# 2. BÖLÜM
# KOMPLEKS FONKSİYONLAR

## KOMPLEKS FONKSİYON KAVRAMI

**2.1. Tanım:** S, kompleks sayılar kümesinin bir alt kümesi olmak üzere S'nin her elemanına bir kompleks sayı karşılık getiren fonksiyona kompleks değerli ve kompleks değişkenli fonksiyon denir. Ya da kısaca fonksiyon denir ve

$$f : S \to \mathbb{C}$$
$$z \to f(z), \quad (z \in S \text{ ve } f(z) \in \mathbb{C})$$

şeklinde gösterilir. Bu gösterimi,

$$f(z) = u(z) + iv(z)$$

şeklinde yazabiliriz. Burada $u(z)$ ve $v(z)$ reel fonksiyonlardır. Böylece $z \to u(z), z \to v(z)$ fonksiyonları reel değerlidirler. Biz u fonksiyonuna f'nin reel kısmı, v fonksiyonuna da sanal (imajiner) kısmı diyeceğiz. Eğer, $z = x + iy$ olarak alınırsa,

$$f(z) = f(x + iy) = u(x,y) + i\,v(x,y)$$

yazılır ki u ve v, x ve y reel değişkenlerinin fonksiyonlarıdır.

**Örnek:** $f(z) = x^4 + x^2 \ln y + i \sin(xy)$ fonksiyonu için,

$$u(x,y) = x^4 + x^2 \ln y \,, v(x,y) = \sin(xy)$$

olacaktır.

**Örnek:** $f(z) = z^3$ ise $f(z) = r^3 e^{3i} = r^3(\cos\theta + i \sin\theta)$

$$u(x,y) = r^3 \cos\theta \,, v(x,y) = r^3 \sin\theta \,//$$

## KOMPLEKS FONKSİYONLARDA LİMİT

**2.2. Tanım:** a bir kompleks sayı olmak üzere $|z - a| < r$ şartını sağlayan noktaların kümesine r yançaplı a merkezli açık disk (yuvar) denir. Şayet $|z - a| \leq r$ ise, bu küme kapalı yuvar olur. Bu derslerde aksi söylenmedikçe işlemlerimizde diski açık olarak alınıcaktır.

Şimdi merkezi orijinde birim yançaplı bir disk göz önüne alalım. Bu disk $D = \{z : |z| \leq 1\}$ olsun. Bu durumda $z \in D$ ise $z^n \in D$ dir. Yani, $f(z) = z^n$ fonksiyonu D'yi kendisine dönüştürür. Bunu biraz daha açıklamak için,

$$S = \{re^{i\theta} : 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq \frac{2\pi}{n}\}$$

kümesini alalım. Biliyoruz ki $f(r) = r^3$ reel değerli fonksiyonu [0,1] aralığını kendi üzerine dönüştürür. Diğer taraftan $f(\theta) = n$ fonksiyonu $f\left(\left[0, \frac{2\pi}{n}\right]\right) = [0, 2\pi]$ dönüşümünü yapar. O halde $f(z) = z^n$ fonksiyonu S daire kesmesini $w = te^{iv}, (0 \leq t \leq 1, 0 \leq v \leq 2\pi)$ şeklindeki bütün sayıların oluşturduğu diske dönüştürür. O halde, sol taraftaki disk tarayabilmek için sağ taraftaki disk n defa dolanmak gerekir. Yani $f(z) = z^n$ fonksiyonu diskin çevresini n defa dolanır.

**2.3. Tanım:** U, C kompleks düzlemin bir alt kümesi olsun. Her $\alpha \in U$ için $D(\alpha, r)$ diski U'ya ait olacak şekilde $r > 0$ bulunabiliyorsa, U kümesine açık küme denir. (Bu durumda a noktalan iç noktalardır. Yani açık küme, iç noktalardan oluşan kümedir.)

Burada dikkat edilecek husus r yarıçapının a noktasına bağlı olduğudur. Eğer a noktası kümenin sınırına yakın bir yerde ise, haliyle r yarıçapı küçülecektir. Aksi halde $D(\alpha, r)$ diski, U kümesine ait olmayabilir. Şimdi açık kümelere örnekler verdim.

