniz. Maksimum ve minimum değerini ve yönü hakkında bilgi veriniz.

Çözüm: f'nin gradiyenti,

$$\operatorname{grad} f(x,y,z) = (2xy + y)\,\vec{i} + (x^2 + 2yz + x)\,\vec{j} + y^2\,\vec{k}$$

dir. O halde $P_0(1,2,-1)$ noktasında $\dfrac{df}{ds}$ nin maksimum değeri gradiyenti vektörü yönünde,

$$\operatorname{grad} f(1,2,-1) = (2.1.2 + 2)\,\vec{i} + (1^2 + 2.2.(-1))\,\vec{j} + (-1)^2\,\vec{k} = 6\,\vec{i} - 3\,\vec{j} + \vec{k}$$

yönündedir. Maksimum değeri ise,

$$\left.\frac{df}{ds}(1,2,-1)\right|_{max} = \operatorname{grad} f(1,2,-1) = \sqrt{6^2 + (-3)^2 + 1^2} = \sqrt{46}$$

dir. Minimum değer ise; gradiyent vektörün zıt yönünde yani $-4\,\vec{i} - 10\,\vec{j} - 1\,\vec{k}$ yönündedir ve değeri $-\sqrt{46}$ dir.

Örnek: Bir oda içindeki sıcaklık dağılımı $f(x,y,z) = x^2\,\vec{i} + y^2\,\vec{j} + z^2\,\vec{k}$ ile veriliyor. Sıcaklığın yükselme oranının hangi yönde maksimum ve minimum değerlerini ve yönleri konusunda yorum yapınız.

Çözüm: $\vec{R}$,(x, y, z) noktasındaki yer vektörü olma üzere;

$$\text{grad } f(x,y,z) = 2(x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}) = 2\,\vec{R}$$

dir.

Burada sıcaklık artış oranı $\vec{R}$ yer vektörü boyunca orijinden uzaklaştıkça artar ve maksimum değerini $\vec{R}$ nin uç noktasında alır. Bu sıcaklı k-artış oranının maksimum değeri $\|\text{grad } f\| = 2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ye eşittir.

Minimum sıcaklık yönü orijine giden yöndedir. Yanı $\vec{R}$ nın zıt yönündedir.

3.1. Aksiyom: Bir P_0 noktasından belirli bir $\vec{u}$ yönünde küçük bir ds mesafesi kadar ilerlediğimizde, f'deki değişimi öngörmek için

$$df = (\nabla f|_{p_0} . \vec{u}) . ds$$

ile bulunur. ds artım miktarı, $(\nabla f|_{p_0} . \vec{u})$ yönlü türevdir.

Örnek: P(x, y, z) noktası $P_0(0, 1, 0)$ noktasından $P_1(2, 2, -2)$ noktasına doğru 0,1 birim ilerlerse,

$$f(x,y,z) = y \sin x + 2yz$$

fonksiyonunun değerinin nasıl değişeceğini tahmin edelim.

Çözüm: f'nin P_0'da $\overrightarrow{P_0P_1} = 2\,\vec{i} + \vec{j} - 2\,\vec{k}$ yönündeki doğrultu türevini buluruz. Bu vektörün yönü

$$\vec{u} = \frac{\overrightarrow{P_0P_1}}{\left\|\overrightarrow{P_0P_1}\right\|} = \frac{2}{3}\vec{i} + \frac{1}{3}\vec{j} - \frac{2}{3}\vec{k}$$

dır. f'nin P_0'daki gradiyenti de

$$\text{grad } f(0,1,0) = (y \cos x)\,\vec{i} + (\sin x + 2z)\,\vec{j} + (2y)\,\vec{k}\Big|_{(0,1,0)} = \vec{i} + 2\,\vec{k}$$

dır. Bu sbeple,

$$\text{grad } f(0,1,0).\vec{u} = (\,\vec{i} + 2\,\vec{k})\left(\frac{2}{3}\vec{i} + \frac{1}{3}\vec{j} - \frac{2}{3}\vec{k}\right) = \frac{2}{3} - \frac{4}{3} = -\frac{2}{3}$$

olur. P_0'dan $\vec{u}$ yönünde ds = 0,1 birim ilerlemeden dolayı f'de oluşacak değişim yaklaşık olarak

$$df = (\text{grad } f(0,1,0).\vec{u})(ds) = \left(-\frac{2}{3}\right).0{,}1 \approx -0{,}067\,\text{br}$$

olur.

