# 1. BÖLÜM
# KOMPLEKS (KARMAŞIK) SAYILAR

## KOMPLEKS (KARMAŞIK) SAYI KAVRAMI

Negatif sayıların bulunmasından sonra, matematikçiler karesi negatif sayı olan sayıyı aradılar. Matematikçilerin ilk kanaati böyle bir sayının mevcut olmadığı yönünde oldu. 1637'de Rene Descartes[1] bu tür sayıların varlığına dikkati çekmiştir. 1777'de Leonhard Euler[2] günümüzdeki i sayısını sembol olarak kullanmıştır. Karmaşık sayı sözü ilk defa Gauss[3] tarafından verilmiştir. Elektrik ve mağnetizmanın matematiksel ifadesinde karmaşık sayılar önemli rol oynamaktadır.


(René Descartes)


(Carl Friedrich Gauss)


(Leonhard Euler)

$x^2 + 1 = 0$ denkleminde çözüm $x = \sqrt{-1}$ dir. Bu ifadenin reel olarak çözümü yoktur. Ama bu çözüme sanal sayı adı verilecek.

**1.1. Tanım:** $\sqrt{-1} = i$ olarak kabul edelim. Bu ifadeye sanal sayı denir.

**Örnek:** $\sqrt{-9} = 3i$, $\sqrt{-25} = 5i$ dir.

---

[1] René Descartes, (31 Mart 1596 Descartes Fransa – 11 Şubat 1650 Stockholm İsveç)
[2] Leonhard Euler (15 Nisan 1707 Basel İsviçre – 18 Eylül 1783 Petersburg Rusya)
[3] Carl Friedrich Gauss (30 Nisan 1777 Braunschweig, Almanya – 23 Şubat 1855 Göttingen Almanya)

**1.2. Tanım:** $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $z = a + i\,b$ şeklinde tanımlanan sayıya karmaşık (complex) sayı denir. $\mathbb{C}$ ile gösterilir. Burada a sayısına reel kısım denir ve $Re(z) = a$ ile gösterilir, b sayısına sanal kısım denir ve $Im(z) = b$ ile gösterilir.

**Örnek:** $z = 3 + 5i$ olup $Re(z) = 3$ ve $Im(z) = 5$ dir.
$z = \sqrt{2} - 8i$ olup $Re(z) = \sqrt{2}$ ve $Im(z) = -8$ dir.
$z = -5 + \frac{3}{2}i$ olup $Re(z) = -5$ ve $Im(z) = \frac{3}{2}$ dir.
$z = 10i$ olup $Re(z) = 0$ ve $Im(z) = 10$ dir.
$z = -15$ olup $Re(z) = -15$ ve $Im(z) = 0$ dir.

**1.1. Not:** Görüldüğü gibi $-15$ reel sayısı aynı zamanda karmaşık sayıdır. Şu halde her reel sayı aynı zamanda karmaşık sayıdır. Buna göre sayı sistemini şu şekilde sıralayabiliriz.

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

(Burada $\mathbb{N}$ doğal sayılar, $\mathbb{Z}$ tam sayılar, $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar, $\mathbb{R}$ reel sayılar ve $\mathbb{C}$ kompleks (karmaşık) sayılardır)

**Örnek:** $a < 0 < b$ olmak üzere,

$$z = \sqrt{b - a} + \sqrt{a - b}$$

kompleks sayısının reel ve sanal kısmını yazınız.

Çözüm: $a < 0 < b$ olduğundan $b - a > 0$ ve $a - b < 0$ bulunur. Buna göre,

$$Re(z) = \sqrt{b - a} \text{ ve } Im(z) = \sqrt{a - b}$$

dir.



## SANAL BİRİMİN KUVVETLERİ

Sanal birim olan i nin kuvvetlerini tek tek inceleyelim. $\sqrt{-1} = i$ olduğunu unutmayalım.

| | |
|---|---|
| $i^0 = 1$ | $i^1 = i$ |
| $i^2 = -1$ | $i^3 = -i$ |
| $i^4 = 1$ | $i^5 = i$ |
| $i^6 = -1$ | $i^7 = -i$ |
| $i^8 = 1$ | ... |

şeklindedir. Görüldüğü gibi sanal birimin kuvvetleri $\{1, i, -1, -i\}$ kümesini oluşturmaktadır. Yani, her $n \in \mathbb{N}$ için

$$i^{4n+0} = 1 \qquad i^{4n+1} = i$$
$$i^{4n+2} = -1 \qquad i^{4n+3} = -i$$

olmaktadır. Buna göre,

$$n \equiv m \ (\mathrm{mod}\ 4) \text{ ise } i^n = i^m$$

şeklinde yazılabilir.

**Örnek:**

$i^{49} = i^{4.12+1} = (i^4)^{12} i = i$ veya $49 \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 4)$ olduğundan $i^{49} = i$

$i^{102} = i^{4.25+2} = (i^4)^{25} i^2 = -i$ veya $102 \equiv 2 \ (\mathrm{mod}\ 4)$ olduğundan $i^{102} = -1$

$i^{35} = i^{4.8+3} = (i^4)^{8} i^3 = -i$ veya $35 \equiv 3 \ (\mathrm{mod}\ 4)$ olduğundan $i^{35} = -i$

$i^{184} = i^{4.45+0} = (i^4)^{45} i^0 = 1$ veya $184 \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ 4)$ olduğundan $i^{184} = 1$

**Örnek:** $f(x) = x^4 - x^2 + 3$ ise $f(i)$ yi hesaplayınız.

Çözüm: $f(i) = i^4 - i^2 + 3 = 1 - (-1) + 3 = 5$

**Örnek:** $z = \frac{i^{-95} + i^{-94}}{i^{-97} + i^{-96}}$ karmaşık sayısının sonucunu bulunuz.

Çözüm: z sayısının pay ve paydasını $i^{97}$ ile çarpalım.

$$\begin{aligned} z &= \frac{i^{97}(i^{-95} + i^{-94})}{i^{97}(i^{-97} + i^{-96})} \\ &= \frac{i^2 + i^3}{i^0 + i^1} \\ &= \frac{-1 - i}{1 + i} \\ &= -1 \end{aligned}$$

**Örnek:** $z = i - i^3 + i^5 - i^7 + \cdots + i^{97} - i^{99}$ işleminin en sade hali nedir?

Çözüm:
$$\begin{aligned} z &= i - i^3 + i^5 - i^7 + \cdots + i^{97} - i^{99} \\ &= i - (-i) + i - (-i) + \cdots + i - (-i) \\ &= 50i \end{aligned}$$

**Örnek:** $(x - i^{25})^{27} = -i$ eşitliğini sağlayan x değerlerden birini bulunuz.

Çözüm: $25 \equiv 1 \pmod 4$ olduğundan $i^{25} = i$
$27 \equiv 3 \pmod 4$ olduğundan $i^{27} = -i$
bulunur. Buna göre,

$$(x - i^{25})^{27} = -i$$
$$(x - i)^{27} = i^{27}$$
$$x - i = i$$
$$x = 2i$$

elde edilir.

**KOMPLEKS SAYILARIN EŞİTLİĞİ**

**1.3. Tanım:** İki karmaşık sayının birbirine eşit olması için gerek ve yeter şart reel ve sanal kısımların birbirine eşit olmasıdır.

$a, b, c, d \in \mathbb{R}$ olmak üzere $z_1 = a + ib$ ve $z_2 = c + id$ olsun.

$$a + ib = c + id \Leftrightarrow (a = c \text{ ve } b = d)$$

dir.

**Örnek:** $z_1 = (2x - 1) + yi, z_2 = 3 + (8 - y)i$ ve $z_1 = z_2$ ise $x + y$ nin toplamı nedir?

Çözüm: $(2x - 1) + yi = 3 + 4i$
$2x - 1 = 3$ ve $y = 8 - y$
$x = 2$ ve $y = 4$
$x + y = 2 + 4 = 6$

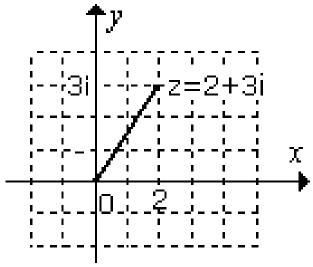
**KOMPLEKS SAYILARDA DÜZLEM**

Reel sayılardaki gibi kompeks (karmaşık) sayılarda da bir düzlem vardır. Bu düzlem şu şekilde tanımlanır.

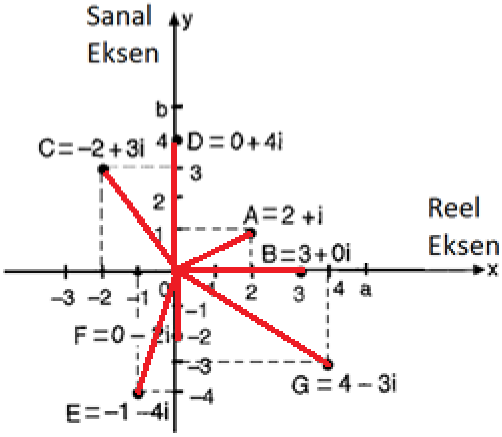
**1.4. Tanım:** İki boyutlu analitik düzlemdeki x eksenine reel eksen, y eksenine sanal eksen denilerek elde edilen düzleme karmaşık (kompleks) sayı düzlemi denir.

**Örnek:** $z = 2 + 3i$ karmaşık sayı düzlemde grafiğini bulunuz.

Çözüm:




**Örnek:** $A = 2 + i, B = 3, C = -2 + 3i, D = 4i, E = -1 - 4i, F = -2i$ ve $G = 4 - 3i$ sayılarını karmaşık sayı düzlemde gösteriniz.



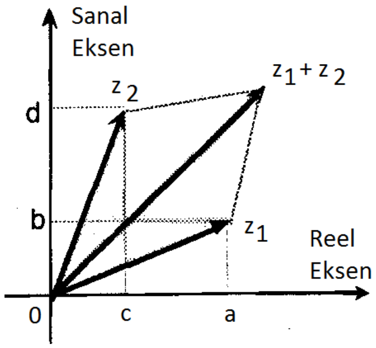

**KARMAŞIK SAYILARDA İŞLEMLER**

Karmaşık sayılarda toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemleri burada bahsedilecektir. Bölümün ilerleyen noktalarında karmaşık sayıların kutupsal biçiminde yazımlarında tekrar işlemlerinden söz edilecektir.

**1.1. Aksiyom:** $z_1 = a + ib$ ve $z_2 = c + id$ olan iki karmaşık sayının toplama işlemi

$$z_1 + z_2 = (a + c) + i(b + d)$$

şeklindedir. Vektörler de toplama işlemi gereği karmaşık sayıların toplam işleminin geometrik gösterimi aşağıdaki gibidir.




**Örnek:** $z_1 = 5 + 4i$ ve $z_2 = -2 + 6i$

$z_1 + z_2 = (5 - 2) + i(4 + 6) = 3 + 10i$

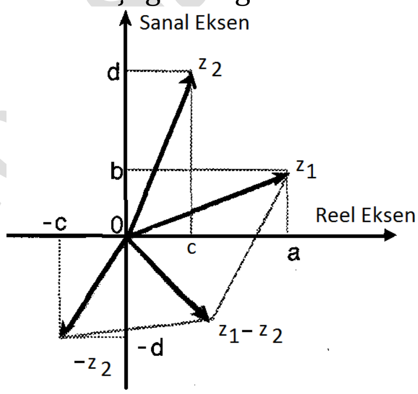
**Örnek:** $z_1 = -1 + i$ ve $z_2 = 3 - 2i$

$z_1 + z_2 = (-1 + 3) + i(1 - 2) = 2 - i$

**1.2. Aksiyom:** $z_1 = a + ib$ ve $z_2 = c + id$ olan iki karmaşık sayının çıkarma işlemi

$$z_1 - z_2 = (a - c) + i(b - d)$$

şeklindedir. Vektörler de çıkarma işlemi gereği karmaşık sayıların çıkarma işleminin geometrik gösterimi aşağıdaki gibidir.




