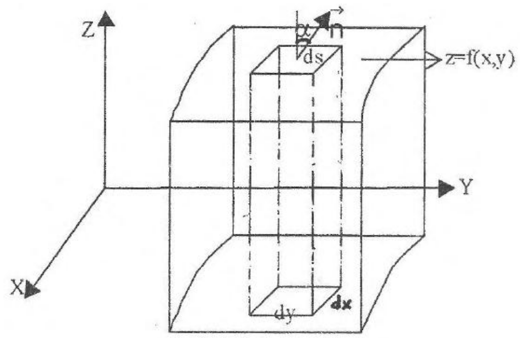
5. BÖLÜM
YÜZEY İNTEGRALLERİ

GİRİŞ

Bu bölümde yüzey integralleri olan Divergens (Gauss) teoremi ve Stokes teoremini inceleyeceğiz.

Bir yüzey üzerinde integrel işlemini yaparken yüzeyi düzgün yüzey parçalarına ayırmak gerekir. Düzgün yüzeyler küre, silindir ve koni gibi yüzeylerdir. Düzgün yüzeylerde koordinatların değiştirilmesi ile yüzeyin xy düzlemi üzerindeki izdüşümünün kapalı düzgün bir eğri meydana getirdiğini kabul edelim. Bu yüzey z = f(x, y) denklemli, birinci mertebeden sürekli ve diferensiyellenebilir olsun. Bu yüzeyler üzerindeki integral, yüzey parçaları üzerindeki integrallerin toplamına eşit olduğundan burada bir yüzey parçası üzerinden integral almak yeterlidir. Şekil 5.1 den de görüldüğü gibi z = f(x, y) denklemli yüzeyin her bir noktasındaki teğet düzlemi ve doğrultman kosinüslerinin $z_x, z_y, -1$ ile orantılı olan normal bir doğrultusu vardır.



Şekil 5. 1

Yüzeyin her bir noktasındaki ds alan parçası, teğet düzlem içinde olup, xy düzlemi üzerindeki izdüşümü dxdy olan yüzey parçasıdır. Burada

$$dx\,dy = \cos\alpha\, ds$$

dir. O halde a açısı yüzeyin her bir noktasındaki normal vektör ile arasındaki açıdır ve

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}$$

olur.

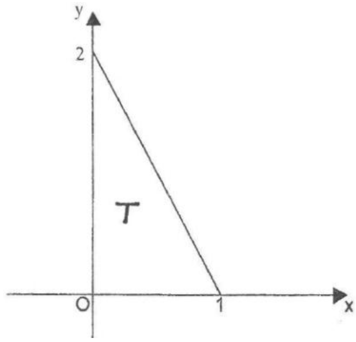
T de S yüzeyinin xy düzlemi üzerindeki izdüşümü olmak üzere yüzeyin alanı

$$A=\int_S ds=\iint_T \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dx\,dy$$

dir.

Örnek: $6x+3y+2z=6$ düzleminin koordinat düzlemleri arasında kalan parçasının alanını bulunuz.

Çözüm:



Şekil 5.2.

Şekil 5.2. den görüldüğü gibi alanı istenen düzlem parçasının xy düzlemi üzerindeki izdüşümü $x+\dfrac{y}{2}=1$ doğrusu ile koordinat eksenlerinin sınırladığı T bölgesidir. O halde $z=3\left(1-x-\dfrac{y}{2}\right)$ olur.

Burada $z_x=-3, z_x=-\dfrac{3}{2}$ ve $\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\dfrac{7}{2}$ olduğundan,

$$A=\iint_T \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dx\,dy$$

de yerine konursa

$$A=\int_{y=0}^{2}\int_{x=0}^{1-\frac{y}{2}}\frac{7}{2}dx\,dy=\frac{7}{2}\int_{y=0}^{2}x\Big|_0^{1-\frac{y}{2}}dy=\frac{7}{2}\int_{y=0}^{2}\left(1-\frac{y}{2}\right)dy=\frac{7}{2}\left(y-\frac{y^2}{4}\right)\Bigg|_0^2=\frac{7}{2}$$

elde edilir.

YÜZEY ÜZERİNDE SKALER VE VEKTÖR ALANLARININ İNTEGRALLERİ

5.1. Tanım: f, D bölgesinde sürekli bir skaler alan ve S de düzgün bir yüzey. Bu yüzeyin vektörel denklemi

$$\vec{R}(x,y) = U(x,y)\,\vec{i} + V(x,y)\,\vec{j} + W(x,y)\,\vec{k}$$

ayrıca xy düzleminin bir T bölgesinde sürekli diferensiyellenebilir olsun. S üzerinde f nin yüzey integrali

$$\iint_S f\,ds$$

şeklinde tanımlanır. O halde

$$\iint_S f\,ds = \iint_S f[U(x,y),V(x,y),W(x,y)]\left\|\vec{R}_x \times \vec{R}_y\right\| dx\,dy$$

dir. Eğer S yüzey alanı için f =1 ise yüzey alanı

$$A = \iint_S \left\|\vec{R}_x \times \vec{R}_y\right\| dx\,dy$$

dir.

Örnek: $\vec{R}(x,y) = \sin x \cos y\,\vec{i} + \sin x \sin y\,\vec{j} + \cos x\,\vec{k}$, $(0 \le x \le \pi, 0 \le y \le 2\pi)$ vektörel denklemli kürenin yüzey alanını bulunuz.