GRADİYENTİN YÜZEY NORMAL ÖZELLİĞİ

3.5. Tanım: D bölgesinde diferansiyellenebilir bir $f(x,y,z)$ skaler alanını göz önüne alalım. c sabit olmak üzere $f(x,y,z)=c$ denklemi S yüzeyini gösterir. Bu tip yüzeylere seviye yüzeyleri denir.

S seviye yüzeyi üzerindeki bir P_0 noktasında f'nin gradiyent vektörü yüzeye diktir. Buna göre yüzeyin P_0 noktasındaki birim normal vektörü,

$$\vec{n}=\frac{\vec{\nabla}f(P_0)}{\left\|\vec{\nabla}f(P_0)\right\|}$$

olur.

3.4. Teorem: f'nin P_0 noktasında

i) Teğet düzlem denklemi;

$$\frac{\partial f}{\partial x}(P_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(P_0)(y-y_0)+\frac{\partial f}{\partial z}(P_0)(z-z_0)=0$$

ii) Normal doğru;

$$x=x_0+\frac{\partial f}{\partial x}(P_0)t\,,\quad y=y_0+\frac{\partial f}{\partial y}(P_0)t\,,\quad z=z_0+z\frac{\partial f}{\partial x}(P_0)t$$

şeklindedir.

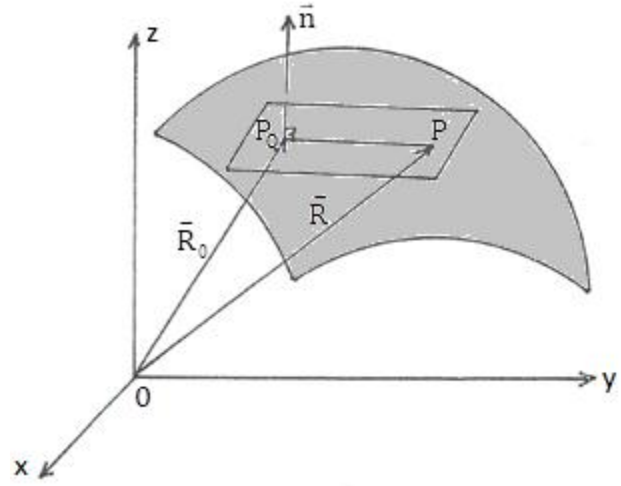
İspat: i) P_0 noktasında yüzey normali yüzeye dik olduğundan yüzeyin teğet düzlemine de diktir. O halde S yüzeyinin P_0 noktasındaki teğet düzleminin denklemi

$$(\vec{R}-\vec{R}_0).\vec{\nabla}f(P_0)=0$$

vektörel denklemi ile veya

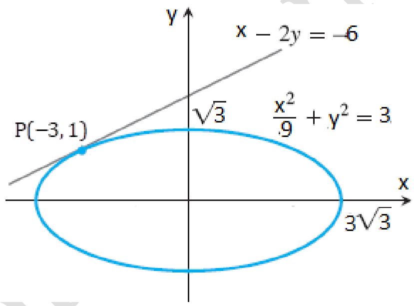
$$\frac{\partial f}{\partial x}(P_0)(x-x_0)\,\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}(P_0)(y-y_0)\,\vec{j}+\frac{\partial f}{\partial z}(P_0)(z-z_0)\,\vec{k}=0$$

kartezyen denklemi ile verilebilir. (Burada $\vec{R}_0$, $P_0(x_0,y_0,z_0)$ noktasının yer vektörü, $\vec{R}$ ise teğet düzlem üzerindeki değişen bir $P(x,y,z)$ noktasının yer vektörünü göstermektedir.)



ii) Bu özelliği göstermek okuyucuya bırakılmıştır.

Örnek: $\frac{x^2}{9}+y^2=3$ elipsinin $P(-3,1)$ noktasındaki teğetinin denklemini bulunuz.