**Örnek:**
1. $C_0 = \{z : z = x + iy \text{ ve } x > 0, y > 0\}$ kümesi açık bir kümedir.
2. $C_1 = \{z : z = x + iy, \ x \geq 0, y \geq 0\}$ kümesi açık küme değildir.
3. $C_2 = \{z : z = x + iy, \ y > 0\}$ olan üst yarı düzlem açıktır.

**2.4. Tanım (Sınır Noktası):** S kompleks düzlemin bir alt kümesi olmak üzere, $\alpha \in S$ merkezli ve r yançaplı $D(\alpha, r)$ diski S'nin içinde olan ve olmayan noktalar içeriyorsa, S'nin bir sınır noktasıdır.

**2.5. Tanım (Yığılma Noktası):** $\alpha \in \mathbb{C}$ olsun, $\alpha$'nın her $\varepsilon$ komşuluğunda $S \subset \mathbb{C}$ kümesine ait sonsuz eleman varsa, $\alpha$'ya bu S kümesinin yığılma noktası veya limitin değeri denir.

**2.6. Tanım (İç nokta ve Kapanış Noktaları):** Eğer her $D(\alpha, r)$, $S \subset \mathbb{C}$ 'nin bir elemanını içeriyors $\alpha$, S'nin bir kapanış noktasıdır. Eğer $D(\alpha, r)$ diski tamamen S'ye ait ise, $\alpha$ noktası S'nin bir iç noktasıdır.

Bu tarama göre, kapanış noktası bir iç nokta veya sınır noktası olabilir. $S^*$, S'nin yığılma noktalarının bir kümesi olmak üzere, $\bar{S} = S \cup S^*$ kümesine S nin kapanışı denir. Eğer $\alpha$ bir kapanış noktası ise, $\alpha \in \bar{S}$ olur.

**2.7. Tanım (Kapalı Küme):** Bütün sınır noktalarını içeren kümeye veya bütün yığılma noktalarını içeren kümeye kapalı küme denir. Kapalı bir kümenin tümleyeni açık kümedir.

**2.8. Tanım (Bir Kümenin Sınırı):** Bir kümenin kapanışı ile tümleyeninin kapanışının arakesitine o kümenin sınırı denir.

**2.9. Tanım (Sınırlı Küme):** Eğer S'deki bütün z'ler için $|z| \leq K$ olacak şekilde bir $K > 0$ pozitif sayısı mevcut ise, S kümesine sınırlı bir küme denir. Mesela $S_0 = 1 \pm i\frac{1}{n}$ kümesi sınırlıdır.

**2.10. Tanım:** f, S üzerinde bir fonksiyon $\alpha$,S'nin bir kapanış noktası ve w bir kompleks sayı olsun. $\varepsilon > 0$ keyfi bir sayı olmak üzere $z \in S$ ve $|z - \alpha| < \delta$ için $|f(z) - w| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ mevcut ise, bu w sayısına f(z) fonksiyonunun $z \to \alpha$ için limiti denir ve $\lim_{z \to \alpha} f(z) = w$ şeklinde gösterilir.

Reel analizde limitler için verilen teoremlerin hepsi burada da geçerlidir. Bunun için o teoremleri tekrar burada ifade ve ispat etme yoluna gitmeyeceğiz.

**2.11. Tanım:** $D \subset C$ vc $f : D \to C$ bir fonksiyon olsun. Aynca $z_0 \in D$ alalım. $\varepsilon > 0$ keyfî bir sayı olmak üzere $z \in D$ ve $|z - \alpha| < \delta$ için $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta(\varepsilon, z_0) > 0$ mevcut ise, f fonksiyonuna $z_0$ noktasında süreklidir denir ve $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$ olarak yazılır.

**2.12. Tanım:** Bir $(z_n)$ dizisi verilmiş olsun. $\varepsilon > 0$ keyfi sayı olmak üzere $m, n \geq N$ için $|z_m - z_n| < \varepsilon$ olacak şekilde $N(\varepsilon)$ sayısı mevcut ise, bu diziye Cauchy dizisi denir.

$z_n = x_n + iy_n$ ve $z_m = x_m + iy_m$

şeklinde alınırsa,

$$|z_n - z_m| = [(x_n - x_m)^2 + (y_n - y_m)^2]^{1/2}$$
$$|x_n - x_m| \leq |z_n - z_m| \text{ ve } |y_n - y_m| \leq |z_n - z_m|$$
olduğundan, $(z_n)$ dizisinin bir Cauchy dizisi olabilmesi için gerek ve yeter şart $(x_n)$ ve $(y_n)$ dizilerinin (dizinin reel ve sanal kısmının) Cauchy dizisi olmalarıdır.