Çözüm:

$$A = \int_{y=0}^{2\pi}\int_{x=0}^{\pi} \left\|\vec{R}_x \times \vec{R}_y\right\| dx\,dy$$

Den

$$\vec{R}_x(x,y) = \cos x \cos y\,\vec{i} + \cos x \sin y\,\vec{j} - \sin x\,\vec{k}$$

$$\vec{R}_y(x,y) = -\sin x \sin y\,\vec{i} + \sin x \cos y\,\vec{j}$$

ve

$$\vec{R}_x \times \vec{R}_y = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos x \cos y & \cos x \sin y & -\sin x \\ -\sin x \sin y & \sin x \cos y & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \sin^2 x \cos y\,\vec{i} + \sin^2 x \sin y\,\vec{j} + \sin x \cos x\,\vec{k}$$

$$\left\|\vec{R}_x \times \vec{R}_y\right\| = \sqrt{\sin^4 x \cos^2 y + \sin^4 x \sin^2 y + \sin^2 x \cos^2 x} = \sin x$$

bulunur. Bu ifadeler yerine konursa,

$$A = \int_{y=0}^{2\pi}\int_{x=0}^{\pi} \sin x\,dx\,dy = \int_0^{2\pi} (-\cos x)\Big|_0^{\pi} dy = 2\int_0^{2\pi} dy = 2y\Big|_0^{2\pi} = 4\pi$$

bulunur.

DİVERGENS TEOREMİ

5.1. Teorem (Divergens Teoremi): D, S kapalı yüzeyinin çevrelediği üç boyutlu uzay bölgesi ve $\vec{n}$ de yüzeye ait dışa doğru yönlendirilmiş birim normal vektör olsun. Eğer $\vec{F}$, D bölgesinde sürekli kısmi türevleri olan bir vektör alanı ise

$$\iint_S \vec{F}.\vec{n}\, ds = \iiint_D \operatorname{div}\vec{F}\, dx\, dy\, dz$$

dir.

İspat: $\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\,\vec{i} + Q(x,y,z)\,\vec{j} + R(x,y,z)\,\vec{k}$ olsun.

$$\iint_S (P\,\vec{i}.\vec{n} + Q\,\vec{j}.\vec{n} + R\,\vec{k}.\vec{n})\, ds = \iiint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial y} \right) dx\, dy\, dz$$

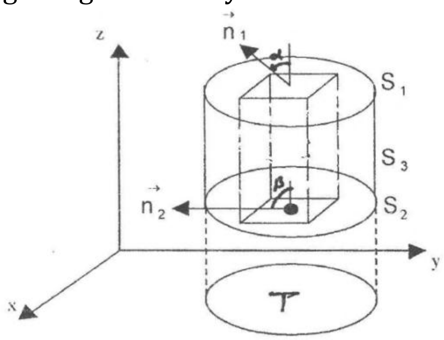
dir. Teoremin ispatını yapmak için,

$$\iiint_D \frac{\partial P}{\partial x}\, dx\, dy\, dz = \iint_S P\,\vec{i}.\vec{n}\, ds$$

$$\iiint_D \frac{\partial Q}{\partial y}\, dx\, dy\, dz = \iint_S Q\,\vec{j}.\vec{n}\, ds$$

$$\iiint_D \frac{\partial R}{\partial z}\, dx\, dy\, dz = \iint_S R\,\vec{k}.\vec{n}\, ds$$

eşitliklerinin doğru olduğunu göstermek yeterlidir.



Şekil 5.3.

Şekil 5.3. de görüldüğü gibi, S, koordinat eksenlerine paralel doğrularının kendisini ikiden fazla noktada kesmediği kapalı bir yüzey, yüzeyin üst kısmına S_1, alt kısmına S_2 ve silindir yüzeyine S_3 diyelim. Bunların denklemleri ise

$$S_1 : z = f_1(x,y),\ S_2 : z = f_2(x,y),\ S_3 : F_2(x,y) \le z \le F_1(x,y)$$

ve S yüzeyinin xy düzlemindeki izdüşümüne T diyelim. Şimdi de eşitliklerin ispatı birbirinin benzeri olduğundan, III. nün ispatını yapalım.

$$\iiint_D \frac{\partial R}{\partial z}\, dx\, dy\, dz = \iint_T \left[\int_{z=f_2(x,y)}^{f_1(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}\, dz \right] dy\, dx$$

$$= \iint_T R(x,y,z)\Big|_{f_2(x,y)}^{f_1(x,y)}\, dy\, dx$$

$$= \iint_T [R(x,y,f_1(x,y)) - R(x,y,f_2(x,y))]\,dy\,dx$$

dir. S, üst parçası için $\vec{k}$ ile $\vec{n}_1$ vektörü arasındaki α açısı bir dar açı olduğundan

$$dy\,dx = \cos\alpha\,ds_1 = \vec{k}.\vec{n}_1 ds_1$$

dir. S_2 alt parçası için $\vec{k}$ ile $\vec{n}_2$ vektörü arasındaki β açısı dar bir açı olduğundan

$$dy\,dx = -\cos\beta\,ds_2 = \vec{k}.\vec{n}_2 ds_2$$

dir. Bu durumda,

$$\iint_T R(x,y,f_1(x,y))\,dy\,dx = \iint_{S_1} R\,\vec{k}.\vec{n}_1 ds_1$$

ve

$$\iint_T R(x,y,f_2(x,y))\,dy\,dx = \iint_{S_2} R\,\vec{k}.\vec{n}_2 ds_2$$

dir.

$$\iint_T [R(x,y,f_1(x,y)) - R(x,y,f_2(x,y))]\,dy\,dx = \iint_{S_1} R\,\vec{k}.\vec{n}_1 ds_1 + \iint_{S_2} R\,\vec{k}.\vec{n}_2 ds_2$$

$$= \iint_S R\,\vec{k}.\vec{n} ds$$

olduğundan

$$\iint_D \frac{\partial R}{\partial z} dx\,dy\,dx = \iint_T R\,\vec{k}.\vec{n}\,ds$$

dir. Benzer şekilde S yüzeyinin diğer koordinat düzlemleri üzerindeki izdüşümleri alınarak diğer eşitlikler ispatlanır. Böylece elde edilen eşitliğinin toplamı ile istenilen divergens teoremi ispat edilmiş olur.