Çözüm: Elips, $f(x,y)=\frac{x^2}{9}+y^2$ fonksiyonunun bir seviye eğrisidir. f'nin $P(-3,1)$ 'deki gradiyenti

$$\text{grad}\, f(-3,1)=\frac{2x}{9}\vec{i}+2y\,\vec{j}\Big|_{(-3,1)}=-\frac{2}{3}\vec{i}+2\,\vec{j}$$

olarak bulunur. Teğet ise,

$$-\frac{2}{3}(x+3)+2(y-1)=0$$
$$x-3y=-6$$

doğrusudur.

3.6. Tanım: Bir bölgeyi içine alan yüzeye kapalı yüzey denir. Örneğin küre yüzeyi bir kapalı yüzeydir. Böyle bir yüzey üzerinde yüzeye dıştan normal birim vektöre, dış birim normal vektör adı verilir. Yüzey üzerinde tanımlı bir p skaler alanının dış birim normal vektörü yönündeki türevine dış normal türev denir ve $\frac{d\rho}{dn}$ olarak yazılır.

BİR VEKTÖR ALANIN YÖNLÜ TÜREVİ

3.7. Tanım: Bir D bölgesinde P, Q, R ler diferansiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere, D de tanımlı bir $\vec{F}=P\vec{i}+Q\,\vec{j}+R\,\vec{k}$ vektör alanını göz önüne alalım. $P_0(x_0,y_0,z_0)\in D$ noktasında bir birim vektör $\vec{u}=u_1\,\vec{i}+u_2\,\vec{j}+u_3\,\vec{k}$ olsun. $\vec{F}$ vektör alanının P_0 noktasında ve $\vec{u}$ vektörü yönündeki yönlü türevi,

$$\frac{d\vec{F}}{ds}(P_0)=\lim_{s\to 0}\frac{\vec{F}(x_0+s\,u_1,y_0+s\,u_2,z_0+s\,u_3)-\vec{F}(x_0,y_0,z_0)}{s}$$

limit değeri olarak tanımlanır. Bu türev yine bir vektör alandır.

Yönlü türevini $\vec{F}$ nin bileşenleri cinsinden yazarsak,

$$\frac{d\vec{F}}{ds}(P_0)=\frac{dP}{ds}(P_0)\,\vec{i}+\frac{dQ}{ds}(P_0)\,\vec{j}+\frac{dR}{ds}(P_0)\,\vec{k}$$

olur.

Not: Bir vektör alanını $\vec{n}$ yönlü türevinin bile şenleri o alanın bileşenlerinin yönlü türevlerine eşittir.

Vektör alanın yönlü türevinin ifadesi aşağıdaki gibi yazılabilir

$$\frac{d\vec{F}}{ds}(P_0)=(\vec{U}.\vec{\nabla}P)\,\vec{i}+(\vec{U}.\vec{\nabla}Q)\,\vec{j}+(\vec{U}.\vec{\nabla}R)\,\vec{k}$$

Diğer taraftan,

$$\vec{U}.\vec{\nabla}=u_1\frac{\partial}{\partial x}+u_2\frac{\partial}{\partial y}+u_3\frac{\partial}{\partial z}$$

olduğundan,

$$\frac{d\vec{F}}{ds}(P_0)=(\vec{U}.\vec{\nabla})(P\,\vec{i}+Q\,\vec{j}+R\,\vec{k})=(\vec{U}.\vec{\nabla})\,\vec{F}$$

şekilde ifade edilir.

Örnek: $\vec{F}(x,y,z)=xy^2\,\vec{i}+x^2y\,\vec{j}+z^2\,\vec{k}$ vektör alanının $P_0(2,1,-1)$ noktasında ve $\vec{A}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$ vektörü yönündeki yönlü türevini bulunuz.