**Örnek:** $z_1 = 4 + 5i$ ve $z_2 = -1 + 3i$

$z_1 - z_2 = (4 - (-1)) + i(5 - 3) = 5 + 2i$

**Örnek:** $z_1 = 10 + 8i$ ve $z_2 = 1 - 4i$

$z_1 - z_2 = (10 - 1) + i(8 - (-4)) = 9 + 12i$

**1.1. Teorem:** $z_1 = a + ib$ ve $z_2 = c + id$ olan iki karmaşık sayının çarpma işlemi

$$z_1 z_2 = (ac - bd) + i(ad + bc)$$

şeklindedir.

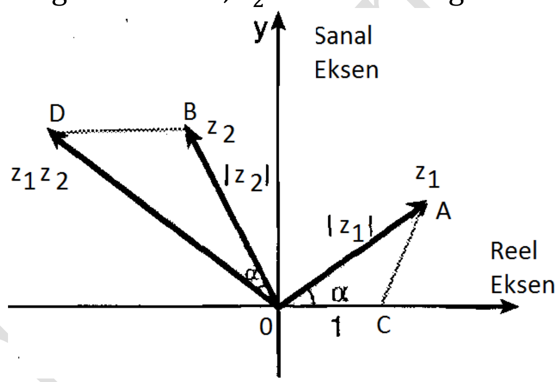
İspat: $z_1 z_2 = (a + ib)(c + id)$
$= ac + iad + ibc + bdi^2$

**Örnek:** $z_1 = 2 + 5i$ ve $z_2 = -1 + 3i$
$z_1 z_2 = (2(-1) - 5 \cdot 3) + i(2 \cdot 3 + 5 \cdot (-1)) = -17 + i$

**Örnek:** $z_1 = 3 - 2i$ ve $z_2 = 1 + 5i$
$z_1 z_2 = (3 \cdot 1 - (-2) \cdot 5) + i(3 \cdot 5(-3) \cdot 1) = 13 + i$ //

Kompleks sayıların çarpma işleminin geometrik gösterimi şu şekilde yapılır.

$z_1 = a + ib$ nin görüntüsü A, $z_2 = c + id$ nin görüntüsü B olsun.




X ekseni üzerinde $|OC| = 1$ birim olacak şekilde C noktası alalım. OCA üçgenine benzer olan bir OBD üçgeni çizildiğinde D noktası $z_1 z_2$ nin görüntüsü olur.

**Örnek:** $z = 3 - 5i$ ise $z^2$ ni bulunuz.

Çözüm: $z^2 = (3 - 5i)^2 = 9 - 30i + 25i^2 = -16 - 30i$

**1.2. Teorem:** $z_1 = a + ib$ ve $z_2 = c + id$ olan iki karmaşık sayının bölme işlemi

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$$

şeklindedir.

İspat: $\frac{z_1}{z_2}=\frac{a+ib}{c+id}$
$=\frac{(a+ib)(c-id)}{(c+id)(c-id)}$
$=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$ //

**Örnek:** $z_1=4+2i$ ve $z_2=3-i$ ise

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{4+2i}{3-i}=\frac{(4+2i)(3+i)}{(3-i)(3+i)}=\frac{(4\cdot3-2\cdot1)+(2\cdot3+4\cdot1)i}{3^2+1^2}=\frac{10+10i}{10}=1+i$$

**Örnek:** $z_1=3-i$ ve $z_2=2+8i$ ise

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{3-i}{2+8i}=\frac{(3-i)(2-8i)}{(2+8i)(2-8i)}=\frac{-1-13i}{34}=-\frac{1}{34}-\frac{13}{34}i$$

**Örnek:** $z=\frac{\sqrt{3}}{i}+\frac{3}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}i}{i^2}+\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}}=-\sqrt{3}i+\sqrt{3}=\sqrt{3}(1-i)$

**Örnek:** $\frac{\sqrt{-9}\sqrt{-16}}{\sqrt{-2}\sqrt{-3}\sqrt{-6}}$ işleminin sonucunu bulunuz.

Çözüm:
$$\frac{\sqrt{-9}\sqrt{-16}}{\sqrt{-2}\sqrt{-3}\sqrt{-6}}=\frac{3i\cdot4i}{\sqrt{(-2)(-3)(-6)}}=\frac{12i^2}{\sqrt{36i^3}}=\frac{-12}{6i}=-\frac{2i}{i^2}=2i$$

Üstlü ifadeler ve köklü ifadeler ile kutupsal koordinatlar kısmında bahsedilecektir. Şimdi, burada şu örnekleri verelim.

**Örnek:** $z=\frac{2i}{1-i}$ ise $z^{20}$ nin değeri nedir?

Çözüm: $z=\frac{2i}{1-i}=\frac{2i(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i+2i^2}{1^2+1^2}=-1+i$

$$z^2 = (-1+i)^2 = (-1)^2 + 2\cdot(-1)\cdot i + i^2 = 1 - 2i - 1 = -2i$$

$$z^{20} = (z^2)^{10} = (-2i)^{10} = 2^{10} i^{10} = -2^{10}$$

**1.3. Teorem:** $\mathbb{C}$ kompleks sayılar kümesi üzerinde $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ sistemi cisimdir.

İspat: C1) $(\mathbb{C}, +)$ sistemi değişmeli grup mudur?

G1) Her $z_1 = a + ib \in \mathbb{C}, z_2 = c + id \in \mathbb{C}$ için

$$z_1 + z_2 = (a+ib) + (c+id) = (a+c) + i(b+d) \in \mathbb{C}$$

olup $\mathbb{C}$ de toplama işlemi kapalıdır.

G2) Her $z_1 = a + ib \in \mathbb{C}, z_2 = c + id \in \mathbb{C}, z_3 = e + if \in \mathbb{C}$ için

$$\begin{aligned} z_1 + (z_2 + z_2) &= (a+ib) + [(c+id) + (e+if)] \\ &= (a+ib) + [(c+e) + (d+f)i] \\ &= [a + (c+e)] + [b + (d+f)]i \\ &= [(a+c) + e] + [(b+d) + f]i \\ &= [(a+c) + (b+d)i] + (e+if) \\ &= [(a+ib) + (c+id)] + (e+if) \\ &= (z_1 + z_2) + z_3 \end{aligned}$$

olup toplama işleminde birleşme özelliği vardır.

G3) Her $z = a + ib \in \mathbb{C}$ ve $e = e_1 + ie_2 \in \mathbb{C}$ birim (etkisiz) eleman olmak üzere,

$$\begin{aligned} &z + e = z \\ &(a+ib) + (e_1 + ie_2) = a + ib \\ &(a+e_1) + i(b+e_2) = a + ib \\ &a + e_1 = a \text{ ve } b + e_2 = b \\ &e_1 = 0 \text{ ve } e_2 = 0 \end{aligned}$$

olup toplama işleminde birim (etkisiz) eleman $e = 0 + i\cdot 0$ dir.

G4) Her $z = a + ib \in \mathbb{C}$, $z^{-1} = m + in \in \mathbb{C}$ ve $e = 0 + i\cdot 0 \in \mathbb{C}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} &z + z^{-1} = e \\ &(a+ib) + (m+in) = 0 + i\cdot 0 \\ &(a+m) + i(n+b) = 0 + i\cdot 0 \\ &a + m = 0 \text{ ve } n + b = 0 \end{aligned}$$

$$m = -a \text{ ve } n = -b$$

olup toplama işleminde $z = a + ib$ nin ters elemanı $z^{-1} = -a - ib \in \mathbb{C}$ dir.

G5) Her $z_1 = a + ib \in \mathbb{C}, z_2 = c + id \in \mathbb{C}$ için

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (a + ib) + (c + id) \\ &= (a + c) + i(b + d) \\ &= (c + a) + i(d + b) \\ &= (c + id) + (a + ib) \\ &= z_2 + z_1 \end{aligned}$$

olup toplama işleminde değişme özelliği vardır. O halde $(\mathbb{C}, +)$ değişmeli bir gruptur.

C2) $(\mathbb{C} - \{0\}, \cdot)$ bir değişmeli grup mudur?

G1) Her $z_1 = a + ib \in \mathbb{C}, z_2 = c + id \in \mathbb{C}$ için

$$z_1 z_2 = (a + ib) + (c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc) \in \mathbb{C}$$

olup $\mathbb{C}$ de çarpma işlemi kapalıdır.

G2) Her $z_1 = a + ib \in \mathbb{C}, z_2 = c + id \in \mathbb{C}, z_3 = e + if \in \mathbb{C}$ için

$$\begin{aligned} z_1(z_2 z_3) &= (a + ib)[(c + id)(e + if)] \\ &= (a + ib)[(ce - df) + i(cf + de)] \\ &= [a(ce - df) - b(cf + de)] + i[a(cf + de) + b(ce - df)] \\ &= [ace - adf - bcf - bde] + i[acf + ade + bce - bdf] \\ &= [(ac - bd)e - (ad + bc)f] + i[(ac - bd)f + (ad + bc)e] \\ &= [(ac - bd) + i(ad + bc)] \cdot (e + if) \\ &= [(a + ib) \cdot (c + id)] \cdot (e + if) \\ &= (z_1 z_2) z_3 \end{aligned}$$

olup çarpma işleminde birleşme özelliği vardır.

G3) Her $z = a + ib \in \mathbb{C}$ ve $e = e_1 + ie_2 \in \mathbb{C}$ birim (etkisiz) eleman olmak üzere,

$$\begin{aligned} &z \cdot e = z \\ &(a + ib) \cdot (e_1 + ie_2) = a + ib \\ &(ae_1 - be_2) + i(ae_2 + be_1) = a + ib \\ &ae_1 - be_2 = a \text{ ve } ae_2 + be_1 = b \\ &e_1 = 1, e_2 = 0 \end{aligned}$$

olup çarpma işleminde birim (etkisiz) eleman $e = 1 + i \cdot 0$ dir.

G4) Her $z = a + ib \in \mathbb{C}$, $z^{-1} = m + in \in \mathbb{C}$ ve $e = 1 + i \cdot 0 \in \mathbb{C}$ olmak üzere,

$$zz^{-1} = e$$
$$(a + ib)(m + in) = 1 + i \cdot 0$$
$$(a \cdot m - b \cdot n) + i(a \cdot n - b \cdot n) = 1 + i \cdot 0$$
$$a \cdot m - b \cdot n = 1 \text{ ve } a \cdot n - b \cdot m = 0$$
$$m = \frac{a}{a^2+b^2} \text{ ve } n = -\frac{b}{a^2+b^2}$$

olup çarpma işleminde $z = a + ib$ nin ters elemanı $z^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}$ dir.

