4. BÖLÜM
EĞRİSEL İNTEGRAL

GİRİŞ

Bu bölümde skaler ve vektör alanlar üzerinde eğrisel integralleri inceleyeceğiz.

$$\int_a^b f(x)\,dx \text{ ve } \iint_D g(x,y)\,dx\,dy$$

integralleri temel matematikten bildiğimiz tek ve çift katlı integrallerin yapılarının doğal bir genelleştirilmesidir. (Bu integraller xy düzleminin bir bölgesinde ve x'in bir aralığı üzerinde f ve g fonksiyonları tanımlanır).

Eğrisel integralde integrand fonksiyonu bir uzay eğrisi üzerinde, yüzey integrali de bir yüzey üzerinde tanımlanmış olacaktır.

SKALER ALANLARIN EĞRİSEL İNTEGRALLERİ

Uzayın D bölgesinde tanımlanmış bir düzgün eğri C olsun.

$$\vec{R}(t)=x(t)\,\vec{i}+y(t)\,\vec{j}+z(t)\,\vec{k}\,,\ a\le t\le b$$

olmak üzere vektörel fonksiyon konusunda C eğrisinin yay uzunluğu

$$s(t)=\int_a^b \left\|\vec{R}'(x)\right\| dt$$

olduğu gösterilmişti. Bu durum $ds=\left\|\vec{R}'(t)\right\| dt$ olacaktır.

f skaler alanı D bölgesinde sürekli olduğunda f, C eğrisi üzerinde tanımlı ve sürekli olup, her $a\le t\le b$ için $f[x(t),y(t),z(t)]$ değerlerini alır.

f'nin eğrisel integrali C eğrisi boyunca $\int_c f\,ds$ şeklinde gösterilir ve

$$\int_c f(x,y,z)\,ds=\int_a^b f[x(t),y(t),z(t)].\left\|\vec{R}'(t)\right\| dt$$

belirli integrali ile hesaplanır.

Eğer f =1 ise bu integral C eğrisinin yay uzunluğunu verir.

Örnek: C eğrisi $\vec{R}(t)=\cos t\,\vec{i}+\sin t\,\vec{j}+3t\,\vec{k}$, $0\le t\le 2\pi$ helis olduğuna göre

$$\int_c (x+y+z)\,ds$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm: $\vec{R}(t)=\cos t\,\vec{i}+\sin t\,\vec{j}+\sqrt{3}t\,\vec{k}$

$$\vec{R}'(t)=-\sin t\,\vec{i}+\cos nt\,\vec{j}+\sqrt{3}\,\vec{k}$$

$$\left\|\vec{R}'(t)\right\|=\sqrt{(-\sin t)^2+\cos^2 t+\sqrt{3}^2}=2$$

dir. Ayrıca $s(t)=\left\|\vec{R}'(x)\right\|dt=2\,dt$ olacağından

$$\int_c (x+y+z)\,ds=2\int_0^{2\pi}\cos t+\sin t+t\,dt$$

$$=2\left[\sin t-\cos t+\frac{t^2}{2}\Big|_0^{2\pi}\right]$$

$$=\pi^2$$

dir.

Örnek: C eğrisi $x^2+y^2=16$ çemberi olup yönü saatin dönme yönünün tersinde olduğuna göre

$$\int_c (x^2-y^2)\,ds$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm: $x^2+y^2=16$ çemberinin parametrik denklemi $x=4\cos\theta$, $y=4\sin\theta$, $0\le\theta\le 2\pi$ olduğundan vektörel denklemi

$$\vec{R}(t)=4\cos t\,\vec{i}+4\sin t\,\vec{j}$$

$$\vec{R}'(t)=-4\sin t\,\vec{i}+4\cos nt\,\vec{j}$$

$$\left\|\vec{R}'(t)\right\|=\sqrt{4^2\sin^2 t+4^2\cos^2 t}=4$$

$$ds=\left\|\vec{R}(\theta)\right\|d\theta=4\,d\theta$$

dır. O halde

$$\int_c (x^2 - y^2)\, ds = \int_0^{2\pi} [4^2 \cos^2\theta - 4^2 \sin^2\theta].4\, d\theta$$

$$= 4^3 \int_0^{2\pi} (\cos^2\theta - \sin^2\theta)\, d\theta$$

$$= \frac{64}{2} \sin 2\theta \Big|_0^{2\pi}$$

$$= 0 \ //$$

4.1. Teorem: $f(x,y,z)$, C uzay eğrisinin üzerine yerleştirilmiş bir telin (x,y,z) noktasındaki yoğunluğu ise

$$M = \int_c f\, ds$$

ifadesi telin kütlesini verecektir.

Örnek: $y = x^2$ parabolünün (0, 0) ve (3, 9) noktaları arasına yerleştirilen bir telin yoğunluğu $f(x,y) = x$ ise bu telin kütlesini bulunuz.

Çözüm: Söz konusu parabolün vektörel denklemi

$$\vec{R}(t) = x\,\vec{i} + x^2\,\vec{j}\ ,\ 0 \le t \le 3$$

olup yay uzunluğu

$$ds = \left\|\vec{R}'(x)\right\| dx = \sqrt{1 + 4x^2}$$

dir. Böylece istenen telin kütlesi

$$M = \int_0^3 x\, ds = \int_0^3 x\sqrt{1+4x^2}\, dx = \frac{1}{12}(1+4x^2)^{3/2}\Big|_0^3 = \frac{1}{12}(37\sqrt{37} - 1)$$

bulunur.

Örnek: Parametrik denklemi $x(t) = \cos t + t\sin t$, $y(t) = \sin t - t\cos t$, $0 \le t \le 2\pi$ olan eğri üzerine yerleştirilen bir tel parçasının herhangi bir $P(x,y)$ noktasındaki yoğunluğu $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ ise bu telin kütlesini bulunuz.

Çözüm: Parametrik denklemi verilen eğrinin vektörel denklemi

$$\vec{R}(t) = (\cos t + t\sin t)\,\vec{i} + (\sin t - t\cos t)\,\vec{j}\ ,\ 0 \le t \le 2\pi$$

$$\vec{R}'(t) = (-\sin t + \sin t + t\cos t)\,\vec{i} + (\cos t - \cos t + t\sin t)\,\vec{j}$$

$$\vec{R}'(t)=t\cos t\,\vec{i}+t\sin t\,\vec{j}$$

olup, ds yay uzunluğu

$$ds=\left\|\vec{R}'(t)\right\|dt=\sqrt{t^2\cos^2 t+t^2\sin^2 t}\;dt=t\,dt$$

dir. O halde istenen telin kütlesi

$$\begin{aligned}M&=\int_c f(x,y)\,ds\\&=\int_0^{2\pi}[(\cos t+t\sin t)^2+(\sin t-t\cos t)^2]^{1/2}\,t\,dt\\&=\int_0^{2\pi}t(1+t^2)^{1/2}\,dt\\&=\frac{1}{3}(1+t^2)^{3/2}\Big|_0^{2\pi}\\&=\frac{1}{3}\left[(1+4\pi^2)^{3/2}-1\right]\end{aligned}$$

olur.

4.2. Teorem: Toplam kütlesi M olan bir telin $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ ağırlık merkezinin koordinatları

$$\bar{x}=\frac{1}{M}\int_c x.f(x,y,z)\,ds$$

$$\bar{y}=\frac{1}{M}\int_c y.f(x,y,z)\,ds$$

$$\bar{z}=\frac{1}{M}\int_c z.f(x,y,z)\,ds$$

dir.

Örnek: $x^2+y^2=9$, $(y\geq 0)$ çemberinin üst yarısı üzerine yerleştirilen bir telin yoğunluğu $f(x,y)=y$ ise bu telin ağırlık merkezini bulunuz.