Çözüm: $\vec{A}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$ ise $\vec{A}=\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}=\sqrt{6}$

$$\vec{u} = \frac{\vec{A}}{\|\vec{A}\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{i} + \frac{2}{\sqrt{6}}\vec{j} - \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{k}$$

$$\frac{d\vec{F}}{ds} = \left[\frac{1}{\sqrt{6}}.\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{\sqrt{6}}.\frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{\sqrt{6}}.\frac{\partial}{\partial z}\right]\vec{F}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}}(y^2\,\vec{i} + 2xy\,\vec{j}) + \frac{2}{\sqrt{6}}(2xy\,\vec{i} + x^2\,\vec{j}) - \frac{1}{\sqrt{6}}(2z\,\vec{k})$$

$$\frac{d\vec{F}}{ds}(2,1,-1) = \frac{4}{\sqrt{6}}(4\,\vec{i} + 4\,\vec{j} + \vec{k})$$

BİR VEKTÖR ALANIN DİVERGENSİ

3.8. Tanım: D bölgesinde tanımlanmış bir vektör alanı $\vec{F} = P\vec{i} + Q\,\vec{j} + R\,\vec{k}$ olsun.

$$\operatorname{div}\vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

ifadesine $\vec{F}$ vektör alanının divergensi denir.

Bir vektör alanın divergensi bir skaler alandır. Nabla ($\vec{\nabla}$) operatörünü kullanarak F vektör alanının divergensi,

$$\operatorname{div}\vec{F} = \vec{\nabla}.\vec{F}$$

dir.

Not: Nabla ($\vec{\nabla}$) operatörü bir vektör olarak göz önüne alınmasına rağmen bir vektörün bütün özelliklerine sahip değildir. Örnek olarak $\operatorname{div}\vec{F} = \vec{\nabla}.\vec{F}$ bir skaler olduğu halde

$$\vec{F}.\vec{\nabla} = (P,Q,R)\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) = P\frac{\partial}{\partial x} + Q\frac{\partial}{\partial y} + R\frac{\partial}{\partial z}$$

ifadesi bir diferansiyel operatör gösterir. Bu da $\operatorname{div}\vec{F}$ ile aynı değildir. Biz biliyoruz ki skaler çarpım değişme özelliğine sahiptir.

Örnek: $\vec{F}(x,y,z) = y\,\vec{i} + z\,\vec{j} + x\,\vec{k}$ ve $\vec{G}(x,y,z) = x^2 z\,\vec{i} + y^z x\,\vec{j} + z^2 y\,\vec{k}$ olduğuna göre $\operatorname{div}(\vec{F}\times\vec{G})$ yi bulunuz.

Çözüm:

$$\vec{F}\times\vec{G}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ y & z & x\\ x^2z & y^2x & z^2y\end{vmatrix}$$

$$=(z^2y-y^2x^2)\,\vec{i}-(z^2y^2-x^3z)\,\vec{j}+(y^3x-x^2z^2)\,\vec{k}$$

$$\operatorname{div}(\vec{F}\times\vec{G})=-2xy^2-2yz^2-2x^2z$$

3.5. Teorem: D bölgesinde diferansiyellenebilir iki vektör alan $\vec{F}$ ve $\vec{G}$ olsunlar. Bu takdirde;

a) $\operatorname{div}(\vec{F}+\vec{G})=\operatorname{div}\vec{F}+\operatorname{div}\vec{G}$, ($\vec{\nabla}.(\vec{F}+\vec{G})=\vec{\nabla}.\vec{F}+\vec{\nabla}.\vec{G}$)

b) $\operatorname{div}(f.\vec{F})=f.\operatorname{div}\vec{F}$, ($\vec{\nabla}.(f\,\vec{F})=f\,\vec{\nabla}.\vec{F}$)

dir.

Bu teoremin, divergens tanımı ve türevin bilinen kuralları yardımıyla ispatı gösterilebilir.

Örnek: $\vec{F}(x,y,z)=x^2y^2\,\vec{i}+(x^2+y^2)\,\vec{j}+(y+z)\,\vec{k}$ vektör alanının divergensi nedir?

Çözüm:

$$\operatorname{div}\vec{F}=\frac{\partial}{\partial x}(x^2y^2)+\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2)+\frac{\partial}{\partial z}(y+z)=2xy^2+2y+1$$

Örnek: $\vec{F}(x,y)=\left[-\dfrac{y}{x^2+y^2}\right]\vec{i}+\left[\dfrac{x}{x^2+y^2}\right]j$ vektör alanının divergensi nedir?