Örnek: $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$, $z = 3$ doğruları tarafından sınırlanan bölge üzerinde alınan $\vec{F}(x,y,z) = 4x\,\vec{i} - 2y^2\,\vec{j} + z^2\,\vec{k}$ vektör alanını divergens teoreminden yararlanarak hesaplayınız.

Çözüm: $\displaystyle\iint_S \vec{F}.\vec{n}\,ds = \iiint_D \operatorname{div}\vec{F}\,dx\,dy\,dz$

$$\operatorname{div}\vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(4x) + \frac{\partial}{\partial y}(-2y^2) + \frac{\partial}{\partial z}(z^2) = 4 - 4y + 2z$$

$$\iint_S \vec{F}.\vec{n}\,ds = \int_{x=-2}^{2} \int_{y=-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{z=0}^{3} (4 - 4y + 2z)\,dz\,dy\,dx$$

$$= \int_{x=-2}^{2} \int_{y=-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} (4z - 4yz + z^2)\Big|_{z=0}^{3}\,dy\,dx$$

$$= \int_{x=-2}^{2} \int_{y=-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} (12-12y+9)\,dy\,dx$$

$$= \int_{x=-2}^{2} (21y-6y^2)\Big|_{y=-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dx$$

$$= \int_{x=-2}^{2} [21\sqrt{4-x^2} - 6(4-x^2) + 21\sqrt{4-x^2} + 6(4-x^2)]\,dx$$

$$= 42 \int_{x=-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\,dx$$

$$= 42\left[\frac{1}{2}x\sqrt{4-x^2} + \frac{4}{2}\arcsin\frac{x}{2}\Big|_{-2}^{2}\right]$$

$$= 42\left[\left(\frac{1}{2}2\sqrt{4-2^2} + 2\arcsin\frac{2}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}(-2)\sqrt{4-2^2} + 2\arcsin\frac{-2}{2}\right)\right]$$

$$= 42(2\arcsin 1 - 2\arcsin(-1))$$

$$= 84\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{2}\right)$$

$$= -84\pi$$

Örnek: $\vec{F}(x,y,z) = x^2\,\vec{i} + xy\,\vec{j} + xz\,\vec{k}$ ve S de $z=0, z=b, x^2+y^2=a^2$ silindir yüzeyinin yüzey integralini bulunuz.

Çözüm: $\operatorname{div}\vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2) + \frac{\partial}{\partial y}(xy) + \frac{\partial}{\partial z}(xz) = 2x + x + x = 4x$

$$\iint_S \vec{F}.\vec{n}\,ds = \iiint_D \operatorname{div}\vec{F}\,dx\,dy\,dz$$

$$= \int_{z=0}^{b} \int_{y=-a}^{a} \int_{x=-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} (4x)\,dx\,dy\,dz$$

$$= \int_{z=0}^{b} \int_{y=-a}^{a} (2x^2)\Big|_{x=-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy\,dz$$

$$= \int_{x=0}^{b} \int_{y=-a}^{a} 2.(\sqrt{a^2-x^2}^{\,2} - (-\sqrt{a^2-x^2})^2)\,dy\,dz$$

$$= \int_{x=0}^{b} \int_{y=-a}^{a} 2.0\,dy\,dz$$

$$= 0$$

Örnek: $\vec{F}(x,y,z)=x^3\,\vec{i}+x^2y\,\vec{j}+x^2z\,\vec{k}$ ve S de $x^2+y^2=1$ yüzeyinin divergens teoreminin doğruluğunu gösteriniz.

Çözüm: $\operatorname{div}\vec{F}=\dfrac{\partial}{\partial x}(x^3)+\dfrac{\partial}{\partial y}(x^2y)+\dfrac{\partial}{\partial z}(x^2z)=3x^2+x^2+x^2=5x^2$

$$\iint_S \vec{F}.\vec{n}\,ds=\iiint_D \operatorname{div}\vec{F}\,dx\,dy\,dz$$

$$=\int_{x=-1}^{1}\int_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{z=0}^{4}(5x^2)\,dz\,dy\,dx$$

$$=\int_{x=-1}^{1}\int_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}(5x^2z)\Big|_{z=0}^{4}\,dy\,dx$$

$$=\int_{x=-1}^{1}\int_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}20x^2\,dy\,dx$$

$$=\int_{x=-1}^{1}20x^2y\Big|_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$=\int_{x=-1}^{1}20x^2(\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-x^2})\,dx$$

$$=\int_{x=-1}^{1}40x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$$

$$=40\left[-\frac{x^2(1-x^2)^{3/2}}{4}\Big|_{-1}^{1}+\frac{1}{4}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx\right]$$

$$=40\left[0+\frac{1}{4}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx\right]$$

$$=10\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx$$

$$=10\left(\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin x\right)\Big|_{-1}^{1}$$

$$=5(\arcsin-\arcsin(-1))$$

$$=5\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)$$

$=5\pi$

Divergens Teoreminin Fizik Açısından İzahı:

$\vec{F}$ br sıvının herhangi bir noktasındaki hızı, Δt sariyede ds den geçen sıvının hacmi taban ds ve eğik yüksekliği $v\Delta t$ olan silindirin hacmi

$$H=(\vec{v}\Delta t).\vec{n}\,ds=\vec{v}.\vec{n}\,ds\,\Delta t$$

O halde bir saniyede geçen s ı v ı n ı n hacmi

$$H=\vec{v}.\vec{n}\,ds$$

dir. Akan bir akışkanın bir P(x, y, z) iç noktasındaki hızı $\vec{F}$ ve akışkan içindeki bir D bölgesinin sınırı olan kapalı yüzey S olsun. Bu durumda

$$\iint_S \vec{F}.\vec{n}\,ds$$

integrali birim zamanda bu bölgeden dışarıya çıkan akışkanı gösterir. Eğer akışkan sıkışamaz ise içeri giren akışkan ile dışarı çıkan akışkan bir birine eşit ve

$$\iint_S \vec{F}.\vec{n}\,ds=\iiint_D \vec{\nabla}.\vec{F}\,dv=\iiint_D \mathrm{div}\vec{F}\,dv=0$$

halde sıkışamaz bir akışkanın hızının divergensi sıfırdır.

Not: Akan bir akışkanın her noktadaki hızı, o noktadaki birim hacmin birim zamandaki değişme miktarına eşit bir divergense sahiptir.

Not: Bir $\vec{F}$ vektör alanının birim normal vektörünün kapalı bir yüzey üzerinde hesaplanan yüzey integrali, bu vektörünün divergensi söz konusu yüzey tarafından sınırlanan hacim üzerinden hesaplanan integraline eşittir.

STOKES TEOREMİ

5.2. Teorem (Stokes Teoremi): C, basit kapalı, parçalı düzgün, pozitif yönlü bir eğri ve bu eğrinin çevrelediği yüzey, S olsun. Yüzey üzerinde pozitif tarafa yönlendirilmiş birim normal vektör $\vec{n}$ ve $\vec{F}$ nin bile şenleri $S\cup C$ de sürekli ve diferensiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere

$$\int_C \vec{F}\,d\vec{r}=\iint_S \mathrm{rot}\,\vec{F}.\vec{n}\,ds$$

dir.

İspat: $\vec{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\,\vec{i}+Q(x,y,z)\,\vec{j}+R(x,y,z)\,\vec{k}$ olsun.

$$\int_C P\,dx+Q\,dy+R\,dz=\iint_S \mathrm{rot}\,\vec{F}.\vec{n}\,ds=\iint_S [\vec{\nabla}\times(P\,\vec{i}+Q\,\vec{j}+R\,\vec{k})].\vec{n}\,ds$$

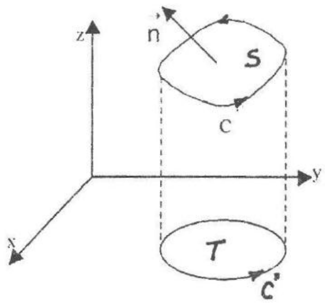
dir. Buradan,

$$\int_C P\,dx = \iint_S (\vec{\nabla}\times P\,\vec{i}).\vec{n}\,ds \qquad (1)$$

$$\int_C Q\,dy = \iint_S (\vec{\nabla}\times Q\,\vec{j}).\vec{n}\,ds \qquad (2)$$

$$\int_C R\,dz = \iint_S (\vec{\nabla}\times R\,\vec{k}).\vec{n}\,ds \qquad (3)$$

eşitliklerini hesaplayalım.



şekil 5.4.

Şekil 5.4. de görüldüğü gibi, S yüzeyinin xy düzlemindeki izdüşümüne T diyelim. f, g ve h tek değerli, sürekli ve diferensiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere S yüzeyinin denkleminin z = f(x, y) veya x = g(y, z) veya y = h(x, z) ile gösterildiğini kabul edelim. Şimdi, S yüzeyinin denklemi z = f(x, y) ve yer vektörü

$$\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + f(x,y)\,\vec{k}$$

olduğundan

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = \vec{j} + f_y(x,y)\,\vec{k}$$

dır. Bu vektör S yüzeyine teğet olduğundan $\vec{n}$'ne diktir. O halde

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial y}.\vec{n} = \vec{j}.\vec{n} + f_y(x,y)\,\vec{k}.\vec{n} = 0$$

$$\vec{j}.\vec{n} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial y}.\vec{n} - f_y\,\vec{k}.\vec{n} = -z_y\vec{k}.\vec{n}$$

ve S yüzeyi üzerinde P(x, y, z,) = P(x, y, f(x, y)) = F(x, y) olduğundan

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial y}.\frac{\partial z}{\partial y}$$

dir. Bunları , (1) denkleminde yerine koyarsak,

$$\iint_S (\vec{\nabla}\times P\,\vec{i}).\vec{n}\,ds = \iint_S \left(\frac{\partial P}{\partial z}\,\vec{j} - \frac{\partial P}{\partial y}\,\vec{k}\right).\vec{n}\,ds$$

$$= \iint_S \left(\frac{\partial P}{\partial z}\,\vec{j}.\vec{n} - \frac{\partial P}{\partial y}\,\vec{k}.\vec{n}\right)\,ds$$

$$=\iint_S \left(\frac{\partial P}{\partial z}(-z_y)\vec{k}.\vec{n} - \frac{\partial P}{\partial y}\vec{k}.\vec{n} \right) ds$$

$$=\iint_S \left(-\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)\vec{k}.\vec{n}\ ds$$