Çözüm: Çemberin üst yarısının vektörel denklemi

$$\vec{R}(t)=3\cos\theta\,\vec{i}+3\sin\theta\,\vec{j}\,,\ 0\leq\theta\leq\pi$$

olup, ds yay uzunluğu

$$ds=\left\|\vec{R}'(\theta)\right\|d\theta=\sqrt{(-3\sin\theta)^2+(3\cos\theta)^2}\,d\theta=3\,d\theta$$

dır. O halde istenen telin kütlesi

$$M=\int_0^{\pi} y\,ds=\int_0^{\pi}(3\sin\theta)3\,d\theta=9(-\cos\theta)\Big|_0^{\pi}=18$$

dir. Telin ağırlık merkezinin koordinatları $(\bar{x},\bar{y})$ ise simetriden dolayı $x=0$ olur. $\bar{y}$ ise

$$\bar{y}=\frac{1}{M}\int_c y.f(x,y,z)\,ds$$
$$=\frac{1}{18}\int_0^{\pi}(3\sin\theta)^2 3\,d\theta$$
$$=\frac{3\pi}{4}$$

bulunur. O halde kütle merkezinin koordinatları $\left(0,\frac{3\pi}{4}\right)$ noktasıdır.

4.1. Tanım: C eğrisi üzerindeki her bir P(x, y, z) noktasının sabit bir L doğrusuna uzaklığı d(x, y, z) olmak üzere telin L ye göre Eylemsizlik Momenti

$$I_L=\int_c d^2(x,y,z).f(x,y,z)\,ds$$

dir. Eğer L doğrusu z-ekseni olduğunda $d^2=x^2+y^2$ olacağından eylemsizlik momenti

$$I_z=\int_c (x^2+y^2).f(x,y,z)\,ds$$

dir.

4.2. Tanım: Eğer f teldeki ısı değerini belirleyen bir fonksiyon ise o takdirde L telin uzunluğu olmak üzere

$$\frac{1}{L}=\int_c f(x,y,z)\,ds$$

eğrisel integraline teldeki ortalama sıcaklık derecesi denir.

Örnek: $\vec{R}(t)=\cos t\,\vec{i}+\sin t\,\vec{j}+t\,\vec{k}$, $0\le t\le 2\pi$ helisin $\int_c xyz\,ds$ integralini hesap ettikten sonra helisin ortalama sıcaklık derecesini bulunuz.

Çözüm: Helisin uzunluğu,

$$L=\int_c ds=\int_0^{2\pi}\sqrt{2}\,dt=2\sqrt{2}\pi$$

ve $f(x,y,z)=xyz$ helisin (x, y, z) noktasındaki ısı derecesini ifade eden bir fonksiyon olduğundan, helisin ortalama sıcaklık derecesi

$$\frac{1}{L}=\int_c f(x,y,z)\,ds=\frac{1}{2\sqrt{2}\pi}\int_0^{2\pi} t\sin t\cos t\sqrt{2}dt=-\frac{1}{4}$$

dir.

Üç boyutlu uzayda f(x, y, z) in bir C eğrisi boyunca x, y, z değişkenlerine göre eğrisel integralleri de şu şekilde tanımlanır.

$$\int_c f(x,y,z)\,dx=\int_a^b f(x(t),y(t),z(t))\,x'(t)\,dt$$

$$\int_c f(x,y,z)\,dy=\int_a^b f(x(t),y(t),z(t))\,y'(t)\,dt$$

$$\int_c f(x,y,z)\,dz=\int_a^b f(x(t),y(t),z(t))\,z'(t)\,dt$$

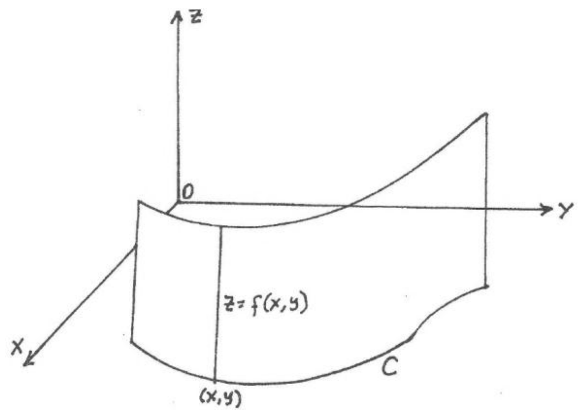
dir. Eğer $f(x,y,z)=1$ alınırsa sırasıyla integraller

$$x(b)-x(a),\,y(b)-y(a),\,z(b)-z(a)$$

olduğu görülür.

Not: C eğrisi boyunca hareket eden bir partikülün hızı $\vec{R}'(t)$ olduğunda bu partikülün yer değişimi koordinat eksenleri üzerindeki izdüşümüdür.

İki boyutlu olduğunda, xy düzleminde bir eğri C olup, bu eğri boyunca $f(x,y)\geq 0$ olması durumunda f nin eğrisel integrali geometrik bir anlama sahiptir.



Şekil 4.1.

Geometrik olarak Şekil 4.1. den de görülüyor ki C eğrisi her bir $(x,y)\in C$ noktasındaki yüksekliği f(x, y) olarak verilen düşey bir silindir yüzeyini meydana getirir.

Burada $\int_c f(x,y)\,ds$ eğrisel integrali yüzey alanını verir. Ayrıca $\int_c f(x,y)\,dx$ ve $\int_c f(x,y)\,dy$ integralleri de silindir yüzeyinin xz ve yz düzlemlerindeki izdüşümlerinin alanını vermektedir.

Örnek: $x^2+4y^2=4$ $(x\geq 0, y\geq 0)$ eğrisi üzerinde dik duran ve (x, y) taban noktasındaki yüksekliği $f(x,y)=xy$ olarak verilen bir duvarın yüzey alanını bulunuz.

Çözüm: Eğrinin parametrik denklemi

$$x=2\cos\theta,\ y=\sin\theta \text{ ve } 0\leq t\leq \frac{\pi}{2}$$

olduğundan eğrinin vektörel denklemi

$$\vec{R}(\theta)=2\cos\theta\,\vec{i}+\sin\theta\,\vec{j}$$

$$\vec{R}'(\theta)=-2\sin\theta\,\vec{i}+\cos\theta\,\vec{j}$$

$$\left\|\vec{R}'(\theta)\right\|=\sqrt{(-2\sin\theta)^2+(\cos\theta)^2}=\sqrt{1+3\cos^2\theta}$$

dır. O halde istenen yüzey alan ı

$$\int_c xy\,ds=\int_0^{\pi/2} 2\cos\theta\sin\theta\sqrt{1+3\sin^2\theta}\,d\theta=\frac{2}{9}(1+3\sin^2\theta)^{3/2}\Big|_0^{2\pi}=\frac{14}{9}$$

bulunur.

Örnek: $y=x^2$ parabolünün $0\leq x\leq 3$ aralığındaki parçası üzerinde dik duran ve (x,y) taban noktasındaki yüksekliği $f(x,y)=(1+4y)^{7/2}$ olarak verilen bir duvarın yüzey alanını bulunuz.

Çözüm: $y=x^2$ parabolünün vektörel denklemi

$$\vec{R}(x)=x\,\vec{i}+x^2\,\vec{j},\ 0\leq x\leq 3$$

$$\vec{R}'(t)=\vec{i}+2x\,\vec{j} \text{ ise } \left\|\vec{R}'(t)\right\|=\sqrt{1+4x^2}$$

$$ds=\left\|\vec{R}'(t)\right\|dx=\sqrt{1+4x^2}\,dx$$

dir. O halde istenen yüzey alanı

$$\int_c f(x,y)\,ds = \int_0^3 x(1+4x^2)^{7/2}(1+4x^2)^{1/2}\,dx$$
$$= \int_0^3 x(1+4x^2)^4\,dx$$
$$= \frac{1}{40}(1+4x^2)^5\Big|_0^3$$
$$= \frac{1}{40}(37^5-1)$$

olur.

VEKTÖR ALANLARIN EĞRİSEL İNTEGRALLERİ

Şimdi, eğrisel integral tanımını vektör alanlarına genişletelim ve fizikteki iş konusunu göz önüne alalım.

$\vec{F}$ uzayda bir kuvvet alanı ve C de $\vec{F}$ nin etkisi altında hareket eden bir partikülün yörüngesi olan düzgün bir eğri olsun. D vektörünün temsil ettiği doğru parçası C ve $\vec{F}$ de sabit bir kuvvet ise $\vec{F}$ nin partikül üzerinde yaptığı iş,

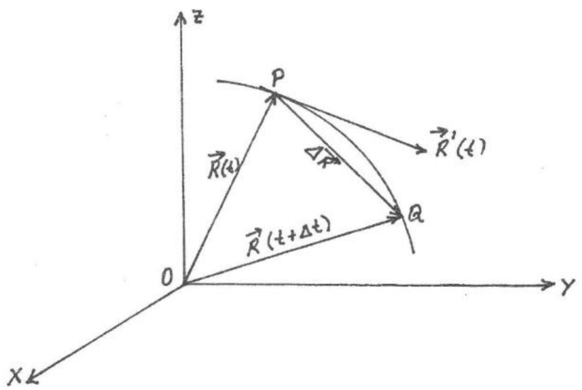
$$\text{iş} = \vec{F}.\vec{D}$$

dir.