G5) Her $z_1 = a + ib \in \mathbb{C}$, $z_2 = c + id \in \mathbb{C}$ için

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (a + ib)(c + id) \\ &= (ac - bd) + i(ad + bc) \\ &= (ca - db) + i(da + cb) \\ &= (c + ib) + (a + ib) \\ &= z_2 z_1 \end{aligned}$$

olup çarpma işleminde değişme özelliği vardır. O halde $(\mathbb{C} - \{0\}, \cdot)$ değişmeli bir gruptur.

C3) Her $z_1 = a + ib \in \mathbb{C}$, $z_2 = c + id \in \mathbb{C}$, $z_3 = e + if \in \mathbb{C}$ için

a)

$$\begin{aligned} z_1(z_2 + z_3) &= (a + ib)[(c + id) + (e + if)] \\ &= (a + ib)[(c + e) + i(d + f)] \\ &= [a(c + e) - b(d + f)] + i[a(d + f) + b(d + f)] \\ &= [ac + ae - bd - bf] + i[ad + af + bd + bf] \\ &= [(ac - bd) + i(ad + bc)] + [(ae - bf) + i(af + be)] \\ &= [(a + ib)(c + id)] + [(a + ib)(e + if)] \\ &= z_1 z_2 + z_1 z_3 \end{aligned}$$

b) a'ya benzer şekilde

$$(z_1 + z_2)z_3 = (z_1 + z_3) + (z_2 + z_3)$$

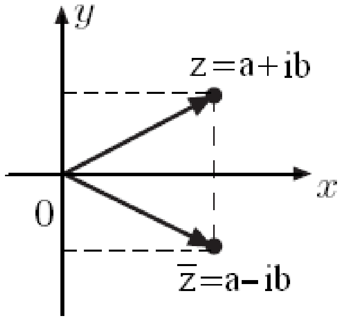
olup çarpmanın toplama üzerine sağdan ve soldan dağılma özellikleri vardır.

C1, C2 ve C3 aksiyomlarını sağlandığından $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ sistemi cisimdir.

**1.2. Not:** $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ sistemi cisim olduğu $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ sistemi cisim olmasından da gösterilir. Çünkü $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ olduğu bilinmektedir. $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ sistemi cisim olduğuna göre $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ sistemi cisimdir.

**BİR KARMAŞIK SAYININ EŞLENİĞİ**

**1.5. Tanım:** $z = a \pm ib$ sayısının eşleniği $\bar{z} = a \mp ib$ dir.




**Örnek:** $z = 4 + 10i$ sayısının eşleniği $\bar{z} = 4 - 10i$
$z = 2 - 5i$ sayısının eşleniği $\bar{z} = 2 + 5i$
$z = 10i$ sayısının eşleniği $\bar{z} = -10i$
$z = 20$ sayısının eşleniği $\bar{z} = 20$
şeklindedir.

**1.4. Teorem:** Kompleks sayısının eşleniğinin eşleniği kendisidir ($\bar{\bar{z}} = z$) dir.

Bu teoremin ispatı okuyucuya bırakılmıştır.

**1.5. Teorem:** İki karmaşık sayının toplamının (farkının) eşleniği, karmaşık sayıların eşlenikleri toplamına (farkına) eşittir.

$$\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$$

İspat: $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{(a \pm ıb) \pm (c \pm ıd)} = (a \mp ib) \pm (c \mp id) = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$

**1.6. Teorem:** İki karmaşık sayının çarpımının eşleniği, karmaşık sayıların eşlenikleri çarpımına eşittir.

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$$

İspat: $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{(a \pm ıb) \cdot (c \pm ıd)} = (a \mp ib) \cdot (c \mp id) = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$

**1.7. Teorem:** İki karmaşık sayının bölümlerinin eşleniği, karmaşık sayıların eşlenikleri bölümlerine eşittir.

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} \quad , \quad (z_2\neq 0)$$

İspat: $$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\overline{\left(\frac{a+ib}{c+id}\right)} \quad , \quad (z_2\neq 0)$$
$$=\overline{\left(\frac{(a+ib)(c-id)}{(c+id)(c-id)}\right)}$$
$$=\overline{\left(\frac{(ac+bd)-i(ad+bc)}{c^2+d^2}\right)}$$
$$=\left(\frac{(ac+bd)+i(ad+bc)}{c^2+d^2}\right)$$
$$=\left(\frac{(a-ib)(c+id)}{(c-id)(c+id)}\right)$$
$$=\frac{a-ib}{c-id}$$
$$=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$$

**Örnek:** $\frac{z-3}{z+1}$ ifadesini reel ve sanal kısımlarına ayırınız.

Çözüm: $$\frac{z-3}{z+1}=\frac{x+iy-3}{x+iy+1}$$
$$=\frac{(x-3)+iy}{(x+1)+iy}$$
$$=\frac{[(x-3)+iy][(x+1)-iy]}{[(x+1)+iy][(x+1)-iy]}$$
$$=\frac{\left(x^2-2x+y^2-3\right)+i(2xy(x-1))}{(x+1)^2+y^2}$$

$$u(x,y)=\frac{x^2-2x+y^2-3}{(x+1)^2+y^2},\ v(x,y)=\frac{2xy(x-1)}{(x+1)^2+y^2}$$

## İKİNCİ DERECEDEN DENKLEMLERİN KARMAŞIK KÖKLERİ

Daha önceden ikinci dereceden denklemleri incelemiştik. Orada $\Delta<0$ olduğunda reel kök yoktur demiştik. Çünkü reel bir sayının negatif karekökü yoktur. Ama burada $\sqrt{-1} = i$ olarak tanımladığımıza göre, böyle durumdaki ifadelerinde bir anlam kazanacağı muhakkaktır. Şimdi bunları örneklerle izah edelim.

**Örnek:** $x^2 - 2x + 3 = 0$ denkleminin köklerini bulunuz.

Çözüm: $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = -8 < 0$

$$x_1 = \frac{-(-2)+\sqrt{-8}}{2 \cdot 1} = \frac{2+2\sqrt{2}i}{2} = 1 + \sqrt{2}i$$

$$x_2 = \frac{-(-2)-\sqrt{-8}}{2 \cdot 1} = \frac{2-2\sqrt{2}i}{2} = 1 - \sqrt{2}i$$

**Örnek:** $x^2 + 2x + 5 = 0$ denkleminin köklerini bulunuz.

Çözüm: $\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -16 < 0$

$$x_1 = \frac{-2+\sqrt{-16}}{2 \cdot 1} = \frac{-2+4i}{2} = -1 + 2i$$

$$x_2 = \frac{-2-\sqrt{-16}}{2 \cdot 1} = \frac{-2+4i}{2} = -1 - 2i$$

**1.3. Not:** 2. dereceden denklemin iki kökü karmaşık sayı ise kökleri birbirlerinin eşleniğidir.

**Örnek:** Bir kökü $3 + 2i$ olan ikinci dereceden denklemi bulunuz.

Çözüm: Bir kök $x_1 = 3 + 2i$ ise diğer kök $x_2 = 3 - 2i$ dir. Buna göre,
Kökler toplamı $x_1 + x_2 = (3 + 2i) + (3 - 2i) = 6$
Kökler çarpımı $x_1 \cdot x_2 = (3 + 2i) \cdot (3 - 2i) = 3^2 + 2^2 = 13$
olduğundan 2. dereceden denklem,

$$x^2 + (x_1 + x_2)x + (x_1 \cdot x_2) = 0$$

$$x^2 + 6x + 13 = 0$$

biçimindedir.

**Örnek:** $x^3 - 8 = 0$ denkleminin köklerini bulunuz.

Çözüm: $x^3 - 2^3 = 0$ denklemini çarpanlara ayırma uygulayalım.

$$(x - 2)(x^2 + 2x + 4) = 0$$

$$x_3 = 2 \text{ ve } x^2 + 2x + 4 = 0$$

dir. Buna göre,

$$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = -12 < 0$$

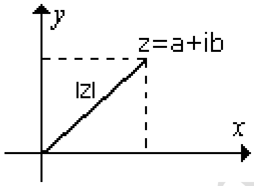
$$x_1 = \frac{-(-2)+\sqrt{-12}}{2\cdot 1} = \frac{2+2\sqrt{3}i}{2} = 1 + \sqrt{3}i$$

$$x_2 = \frac{-(-2)-\sqrt{-12}}{2\cdot 1} = \frac{2-2\sqrt{3}i}{2} = 1 - \sqrt{3}i$$

dir.

**KARMAŞIK SAYILARDA MUTLAK DEĞER (MODÜL)**

**1.6. Tanım:** Kompleks (karmaşık) sayı düzleminde, bir komplkes sayıya karşılık gelen bir noktanın, başlangıç noktasına uzaklığına bu sayının mutlak değeri (modülü) denir ve $|\ |$ ile gösterilir.




$z = \pm a \pm ib$ ise $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

**Örnek:** $z = 3 - 4i$ ise $|z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ dir.

**Örnek:** $z = (a + 3) + 5i$ ve $|z| = 13$ ise a'nın pozitif değeri nedir?

Çözüm: $13 = \sqrt{(a + 3)^2 + 5^2}$

$169 = (a + 3)^2 + 25$

$144 = (a + 3)^2$

$\pm 12 = a + 3$

$a = 9$ ve $a = -15$

**1.8. Teorem:** $z \in \mathbb{C}$ , $|z| = |\bar{z}| = |-z| = |-\bar{z}|$

Bu teoremin ispatı okuyucuya bırakılmıştır.

**1.9. Teorem:** $z \in \mathbb{C}$ , $z\bar{z} = |z|^2$ dir.

İspat: $z = a + ib$ ve $\bar{z} = a - ib$ ise

$z\bar{z} = (a + ib)(a - ib)$

$$
\begin{aligned}
&= a^2 - aib + aib - b^2 i^2 \\
&= a^2 + b^2 \\
&= |z|^2
\end{aligned}
$$

**Örnek:** $z = 3 + 4i$ ve $\bar{z} = 3 - 4i$ ise

$$z\bar{z} = (3 + 4i)(3 - 4i) = 3^2 + 4^2 = 25$$

$$|z| = \sqrt{25} = 5$$

**Örnek:** $z = -2 - 4i$ ve $\bar{z} = -2 + i$ ise

$$z\bar{z} = (-2 - i)(-2 + i) = (-2)^2 + 1^2 = 5$$

$$|z| = \sqrt{5}$$

**1.10. Teorem:** $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ dir.

İspat: $z_1 = a + ib, z_2 = c + id$

$$z_1 \cdot z_2 = (a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc)$$

$$
\begin{aligned}
|z_1 \cdot z_2| &= \sqrt{(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2} \\
&= \sqrt{(ac)^2 - 2abcd + (bd)^2 + (ad)^2 + 2abcd + (bc)^2} \\
&= \sqrt{(ac)^2 + (bd)^2 + (ad)^2 + (bc)^2} \\
&= \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} \\
&= |z_1| \cdot |z_2|
\end{aligned}
$$

**Örnek:** $\left|(1 + i) \cdot (\sqrt{3} + i)\right|$ işleminin sonucu nedir?

Çözüm:

$$
\begin{aligned}
\left|(1 + i) \cdot (\sqrt{3} + i)\right| &= |1 + i| \cdot \left|\sqrt{3} + i\right| \\
&= \sqrt{1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} \\
&= 2\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

**1.1. Sonuç:** Matematiksel indüksiyon yardımıyla herhangi sayıda terim içeren çarpımlara,

$$|z_1 \cdot z_2 \cdots z_n| = |z_1| \cdot |z_2| \cdots |z_n|, \qquad (n = 2, 3, 4 \cdots)$$

şeklinde genelleştirilir. Bu genellemeden

$$|z^n| = |z|^n$$

elde edilir.