dir. Buradan da S yüzeyinin xy düzlemi üzerindeki izdüşümü T olmak üzere,

$$=-\iint_T \frac{\partial F}{\partial y}\,dx\,dy$$

dir. Düzlemde Green teoremi gereğince

$$=\int_{C^*} F\,dx$$

dir. C* eğrisinin çevrelediği yüzey T olduğundan, F fonksiyonunun C* eğrisinin her (x, y) noktasındaki değeri, P fonksiyonunun C eğrisinin her (x, y, z) noktasındaki değere eşit olması C ve C* eğrileri için dx ' in değişmediğinden dolayı

$$\int_{C^*} F\,dx = \int_C P\,dx = \iint_S (\vec{\nabla}\times P\,\vec{i}).\vec{n}\,ds$$

dir. Benzer şekilde yz ve zx düzlemleri üzerindeki izdüşüm yapılarak,

$$\int_C Q\,dy = \iint_S (\vec{\nabla}\times Q\,\vec{j}).\vec{n}\,ds$$

ve

$$\int_C R\,dz = \iint_S (\vec{\nabla}\times R\,\vec{k}).\vec{n}\,ds$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitlikler taraf tarafa toplanırsa

$$\int_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint_S [\vec{\nabla}\times(P\,\vec{i}+Q\,\vec{j}+R\,\vec{k})].\vec{n}\,ds$$

$$=\iint_S [\vec{\nabla}\times\vec{F}].\vec{n}\,ds$$

$$=\iint_S \mathrm{rot}\vec{F}.\vec{n}\,ds$$

elde edilir.

Not: Stokes teoreminin özel bir hali düzlemde Green teoremidir.

Eğer, yukar ıdaki şartlar ı sağlamayan yüzeyler için de teorem geçerlidir. Bunun için yüzey $S_1, S_2, ..., S_n$ gibi alt yüzeylere ayrılarak, yüzeylerin meydana geldiği $C_1, C_2, ..., C_n$ eğrileri şartları sağlasın. Bu taktirde her yüzey için Stokes teoremi geçerlidir. Bu durumda yüzey $S_1, S_2, ..., S_n$ yüzeylerinin integralleri toplamı alınarak S yüzeyi üzerinden toplam integral bulunur. $C_1, C_2, ..., C_n$ eğrileri boyunca hesaplanan eğrisel integrallerin toplamı alınarak C eğrisi boyunca hesaplanan eğrisel integral bulunur.

Örnek: $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ yarı küresinin

$$\vec{F}(x,y,z)=(1-z)y\,\vec{i}+ze^x\,\vec{j}+x\sin z\,\vec{k}$$

vektör alanını stokes teoreminden yararlanarak hesaplayınız.

Çözüm: Stokes teoreminden

$$\iint_S \mathrm{rot}\vec{F}.\vec{n}\,ds=\int_C \vec{F}.d\vec{r}$$

$$=\int_C (1-z)y\,dx+ze^x\,dy+x\sin z\,dz$$

dir. Burada

$$x=a\cos\theta,\ y=a\sin\theta,\ z=0 \text{ ve } dx=-a\sin\theta\,d\theta,\ 0\le\theta\le 2\pi$$

olup,

$$\iint_S \mathrm{rot}\vec{F}.\vec{n}\,ds=\int_C y\,dx$$

$$=\int_0^{2\pi} a\sin\theta(-a\sin\theta)\,d\theta$$

$$=-a^2\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\,d\theta$$

$$=-\pi a^2$$

bulunur.

Örnek: $x^2+y^2+z^2=1$ küresinin üst yarısını n yüzeyi, C, bu yüzeyin sınırı ve $\vec{F}(x,y,z)=(2x-y)\,\vec{i}-yz^2\,\vec{j}-y^2z\,\vec{k}$ için stokes teoreminin doğruluğunu gösteriniz.

Çözüm: S yüzeyi, orijin merkezli, 1 yarıçaplı olan çemberin xy düzlemindeki çevresi C olsun

$x=\cos\theta$, $y=\sin\theta$, $z=0$, $dx=-\sin\theta\,d\theta$, $dy=\cos\theta\,d\theta$, $dz=0$ ve $0\le\theta\le 2\pi$ eşitlikleri C denklemleridir. Bu takdirde,

$$\oint_C \vec{F}.d\vec{r}=\oint_C (2x-y)\,dx-yz^2\,dy-y^2z\,dz$$

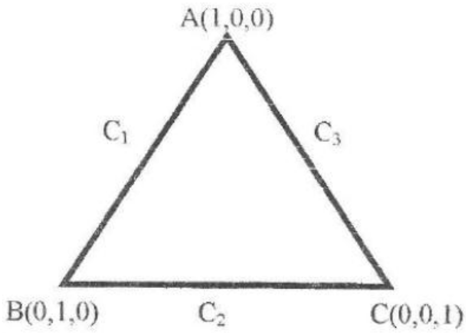
$$=\int_0^{2\pi}[(2\cos\theta-\sin\theta)(-\sin\theta\,d\theta)-\sin\theta.0dy-\sin^2\theta.0.0]\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}(-2\sin\theta\cos\theta+\sin^2\theta)\,d\theta$$

$$=\left[\cos^2\theta+\frac{1}{2}\theta-\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta\right]_0^{2\pi}$$
$$=1+\pi-0-1-0+0$$
$$=\pi$$

Örnek: $\vec{F}(x,y,z)=xz\,\vec{i}-y\,\vec{j}+xy\,\vec{k}$, S de A(1, 0, 0), B(0, 1, 0), C(0, 0, 1) noktaları üçgenin köşe noktaları ise stokes teoreminin doğrulunu gösteriniz.