Eğer genel olarak C eğrisi,

$$\vec{R}(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j} + z(t)\,\vec{k}\,,\ a \le t \le b$$

denklemi ile verildiğinde C eğrisini sonlu sayıda C_i parçalarını n birleşimi olarak ele alıp $\vec{F}$ nin yaptığı işleri toplayarak C üzerinde $\vec{F}$ tarafından yapılan işi hesaplamış oluruz. Bunu yapmak için $[a,b]$ aralığın $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$ olacak şekilde n-tane alt aralığa bölelim. Her bir C_i parçası $t_{n-1} < t < t_n$, $1 \le i \le n$ için $\vec{R}(t)$ tarafından tanımlansın ve $\Delta\vec{R}_i = \vec{R}(t_{i-1})$ olsun. $\vec{R}(t_{i-1})$ ile $\vec{R}(t_i)$ arasındaki yay uzunluğunu ΔS_i ile gösterelim.



Şekil 4.2.

Şekil 4.2. den görüldüğü gibi n-nin büyük değerleri için ΔS_i yay uzunluğu küçülerek $\|\Delta\vec{R}_i\|$ ye eşit olacak şekilde yaklaşacaktır. Ayrıca $\vec{F}$ kuvveti C_i üzerinde yaklaşık olarak sabit bir $\vec{F}_i$ kuvvetine eşittir. Burada

$$\vec{F}_i = \vec{F}[x(\xi_i),y(\xi_i),z(\xi_i)],\ t_{i-1} \le \xi_i \le t_i,\ 1 \le i \le n$$

dir. Bu şartlar altında partikülün ΔS_i kadar hareket etmesi halinde $\vec{F}$ nin yapmış olduğu iş yaklaşık olarak

$$w_i = \vec{F}_i.\Delta\vec{R}_i$$

dir.

Diferensiyel hesabın ortalama değer teoreminden

$$\begin{aligned}\Delta\vec{R}_i &= \vec{R}(t_i)-\vec{R}(t_{i-1})\\ &= \vec{R}'(\eta_i)\Delta t_i,\ t_{i-1} \le \eta \le t_i,\ \Delta t_i = t_i - t_{i-1}\end{aligned}$$

dir. O halde C eğrisi boyunca partiküle F kuvvet alanı tarafından yapılan yaklaşık iş

$$\text{iş} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i.\vec{R}_i'(\eta_i)\Delta t_i$$

dir. n sayısı büyüdükçe iş gerçek değerine yaklaşacaktır. O halde limit $n \to \infty$ giderken

$$\int_a^b \vec{F}[x(t),y(t),z(t)].\vec{R}'(t)\,dt$$

integraline yaklaşır. Bu da C eğrisi boyunca hareket eden bir partiküle $\vec{F}$ tarafından yaptırılan işi gösterir. $\vec{F}$ nin C boyunca integraline "Eğrisel integral" denir.

4.3. Tanım: D bölgesinde tanımlı ve sürekli bir vektör alanı

$$\vec{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\,\vec{i}+Q(x,y,z)\,\vec{j}+R(x,y,z)\,\vec{k}\,,\ a\le t\le b$$

olsun. D bölgesinde sürekli türevlenebilen basit bir C eğrisinin denklemi

$$\vec{R}(t)=x(t)\,\vec{i}+y(t)\,\vec{j}+z(t)\,\vec{k}\,,\ a\le t\le b$$

verilsin. C eğrisi boyunca $\vec{F}$ nin integrali $\int_c \vec{F}.d\vec{R}$ olarak tanımlanır ve

$$\int_c \vec{F}.d\vec{R}=\int_a^b \vec{F}[x(t),y(t),z(t)].\frac{d\vec{R}}{dt}dt$$

dir. Bu eğrisel integral genellikle C eğrisi üzerinde tanımlı bir skaler alanın da integralidir. Gerçekten,

$$\vec{t}=\frac{\vec{R}'(t)}{\left\|\vec{R}'(t)\right\|}$$

birim teğet vektör olmak üzere $f(x,y,z)=\vec{F}(x,y,z).\vec{t}$ dersek

$$\int_c \vec{F}.d\vec{R}=\int_a^b \vec{F}.\frac{d\vec{R}}{dt}\left\|\vec{R}'(t)\right\|dt=\int_a^b(\vec{F}.\vec{t})\left\|\vec{R}'(t)\right\|dt=\int_a^b f\,ds$$

dir. Bu integral C eğrisi üzerinde $\vec{F}$ nin teğetsel bile şeninin yay uzunluğuna göre eğrisel integralidir.

Eğrisel integrallerin başka notasyonlarla gösterimi:

1. $\vec{F}$ nin eğrisel integrali C eğrisine değil de A ve B gibi uç noktalara bağlı olması halinde

$$\int_c \vec{F}.d\vec{R}=\int_A^B \vec{F}.d\vec{R}$$

şeklinde gösterilir.

2. Eğrisel integral $\vec{F}$ nin bileşenleri cinsinden

$$\int_c \vec{F}.d\vec{R}=\int_c P.dx+\int_c Q.dy+\int_c R.dz$$

dir. Bunu kısaca

$$\int_c P.dx+\int_c Q.dy+\int_c R.dz$$

şeklinde gösteririz. Burada P, Q ve R skaler alanlar, x, y ve z de değişkenler-dir.

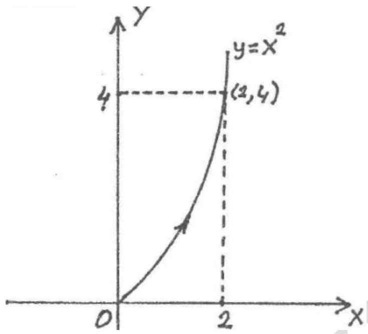
3. C nin basit kapalı bir eğri olması halinde

$$\oint_c \vec{F}.d\vec{R}$$

şeklinde gösterilir. Burada ok, eğri boyunca pozitif yön olarak alınacaktır.

Örnek: C eğrisi $y=x^2$ parabolü boyunca, orijinden (2, 4) noktasına kadar $\vec{F}(x,y)=x^2y\,\vec{i}+(x^2+y)\,\vec{j}$ nin eğrisel integralini hesaplayınız.

Çözüm:



Şekil 4.3.

I. Yol: Verilen eğrinin vektörel denklemi

$$\vec{R}(t)=t\,\vec{i}+t^2\,\vec{j}\,,\ 0\le t\le 2$$

dir. Eğri üzerinde

$$\vec{F}.d\vec{R}=(t^4\,\vec{i}+2t^2\,\vec{j}).(\vec{i}+2t\,\vec{j})=t^4+4t^3$$

olduğundan eğrisel integral

$$\int_c \vec{F}.d\vec{R}=\int_0^2 (t^4+4t^3)\,dt=\frac{112}{5}$$

dir.

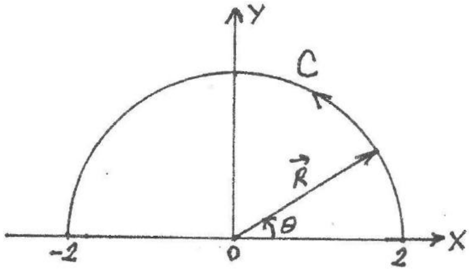
II. Yol: $y=x^2$ olduğundan $dy=2x\,dx$, $0\le x\le 2$ den

$$\int_c x^2y\,dx+(x^2+y)\,dy=\int_0^2 x^2x^2\,dx+(x^2+x^2)2x\,dx=\int_0^2 (x^4+4x^3)\,dx=\frac{112}{5}$$

bulunur.

Örnek: C, orijin merkezli ve 2 yarıçaplı çemberin üst yarısı boyunca yönü saatin dönme yönünün tersinde olan eğrinin $\vec{F}(x,y)=x^2\,\vec{i}+y\,\vec{j}$ olmak üzere egrisel integralini hesap ediniz.