**Örnek:** $z = 5 - 12i$ ise $|z^4|$ nin değeri nedir?

Çözüm: $|z^4| = |z|^4 = \left(\sqrt{5^2 + 11^2}\right)^4 = 13^4$

**1.11. Teorem:** $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, $(z_2 \neq 0)$dir.

İspat: $z_1 = a + ib, z_2 = c + id$ olmak üzere,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+ib}{c+id} = \frac{(a+ib)(c-id)}{(c+id)(c-id)} = \frac{(ac+bd)-i(ad-bc)}{c^2+d^2}$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \sqrt{\frac{(ac+bd)^2+(ad-bc)^2}{\left(c^2+d^2\right)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(ac)^2+2abcd+(bd)^2+(ad)^2-2abcd+(bc)^2}{\left(c^2+d^2\right)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(ac)^2+(bd)^2+(ad)^2+(bc)^2}{\left(c^2+d^2\right)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}{\left(c^2+d^2\right)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2}}$$

$$= \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

**Örnek:** $z = \frac{4+4i}{1-i}$ olduğuna göre $|z|$ nedir?

Çözüm: $|z| = \left|\frac{4+4i}{1-i}\right| = \frac{|4+4i|}{|1-i|} = \frac{\sqrt{4^2+4^2}}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 4$

**1.1. Lemma:** $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $z_1 \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1 \cdot \overline{z_2}} \leq 2|z_1 \cdot \overline{z_2}|$ dir.

İspat: $z_1 = a + ib, z_2 = c + id$ olmak üzere,

$$z_1 + \overline{z_2} = (ac + bd) - (ad - bc)$$
$$\overline{z_1 + \overline{z_2}} = (ac + bd) + (ad - bc)$$

verilerini taraf tarafa toplarsak,

$$z_1 \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1 \cdot \overline{z_2}} = ac + bd \qquad (1)$$

olur. Ayrıca,

$$|z_1 \cdot \overline{z_2}| = \sqrt{(ac + bd)^2 + (ad - bc)^2} \qquad (2)$$

Buna göre (1) ve (2) eşitliklerinden,

$$\begin{aligned} 2|z_1 \cdot \overline{z_2}| &= 2\sqrt{(ac + bd)^2 + (ad - bc)^2} \\ &\geq 2\sqrt{(ac + bd)^2} \\ &= 2(ac + bd) \\ &= z_1 \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1 \cdot \overline{z_2}} \end{aligned}$$

bulunur.

**1.12. Teorem:** $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ , $\big||z_1| - |z_2|\big| < |z_1 \pm z_2| < |z_1| + |z_2|$ dir.

İspat: 1.9. teoremden $z\bar{z} = |z|^2$ olduğunu biliyoruz.

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)} \\ &= (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) && , \quad \text{(1.5 teorem)} \\ &= (z_1\overline{z_1}) + (z_2\overline{z_2}) + (z_2\overline{z_1} + z_1\overline{z_2}) \\ &\leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1\overline{z_2}| && , \quad \text{(1.1 lemma)} \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||\overline{z_2}| && , \quad \text{(1.10 teorem)} \\ &= (|z_1| + |z_2|)^2 \end{aligned}$$

$$|z_1 + z_2|^2 < (|z_1| + |z_2|)^2$$

eşitsizliği elde edilir. Mutlak değer negatif olmayacağından

$$|z_1 \pm z_2| < |z_1| + |z_2| \qquad (1)$$

bulunur. Üçgen eşitsizliği kullanılarak aşağıdaki ifadeler de elde edilir:

$$|z_1| = |(z_1 + z_2) - z_2| \leq |z_1 + z_2| + |-z_2|$$
$$|z_1| - |z_2| \leq |z_1 + z_2| \qquad (2)$$

$$|z_2| = |(z_1 + z_2) - z_1| \leq |z_1 + z_2| + |-z_1|$$
$$-|z_1 + z_2| \leq |z_1| - |z_2| \qquad (3)$$

(2) ve (3) eşitsizliklerinden

$$\big||z_1| - |z_2|\big| < |z_1 + z_2| \qquad (4)$$

bulunur. (1) ve (4) eşitsizliklerinden

$$\big||z_1| - |z_2|\big| < |z_1 \pm z_2| < |z_1| + |z_2|$$

elde edilir.

**1.2. Sonuç:** Üçgen eşitsizliği, matematiksel indüksiyon yardımıyla herhangi sayıda terim içeren toplamlara,

$$|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n| \quad , \quad (n = 2,3,4,\ldots)$$

şeklinde genelleştirilir.

Bu sonuç tümevarım ile ispat edilir.

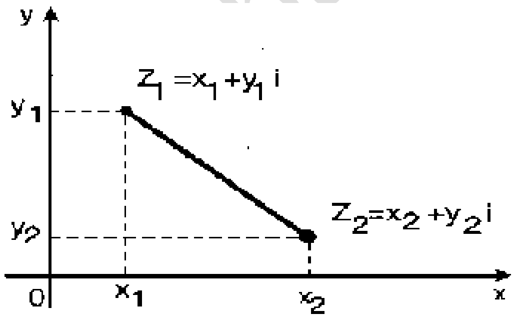
**KARMASIK SAYILARDA İKİ NOKTA ARASINDAKİ UZAKLIK**

**1.13. Teorem:** $z_1 = x_1 + y_1 i$ ve $z_2 = x_2 + y_2 i$ iki karmaşık sayısının uzunluğu,

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

dir.

İspat:




$z_1 = x_1 + y_1 i$ ve $z_2 = x_2 + y_2 i$ iki karmaşık sayısında x eksenindeki izdüşümü $x_1 + x_2$ dir, y eksenindeki izdüşümü $y_1 + y_2$ dir. Pisagor teoremi gereği,

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

dir.

**Örnek:** $z_1 = 2 - 5i$ ve $z_2 = -3 + 7i$ sayıları arasındaki uzaklık kaç birimdir?

Çözüm: $$\begin{aligned} |z_1 - z_2| &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\ &= \sqrt{(2 - (-3))^2 + (-5 - 7)^2} \\ &= 13 \end{aligned}$$

**1.3. Sonuç:** $z = x + yi$ ve $z_0 = x_0 + y_0 i$ için

i) $|z - z_0| = r$

ii) $|z - z_0| < r$

iiii) $|z - z_0| > r$

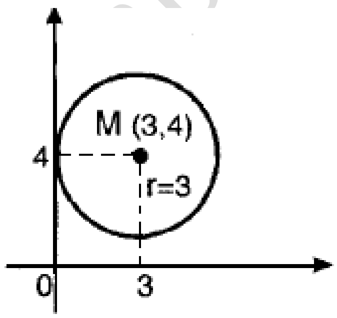
şartına uyan z karmaşık sayıların kümesi, $z_0$ sayısına uzaklığı r olan noktaların kümesidir. Bu ise $z_0$ merkezli r yarıçaplı bir daireyi gösterir. (i) çemberin üzerini, (ii) çemberin içini, (iii) çemberin dışını gösterir.

**Örnek:** $z_0 = 3 + 4i$ ise $A = \{z : z \in \mathbb{C}, |z - z_0| = 3\}$ kümesini karmaşık düzlemde belirtiniz.

Çözüm: $z = x + yi$ olsun.

$$|z - z_0| = 3$$
$$|(x + yi) - (3 + 4i)| = 3$$
$$|(x - 3i) + (y - 4)| = 3$$
$$\sqrt{(x-3)^2 + (y-4)^2} = 3$$
$$(x-3)^2 + (y-4)^2 = 9$$

denklemini elde edilir. Bu denklem merkezi (3,4), yarıçapı 3 olan bir çember belirtir.

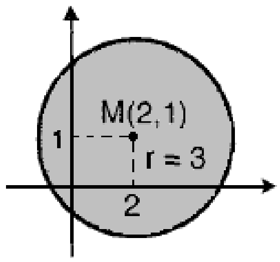



**Örnek:** $A = \{z : z \in \mathbb{C}, |z - (2 + i)| \leq 3\}$ kümesini karmaşık düzlemde gösteriniz.

Çözüm: $z = x + yi$ olsun.

$$|z - (2 + i)| \leq 3$$
$$|(x + yi) - (2 + i)| \leq 3$$
$$|(x - 2) + (y - 1)i| \leq 3$$
$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} \leq 3$$
$$(x-2)^2 + (y-1)^2 \leq 9$$

denklemini elde edilir. Bu denklem merkezi (2,1), yarıçapı 3 olan bir çember belirtir.



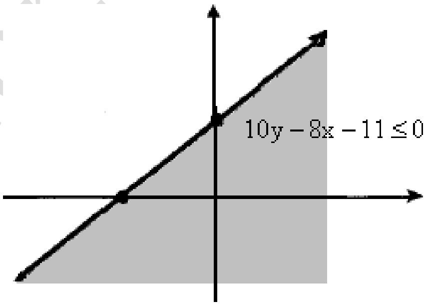

**1.4. Sonuç:** $z = x + yi$, $z_1 = x_1 + y_1 i$ ve $z_2 = x_2 + y_2 i$ için $|z - z_1| = |z - z_2|$ şartına uyan z karmaşık sayılarının kümesi $z_1$ ve $z_2$ sayılarına eş uzaklıkta bulunan noktaların kümesidir. Bu ise $z_1$ ve $z_2$ yi birleştiren doğru parçasının orta dikmesini gösterir.

**Örnek:** $A = \{z : z \in \mathbb{C}, |z + 3i| \leq |z + 4 - 2i|\}$ kümesini karmaşık düzlemde gösteriniz.

Çözüm: $z = x + yi$ olsun.

$$|z + 3i| \leq |z + 4 - 2i|$$
$$|x + iy + 3i| \leq |x + iy + 4 - 2i|$$
$$\sqrt{x^2 + (y + 3)^2} \leq \sqrt{(x + 4)^2 + (y - 2)^2}$$
$$x^2 + (y + 3)^2 \leq (x + 4)^2 + (y - 2)^2$$
$$x^2 + y^2 + 6y + 9 \leq x^2 + 8x + 16 + y^2 - 4y + 4$$
$$10y - 8y - 11 \leq 0$$

doğru bölgesi elde edilir.




**1.5. Sonuç:** $z = x + yi$, $z_1 = x_1 + y_1 i$ ve $z_2 = x_2 + y_2 i$ için

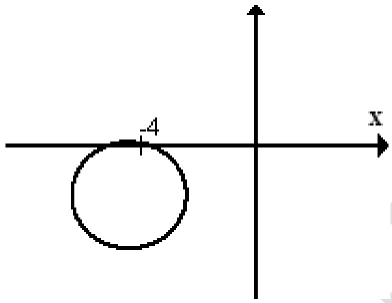
$$|z - z_1| = k \cdot |z - z_2|$$

şartına uyan z karmaşık sayılarının kümesi, $z_1$ ve $z_2$ sayılarına uzaklıkları oranı k olan noktaların kümesidir. Bu ise Apolonyus çemberini gösterir.