Çözüm:



Stokes teoreminden $0\le t\le 1$ olmak üzere

$$\iint_S \text{rot}\vec{F}.\vec{n}\,ds=\int_C \vec{F}.d\vec{r}$$

$C_1: x+y=1, z=0$ için $x=t,\ y=1-t,\ z=0$ ise $dx=dt,\ dy=-dt\ dz=0$

$C_2: y+z=1, x=0$ için $x=0,\ y=t,\ z=1-t$ ise $dx=0,\ dy=dt\ dz=-dt$

$C_3: x+z=1, y=0$ için $x=t,\ y=0,\ z=1-t$ ise $dx=dt,\ dy=0,\ dz=-dt$

O halde

$$\oint_C \vec{F}.d\vec{r}=\oint_{C_1}\vec{F}.d\vec{r}+\oint_{C_2}\vec{F}.d\vec{r}+\oint_{C_3}\vec{F}.d\vec{r}$$

$$\oint_C xz\,dx-y\,dy+xy\,dz=\int_0^1(1-t)\,dt+\int_0^1(-t)\,dt+\int_0^1 t(1-t)\,dt$$
$$=\left(t-\frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_0^1-\frac{t^2}{2}\Bigg|_0^1+\left(\frac{t^2}{2}-\frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_0^1$$
$$=1-\frac{1}{2}-0+0-\frac{1}{2}+0+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-0+0$$
$$=\frac{1}{6}$$

olur.

Örnek: $\vec{F}(x,y,z)=(x^2+y-4)\,\vec{i}+3xy\,\vec{j}+(2xz+z^2)\,\vec{k}$, S de $z=4-\sqrt{x^2-y^2}$ paraboloidinin xy düzleminin üstünde kalan kısmının yüzeyi olduğuna göre $\iint\limits_S \mathrm{rot}\vec{F}.\vec{n}\,ds$ integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$\iint\limits_S \mathrm{rot}\vec{F}.\vec{n}\,ds=\int\limits_C \vec{F}.d\vec{r}=\int\limits_C (x^2+y-4)\,dx+3xy\,dy+(2xz+z^2)\,dz$$

Burada

$x=2\cos\theta$, $y=2\sin\theta$, $z=1$, $dx=-2\sin\theta\,d\theta$, $dy=2\cos\theta\,d\theta$, $dz=0$ ve $0\le\theta\le 2\pi$ alınırsa

$$\int\limits_C (x^2+y-4)\,dx+3xy\,dy+(2xz+z^2)\,dz$$

$$=\int_0^{2\pi}(4\cos^2\theta+2\sin\theta-4)(-2\sin\theta\,d\theta)+3.2\cos\theta.2\cos\theta\,d\theta+(2.2\cos\theta.0+0)\,0$$

$$=\int_0^{2\pi}(-8\sin\theta\cos^2\theta-4\sin^2\theta+8\sin\theta+24\cos^2\theta.\sin\theta)\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}(16\sin\theta\cos^2\theta-4\sin^2\theta+8\sin\theta)\,d\theta$$

$$=\left[-\frac{16}{3}\cos^3\theta-4\left(\frac{1}{2}\theta-\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta\right)-8\cos\theta\right]\Bigg|_0^{2\pi}$$

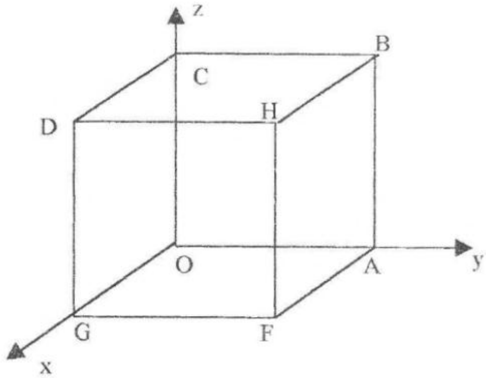
$$=\left[-\frac{16}{3}-4\left(\pi-\frac{1}{2}.0.1\right)-8\right]-\left[-\frac{16}{3}-4(0-0)-8\right]$$

$$=-\frac{16}{3}-4\pi-8+\frac{16}{3}+8$$

$$=-4\pi$$

Örnek: $\vec{F}(x,y,z)=(y-z+2)\,\vec{i}+(yz+4)\,\vec{j}-xz\,\vec{k}$, S de $x=0$, $y=0$, $z=0$, eşitlikleri ile belirlenen küpün xy düzleminin üstünde kalan k ı smı için stokes teoreminin doğruluğunu gösteriniz.

Çözüm: $x=0$, $y=0$, $z=0$ ve $x=2$, $y=2$, $z=2$



xy düzlemi üstünde kalan kısmı

$$\operatorname{rot}\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ y-z+2 & yz+4 & -xz\end{vmatrix}=-y\,\vec{i}+(z-1)\,\vec{j}-\vec{k}$$

DHFG yüzü için $n=\vec{i}$, $x=2$

$$\int_0^2\int_0^2[-y\,\vec{i}+(z-1)\,\vec{j}-\vec{k}]\,\vec{i}\,dy\,dz=\int_0^2\int_0^2-y\,dy\,dz=\int_0^2-\frac{y^2}{2}\Big|_0^2 dz=-2\int_0^2 dz=-4$$

ABCO yüzü için $n=-\vec{i}$, $x=0$

$$\int_0^2\int_0^2[-y\,\vec{i}+(z-1)\,\vec{j}-\vec{k}](-\vec{i})\,dy\,dz=\int_0^2\int_0^2 y\,dy\,dz=\int_0^2\frac{y^2}{2}\Big|_0^2 dz=2\int_0^2 dz=4$$