Çözüm:



Şekil 4.4.

$$x = 2\cos\theta,\ x = 2\sin\theta,\ 0 \le \theta \le \pi$$

olmak üzere eğrinin vektörel denklemi

$$\vec{R}(t) = 2\cos\theta\,\vec{i} + 2\sin\theta\,\vec{j} \text{ ise } \vec{F} = 4\cos^2\theta\,\vec{i} + 2\sin\theta\,\vec{j}$$

olur.

$$\vec{F}.\frac{d\vec{R}}{d\theta} = \left[4\cos^2\theta\,\vec{i} + 2\sin\theta\,\vec{j}\right].\left[-2\sin\theta\,\vec{i} + 2\cos\theta\,\vec{j}\right]$$

$$= -8\sin\theta\cos^2\theta + 4\sin\theta\cos\theta$$

dır. Eğrisel integral

$$\int_c \vec{F}.d\vec{R} = \int_0^{\pi} (-8\sin\theta\cos^2\theta + 4\sin\theta\cos\theta)\,d\theta$$

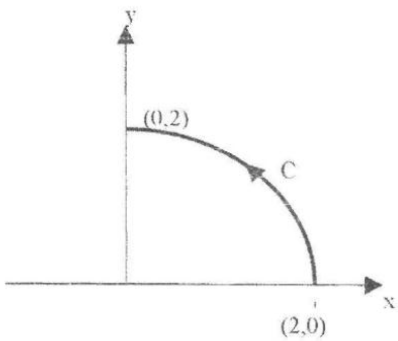
$$= \left(\frac{8}{3}\cos^3\theta + 2\sin^2\theta\right)\Bigg|_0^{\pi}$$

$$= -\frac{16}{3}$$

bulunur.

Örnek: C eğrisi, $x^2 + y^2 = 4$ çeyrek çemberi üzerindeki (2, 0) dan (0, 2) boyunca $\vec{F}(x,y) = 2xy\,\vec{i} + (x^2 - y^2)\,\vec{j}$ nın eğrisel integralini hesaplayınız.

Çözüm:



$x^2+y^2=4$ çemberinin vektörel denklemi $\vec{R}(\theta)=2\cos\theta\,\vec{i}+2\sin\theta\,\vec{j}$ ve $0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}$ dir. Eğri üzerinde

$$\vec{F}.\frac{d\vec{R}}{dt}=[2(2\cos\theta)(2\sin\theta)\,\vec{i}+(4\cos^2\theta-4\sin^2\theta)\,\vec{j}]\left[-2\sin\theta\,\vec{i}+2\cos\theta\,\vec{j}\right]$$
$$=-16\cos\theta.\sin^2\theta+8\cos^3\theta-8\cos\theta.\sin^2\theta$$
$$=-24\cos\theta.\sin^2\theta+8\cos^3\theta$$

olduğundan eğrisel integral

$$\int_c \vec{F}.\frac{d\vec{R}}{dt}=\int_0^{\pi/2}[-24\cos\theta.\sin^2\theta+8\cos^3\theta]\,d\theta$$
$$=\left(-8\sin^3\theta+\frac{8}{3}\sin\theta\cos^2\theta+\frac{16}{3}\sin\theta\right)\Bigg|_0^{\pi/2}$$
$$=-8+0+\frac{16}{3}$$
$$=-\frac{8}{3}$$

olur.

Örnek: Orijinden (1,-1,1) noktasına kadar

$$\vec{F}(x,y,z)=(x+y^2)\,\vec{i}+(x+z)\,\vec{j}+xy\,\vec{k}$$

eğrisel integralini,

a) Bu iki noktayı birleştiren doğru boyunca,

b) $\vec{R}(t)=t\,\vec{i}-t^2\,\vec{j}+t^3\,\vec{k}$, $0\le t\le 1$ eğrisi boyunca hesap ediniz.

Çözüm: a) L yi orijinin (1, –1, 1) noktasına birleştiren doğru parçası olarak alalım. Parametrik denklem $x=t,\ y=-t,\ z=t,\ 0\le t\le 1$ olmak üzere L üzerindeki eğrisel integral

$$\int_c \vec{F}.d\vec{R}=\int_L (x+y^2)\,dx+(x+z)\,dy+xy\,dz$$
$$=\int_0^1 (t+t^2)\,dt+(t+t)\,(-dt)+t(-t)\,dt$$
$$=\int_0^1 (-t)\,dt$$

$$= -\frac{1}{2}$$

bulunur.

b) $\vec{R}(t) = t\,\vec{i} - t^2\,\vec{j} + t^3\,\vec{k}$, $0 \le t \le 1$ eğrisi boyunca eğrisel integral (Burada $x = t,\ y = -t^2,\ z = t^3$)

$$\int_c \vec{F}.d\vec{R} = \int_0^1 \left[(t+t^4)\,\vec{i} + (t+t^3)\,\vec{j} - t^3\,\vec{k}\right]\left[\vec{i} - 2t\,\vec{j} - 3t^2\,\vec{k}\right]$$

$$= \int_0^1 (t + t^4 - 2t^2 - 2t^4 - 3t^5)\,dt$$

$$= -\frac{13}{5}$$

dir.

Örnek: C, (0, 0, 0) noktasını (1, 2, 3) noktasına birleştiren bir partikülün kuvvet alanı $\vec{F}(x,y,z) = xy\,\vec{i} + yz\,\vec{j} + xz\,\vec{k}$ olduğuna göre,

$$\vec{R}(t) = t\,\vec{i} + 2t^2\,\vec{j} + 3t^3\,\vec{k},\ 0 \le t \le 1$$

eğrisi boyunca partikülün hareket etmesi halinde yapılan işi hesaplayınız.

Çözüm:

$$\vec{F}.\frac{d\vec{R}}{d\theta} = \left[t.2t^2\,\vec{i} + 2t^2 3t^3\,\vec{j} + t2t^2\,\vec{k}\right]\left[\vec{i} + 4t\,\vec{j} + 9t^2\,\vec{k}\right]$$

$$= 2t^3 + 24t^6 + 27t^6$$

$$= 51t^6 + 2t^3$$

yapılan iş

$$W = \int_0^1 (51t^6 + 2t^3)\,dt = \frac{109}{14}$$

birimdir.

Örnek: C eğrisi, $y = 2\sqrt{x}$ parabolü boyunca, orijinden (1, 2) noktasına kadar $\vec{F}(x,y) = (x^2 - y)\,\vec{i} + (y^2 - x)\,\vec{j}$ nin eğrisel integralini hesaplayınız.

Çözüm: $y = 2\sqrt{x}$ parabolünün vektörel denklemi $\vec{R}(t) = t\,\vec{i} + 2\sqrt{t}\,\vec{j}$, $0 \le t \le 1$ dir. Eğri üzerinde

$$\vec{F}.\frac{d\vec{R}}{dt}=[(t^2-2\sqrt{t})\,\vec{i}+(4t-t)\,\vec{j}]\left[\,\vec{i}+\frac{1}{\sqrt{t}}\,\vec{j}\,\right]$$
$$=(t^2-2\sqrt{t})+3\sqrt{t}$$
$$=t^2+\sqrt{t}$$

olduğundan eğrisel integral

$$\int_c \vec{F}.\frac{d\vec{R}}{dt}=\int_0^1 (t^2+\sqrt{t})\,dt=\left(\frac{t^3}{3}+\frac{2t^{3/2}}{3}\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1$$

olur.