Çözüm: $\operatorname{div}\vec{F}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left[-\dfrac{y}{x^2+y^2}\right]+\dfrac{\partial}{\partial y}\left[\dfrac{x}{x^2+y^2}\right]=0$

Örnek: $\vec{R}=x\,\vec{i}+y\,\vec{j}+z\,\vec{k}$ ve $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ olmak üzere r'nin türevlenebilir herhangi bir fonksiyonu f olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

a) $\operatorname{div}(\operatorname{grad} r^n)=n(n+1)r^{n-2}$, $n\in\mathbb{N}$

b) $\vec{R}\times\vec{\nabla}f(r)=\vec{0}$

Çözüm:

a) $\operatorname{div}(\operatorname{grad} r^n) =$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(n(x^2+y^2+z^2)^{\frac{n-2}{2}}\, x \right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(n(x^2+y^2+z^2)^{\frac{n-2}{2}}\, y \right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(n(x^2+y^2+z^2)^{\frac{n-2}{2}}\, z \right)$$

$$= n(x^2+y^2+z^2)^{\frac{n-2}{2}} + nx.\frac{n-2}{2}.2x(x^2+y^2+z^2)^{\frac{n-4}{2}} + n(x^2+y^2+z^2)^{\frac{n-2}{2}} +$$

$$+ ny.\frac{n-2}{2}.2y(x^2+y^2+z^2)^{\frac{n-4}{2}} + n(x^2+y^2+z^2)^{\frac{n-2}{2}} + nz.\frac{n-2}{2}.2z(x^2+y^2+z^2)^{\frac{n-4}{2}}$$

$$= 3n(x^2+y^2+z^2)^{\frac{n-2}{2}} + n(n-2)(x^2+y^2+z^2)^{\frac{n-2}{2}}$$

$$= [3n + n(n-2)](x^2+y^2+z^2)^{\frac{n-2}{2}}$$

$$= n(n+1)r^{n-2}$$

b) $\vec{\nabla} f(r) = \frac{\partial}{\partial x} f(r)\ \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} f(r)\, \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} f(r)\, \vec{k}$

$$= f'(r).r_x + \vec{i}\ f'(r).r_y\ \vec{j} + f'(r).r_z\ \vec{k}$$

$$= f'(r)\,[r_x\ \vec{i} + r_y\ \vec{j} + r_z\ \vec{k}]$$

$$= f'(r)\left[\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\ \vec{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\ \vec{j} + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\ \vec{k} \right]$$

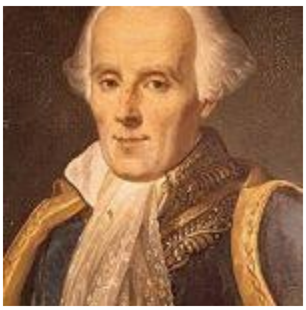
$$= f'(r)\left[\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,(x\ \vec{i} + y\ \vec{j} + z\,\vec{k}) \right]$$

$$= f'(r).r^{-1}\vec{R}$$

dir. O halde

$$\vec{R} \times \vec{\nabla} f(r) = \vec{R} \times (f'(r).r^{-1}\vec{R}) = f'(r).r^{-1}\vec{R} \times \vec{R}) = \vec{0}$$

olur.



Pierre-Simon Laplace
23 Mart 1749, Beaumont-en-Auge, Fransa - 05 Mart 1827, Paris, Fransa

3.9. Tanım: Bir D bölgesinde tanımlanmış skaler alan f olsun. f nin gradiyenti,

$$\operatorname{grad} f = \vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

bir vektör alanıdır. Bu vektör alanının divergensi

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \vec{\nabla}.\vec{\nabla} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) f = \vec{\nabla}^2 f$$

Bu ifade f skaler alanının laplasiyeni olarak bilinir.

$$\vec{\nabla}.\vec{\nabla} = \vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

operatörüne ise Laplace operatörü adı verilir.

Matematiksel fiziğin, kısmi türevli denklemlerinden önemli biri $\vec{\nabla}^2 f = 0$ Laplace denklemidir. Bu denklemin çözümü olabilen fonksiyonlar harmonik fonksiyonlar adı ile anılmaktadır.

3.10. Tanım: D de tanımlı bir vektör alanı $\vec{F}$ olsun. Eğer D de $\vec{\nabla}\phi = \vec{F}$ olacak şekilde bir ϕ skaler alanı varsa, $\vec{F}$ vektör alanına korunumlu alan denir. ϕ skaler alanına ise $\vec{F}$ nin potansiyel fonksiyonu adı verilir.