ABHF yüzü için $n=\vec{j}$, $y=2$

$$\int_0^2\int_0^2[-y\,\vec{i}+(z-1)\,\vec{j}-\vec{k}]\,\vec{j}\,dx\,dz=\int_0^2\int_0^2(z-1)x\,dx\,dz=2\int_0^2(z-1)\Big|_0^2 dz=0$$

OGDC yüzü için $n=-\vec{j}$, $y=0$

$$\int_0^2\int_0^2[-y\,\vec{i}+(z-1)\,\vec{j}-\vec{k}](-\vec{j})\,dx\,dz=\int_0^2\int_0^2(1-z)\,dx\,dz=\int_0^2(1-x)x\Big|_0^2 dz=0$$

BCDH yüzü için $n=\vec{k}$, $z=2$

$$\int_0^2\int_0^2[-y\,\vec{i}+(z-1)\,\vec{j}-\vec{k}]\,\vec{k}\,dx\,dy=\int_0^2\int_0^2-dx\,dy=-\int_0^2 x\Big|_0^2 dy=-4$$

OAFG yüzü için $n=-\vec{k}$, $z=2$

$$\int_0^2\int_0^2 [-y\,\vec{i}+(z-1)\,\vec{j}-\vec{k}](-\vec{k})\,dx\,dy=\int_0^2\int_0^2 dx\,dy=\int_0^2 x\Big|_0^2\,dy=4$$

Toplam Sonuç $-4+4+0+0-4+4=0$
olur.

ALIŞTIRMALAR

1. $\iiint_D \vec{\nabla}\times\vec{G}\,dx\,dy\,dz=\iint_S \vec{n}\times\vec{G}\,ds$ eşitliğinin doğruluğunu gösteriniz.

Çözüm: $\operatorname{div}\vec{F}=\vec{\nabla}.(\vec{G}\times\vec{H})=\vec{H}.(\vec{\nabla}\times\vec{G})$
ve

$$(\vec{G}\times\vec{H}).\vec{n}=\vec{G}.(\vec{H}\times\vec{n})=(\vec{H}\times\vec{n}).\vec{G}=\vec{H}.(\vec{n}\times\vec{G})$$

olduğundan

$$\iiint_D \operatorname{div}\vec{F}\,dx\,dy\,dz=\iiint_D \vec{H}.(\vec{n}\times\vec{G})\,dx\,dy\,dz=\iint_S \vec{H}.(\vec{n}\times\vec{G})\,ds$$

dir. Burada H vektörü integral işaretinin dışına alınırsa;

$$\iiint_D \operatorname{div}\vec{F}\,dx\,dy\,dz=\vec{H}\iint_S \vec{n}\times\vec{G}\,ds$$

ve H sabit bir vektör olduğundan

$$\iiint_D \vec{\nabla}\times\vec{G}\,dx\,dy\,dz=\iint_S \vec{n}\times\vec{G}\,ds$$

olur.

2. $\iiint_D \vec{\nabla}\phi\,dx\,dy\,dz=\iint_S \phi.\vec{n}\,ds$ eşitli ğ inin doğruluğunu gösteriniz.

Çözüm: Divergens teoreminden $\operatorname{div}\vec{F}=\vec{\nabla}.(\phi\vec{G})$ olduğundan

$$\iiint_D \operatorname{div}\vec{F}\,dx\,dy\,dz=\iiint_D \vec{\nabla}(\phi\vec{G})\,dx\,dy\,dz$$

dir. Burada

$$\vec{\nabla}.(\phi\vec{G})=\vec{\nabla}\phi.\vec{G}=\vec{G}.\vec{\nabla}\phi \text{ ve } \phi\vec{G}.\vec{n}=\vec{G}.\phi\vec{n}$$

olduğundan

$$\iint_S \phi\vec{G}.\vec{n}\,ds=\iint_S \vec{G}.\phi\vec{n}\,ds$$

dir. $\vec{G}$ vektörünü integral dışına alırsak

$$\vec{G}\iiint_D \vec{\nabla}\phi \, dx\, dy\, dz = \vec{G}\iint_S \phi\vec{n}\, ds$$

ve G sabit bir vektör olduğundan

$$\iiint_D \vec{\nabla}\phi \, dx\, dy\, dz = \iint_S \phi\vec{n}\, ds$$

bulunur.

3. $\iiint_D (\phi\vec{\nabla}^2\Psi - \Psi\vec{\nabla}^2\phi)\, dx\, dy\, dz = \iint_S (\phi\vec{\nabla}\Psi - \Psi\vec{\nabla}\phi)\, ds$ eşitliğinin doğruluğunu gösteriniz.

Çözüm: Divergens teoremi $\iiint_D \vec{\nabla}.\vec{F}\, dx\, dy\, dz = \iint_S \vec{F}.\vec{n}\, ds$ dir. O halde

$$\iiint_D \vec{\nabla}\,\vec{F}\, dx\, dy\, dz = \iiint_D \vec{\nabla}(\phi\vec{\nabla}\Psi)\, dx\, dy\, dz$$

dir. Burada

$$\iiint_D \vec{\nabla}(\phi\vec{\nabla}\Psi)\, dx\, dy\, dz = \iiint_D [(\phi\vec{\nabla}^2\Psi + \vec{\nabla}\phi.\vec{\nabla}\Psi)\, dx\, dy\, dz = \iint_S (\phi\vec{\nabla}\Psi)\, ds \quad (1)$$

$$\iiint_D \vec{\nabla}(\phi\vec{\nabla}\Psi)\, dx\, dy\, dz = \iiint_D [(\Psi\vec{\nabla}^2\phi + \vec{\nabla}\Psi.\vec{\nabla}\phi)\, dx\, dy\, dz = \iint_S (\Psi\vec{\nabla}\phi)\, ds \quad (2)$$

(2) den (1) çıkarılırsa

$$\iiint_D [(\Psi\vec{\nabla}^2\phi - \phi\vec{\nabla}^2\Psi)\, dx\, dy\, dz = \iint_S (\Psi\vec{\nabla}\phi - \phi\vec{\nabla}\Psi)\, ds$$

bulunur. Buda ikinci Green özdeşliğidir.