Örnek: $(0,a,0)$ dan $(a,0,\pi)$ noktasına kadar

$$\vec{F}(x,y,z)=(y-1)\,\vec{i}+(x+1)\,\vec{j}+2z\,\vec{k}$$

nın eğrisel integralini $\vec{R}(t)=a\sin t\,\vec{i}+a\cos t\,\vec{j}+2t\,\vec{k},\ 0\le t\le\frac{\pi}{2}$ helisi boyunca hesaplayınız

Çözüm:

$$\vec{R}(t)=a\sin t\,\vec{i}+a\cos t\,\vec{j}+2t\,\vec{k},\ 0\le t\le\frac{\pi}{2}$$
$$\vec{R}'(t)=a\cos t\,\vec{i}-a\sin t\,\vec{j}+2\,\vec{k}$$

Eğri üzerinden

$$\vec{F}.\frac{d\vec{R}}{dt}=[(-1+a\cos t)\,\vec{i}+(1+a\sin t)\,\vec{j}+4t\,\vec{k}].[a\cos t\,\vec{i}-a\sin t\,\vec{j}+2\,\vec{k}]$$
$$=(-1+a\cos t)a\cos t+(1+a\sin t)(-a\sin t)+8t$$
$$=a^2\cos^2 t-a\cos t-a^2\sin^2 t-a\sin t+8t$$

olduğundan eğrisel integral

$$\int_c \vec{F}.d\vec{R}=\int_0^{\pi/2}(a^2\cos^2 t-a\cos t-a^2\sin^2 t-a\sin t+8t)\,dt$$
$$=\left(\frac{a^2}{2}\sin 2t-a\sin t+a\cos t+4t^2\right)\Bigg|_0^{\pi/2}$$
$$=0-a+0+\pi^2$$
$$=\pi^2-a$$

olur.

EĞRİSEL İNTEGRALİN ÖZELLİKLERİ

Eğrisel integralin değeri bölüm 4.2 deki örnek 1 ve 2 den de görüldüğü gibi eğrinin gösterim biçimine bağlı değildir. Bunu şu şekilde açıklayabiliriz:

C eğrisi $\vec{R}(t)=x(t)\,\vec{i}+y(t)\,\vec{j}+z(t)\,\vec{k}$, $a\le t\le b$ ve $\vec{R}^*(t')=x^*(t')\,\vec{i}+y^*(t')\,\vec{j}+z^*(t')\,\vec{k}$, $c\le t'\le d$ gibi farklı iki şekilde ifade edilsin. Her iki durumda da C nin hareket yönü aynı. Yani $\vec{R}(a)=\vec{R}^*(c)$, $\vec{R}(b)=\vec{R}^*(d)$ olsun. Bu durumda

$$\int_c \vec{F}.d\vec{R}=\int_c \vec{F}.d\vec{R}^*$$

veya

$$\int_a^b \vec{F}[x(t),y(t),z(t)].\vec{R}'(t)\,dt=\int_c^d \vec{F}[x^*(t'),y^*(t'),z^*(t')].\vec{R}^*(t')\,dt'$$

dır. Eğer C nin farklı yönlerindeki hareket farklı ise $\vec{R}(a)=\vec{R}^*(c)$, $\vec{R}(b)=\vec{R}^*(d)$ dir. O zaman eğrisel integralin değerinin işareti değişir. Yani

$$\int_c \vec{F}.d\vec{R}=-\int_c \vec{F}.d\vec{R}^*$$

olur.

Skaler ve vektör alanların eğrisel integrallerinin bazı temel cebirsel özellikleri:

1. C, $\vec{R}=\vec{R}(t)$, $a\le t\le b$ eğrisi üzerinde tanımlı ve sürekli olan f ve g skaler alanları ile $\vec{F}$ ve $\vec{G}$ vektör alanları olsunlar. Bu durumda a ve b sabitler için

$$\int_c (af+bg).d\vec{R}=a\int_c f.d\vec{R}+b\int_c g.d\vec{R}$$

ve

$$\int_c (a\vec{F}+b\vec{G}).d\vec{R}=a\int_c \vec{F}.d\vec{R}+b\int_c \vec{G}.d\vec{R}$$

dir. Bu özelliklere Lineerlik özelliği denir.

2. C eğrisi, [a, c] ve [c, b] aralığı üstünde $\vec{R}(t)$ denklemi ile tanımlı C_1 ve C_2 gibi iki eğrinin birleşiminden meydana gelsin. O zaman

$$\int_c f\,ds=\int_{c_1} f\,ds+\int_{c_2} f\,ds$$

ve

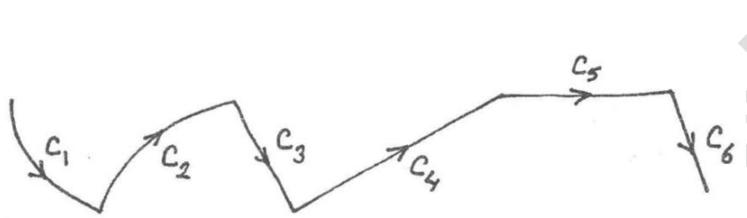
$$\int_{c} \vec{F}.d\vec{R} = \int_{c_1} \vec{F}.d\vec{R} + \int_{c_2} \vec{F}.d\vec{R}$$

dir. Bu özellik adi integraller için bildiğimiz toplanabilme özelliğidir. Yani

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \int_{a}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{b} f(x)\,dx$$

dir.

3.



Şekil 4.5.

C eğrisi şekil 4.5. deki gibi parçalı düzgün, sonlu sayıdaki eğrilerin birleşimi olsun. Bu durumda

$$\int_{c} f\,ds = \int_{c_1} f\,ds + \int_{c_2} f\,ds + \dots + \int_{c_n} f\,ds$$

ve

$$\int_{c} \vec{F}.d\vec{R} = \int_{c_1} \vec{F}.d\vec{R} + \int_{c_2} \vec{F}.d\vec{R} + \dots + \int_{c_n} \vec{F}.d\vec{R}$$

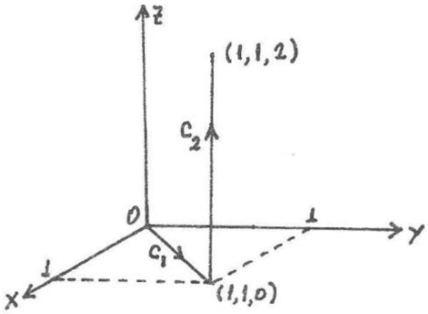
dir. Burada $\vec{R}_i(t)$ ler $t_0 = a$ ve $t_n = b$ olmak üzere $t_{i-1} \le t \le t_i$ de C_i nin bir gösterimi olup,

$$ds_i = \left\| \vec{R}_i'(t) \right\| dt, \; 1 \le i \le n$$

dir.

Örnek: C eğrisi $(0,0,0)$ noktasını $(1,1,0)$ ve $(1,1,0)$ noktasını $(1,1,2)$ noktalarına birleştiren iki doğru parçasının toplamı olduğuna göre $\int_{c} x\,dx - z\,dy + 2y\,dz$ integralini hesap ediniz.

Çözüm:



Şekil 4.6.

Şekil 4.6. dan da görüldüğü gibi C_1 eğrisi $x=y, z=0$ olduğunda $dx=dy, dz=0$ ve C_2 eğrisi $x=1, y=1$ olduğunda $dx=0, dy=0$ dır. O halde

$$\int_c x\,dx - z\,dy + 2y\,dz = \int_{c_1} x\,dx + \int_{c_2} 2y\,dz = \int_0^1 x\,dx + \int_0^2 2\,dz = \frac{9}{2}$$

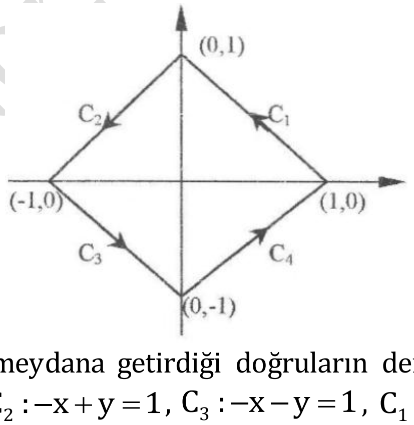
dır.