**Örnek:** $A = \{z : z \in \mathbb{C}, |z + 3i| \leq 3\ |z + 4 + i|\}$ kümesini karmaşık düzlemde gösteriniz.

Çözüm: $z = x + yi$ olsun.

$$|z + 1| \leq 3|z + 4 + i|$$
$$|x + yi + 1| \leq 3|x + yi + 4 + i|$$
$$\sqrt{(x + 1)^2 + y^2} \leq 3\sqrt{(x + 4)^2 + (y + 1)^2}$$
$$(x + 1)^2 + y^2 \leq 9[(x + 4)^2 + (y + 1)^2]$$
$$8^2 + 8y^2 + 68z + 18y + 149 \geq 0$$




**1.6. Sonuç:** $z = x + yi$, $z_1 = x_1 + y_1 i$ ve $z_2 = x_2 + y_2 i$ için

$$|z - z_1| + |z - z_2| = k$$

şartına uyan z karmaşık sayılarının kümesi, $z_1$ ve $z_2$ sayılarına uzaklıkları toplamı k olan noktaların kümesidir. Bu ise odakları $z_1$ ve $z_2$ olan bir elipsi gösterir.

**1.7. Sonuç:** $z = x + yi$, $z_1 = x_1 + y_1 i$ ve $z_2 = x_2 + y_2 i$ için

$$|z - z_1| - |z - z_2| = k$$

şartına uyan z karmaşık sayılarının kümesi, $z_1$ ve $z_2$ sayılarına uzaklıkları farkı k olan noktaların kümesidir. Bu ise odakları $z_1$ ve $z_2$ olan bir hiperbolü gösterir.

**1.14. Teorem:** $z_1$ ve $z_2 \neq 0$ olmak üzere;

i) $z_1\ z_2 = 0$ ise bu iki komples sayı birbirine diktir.

ii) $z_1 \cdot z_2 = 0$ ise bu iki komples sayı birbirine paraleldir.

iii) $\frac{|z_1 z_2|}{|z_2|} = 0$ ise $z_1$'in $z_2$ üzerine dik izdşümüdür.

iv) $|z_1 \times z_2| = 0$ ise bu iki komples sayı arasındaki paralelkenarın alanıdır.

Bu teoremin ispatı okuyucuya bırakılmıştır.

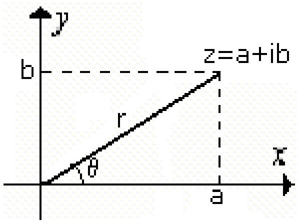
## KARMAŞIK SAYILARIN KUTUPSAL BİÇİMİ

**1.15. Teorem:** $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ olmak üzere $z = a + ib \in \mathbb{C}$ karmaşık sayısının kutupsal biçimde yazımı,

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

şeklindedir.

İspat: $z = a + ib$ sayısı için,



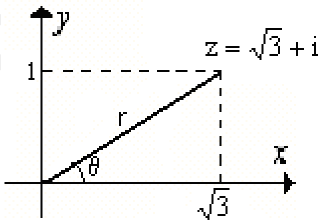

yazılır. Burada $\sin\theta = \frac{b}{r}$ ve $\cos\theta = \frac{a}{r}$ dir. Bunu $z = a + ib$ de yazarsak,

$$z = r\cos\theta + i\,r\sin\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

elde edilir.

**Örnek:** $z = \sqrt{3} + i$ sayısını kutupsal koordinatlara çeviriniz.

Çözüm: $z = \sqrt{3} + i$ sayısının koordinat şekli




olacağından $r = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = 2$ bulunur. Ayrıca,

$$\sin\theta = \frac{1}{2} \text{ ve } \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ise } \theta = 30^0 = \frac{\pi}{6}$$

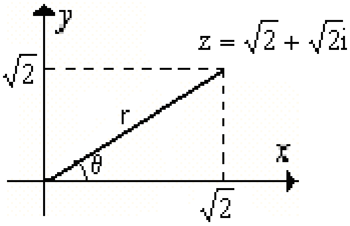
dir. Buna göre $z = \sqrt{3} + i$ sayısı

$$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

bulunur.

**Örnek:** $z = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$ sayısını kutupsal koordinatlara çeviriniz.

Çözüm: $z = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$ sayısının koordinat şekli




olacağından $r = \sqrt{\sqrt{2}^2 + \sqrt{2}^2} = 2$ bulunur. Ayrıca,

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ve } \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ise } \theta = 45^0 = \frac{\pi}{4}$$

dir. Buna göre $z = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$ sayısı

$$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

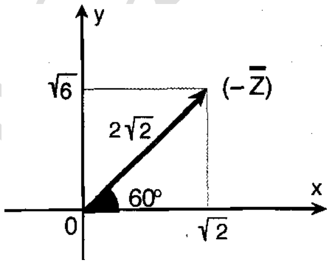
bulunur.

**Örnek:** $z = -\sqrt{2} + \sqrt{6}i$ ise $(-\bar{z})$ sayısının kutupsal biçimi bulunuz.

Çözüm: $\bar{z} = -\sqrt{2} - \sqrt{6}i$

$$-\bar{z} = \sqrt{2} + \sqrt{6}i$$

$$r = |-\bar{z}| = \sqrt{\sqrt{2}^2 + \sqrt{6}^2} = 2\sqrt{2}$$




$$\sin\theta = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ve } \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \text{ ise } \theta = 60^0 = \frac{\pi}{3}$$

dir. Buna göre $-\bar{z} = \sqrt{2} + \sqrt{6}i$ sayısı

$$z = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

bulunur.

**1.16. Teorem (Euler Formülü):** $\theta \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

biçimindedir. Bu gösterimine Euler formülü denir. Sıfırdan farklı z karmaşık sayısının kutupsal formda

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$$

$$\bar{z} = r(\cos\theta - i\sin\theta) = re^{-i\theta}$$

yazılabilir.

İspat: Kuvvet serileri konusunda Taylor serisinde

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

olduğu bilinmektedir. Buna göre

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= 1 + \frac{i\theta}{1!} + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \cdots \\ &= 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - i\frac{\theta^3}{3!} + \cdots \\ &= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \cdots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \cdots\right) \\ &= \cos\theta + i\sin\theta \end{aligned}$$

elde edilir.

**Örnek:** $z = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$ kartezyen koordinatlarda olan kompleks sayısı,

$$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

kutupsal biçimine çevrilip,

$$z = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$$

Euler formülü formunda yazılır.

**Örnek:** Özel olarak $\theta = \pi$ alınırsa

$$e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1$$

bulunur.

**1.8. Sonuç:** $z = x + iy$ için $e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos\theta + i\sin\theta)$ dir.

**Örnek:** $e^{e^z}$ sayısını reel ve sanal kısımlara ayırınız.

Çözüm: $z = x + iy$ ise

$$\begin{aligned} e^{e^z} &= e^{e^x} e^{e^{iy}} \\ &= e^{e^x} e^{(\cos y + i\sin y)} \\ &= e^{e^x\cos y} e^{ie^x\sin y} \end{aligned}$$

$$= e^{e^x \cos y}[\cos(e^x \sin y) + i \sin(e^x \sin y)]$$

$$\text{Re}\,(z) = e^{e^x \cos y} \cos(e^x \sin y) \text{ ve } \text{Im}\,(z) = e^{e^x \cos y} \sin(e^x \sin y)$$

## KUTUPSAL BİÇİMDEKİ KARMAŞIK SAYILARDA İŞLEMLER

Kutupsal biçimdeki karmaşık sayılarda çarpma, bölme, üstlü ifadeler ve köklü ifadelerin birer teoremleri mevcuttur. Toplama ve çıkarmaları ise kartezyen hale çevirerek yapmak daha kolay olur. Ama baş katsayı değerleri (r) eşit olan iki kutupsal koordinatların toplanmasında trigonometrik dönüşüm formülleri kullanılarak çözülebilir.

**Örnek:** $z_1 = 3(\cos 48 + i \sin 48)$ ve $z_2 = 3(\cos 24 + i \sin 24)$

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= 3(\cos 48 + i \sin 48) + 3(\cos 24 + i \sin 24) \\ &= 3(\cos 48 + \cos 24 + i(\sin 48 + \sin 24)) \\ &= 3\left(\cos\frac{48+24}{2} \cdot \cos\frac{48-24}{2} + i(\sin\frac{48+24}{2} \cdot \cos\frac{48-24}{2})\right) \\ &= 6(\cos 12 \cdot \cos 36 + i(\sin 36 \cdot \cos 12)) \\ &= 6 \cos 12\,(\cos 36 + i \sin 36) \end{aligned}$$

**1.17. Teorem:** $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i \sin\theta_1)$ ve $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i \sin\theta_2)$ olmak üzere,

$$z_1 z_2 = r_1 r_1(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2))$$

ya da

$$z_1 z_2 = r_1 r_1 e^{\theta_1 + \theta_2}$$

şeklindedir.

İspat:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1(\cos\theta_1 + i \sin\theta_1) r_2(\cos\theta_2 + i \sin\theta_2) \\ &= r_1 r_2(\cos\theta_1 \cos\theta_2 + i \cos\theta_1 \sin\theta_2 + i \sin\theta_1 \cos\theta_2 + i^2 \sin\theta_1 \sin\theta_2) \\ &= r_1 r_2((\cos\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \sin\theta_2) + i(\cos\theta_1 \sin\theta_2 + \sin\theta_1 \cos\theta_2)) \\ &= r_1 r_2(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)) \end{aligned}$$

**Örnek:** $z_1 = 2(\cos 22 + i \sin 22)$ ve $z_2 = 3(\cos 23 + i \sin 23)$ ise $z_1 z_2$ nedir?

Çözüm: $$\begin{aligned} z_1 z_2 &= 2 \cdot 3(\cos(22 + 23) + i \sin(22 + 23)) \\ &= 6(\cos 45 + i \sin 45) \end{aligned}$$

$$= 6\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$= 3\sqrt{2}(1 + i)$$

**Örnek:** $z_1 = \sqrt{2}(\cos 82 + i \sin 82)$ ve $z_2 = \sqrt{8}(\cos 38 + i \sin 38)$ ise $z_1 z_2$ nedir?

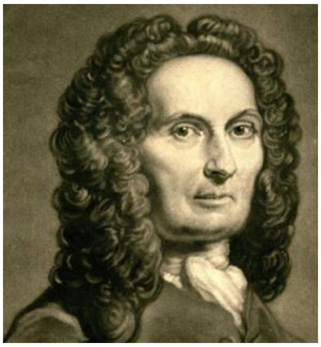
Çözüm: $z_1 z_2 = \sqrt{2 \cdot 8}(\cos (82 + 38) + i \sin (82 + 38))$
$$= 4\ (\cos 120 + i \sin 120)$$
$$= 4\ (-\cos 60 + i \sin 60)$$
$$= 4\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$= 2(-1 + \sqrt{3}i)$$

**1.18. Teorem:** $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$ ve $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$ olmak üzere,
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2))$$
ya da
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{(\theta_1 - \theta_2)}$$
şeklindedir.