3.6. Teorem: Korunumlu bir alanın potansiyel fonksiyonu keyfi bir sabit fonksiyon farkıyla tekdir. Yani ϕ_1 ve ϕ_2 her ikisi de $\vec{F}$ nin potansiyel fonksiyonu iseler $\phi_1 - \phi_2$ sabittir.

İspat: $\phi = \phi_1 - \phi_2$ ise $\vec{\nabla}\phi = \vec{\nabla}\phi_1 - \vec{\nabla}\phi_2 = \vec{F} - \vec{F} = 0$
olur. Bu sonuçta ϕ sabit olduğunu gösterir. [Pratikte bu sabit yerine sıfır alınır.]

Örnek: Bir $\vec{F}$ korunumlu vektör alanı

$$\vec{F}(x,y,z) = (yz + e^x \cos y)\,\vec{i} + (xz - e^x \sin y)\,\vec{j} + (xy + 2x)\,\vec{k}$$

ile veriliyor. Bu alanın potansiyel fonksiyonunu bulunuz?

Çözüm: İstenen ϕ potansiyel fonksiyonu $\vec{\nabla}\phi = \vec{F}$ denklemini sağlar. $\vec{F} = (\phi_x, \phi_y, \phi_z)$ olduğundan

$$\phi_x = yz + e^x \cos y\,,\ \phi_y = xz - e^x \sin y\,,\ \phi_z = xy + 2z$$

denklemleri sağlanması gerekir. Bu denklemlerin birincisini x'e göre integre edersek,

$$\phi = xyz + e^{x}\cos y + f(y,z)$$

dir. Burada f keyfi bir integrasyon sabitidir. ϕ fonksiyonunun y'ye göre türevini alır, $\vec{F}$ nin ikinci bileşeni ile eşitlersek,

$$\phi_y = xz - e^{x}\sin y + f_y(y,z) = xz - e^{x}\sin y$$

olur. Buradan $f_y(y,z) = 0$ dir. Bu da f, y den bağımsızdır. O halde ϕ fonksiyonu

$$\phi = xyz + e^{x}\cos y + f(z)$$

biçimindedir. Bu ifadeyi z'e göre türevini alır $\vec{F}$ nin üçüncü bileşeni ile eşitlersek,

$$\phi_z = xy + f'(z) = xy + 2z$$

olur. Buradan

$$f'(z) = 2z$$

$$f(z) = z^{2} + c\,,\ (\text{c keyfi bir sabit})$$

elde edilir. Böylece istenilen ϕ potansiyel fonksiyonu,

$$\phi = xyz + e^{x}\cos y + z^{2} + c$$

olarak bulunur.

Örnek: Bir $\vec{F}$ korunumlu vektör alanı

$$\vec{F}(x,y,z) = e^{x}\cos z\,\vec{i} + 2y\,\vec{j} -^{x}\sin z\,\vec{k}$$

ile veriliyor. Bu alanın potansiyel fonksiyonunu bulunuz?

Çözüm: İstenen ϕ potansiyel fonksiyonu $\vec{\nabla}\phi = \vec{F}$ denklemini sağlar. $\vec{F} = (\phi_x, \phi_y, \phi_z)$ olduğundan

$$\phi_x = e^{x}\cos z\,,\ \phi_y = 2y\,,\ \phi_z = -e^{x}\sin z$$

denklemleri sağlanması gerekir. Bu denklemlerin birincisini x'e göre integre edersek,

$$\phi = e^{x}\cos z + f(y,z)$$

dir. Burada f keyfi bir integrasyon sabitidir. ϕ fonksiyonunun y'ye göre türevini alır, $\vec{F}$ nin ikinci bileşeni ile eşitlersek,

$$\phi_y = f_y(y,z) = 2y$$

olur. Buradan $f_y(y,z) = 2y$ dir. O halde ϕ fonksiyonu

$$\phi = e^{x}\cos z + y^{2} + f(z)$$

biçimindedir. Bu ifadeyi z'e göre türevini alır $\vec{F}$ nin üçüncü bileşeni ile eşitlersek,

$$\phi_z = -e^{x}\sin z + f'(z) = -e^{x}\sin z$$

olur. Buradan

$$f'(z) = 0$$

$$f(z) = c\,,\ (\text{c keyfi bir sabit})$$

elde edilir. Böylece istenilen ϕ potansiyel fonksiyonu,

$$\phi = e^x \cos z + y^2 + c$$

olarak bulunur.