Örnek: C eğrisi, köşe noktaları(1,0) , (0,1) , (-1,0) ve (0,-1) olan karenin yönü saatin dönme yönünün tersinde olduğuna göre

$$\int_c (x-y)\,ds$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:



Karenin kenarlarının meydana getirdiği doğruların denklemi

$$C_1 : x+y=1,\ C_2 : -x+y=1,\ C_3 : -x-y=1,\ C_1 : x-y=1$$

yazılabilir. O halde integralleri hesaplayalım.

$$\int_c (x-y)\,ds = \int_{c_1} (x-y)\,ds + \int_{c_2} (x-y)\,ds + \int_{c_3} (x-y)\,ds + \int_{c_4} (x-y)\,ds$$

$$\int_{c_1}(x-y)\,ds=\int_0^1[x-(1-x)]\sqrt{2}\,dx=\sqrt{2}\int_0^1(2x-1)\,dx=\sqrt{2}(x^2-x)\Big|_0^1=0$$

$$\int_{c_2}(x-y)\,ds=\int_{-1}^0[x-(1+x)]\sqrt{2}\,dx=-\sqrt{2}\int_0^1 dx=-\sqrt{2}x\Big|_{-1}^0=\sqrt{2}$$

$$\int_{c_4}(x-y)\,ds=\int_0^1[x-(1-x)]\sqrt{2}\,dx=\sqrt{2}\int_0^1 dx=\sqrt{2}x\Big|_0^1=\sqrt{2}$$

$$\int_{c}(x-y)\,ds=0+\sqrt{2}+0+\sqrt{2}=2\sqrt{2}$$

YOLDAN BAĞIMSIZ EĞRİSEL İNTEGRALLER

$$\vec{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\,\vec{i}+Q(x,y,z)\,\vec{j}+R(x,y,z)\,\vec{k}\,,\ a\le t\le b$$

vektör alanı bir D bölgesinde tanımlı ve sürekli olsun. D bölgesinde herhangi iki nokta A ve B için

$$\int_c \vec{F}.d\vec{R}=\int_A^B \vec{F}.d\vec{R}$$

eğrisel integrali A ve B yi birleştiren C eğrisine bağlıdır.

4.4. Tanım: Eğer eğrisel integral sadece A ve B noktalarına bağlı, eğriye bağlı değilse bu durumda integral yoldan bağımsızdır denir. Eğrisel integral basitçe A dan B ye bir integral olarak yazarız.

Şimdi biz eğrisel integralin yoldan bağımsızlığı için gerekli ve yeterli koşulları arayacağız:

İlk olarak; $\vec{F}$ korunumlu bir alan olsun. Bu durumda $\vec{\nabla}\phi=\vec{F}$ olduğunda D de sürekli ve türevlenebilir bir ϕ skaler alanı vardır. O halde

$$P=\frac{\partial\phi}{\partial x},\ Q=\frac{\partial\phi}{\partial y},\ R=\frac{\partial\phi}{\partial z}$$

dir. D bölgesinde A ve B nin herhangi iki noktasının koordinatları da (x_0,y_0,z_0) ve (x_1,y_1,z_1) ise bu noktaları birleştiren C eğrisinin denklemi de

$$\vec{R}(t)=x(t)\,\vec{i}+y(t)\,\vec{j}+z(t)\,\vec{k}\,,\ a\le t\le b$$

dir. O halde

$$\int_c \vec{F}.d\vec{R}=\int_c P.dx+\int_c Q.dy+\int_c R.dz$$

$$=\int_a^b\left[\frac{\partial\phi}{\partial x}.\frac{dx}{dt}+\frac{\partial\phi}{\partial y}.\frac{dy}{dt}+\frac{\partial\phi}{\partial z}.\frac{dz}{dt}\right]dt$$
$$=\int_a^b\frac{d\phi}{dt}dt$$
$$=\phi(x_1,y_1,z_1)-\phi(x_0,y_0,z_0)$$

dır. Bu sonuç C nin parçalı düzgün bir eğri olması durumunda da geçerlidir. Gerçekten C eğrisi, $[a,t_1],[t_1,t_2],...,[t_{n-1},b]$ alt aralıklarına karşılık gelen $C_1,C_2,...,C_n$ gibi n-tane düzgün eğri parçalarının birleşimi ise

$$\int_a^b\frac{d\phi}{dt}dt=\sum_{i=1}^{n}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\frac{d\phi}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\phi[x(t),y(t),z(t)]\Big|_{t_{i-1}}^{t_i}=\phi[x(t),y(t),z(t)]\Big|_a^b$$

dir. Burada $t_0=a, t_n=b$ dir. Böylece yine aynı sonuç elde edildi. O halde $\vec{\nabla}\phi=\vec{F}$ in eğrisel integralinin değeri eğrinin uç noktalarında ϕ nin aldığı değerlerin farkına eşittir. Böylece $\vec{F}$ korunumlu bir vektör alanı ise, eğrisel integral yoldan bağımsızdır.

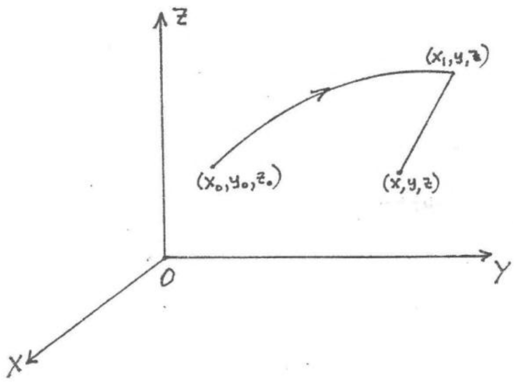
Tersine; $\int_c \vec{F}.d\vec{R}$ eğrisel integrali yoldan bağımsız olsun. D de herhangi bir sabit nokta (x_0,y_0,z_0) ve değişken noktası da (x,y,z) ise bu iki noktayı birleştiren D de parçalı düzgün eğri boyunca

$$\phi(x,y,z)=\int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)}P(\xi,\eta,\zeta)\,d\xi+Q(\xi,\eta,\zeta)\,d\eta+R(\xi,\eta,\zeta)\,d\zeta$$

integrali ile tanımlı bir skaler alan meydana getirelim. Gösterelim ki;

$$\text{grad}\,\phi=\vec{F} \text{ ise } P=\frac{\partial\phi}{\partial x},\ Q=\frac{\partial\phi}{\partial y},\ R=\frac{\partial\phi}{\partial z}$$

dir



Şekil 4.7.

(P, Q ve R de aynı yapıya sahip olduğundan biz sadece $P = \frac{\partial \phi}{\partial x}$ eşitliğini gösterelim.)

ϕ nin elde edildi ği integral yoldan bağımsız olduğundan, şekil 4.7. den de görüldüğü gibi D bölgesinde (x_0, y_0, z_0) dan (x_1, y, z) noktasına giden herhangi bir yol seçilebilir ve (x_1, y, z) ile (x, y, z) noktasının arasını bir doğru parçası olarak alabiliriz.

Eğrisel integralin toplama özelliğinden,

$$\begin{aligned}\phi(x,y,z) &= \int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x_1,y,z)} \vec{F}.d\vec{R} + \int_{(x_1,y,z)}^{(x,y,z)} \vec{F}.d\vec{R} \\ &= \phi(x_1,y,z) + \int_{(x_1,y,z)}^{(x,y,z)} \vec{F}.d\vec{R} \\ &= \phi(x_1,y,z) + \int_{x_1}^{x} P(\xi,\eta,\zeta)\, d\xi\end{aligned}$$

yazabiliriz. Burada (x_1, y, z) noktasını (x, y, z) noktasına birleştiren doğru boyunca y ve z sabit olduğundan $dy = 0$ ve $dz = 0$ dır. O halde ϕ nin x'e göre kısmi türevi alınırsa,

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(x,y,z) = P(x,y,z)$$

elde edilir. Benzer yolla,

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}(x,y,z) = Q(x,y,z) \text{ ve } \frac{\partial \phi}{\partial z}(x,y,z) = R(x,y,z)$$

bulunur. Bu durumda ϕ fonksiyonu $\vec{F}$ için bir potansiyel fonksiyondur. Dolayısıyla $\vec{F}$ bir korunumlu alandır.

Örnek:

$$\vec{F}(x,y,z) = (y^2 \cos x + 2xe^y)\,\vec{i} + (\cos x + xz^2 e^{xy})\,\vec{j} + (2ze^{xy} + 1)\,\vec{k}$$

korunumlu vektör alanlarının ϕ potansiyel fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm:

$$P(x,y,z) = y^2 \cos x + 2xe^y$$

$$Q(x,y,z) = \cos x + xz^2 e^{xy}$$

$$R(x,y,z) = 2ze^{xy} + 1$$

$(0,0,0)$ dan $(x,0,0)$ noktasına kadar x-ekseni boyunca,
$(x,0,0)$ dan $(x,y,0)$ noktasına kadar y-ekseni boyunca,
$(x,y,0)$ dan (x,y,z) noktasına kadar z-eksenine paralel bir doğru boyunca,

$$\phi(x,y,z)=\int_0^x P(\xi,0,0)\,d\xi+\int_0^y Q(x,\eta,0)\,d\eta+\int_0^z R(x,y,\zeta)\,d\zeta$$

$$=\int_0^x 0\,d\xi+\int_0^y \cos x\,d\eta+\int_0^z (2\zeta e^{xy}+1)\,d\zeta$$

$$=0+\eta\cos x\Big|_0^y+(\zeta^2e^{xy}+\zeta)\Big|_0^z$$

$$=y\cos x+z^2e^{xy}+z$$

$$\phi(x,y,z)=y\cos x+z^2e^{xy}+z$$

dir.