4. $\iint_S (\vec{n}\times\vec{\nabla})\times\vec{G}\, ds = \int_C \vec{G}\times d\vec{r}$ eşitliğinin doğruluğunu gösteriniz.

Çözüm: Stokes teoremi $\int_C \vec{F}.d\vec{r} = \iint_S (\vec{\nabla}\times\vec{F}).\vec{n}\, ds$ dir. H sabit bir ve $\vec{F} = \vec{G}\times\vec{H}$ alındığında

$$\oint_C (\vec{G}\times\vec{H}).d\vec{r} = \iint_S [\vec{\nabla}\times(\vec{G}\times\vec{H})].\vec{n}\, ds$$

$$\oint_C \vec{H}(\vec{G}\times d\vec{r}) = \iint_S [(\vec{\nabla}.\vec{H})\vec{G} - (\vec{\nabla}.\vec{G})\vec{H}].\vec{n}\, ds$$

$$\vec{H}\oint_C \vec{G}\times d\vec{r} = \iint_S [\vec{\nabla}.\vec{H})\vec{G}].\vec{n}\, ds - \iint_S [\vec{H}(\vec{\nabla}.\vec{G})].\vec{n}\, ds$$

$$= \iint_S \vec{H}\vec{\nabla}.(\vec{G}.\vec{n})\, ds - \iint_S \vec{H}.[\vec{n}(\vec{\nabla}.\vec{G})]\, ds$$

$$= \iint_S \vec{H}[\vec{\nabla}.(\vec{G}.\vec{n}) - \vec{n}(\vec{\nabla}.\vec{G})]\,ds$$

$$= \iint_S \vec{H}[(\vec{n}\times\vec{\nabla})\times\vec{G}]\,ds$$

olur. H sabir bir vektör olduğundan

$$\oint_C \vec{G}\times d\vec{r} = \iint_S (\vec{n}\times\vec{\nabla})\times\vec{G}\,ds$$

dir.

5. Her kapalı C eğrisi için $\int_C \vec{F}.d\vec{r} = 0$ eşitliğinin doğru olması için gerek ve yeter şartın $\vec{\nabla}\,\vec{F} = 0$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Her kapalı C eğrisi için $\int_C \vec{F}.d\vec{r} = 0 \Leftrightarrow \vec{\nabla}\times\vec{F} = 0$ dir.

$\Leftarrow$: $\vec{\nabla}\times\vec{F} = 0$ olduğunda stokes teoremi gereğince

$$\int_C \vec{F}.d\vec{r} = \iint_S (\vec{\nabla}\times\vec{F}).\vec{n}\,ds = 0$$

d ı r.

$\Rightarrow$: Her kapalı C eğrisi için $\oint_C \vec{F}.d\vec{r} = 0$ dır. Kabul edelim ki $\vec{\nabla}\times\vec{F} \neq 0$ olsun. Bu durumda $\vec{\nabla}\times\vec{F}$ nin sürekli olduğu bir bölge vardır. Bu bölgede $\vec{n}$ normali $\vec{\nabla}\times\vec{F}$ ile aynı olan bir S yüzeyi vardır. k pozitif bir sabit olmak üzere $\vec{\nabla}\times\vec{F} = k\,\vec{n}$ dir. S nin sınını C olsun. Stokes teoremi gereğince,

$$\int_C \vec{F}.d\vec{r} = \iint_S (\vec{\nabla}\times\vec{F}).\vec{n}\,ds = k\iint_S \vec{n}.\vec{n}\,ds > 0$$

olur. Bu durumda $\oint_C \vec{F}.d\vec{r} = 0$ ile çelişkili olur. O halde $\vec{\nabla}\times\vec{F} = 0$ olmalıdır.

Not: $\oint_C \vec{F}.d\vec{r}$ integralinin yola bağlı olmaması için gerek ve yeter şart $\vec{\nabla}\times\vec{F} = 0$ olmasıdır.

KAYNAKÇA

- Doç. Dr. M. Kemal Sağel, Vektörel Analiz, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi döner sermaye işletmesi yayınları, No: 67, 2003, Ankara.
- Prof. Dr. Mustafa BALCI, Matematik Analiz II, Bilim Kitap Kırtasiye Ltd. Şti., Ankara, 1997.
- Prof. Dr. Mustafa BAYRAKTAR, Analiz, Korza yayıncılık a.ş., Ankara, 2017.
- Murray R. Spiegel, İleri Matematik, Çev. Prof. Dr. H. Hilmi HACISALİHOĞLU, Schaum Yayınları, Nobel Yayın Dağıtım, 1997, Ankara.
- Thomas Calculus 2, George B. Thomas Jr., Massachusetts Institute of Technology, Maurice D. Weir, Naval Postgraduate School, Joel Hass, University of California Davis, Frank R. Giordano, Naval Postgraduate School, Çeviren: Recep Korkmaz, Beta Yayıncılık, İstanbul, 2010.