İspat:
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\theta_1 + \sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + \sin\theta_2)}$$
$$= \frac{r_1(\cos\theta_1 + \sin\theta_1)(\cos\theta_2 - \sin\theta_2)}{r_2(\cos\theta_2 + \sin\theta_2)(\cos\theta_2 - \sin\theta_2)}$$
$$= \frac{r_1(\cos\theta_1\cos\theta_2 - i\cos\theta_1\sin\theta_2 + i\sin\theta_1\cos\theta_2 - i^2\sin\theta_1\sin\theta_2)}{r_2(\cos^2\theta_2 + \sin^2\theta_2)}$$
$$= \frac{r_1(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2 + i(-\cos\theta_1\sin\theta_2 + i\sin\theta_1\cos\theta_2))}{r_2}$$
$$= \frac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2))$$

**Örnek:** $z_1 = 12(\cos 80 + i \sin 80)$ ve $z_2 = 3(\cos 40 + i \sin 40)$ ise $\frac{z_1}{z_2}$ değeri nedir?

Çözüm: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{12}{3}(\cos(80-40) + i\sin(80-40))$



Abraham De Moivre

26 Mayıs 1667, Vitry-Le-François, Fransa-27 Kasım 1754, Londra, Birleşik Krallık

**1.19. Teorem (De Moivre Kuralı):** $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ olmak üzere,

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

ya da

$$z^n = r^n e^{in\theta}$$

şeklindedir.

İspat: Bu ispatı tümevarım yoluyla yapalım.

a) $P(1)$ için $z^1 = r^1(\cos\theta + i\sin\theta) = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ olup doğrudur.

b) $P(k)$ : $z^k = r^k(\cos k\theta + i\sin k\theta)$ doğru olduğunu kabul edelim, $P(k+1)$ için doğruluğuna bakalım.

$$\begin{aligned} z^{k+1} &= \left[r^k(\cos k\theta + i\sin k\theta)\right][r(\cos\theta + i\sin\theta)] \\ &= r^{k+1}(\cos k\theta\cos\theta + \cos k\theta\sin\theta + i\sin k\theta\sin\theta + i^2\sin k\theta\sin\theta) \\ &= r^{k+1}((\cos k\theta\cos\theta - \sin k\theta\sin\theta) + i(\cos k\theta\sin\theta + \sin k\theta\sin\theta)) \\ &= r^{k+1}((\cos(k\theta+\theta)) + i(\sin(k\theta+\theta)) \\ &= r^{k+1}((\cos(k+1)\theta) + i(\sin(k+1)\theta) \end{aligned}$$

olacağından $P(k+1)$ için doğrudur.

**Örnek:** $z = 3(\cos 18 + i\sin 18)$ ise $z^{15}$ nin değeri nedir?

Çözüm:
$$\begin{aligned} z^{15} &= 3^{15}(\cos 15\cdot 18 + i\sin 15\cdot 18) \\ &= 3^{15}(\cos 270 + i\sin 270) \\ &= 3^{15}(0 - i) \\ &= -3^{15}i \end{aligned}$$

**Örnek:** $z=\sqrt{2}(\cos 15+i\sin 15)$ ise $z^6$ nin değeri nedir?

Çözüm: $z^6=\sqrt{2}^6(\cos 6\cdot 15+i\sin 6\cdot 15)$
$=2^3(\cos 90+i\sin 90)$
$=8(0+i)$
$=8i$

**1.20. Teorem:** $z=r[\cos(\theta+k2\pi)+i\sin(\theta+k2\pi)]$ olmak üzere z nin n. dereceden kökü, $(k=0,1,2,\dots,n-1)$

$$\sqrt[n]{z}=W_{0,1,2,\dots,n-1}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+k2\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+k2\pi}{n}\right)$$

ya da

$$\sqrt[n]{z}=w_{0,1,2,\dots,n-1}=\sqrt[n]{r}\,e^{i(\theta+k2\pi)/n}$$

şeklindedir.

İspat: $z=r[\cos(\theta+k2\pi)+i\sin(\theta+k2\pi)]$

$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}[\cos(\theta+k2\pi)+i\sin(\theta+k2\pi)]^{1/n}$ (1.19. teoremden)

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+k2\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+k2\pi}{n}\right)$$

**1.9. Sonuç:** $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ olmak üzere z'nin kara kökü,

$k=0$ için $w_0=\sqrt{r}\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right)$

$k=1$ için $w_0=\sqrt{r}\left(\cos\frac{\theta+\pi}{2}+i\sin\frac{\theta+\pi}{2}\right)=-\sqrt{r}\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right)$

şeklindedir.

**Örnek:** $z=4(\cos 60+i\sin 60)$ sayısının karekökünü bulunuz.

Çözüm:

$w_0=\sqrt{4}\left(\cos\frac{60}{2}+i\sin\frac{60}{2}\right)$
$=2(\cos 30+i\sin 30)$
$=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)$
$=\sqrt{3}+i$

$w_1=-\sqrt{4}\left(\cos\frac{60}{2}+i\sin\frac{60}{2}\right)$

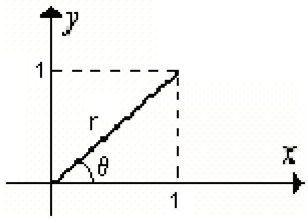
$= -2(\cos 30 + i \sin 30)$

$= -2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)$

$= -\sqrt{3} - i$

**Örnek:** $z = 1 + i$ sayısının kara kökünü bulunuz.

Çözüm: z'yi önce kutupsal koordinata çevirelim.




$\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ise $\theta = 45^0 = \frac{\pi}{4}$ dir. Buna göre,

$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

elde edilir. Şimdi kara kökünü alalım.

$w_0 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)$ ve $w_1 = -\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)$

şeklinde bulunur.

**1.10. Sonuç:** $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ olmak üzere z nin küp kökü,

$k = 0$ için $w_0 = \sqrt[3]{r}\left(\cos\frac{\theta}{3} + i\sin\frac{\theta}{3}\right)$

$k = 1$ için $w_1 = \sqrt[3]{r}\left(\cos\frac{\theta+2\pi}{3} + i\sin\frac{\theta+2\pi}{3}\right)$

$k = 2$ için $w_2 = \sqrt[3]{r}\left(\cos\frac{\theta+4\pi}{3} + i\sin\frac{\theta+4\pi}{3}\right)$

şeklindedir.

**Örnek:** $z = 8(\cos 45 + i\sin 45)$ sayısının karekökünü bulunuz.

Çözüm: $w_0 = \sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{45}{3} + i\sin\frac{45}{3}\right) = 2(\cos 15 + i\sin 15)$

$w_1 = \sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{45+360}{3} + i\sin\frac{45+360}{3}\right) = 2(\cos 135 + i\sin 135)$

$w_2 = \sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{45+720}{3} + i\sin\frac{45+720}{3}\right) = 2(\cos 255 + i\sin 255)$

**Örnek:** $z^4 + i = 0$ denkleminin köklerini bulunuz.

Çözüm: $z^4 = -i$ denkleminde $a = 0, b = -1$ olup $r = 1$, $\sin\theta = 0$, $\cos\theta = -1$ dir. Buna göre $\theta = \frac{3\pi}{2}$ dir.

$$\sqrt[4]{z} = W_{0,1,2,3} = \sqrt[4]{1}\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{2}+k2\pi}{4} + i\sin\frac{\frac{3\pi}{2}+k2\pi}{4}\right)$$

$$k = 0 \text{ için } w_0 = \cos\frac{3\pi}{8} + i\sin\frac{3\pi}{8}$$

$$k = 1 \text{ için } w_1 = \cos\frac{7\pi}{8} + i\sin\frac{7\pi}{8}$$

$$k = 2 \text{ için } w_2 = \cos\frac{11\pi}{8} + i\sin\frac{11\pi}{8}$$

$$k = 3 \text{ için } w_3 = \cos\frac{15\pi}{8} + i\sin\frac{15\pi}{8}$$

kökleri elde edilir.

**1.21. Teorem:** $\overline{(z^n)} = \overline{(z)}^n$

İspat: $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ olsun. $z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$ dir.

$$\begin{aligned}
\overline{(z)}^n &= [\overline{r(\cos\theta + i\sin\theta)}]^n \\
&= [r(\cos\theta - i\sin\theta)]^n \\
&= r^n(\cos n\theta - i\sin n\theta) \\
&= \overline{r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)} \\
&= \overline{(z^n)}
\end{aligned}$$

**BİR KARMAŞIK SAYININ TERSİ**

**1.22. Teorem:** $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ olsun. Bu takdirde bu sayının tersi,

$$z^{-1} = r^{-1}(\cos\theta - i\sin\theta)$$

ya da

$$z^{-1} = r^{-1}\, e^{-i\theta}$$

dir.

İspat: $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$$\begin{aligned}
z^{-1} &= r^{-1}(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)) \quad , \quad \text{(1.20. teorem gereği)} \\
&= r^{-1}(\cos\theta - i\sin\theta) \quad , \quad \text{(Kosünüs çift, sinüs tek fonk.)}
\end{aligned}$$

**Örnek:** $z = \frac{1}{2}(\cos 120 + i\sin 120)$ ise $z^{-1}$ yi bulunuz.

Çözüm: $z^{-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} (\cos 120 + i\sin 120)^{-1}$

$= 2(\cos 120 - i\sin 120)$

$= 2(\cos(180 - 60) - i\sin(180 - 60))$

$= 2(-\cos 60 - i\sin 60)$

$= 2\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$= -1 - \sqrt{3}i$

**Örnek:** $z^{-1} = 4(\cos 210 + i\sin 210)$ ise z karmaşık sayısını bulunuz.

Çözüm: $z = (z^{-1})^{-1}$

$= [4(\cos 210 + i\sin 210)]^{-1}$

$= \frac{1}{4}(\cos 210 - i\sin 210)$

$= \frac{1}{4}(\cos(180 + 30) - i\sin(180 + 30))$

$= \frac{1}{4}(-\cos 30 + i\sin 30)$

$= \frac{1}{4}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)$

$= \frac{-\sqrt{3}+i}{8}$

**KARMAŞIK SAYININ ARGÜMENTİ**

**1.7. Tanım:** $k \in \mathbb{Z}$, $z = r[\cos(\theta + k2\pi) + i\sin(\theta + k2\pi)]$ karmaşık sayısında $\theta + k2\pi$ açısına z sayısının argümenti denir. $\arg z = \theta + k2\pi$ biçiminde yazılır. Eğer açı $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ise karmaşık sayının esas argümenti denir.

**Örnek:** $z = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$ sayısını argümentini bulunuz.

Çözüm: $z = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$ sayısının kutupsal biçimi $z = 2\left(\cos c + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ olduğu yukarı da gösterildi. Buna göre $\arg z \frac{\pi}{4}$ dir.

**Örnek:** $z = 1 + \cos 40 + i\sin 40$ karmaşık sayısının esas argümantını bulunuz.

Çözüm: $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ denklemini hatırlayalım.

$$\begin{aligned} z &= 1 + \cos 40 + i \sin 40 \\ &= 1 + \cos 2 \cdot 20 + i \sin 2 \cdot 20 \\ &= 2\cos^2 20 + i \sin 20 \cos 20 \\ &= 2\cos 20 (\cos 20 + i \sin 20) \end{aligned}$$

olduğundan,

$$r = 2\cos 20 \text{ ve } \arg z = 20^0$$

dir.

**Örnek:** $z = -i + \tan 36$ karmaşık sayısının esas argümantını bulunuz.

Çözüm: $z = -i + \tan 36 = \frac{\sin 36}{\cos 36} - i = \frac{1}{\cos 36}(\sin 36 - i \cos 36)$

1. bölgede $\sin 36 = \cos 54$ ve kosinüs çift fonksiyon olduğundan $-\cos 36 = \cos(-36) = \cos 36 = \sin 54$ olur.

$$z = \frac{1}{\cos 36}(\cos 36 + i \sin 36)$$

olduğundan,

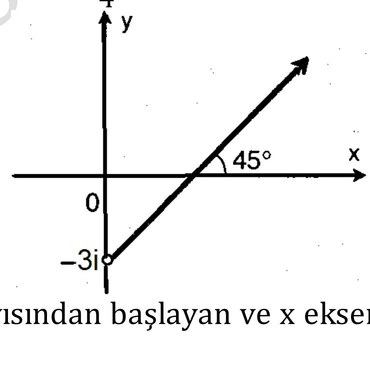
$$r = \frac{1}{\cos 36} \text{ ve } \arg z = 36^0$$

dir.