Örnek: Bir $\vec{F}$ korunumlu vektör alanı

$$\vec{F}(x,y) = \frac{-y\,\vec{i} + x\,\vec{j}}{x^2 + y^2}$$

ile veriliyor. Bu alanın potansiyel fonksiyonunu bulunuz?

Çözüm: İstenen ϕ potansiyel fonksiyonu $\vec{\nabla}\phi = \vec{F}$ denklemini sağlar. $\vec{F} = (\phi_x, \phi_y, \phi_z)$ olduğundan

$$\phi_x = \frac{-y}{x^2 + y^2}, \quad \phi_y = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

denklemleri sağlanması gerekir. Bu denklemlerin birincisini x'e göre integre edersek,

$$\phi = -\int \frac{dx}{x^2 + y^2} = -\frac{1}{y}\int \frac{dx}{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1} = -\arctan\left(\frac{x}{y}\right) + f(y)$$

dir. Burada f keyfi bir integrasyon sabitidir. ϕ fonksiyonunun y'ye göre türevini alır, $\vec{F}$ nin ikinci bileşeni ile eşitlersek,

$$\phi_y = -\frac{-\frac{x}{y^2}}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} + f_y(y) = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

olur. Buradan $f_y(y) = 0$ dir. Böylece ϕ fonksiyonu

$$\phi = -\arctan\left(\frac{x}{y}\right) + c$$

olur.

BİR VEKTOR ALANININ ROTASYONELİ (CURL)

3.11. Tanım: Bir $\vec{F}$ vektör alanı,

$$\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\,\vec{i} + Q(x,y,z)\,\vec{j} + R(x,y,z)\,\vec{k}$$

verilsin.

$$\text{rot}\,\vec{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}$$

olarak tanımlanan yeni bir vektör alanına $\vec{F}$ nin Rotasyoneli denir. Nabla ($\vec{\nabla}$) operatörünü kullanarak rotasyon ifadesini

$$\operatorname{rot}\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}$$

biçiminde yazmak daha kullanışlıdır. Bu ifadeyi de

$$\operatorname{rot}\vec{F}=\vec{\nabla}\times\vec{F}$$

şeklinde yazabiliriz.

Örnek: $\vec{F}=xy^2\,\vec{i}+x\sin(yz)\,\vec{j}+e^y z^2\,\vec{k}$ vektör alanı veriliyor. $\operatorname{rot}\vec{F}$ yı bulunuz.

Çözüm: Rotasyonun tanımından

$$\operatorname{rot}\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ xy^2 & x\sin(yz) & e^y z^2\end{vmatrix}$$

$$=[z^2e^y-xy\cos(yz)]\,\vec{i}+[-2xy+\sin(yz)]\,\vec{k}$$

bulunur.

Örnek: $\vec{F}=(y^2z^2)\,\vec{i}+(x^2z^2)\,\vec{j}+(x^2y^2)\,\vec{k}$ vektör alanı veriliyor. $\operatorname{rot}\vec{F}$ yı bulunuz.

Çözüm: Rotasyonun tanımından

$$\operatorname{rot}\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ y^2z^2 & x^2z^2 & x^2y^2\end{vmatrix}$$

$$=2x^2(y-z)\,\vec{i}+2y^2(z-x)\,\vec{j}+2z^2(x-y)\,\vec{k}$$

bulunur.