Örnek: $\vec{F}(x,y,z)=(ye^z-z)\,\vec{i}+(xe^z+2y)\,\vec{j}+(xye^z-x)\,\vec{k}$ korunumlu vektör alanlarının ϕ potansiyel fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm:

$P(x,y,z)=ye^z-z$

$Q(x,y,z)=xe^z+2y$

$R(x,y,z)=xye^z-x$

$(0,0,0)$ dan $(x,0,0)$ noktasına kadar x-ekseni boyunca,
$(x,0,0)$ dan $(x,y,0)$ noktasına kadar y-ekseni boyunca,
$(x,y,0)$ dan (x,y,z) noktasına kadar z-eksenine paralel bir doğru boyunca,

$$\phi(x,y,z)=\int_0^x P(\xi,0,0)\,d\xi+\int_0^y Q(x,\eta,0)\,d\eta+\int_0^z R(x,y,\zeta)\,d\zeta$$

$$=\int_0^x 0\,d\xi+\int_0^y (x+2\eta)\,d\eta+\int_0^z (xye^{\zeta}-x)\,d\zeta$$

$$=0+(x\eta+\eta^2)\Big|_0^y+(xye^{\zeta}-x\zeta)\Big|_0^z$$

$$=xy+y^2+xye^2-xz-xy$$

$$\phi(x,y,z)=y^2+xye^2-xz$$

dir.

Örnek: $\vec{F}(x,y,z)=\dfrac{-y\,\vec{i}+x\,\vec{j}}{x^2+y^2}+2z\,\vec{k}$, $x^2+y^2\neq 0$ vektör alanları yoldan bağımsız ise bu vektör alanlarının ϕ potansiyel fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm:

$$P(x,y,z)=-\frac{y}{x^2+y^2}$$

$$Q(x,y,z)=\frac{x}{x^2+y^2}$$

$$R(x,y,z)=2z$$

$$P_z=0,\ R_x=0 \text{ ise } P_z=R_x$$

$$Q_z=0,\ R_y=0 \text{ ise } Q_z=R_y$$

O halde $\vec{F}$ vektör alanı yoldan bağımsızdır. Şimdi ϕ potansiyel fonksiyonunu bulalım:

$$\vec{F}=(\phi_x,\phi_y,\phi_z)$$

$$\phi_x=-\frac{y}{x^2+y^2},\ \phi_y=\frac{x}{x^2+y^2},\ \phi_z=2z$$

ϕ_x denklemini x'e göre integre edersek,

$\phi=-\arctan\left(\dfrac{z}{y}\right)+\varphi(y,z)$ dir. Bu ifadenin y' ye göre türevini alırsak ,

$$\phi_y=\frac{x}{x^2+y^2}+\varphi_y(y,z)=\frac{x}{x^2+y^2}$$

$$\varphi_y(y,z)=0$$

$$\varphi(y,z)=\varphi(z)$$

elde edilir. O halde ϕ fonksiyonu

$$\phi(x,y,z)=-\arctan\left(\frac{z}{y}\right)+\varphi(z)$$

Bu ifadenin z'ye göre türevini alırsak;

$$\phi_z=\varphi_z(z)=2z \text{ ise } \varphi(z)=z^2+c$$

elde edilir. Böylece istenen ϕ potansiyel fonksiyonu

$$\phi(x,y,z)=-\arctan\left(\frac{z}{y}\right)+z^2+c$$

dir.

Örnek: $\vec{F}(x,y,z)=(3e^z+2xy)\,\vec{i}+(x^2+z\sin y)\,\vec{j}+(3xe^z-\cos y)\,\vec{k}$ vektör alanları yoldan bağımsız ise bu vektör alanlarının ϕ potansiyel fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm:

$P(x,y,z)=(3e^z+2xy)$

$Q(x,y,z)=x^2+z\sin y$

$R(x,y,z)=3xe^z-\cos y$

$P_y=6xy+\cos z,\ Q_x=4xy$ ise $P_y\neq Q_x$

$P_z=-y\sin z,\ R_x=-y\sin z$ ise $P_z=R_x$

$Q_z=-x\sin z,\ R_y=-x\sin z$ ise $Q_z=R_y$

Burada $P_y\neq Q_x$ olduğundan $\vec{F}$ vektör alanı yoldan bağımlıdır.

4.1. Teorem: $\vec{F}$ bir D bölgesi üzerinde tanımlanmış sürekli bir vektör alanı ve bu D bölgesinde herhangi iki nokta A ve B olsun. Bu takdirde eğrisel integral

$$\int_A^B \vec{F}.d\vec{R}=\int_A^B P\,dx+Q\,dy+R\,dz$$

olması için gerek ve yeter şart $\vec{F}$ nin korunumlu bir alan olmasıyla mümkündür. Yani $\vec{\nabla}\phi=\vec{F}$ için gerek ve yeter şart ϕ fonksiyonunun bir D bölgesinde sürekli türevlenebilir olmasıdır. Eğer,

$$\vec{\nabla}\phi=\vec{F}\quad \text{ise}\quad \int_A^B \vec{F}.d\vec{R}=\phi(B)-\phi(A)$$

dır.

Uyarı: Eğer integral yoldan bağımsız ise her kapalı eğri boyunca integralin değeri sıfırdır. Bunu bir teorem ile verelim.

4.2. Teorem: D bölgesinde sürekli vektör alanı $\vec{F}$ olsun. D nin her kapalı C eğrisinde

$$\int_c \vec{F}.d\vec{R}=0$$

olması için gerek ve yeter şart D bölgesinde $\vec{F}$ nin eğrisel integralinin yoldan bağımsız olmasıdır.

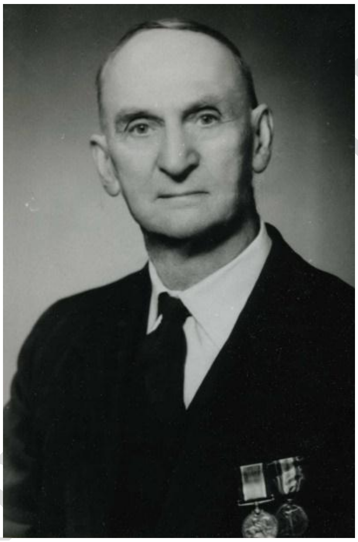
Örnek: $\phi(x,y,z)=x^2y+yz+z^2$, $\vec{\nabla}\phi=\vec{F}$ olmak üzere $\vec{F}$ nin eğrisel integralini (1, -1, 1) noktasından (2, 1, 3) noktası boyunca hesaplayınız.

Çözüm: $\vec{F}$, korunumlu bir vektör alanı olduğundan, eğrisel integral yalnız uç noktalara bağlı olacaktır. O halde

$$\int_{(1,-1,1)}^{(2,1,3)} \vec{F}.d\vec{R} = \int_{(1,-1,1)}^{(2,1,3)} \vec{\nabla}\phi.d\vec{R} = \phi(2,1,3)-\phi(1,-1,1)=17$$

bulunur.

DÜZLEMDE GREEN TEOREMİ



14.07.1793, Nottingham, İngiltere - 31.05.1841, Nottingham, İngiltere

4.3. Teorem(Green Teoremi): D, xy düzleminde bir basit bölge, C de bu bölgeyi çevreleyen pozitif yönde bir eğri olsun. Eğ er P ve Q, $D\cup C$ de sürekli türevlere sahip fonksiyonlar ise

$$\oint_c P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

dir.