**Örnek:** $\arg(z + 3i) = \frac{\pi}{4}$ eşitliğini sağlayan z karmaşık sayısının görüntüsünü bulunuz.

Çözüm: $\arg(z + 3i) = \frac{\pi}{4}$

$$\arg[z - (-3i)] = \frac{\pi}{4}$$




olduğundan $z_0 = -2i$ sayısından başlayan ve x ekseni ile $45^0$ lik açı yapan yarı doğru parçasıdır. //

Kutupsal biçimde karmaşık sayıların çarpma, bölme, üstlü ve köklü ifadeler teoremlerinden aşağıdaki sonuç çıkarılır.

**1.23. Teorem:**

i) $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 \pmod{2\pi}$

ii) $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2 \pmod{2\pi}$

iii) $\arg z^n = n \cdot \arg z \pmod{2\pi}$

iv) $\arg \sqrt[n]{z} = \frac{2k\pi + \arg z}{n} \pmod{2\pi}$

v) $\arg \bar{z} = -\arg z \pmod{2\pi}$

İspat: i) 1.17. teoremde

$$z_1 z_2 = r_1 r_1 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2))$$

olduğundan

$$\arg(z_1 z_2) = \theta_1 + \theta_2 = \arg z_1 + \arg z_2 \pmod{2\pi}$$

olur.

ii) $\left(\frac{z_1}{z_2}\right) z_2 = z_1$ yazılabileceğinden,

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) z_2 = \arg z_1 \pmod{2\pi}$$
$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) + \arg z_2 = \arg z_1 \pmod{2\pi}$$
$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2 \pmod{2\pi}$$

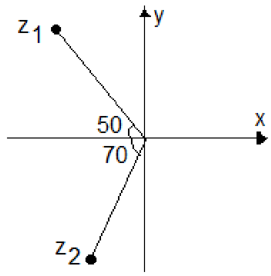
iii ve iv aksiyomları okuyucuya bırakılmıştır.

v) $z\bar{z} = |z|^2$ olduğunda $|z|^2 \in \mathbb{R}$ olacağından $\arg z\bar{z} = 0 \pmod{2\pi}$ dır. (i) den

$$\arg z + \arg \bar{z} = 0 \pmod{2\pi}$$
$$\arg \bar{z} = -\arg z \pmod{2\pi}$$

elde edilir.

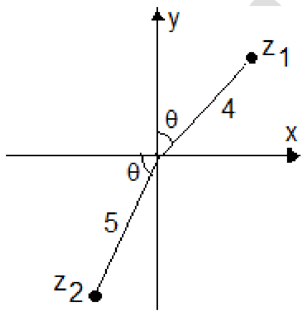
**Örnek:**




Verilen şekle göre $\arg(z_1 z_2)$ in değeri nedir?

Çözüm: $\arg z_1 = 180 - 50 = 130^0$
$\arg z_2 = 180 + 50 = 250^0$
$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$
$= 130 + 250$
$= 380^0$
$= 20^0$

**Örnek:**




Verilen şekle göre $\arg(z_1 z_2)$ in değeri nedir?

Çözüm: $r_1 = 4$ ve $\arg z_1 = 90 - \theta$
$r_2 = 5$ ve $\arg z_2 = 180 + \theta$
olduğundan
$z_1 = 4[\cos(90 - \theta) + i\sin(90 - \theta)],\ z_2 = 5[\cos(180 + \theta) + i\sin(180 + \theta)]$

$$z_1 + z_2 = 20[\cos(90 - \theta + 180 + \theta) + i\sin(90 - \theta + 180 + \theta)]$$
$$= 20[\cos 270 + i\sin 270]$$
$$= -20i$$
bulunur.

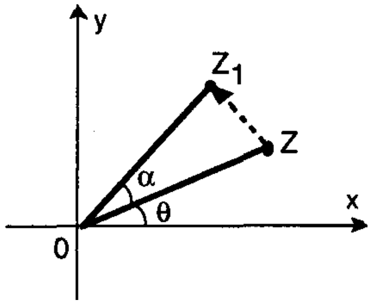
**BİR KARMAŞIK SAYININ ORİJİN ETRAFINDA DÖNDÜRÜLMESİ**

**1.24. Teorem:** $z = a + ib$ sayısı orijin etrafında pozitif $\alpha$ açısı kadar döndürülürse,

$$z_1 = (a + ib)(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

elde edilir.

İspat: $z = a + ib$ sayısı $\alpha$ açısı kadar döndürülüp $z_1$ sayısı elde edelim.




$z = a + ib = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ olsun. Bu takdirde,

$$\begin{aligned} z_1 &= r(\cos(\theta + \alpha) + i\sin(\theta + \alpha)) \\ &= r(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\alpha + i\sin\alpha) \\ &= (a + ib)(\cos\alpha + i\sin\alpha) \end{aligned}$$

bulunur.

**Örnek:** $z = 1 + i\sqrt{3}$ sayısının orijin etrafında pozitif yönde $30^0$ döndürülmesi ile oluşacak karmaşık sayı nedir?

Çözüm: $$\begin{aligned} z_1 &= (1 + i\sqrt{3})(\cos 30 + i\sin 30) \\ &= (1 + i\sqrt{3})\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}\sqrt{3}}{2} + i^2\frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= 2i \end{aligned}$$

## BİR MATRİSİN EŞLENİĞİ

**1.8. Tanım:** Bir $A_{m\times n} \in \mathbb{C}$ matrisinin her bir terimlerinin kompleks (karmaşık) eşleniğinin oluşturduğu yeni matrise A matrisinin eşleniği denir. A matrisinin eşleniği $\overline{A}$ ile gösterilir.

**Örnek:** $A=\begin{bmatrix}3+i & -10\\ 2 & 2i\end{bmatrix}$ matrisinin eşleniği $\overline{A}=\begin{bmatrix}3-i & -10\\ 2 & -2i\end{bmatrix}$ dir.

**1.25. Teorem:** A ve B iki matris, $\alpha \in \mathbb{C}$ olsun.

i) $\overline{(\overline{A})} = A$
ii) $\overline{A+B} = \overline{A} + \overline{B}$
iii) $\overline{(\alpha A)} = \overline{\alpha}\overline{A}$
iv) $\overline{AB} = \overline{A}\overline{B}$
v) $\overline{A^T} = (\overline{A})^T$

Bu teoremin ispatı okuyucuya bırakılmıştır.

## HERMİTYEN ve TERS HERMİTYEN MATRİSLER

**1.9. Tanım:** A bir kompleks sayılı kare matris olmak üzere, $\overline{A^T} = A$ ise A matrisine Hermityen matris, $\overline{A^T} = -A$ ise A matrisine ters Hermityen matris denir.

**Örnek:** $A=\begin{bmatrix}8 & 3-i & 1+2i\\ 3+i & 7 & -3i\\ 1-2i & 3i & 4\end{bmatrix}$ matrisinde $\overline{A^T} = A$ olduğundan Hermityen matristir.

**Örnek:** $A=\begin{bmatrix}5 & 3i & 4\\ 3i & 7 & 3+4i\\ -4 & -3+4i & 2i\end{bmatrix}$ matrisinde $\overline{A^T} = -A$ olduğundan ters Hermityen matristir.

## BİRİMSEL MATRİS

**1.10. Tanım:** A bir kompleks sayılı kare matris olmak üzere, $\overline{A^T} = A^{-1}$ ise A matrisine birimsel matris denir.

**Örnek:** $A=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -i & -1+i \\ i & i & 1+i \\ 1+i & -1+i & 0 \end{bmatrix}$ matrisinde $A\overline{A^T} = I$ olduğunu gösterelim.

Çözüm: $A\cdot\overline{A^T}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & -i & -1+i \\ i & i & 1+i \\ 1+i & -1+i & 0 \end{bmatrix}\overline{\begin{bmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & i & -1+i \\ -1+i & 1+i & 0 \end{bmatrix}}$

$$=\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & -i & -1+i \\ i & i & 1+i \\ 1+i & -1+i & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -i & 1-i \\ i & i & -1-i \\ -1-i & 1-i & 0 \end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1+1+2 & -i-i+2i & 1-i+i-1+0 \\ i+i-2i & 1+1+2 & i+1-1-i \\ 1+i-i-1+0 & -i+1-1+i+0 & 2+2+0 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olduğundan A matrisi birimsel matristir.

**1.26. Teorem:** Kompleks bir A matrisinin birimsel olması için gerek ve yeter şart satırlarının komplkes vektörlerinin iç çarpımına göre bir ortonormal küme oluşturmasıdır.

**ÇÖZÜMLÜ ALIŞTIRMALAR**

**1.** $\frac{1+i}{1-i}$ işleminin sonucu nedir?

A) 1 B) −1 C) −i D) i E) 0

Çözüm: Bölme işlemi yapabilmek için paydanın eşleniği alınarak,

$$\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{1+2i+i^2}{1^2+1^2}=\frac{1+2i-1}{2}=\frac{2i}{2}=i$$

elde edilir.

Cevap: D

**2.** $2+i$ ve $2-i$ kompleks sayı olan denklem, aşağıdakilerden hangisidir?

A) $x^2-4x-5=0$ B) $x^2+4x+5=0$ C) $x^2-4x+5=0$
D) $-x^2-4x+5=0$ E) $-x^2+4x+5=0$

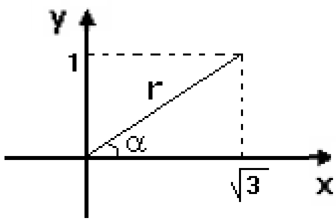
Çözüm:
Kökler toplamı: $2+i+2-i=4$
Kökler çarpımı: $(2+i)(2-i)=2^2+1^2=5$
İkinci dereceden denklem: $x^2-4x+5=0$

Cevap: C

**3.** $\cos\theta+i\sin\theta=\text{cis}\ \theta$ ile gösterilmek üzere $z=i+\sqrt{3}$ sayısının, kutupsal koordinatlarda ifadesi hangisidir?

A) cis 0 B) cis 30 C) cis 45 D) cis 60 E) cis 90

Çözüm: Verilen $z=i+\sqrt{3}$ sayısının kutupsal koordinat düzleminde yazalım




şeklindedir. $r=\sqrt{1^2+\sqrt{3}^2}=2$, $\sin\alpha=\frac{1}{2}$, $\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$ olduğuna göre $\alpha=30^0$ dir. Öyleyse z sayısı kutupsal koordinatlarda,

$z=\cos 30+i\sin 30=\text{cis}\ 30$

elde edilir.

Cevap: B

**4.** $\frac{2-i}{2+i}$ sayısının eşleniğinin reel kısmı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 3 B) $-\frac{8}{5}$ C) $\frac{8}{5}$ D) $-\frac{3}{5}$ E) $\frac{3}{5}$

Çözüm: Kompleks sayılarda paydanın eşleniği alınarak,

$$\frac{2-i}{2+i}=\frac{(2-i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\frac{4-8i-i^2}{2^2+1^2}=\frac{3}{5}-\frac{8}{5}i$$

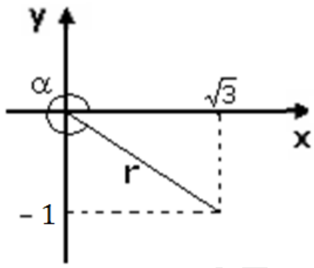
bulunur.