Örnek: $\vec{F}(x,y,z)=y\,\vec{i}+z\,\vec{j}+x\,\vec{k}$ ve $\vec{G}(x,y,z)=x^2z\,\vec{i}+y^zx\,\vec{j}+z^2y\,\vec{k}$ olduğuna göre aşağıdaki ifadeleri hesaplayınız.

a) $\operatorname{rot}(\vec{F}\times\vec{G})$ b) $(\operatorname{rot}\vec{F})\times(\operatorname{rot}\vec{G})$

Çözüm:

$$\text{a) } \operatorname{rot}(\vec{F}\times\vec{G})=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ z^3y-y^2x^2 & -z^2y^2+x^3z & y^3x-x^2z^2\end{vmatrix}$$

$$=(3y^2x-x^3+2yz)\,\vec{i}-(2y+2x-2yz)\,\vec{j}+(z^2-z^2)\,\vec{k}$$

$$\text{b) } \operatorname{rot}\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ z & y & x\end{vmatrix}=-\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}$$

$$\operatorname{rot}\vec{G}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ x^2z & y^2x & z^2y\end{vmatrix}=z^2\,\vec{i}+x^2\vec{j}+y^2\,\vec{k}$$

$$(\operatorname{rot}\vec{F})\times(\operatorname{rot}\vec{G})=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & -1 & -1\\ z^2 & x^2 & y^2\end{vmatrix}$$

$$=(x^2-y^2)\,\vec{i}-(z^2-y^2)\,\vec{j}+(z^2-x^2)\,\vec{k}$$

3.6. Teorem: D bölgesinde diferansiyellenebilir iki vektör alan $\vec{F}$ ve $\vec{G}$ olsunlar. Bu takdirde;

a) $\operatorname{rot}(\vec{F}+\vec{G})=\operatorname{rot}\vec{F}+\operatorname{rot}\vec{G}$, $(\vec{\nabla}\times(\vec{F}+\vec{G})=\vec{\nabla}\times\vec{F}+\vec{\nabla}\times\vec{G})$

b) $\operatorname{rot}(f.\vec{F})=f.\operatorname{rot}\vec{F}$, $(\vec{\nabla}\times(f\,\vec{F})=(f\,\vec{\nabla})\times\vec{F}+\vec{\nabla}f+\vec{F})$

dır.

Bu teoremin, rotasyon tanımı ve türevin bilinen kuralları yardımıyla ispatı gösterilebilir.

Örnek: Aşağıdaki ifadelerin doğruluğunu gösteriniz.

a) $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f)=\nabla^2 f$

b) $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f)=\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}f=0$

c) $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{F})=\vec{\nabla}.(\vec{\nabla}\times\vec{F})=0$

d) $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{F})=\operatorname{grad}(\operatorname{div}\vec{F})-\nabla^2\vec{F}$

Çözüm: $\text{grad}\, f = \vec{\nabla} f$, $\text{div}\, \vec{F} = \vec{\nabla}.\vec{F}$, $\text{rot}\, \vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F}$

a) $\text{div}(\text{grad}\, f) = \vec{\nabla}.(\vec{\nabla} f) = \nabla^2 f$

b) $\text{rot}(\text{grad}\, f) = \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} f = 0$

c) $\text{div}(\text{rot}\, \vec{F}) = \vec{\nabla}.(\vec{\nabla} \times \vec{F}) = 0$

d) $\text{rot}(\text{rot}\, \vec{F}) = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = \vec{\nabla}.(\vec{\nabla}.\vec{F}) - (\vec{\nabla}.\vec{\nabla}).\vec{F} = \text{grad}(\text{div}\, \vec{F}) - \nabla^2 \vec{F}$

KAYNAKÇA

- Doç. Dr. M. Kemal Sağel, Vektörel Analiz, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi döner sermaye işletmesi yayınları, No: 67, 2003, Ankara.
- Prof. Dr. Mustafa BALCI, Matematik Analiz II, Bilim Kitap Kırtasiye Ltd. Şti., Ankara, 1997.
- Prof. Dr. Mustafa BAYRAKTAR, Analiz, Korza yayıncılık a.ş., Ankara, 2017.
- Murray R. Spiegel, İleri Matematik, Çev. Prof. Dr. H. Hilmi HACISALİHOĞLU, Schaum Yayınları, Nobel Yayın Dağıtım, 1997, Ankara.
- Thomas Calculus 2, George B. Thomas Jr., Massachusetts Institute of Technology, Maurice D. Weir, Naval Postgraduate School, Joel Hass, University of California Davis, Frank R. Giordano, Naval Postgraduate School, Çeviren: Recep Korkmaz, Beta Yayıncılık, İstanbul, 2010.