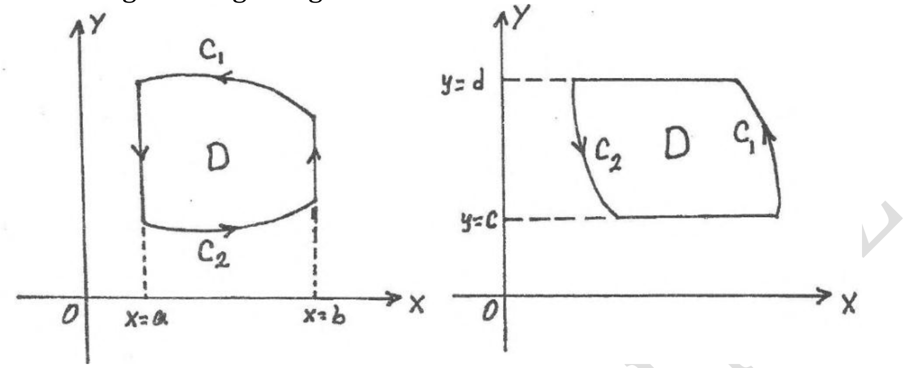
İspat: Teoremin ispatını yapmak için

$$\oint_c P(x,y)\,dx=-\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}dxdy$$

ve

$$\oint_C Q(x,y)\,yx=\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\,dxdy$$

eşitliklerinin doğru olduğunu göstermek yeterlidir. Şimdi bu eşitliklerin birincisinin doğru olduğunu gösterelim:



Şekil 4.8.

Şekil 4.8.(1) den de görüldüğü gibi D bölgesinde C eğrisi; C_1, $y = g(x)$ $(a\le x\le b)$ denklemli bir üst eğri, C_2, $y = f(x)$, $(a\le x\le b)$ denklemli bir alt eğri ile $x = a$, $x = b$ gibi doğrular tarafından sınırlansın ve $a\le x\le b$ için $f(x)\le g(x)$ şartını sağlasın. Ayrıca f ve g fonksiyonları $a\le x\le b$ aralığında birinci mertebeden sürekli türevlere sahip olsun,

$$\begin{aligned}
-\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dxdy &= -\int_a^b\left[\int_{y=f(x)}^{g(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\,dy\right]dx\\
&= -\int_a^b \left[P(x,y)\right]_{f(x)}^{g(x)}dx\\
&= -\int_a^b \left[P(x,g(x))-P(x,f(x))\right]dx\\
&= -\int_a^b P(x,g(x))\,dx+\int_a^b P(x,f(x))\,dx\\
&= -\int_{-c_1} P\,dx+\int_{c_2} P\,dx\\
&= \int_{c_1} P\,dx+\int_{c_2} P\,dx
\end{aligned}$$

bulunur.

Diğer taraftan x = a, x = b ise her iki eğri üzerinde dx = 0 olacağından eğrisel integralleri sıfırdır. O halde

$$\oint_c P(x,y)\,dx = -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dxdy \qquad (1)$$

dir. Benzer yolla şekil 4.8.(2) dan faydalanarak

$$\oint_c Q(x,y)\,dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\,dxdy \qquad (2)$$

olduğu görülür. Böylece elde edilen (1) ve (3) eşitliğin toplamı ile istenen (1) eşitliği elde edilir. Bu e ş itliğe Green formülü adı verilir.

4.4. Teorem (Green Teoremin Alan Hesabı): D, basit kapalı parçalı düzgün bir C eğrisi tarafından sınırlanmış bir bölge ve alanı A olsun.

$$A = \frac{1}{2}\oint y\,dx - x\,dy$$

dir.

İspat: Green teoreminden $P = -y$, $Q = x$ olduğunda

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -1, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 1$$

$$\frac{1}{2}\oint_c y\,dx - x\,dy = \frac{1}{2}\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \iint_D dxdy = A$$

dır.

Örnek: C, $x^2 + 4y^2 = 4$ elips eğrisi olduğunda

$$\oint_c (x+2y)\,dx + (3x-y)\,dy$$

eğrisel integralini hesaplayınız.

Çözüm: Green teoreminden, $P = x + 2y$, $Q = 3x - y$ olduğunda $\frac{\partial P}{\partial y} = 2$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = 3$ olacağından

$$\oint_c (x+2y)\,dx + (3x-y)\,dy = \iint_D (3-2)\,dxdy = \iint_D dxdy = A$$

dır. Bu da elipsin alanıdır.

Elipsin parametrik denklemi,

$$x = a\cos\theta, \; y = b\sin\theta \text{ ve } 0 \le \theta \le 2\pi$$

olmak üzere Green formülü yardımıyla alan hesabından

$$A = \frac{1}{2}\int_c x\,dy - y\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (a\cos\theta)(b\cos\theta)\,d\theta - (b\sin\theta)(-a\sin\theta)\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (ab\cos^2\theta + ab\sin^2\theta)\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} ab\,d\theta$$

$$= \pi ab$$

bulunur.

Örnek: $\oint_c (x^2 - y^2)\,dx + 2xy\,dy$, $x = 0, x = 2, y = 0, y = 2$ eğrisel integralleri Green teoreminden faydalanarak, verilen çevre eğrileri yardımıyla hesaplayınız.

Çözüm: Green Teoreminden,

$$P(x,y) = x^2 - y^2,\ Q(x,y) = 2xy$$

olduğundan

$$\oint_c (x^2 - y^2)\,dx + 2xy\,dy = \iint_D (2y + 2y)\,dx\,dy$$

$$= \int_{y=0}^{2}\int_{x=0}^{2} 4y\,dx\,dy$$

$$= \int_0^2 4xy\Big|_0^2\,dy$$

$$= \int_0^2 8y\,dy$$

$$= 4y^2\Big|_0^2$$

$$= 16$$

Örnek: $\oint_c 2xy^2\,dx + x^2y\,dy$, $4x^2 + y^2 = 4$ eğrisel integralleri Green teoreminden faydalanarak, verilen çevre eğrileri yardımıyla hesaplayınız.

Çözüm: Green Teoreminden,

$$P(x,y) = 2xy^2,\ Q(x,y) = x^2y$$

olduğundan

$$\oint_c 2xy^2\,dx + x^2y\,dy = \iint_D (2xy-4xy)\,dx\,dy$$
$$= -\int_{y=-2}^{2}\int_{x=-1}^{1} 2xy\,dx\,dy$$
$$= -\int_{-2}^{2} x^2y\Big|_{-1}^{1}\,dy$$
$$= -\int_{-2}^{2} 2y\,dy$$
$$= -y^2\Big|_{-2}^{2}$$
$$= 0$$

Örnek: Green teoremini kullanarak, $4x^2+y^2=4$ elipsi üzerinden $\oint_c (x\cos x - e^y)\,dx - (y^2+xe^y)\,dy$ eğrisel integralleri hesaplayınız.

Çözüm:
$$\oint_c (x\cos x - e^y)\,dx - (y^2+xe^y)\,dy = \iint_D (-e^y+e^y)\,dx\,dy = 0$$

Örnek: Green teoremini kullanarak, $\sqrt{x}+\sqrt{y}=5$ eğrisiyle $[0,25]$ aralığında $\oint_c e^x \sin y\,dx + e^x\cos y\,dy$ eğrisel integralleri hesaplayınız.

Çözüm:
$$\oint_c (x\cos x - e^y)\,dx - (y^2+xe^y)\,dy = \iint_D (e^x\cos y - e^x\cos y)\,dx\,dy = 0$$

KAYNAKÇA

- Doç. Dr. M. Kemal Sağel, Vektörel Analiz, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi döner sermaye işletmesi yayınları, No: 67, 2003, Ankara.
- Prof. Dr. Mustafa BALCI, Matematik Analiz II, Bilim Kitap Kırtasiye Ltd. Şti., Ankara, 1997.

- Prof. Dr. Mustafa BAYRAKTAR, Analiz, Korza yayıncılık a.ş., Ankara, 2017.
- Murray R. Spiegel, İleri Matematik, Çev. Prof. Dr. H. Hilmi HACISALİHOĞLU, Schaum Yayınları, Nobel Yayın Dağıtım, 1997, Ankara.
- Thomas Calculus 2, George B. Thomas Jr., Massachusetts Institute of Technology, Maurice D. Weir, Naval Postgraduate School, Joel Hass, University of California Davis, Frank R. Giordano, Naval Postgraduate School, Çeviren: Recep Korkmaz, Beta Yayıncılık, İstanbul, 2010.