Cevap: E

**5.** $z=\sqrt{3}-i$ kompleks sayısı için $z^6$ nedir?

A) $-64$ B) $-32$ C) $64i$ D) $-32i$ E) $0$

Cevap: $z=\sqrt{3}-i$ kompleks sayısını kutupsal koordinat biçimine çevirelim.




$$r=\sqrt{(-1)^2+\sqrt{3}^2}=2,\ \sin(360-\alpha)=\frac{1}{2},\ \cos(360-\alpha)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

olduğuna göre $\alpha=330^0$ dir. Öyleyse z sayısı kutupsal koordinatlar biçimi,

$$z=2(\cos 330+i\sin 330)$$

dir. Şimdi kutupsal koordinatların kuvvet bulmasını inceleyelim.

$$\begin{aligned} z^6 &= 2^6(\cos 6\cdot 330+i\sin 6\cdot 330)\\ &=64(\cos 180+i\sin 180)\\ &=64(-1+i\cdot 0)\\ &=-64 \end{aligned}$$

Cevap: A

**6.** $z=(x+1)+ix,\ a\in\mathbb{R}$ ve $|z+iz|=2$ ise x'in değeri nedir?

A) –3 B) –2 C) 0 D) 1 E) 2

Çözüm:

$z=(x+1)+ix$ ve $iz=i[(x+1)+ix]=ix+i-x$

$z+iz=x+x+i+ix+i-x=x+i(x+2)$

$|z+iz|=\sqrt{x^2+(x+2)^2}=2$

$x^2 + x^2 + 4x + 4 = 4$
$2x(x + 2) = 0$
$x = 0$ ve $x = -2$

Cevap: B

**7.** $4 + 3i$ kompleks sayısının çarpmaya göre tersinin sanal kısmı nedir?

A) 2 B) −3 C) $\frac{3}{25}$ D) $\frac{4}{25}$ E) 5i

Çözüm: $z^{-1} = \frac{1}{4+3i} = \frac{4-3i}{16+9} = \frac{4}{25} + \frac{3}{25}i$

Cevap: C

**8.** $z = \frac{1+8i}{1-8i}$ olduğuna göre, $|z|$ nin değeri nedir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: $|z| = \left|\frac{1+8i}{1-8i}\right| = \frac{|1+8i|}{|1-8i|} = \frac{\sqrt{1^2+8^2}}{\sqrt{1^2+8^2}} = 1$

Cevap: A

**9.** $\frac{2}{1+i} + a + bi = 2 + 2i$ olduğuna göre $a + b$ nin değeri kaçtır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Çözüm: $\frac{2}{1+i} + a + bi = 2 + 2i$

$\frac{2(1-i)}{(1+i)(1-i)} + a + bi = 2 + 2i$

$\frac{2(1-i)}{1^2+1^2} + a + bi = 2 + 2i$

$1 - i + a + bi = 2 + 2i$

$a + bi = 1 + 3i$

$a = 1$ ve $b = 3$

$a + b = 4$

Cevap: E

**10.** $(1+i^3)(1+i^5)$ işleminin sonucu nedir?

A) 4 B) 1 C) 0 D) 2 E) −2

Çözüm: $(1+i^3)(1+i^5) = (1-i)(1+i) = 1^2+1^2 = 2$

Cevap: D

**11.** $(1+i)^8 + (1-i)^8$ toplamı kaçtır?

A) 2 B) 4 C) 8 D) 16 E) 32

Çözüm:

$$\begin{aligned}(1+i)^8 + (1-i)^8 &= [(1+i)^2]^4 + [(1-i)^2]^4 \\ &= [1^2+2i+i^2]^4 + [1^2-2i+i^2]^4 \\ &= (2i)^4 + (-2i)^4 \\ &= 16i^4 + 16i^4 \\ &= 32\end{aligned}$$

Cevap: E

**12.** Kompleks düzlemde $A(2+4i), B(-4-2i), C(6+7i)$ noktaları veriliyor. A noktasının [BC] doğrusunun ortasına olan uzaklığı kaç birimdir?

A) 2 B) $\sqrt{3}$ C) 3 D) $\sqrt{5}$ E) 6

Çözüm: x ekseni reel eksen, y ekseni sanal eksen olduğundan

$$A(2+4i), B(-4-2i), C(6+7i)$$
$$A(2,4), B(-4,-3), C(6,7)$$

yazılır. Buna göre [BC] nin orta noktasını D ile gösterirsek,

$$D = \left(\frac{-4+6}{2}, \frac{-3+7}{2}\right) = (1,2)$$

bulunur. A noktasının D noktasına uzaklığı,

$$|AD| = \sqrt{(2-1)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{5}$$

dir.

Cevap: A

**13.** $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{100}$ sayısı aşağıdakilerden hangisidir?

A) i B) –i C) –1 D) 1 E) 2

Çözüm:

$$\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{100} = \left(\frac{(1-i)^2}{(1+i)^2}\right)^{50} = \left(\frac{1-2i+i^2}{1+2i+i^2}\right)^{50} = \left(\frac{-2i}{2i}\right)^{50} = (-1)^{50} = 1$$

Cevap: D

**14.** $|z+3-i| = 8$ eşitliğini sağlayan z karmaşık sayıların geometrik yerinin denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(x+3)^2+(y-1)^2 = 8$ B) $(x+3)^2+(y-1)^2 = 64$
C) $(x+3)^2+(y-1)^2 = 16$ D) $(x+3)^2+(y+1)^2 = 64$
E) $(x-3)^2+(y+1)^2 = 32$

Çözüm: $z = x + iy$ olsun.

$$|z+3-i| = 8$$
$$|x+iy+3-i| = 8$$
$$|(x+2)+(y-1)i| = 8$$
$$\sqrt{(x+3)^2+(y-1)^2} = 8$$
$$(x+3)^2+(y-1)^2 = 64$$

Cevap: B

**15.** $n \in \mathbb{Z}^+$ , $\frac{i^{8n+1}+i^{12n}}{i^{16n-1}}$ ifadesinin sonucu nedir?

A) –i B) $1+i$ C) i D) $-1+i$ E) 2

Çözüm:

$$\frac{i^{8n+1}+i^{12n}}{i^{16n-1}} = \frac{i^1+i^0}{i^3} = \frac{i+1}{-i} = \frac{(i+1)i}{-i^2} = i^2 + i = -1+i$$

Cevap: D

**16.** $|z-4| = |z|$ ise, z'nin kompleks düzlemdeki geometrik yeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $x = 4$ B) $y = 4$ C) $x^2+y^2 = 16$ D) $x^2-y^2 = 16$
E) $y^2 = 16x$

Çözüm: $z = x + iy$ olsun.

$$|z - 4| = |z|$$
$$|x + iy - 4| = |z|$$
$$|(x - 4) + yi| = |x + iy|$$
$$\sqrt{(x - 4)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$(x - 4)^2 + y^2 = x^2 + y^2$$
$$(x - 4)^2 = x^2$$
$$x - 4 = -x \text{ ve } x - 4 = x$$
$$x = 4$$

elde edilir.

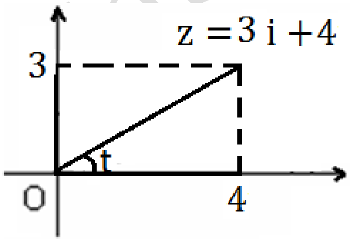
Cevap: A

**17.** $z + 2 - i = 2i + 2$ olduğuna göre z kompleks sayısının argümenti $\theta$ ise, $\sin\theta$ kaçtır?

A) $\frac{3}{5}$ B) $\frac{4}{5}$ C) 1 D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ E) $\frac{1}{2}$

Çözüm: $z + 2 - i = 2i + 2$

$$z = 4 + 3i$$
$$z = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$




$$\sin t = \frac{4}{5}$$

Cevap: B

**18.** $x^4 - 2x^2 + 8 = 0$ denkleminin kökerlerinden biri aşağıdakilerden hangisi değildir?

A) –2 B) 2 C) i D) –i E) 0

Çözüm: $x^4 - 2x^2 + 8 = 0$

$$(x^2 - 4)(x^2 + 2) = 0$$
$$x^2 - 4 = 0 \text{ ve } x^2 + 2 = 0$$
$$x = \pm 2 \text{ ve } x = \pm\sqrt{2}i$$

Cevap: E

**19.** Kompleks sayılar kümesi üzerinde $\bigstar$ işlemi,

$$z_1 \bigstar z_2 = z_1 + z_2 + 5$$

biçiminde tanımlanıyor. Buna göre, $(2-i)\bigstar(3+i)$ işleminin sonucu nedir?

A) i B) 2i C) 5 D) 10 E) 10i

Çözüm:

$$z_1 \bigstar z_2 = z_1 + z_2 + 5$$
$$(2-i)\bigstar(3+i) = 2 - i + 3 + i + 5 = 10$$

Cevap: D

**20.** $(\cos 15 + i \sin 15)(\cos 15 - i \sin 15)$ işleminin sonucu nedir?

A) –1 B) 0 C) 1 D) 2 C) 3

Çözüm: $(\cos 15 + i \sin 15)(\cos 15 - i \sin 15)$

$$= (\cos^2 15 - i^2 \sin^2 15)$$
$$= \cos^2 15 + \sin^2 15$$
$$= 1$$

Cevap: C

**21.** $\sum_{k=1}^{48}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)^{2k}$ toplamının sonucu nedir?

A) –1 B) 0 C) 1 D) 2 C) 3

Çözüm: $\sum_{k=1}^{48}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)^{2k} = \sum_{k=1}^{48}\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2k}$

$$= \sum_{k=1}^{48}\left(\frac{1+2i+i^2}{2}\right)^{k}$$
$$= \sum_{k=1}^{48} i^k$$
$$= i^1 + i^2 + i^3 + i^4 + ... + i^{45} + i^{46} + i^{47} + i^{48}$$
$$= 0$$

Cevap: B

**KAYNAKÇA**

1. Prof. Dr. Turgut BAŞKAN, Kompleks Fonksiyonlar Teorisi, Dora, 2012, Bursa.
2. Prof. Dr. Rahim OCAK, Kompleks Analiz, 2005, Erzurum.
3. H. Esra ÖZKAN, Kompleks Analiz, İstanbul Kültür Üniversitesi Ders Notları, 2011, İstanbul.
4. Prof. Dr. Ayhan ŞERBETÇİ, Kompleks Analiz, Ankara Üniversitesi Ders Notlar, 2021, Ankara.
5. Yrd. Doç. Dr. Canay Aykol Yüce, Yrd. Doç. Dr. Yelda Aygar Küçükevcilioğlu, Kompleks Fonksiyonlar Teorisi, Ankara Üniversitesi Ders Notlar, 2015, Ankara.
6. Ahmet HANÇERLİOĞLU, Faniye ALAN, Matematik Seti, Tümay Yayınları, 2006, ANKARA.
7. M. Zeki DERMAN, Ökkeş ÖZKÖSELER, Serdar GÜLMEZ, Matematik Lise 1, 2, 3, Zafer Yayınları, 2006, ANKARA.