**Örnek:** $f(z) = \frac{nz}{1+nz}$ fonksiyonunun herhangi bir z kompleks sayısı için limitini bulunuz.

Çözüm: $z = 0$ için $f(0) = 0, z \neq 0$ ise,
$$\lim_{n\to\infty} \frac{nz}{1+nz} = \lim_{n\to\infty} \frac{z}{z+\frac{1}{n}} = 1$$
olur. O halde, limit fonksiyonu,
$$f(z_0) = \begin{cases} 0, & z = 0 \\ 1, & z \neq 0 \end{cases}$$
şeklinde ifade edilir. O halde, $\left(\frac{nz}{1+nz}\right)$ dizisi yakınsaktır.

## KOMPAKT KÜMELER

S bir kompleks sayılar kümesi ve $(z_n)$ de S'de bir dizi olsun. Eğer verilen $\varepsilon > 0$ için sonsuz çoklukta tam sayı varsa, öyleki $|z_n - v| < \varepsilon$ yazılsın. O zaman deriz ki v kompleks sayısı $(z_n)$ dizisinin yığılma noktasıdır.

Yine diyebiliriz ki, v'yi içeren açık bir U kümesi için $z_n \in U$ olacak şekilde sonsuz çoklukta n vardır. Özel olarak S'nin yığılma noktası S'nin bir kapanış noktasıdır.

**2.13. Tanım:** S bir kompleks sayılar kümesi olmak üzere, S'nin elemanları olan her dizi yine S'de bir yığılma noktasına sahip ise, S kümesine kompaktır denir.

Bu tanım aşağıda verilenlere denktir.

a) S'nin her sonsuz alt kümesi S'de bir yığılma noktasına sahipse ve limiti S'de ise, S kompaktır.

b) S nin elemanı olan her dizi yakınsak bir alt diziye sahipse ve limiti S'de ise, S kompaktır.

Yukarıdaki tanımlar şu şekilde de ifade edilebilir.

i) S kümesi kapalı ve sınırlı ise, kompaktır.
ii) S'nin her açık örtüsü sonlu bir alt örtü içeriyorsa, S kompaktır.
iii) S'deki her dizi S'nin bir noktasına yakınsayan bir alt diziye sahipse S kompaktır. Fakat şunu da belirtmek lazımdır ki, genel olarak metrik uzaylarda (a) ve (b) denktirler. (i), (ii) ve (iii) denk değildir. O halde herhangi bir metrik uzayda kompaktlık (a) ve (b) yada (ii) ve (iii) ile tanımlanmalıdır. (i) nin diğerlerine denkliği çok özeldir. Aynı zamanda $\mathbb{R}^n$ nin çok önemli bir özelliğidir.

**2.1. Teorem:** Kompleks sayılar kümesinin bir alt kümesinin kompakt olabilmesi için gerek ve yeter şart onun kapalı ve sınırlı olmasıdır.

İspat: $\Rightarrow$: Bir S kompleks sayılar kümesi kompakt ise sınırlı ve kapalı olduğu gösterilecektir. Diyelim ki S sınırlı olmasın. O zaman her n pozitif tamsayısı için $z_n \in S$ mevcuttur öyleki $|z_n| > n$ olur. Bu durumda $(z_n)$ dizisi bir yığılma noktasına sahip olmaz. Gerçektcn eğer v bir yığılma noktası ise,

$$m > 2|v|, |v| > 0$$

alalım. Buradan,

$$|z_m - v| \geq |z_m| - |v| > m - |v| > |v|$$

yazılır ki bu yığılma noktası tanımına ters düşer. O halde S sınırsız olamaz. Yani S sınırlıdır.

S'nin kapalı olduğunu göstermek için v'yi S'nin kapanışında alalım, $v \in S \cup S^*$ olsun. O zaman verilen n pozitif sayısı için, $|z_n - v| < \frac{1}{n}$ olacak şekilde $z_n \in S$ bulunur. $(z_n)$ dizisi v'ye yakınsar ve limiti S de olan bir yakınsak alt diziye sahiptir. Bu limit v olmalıdır yani $v \in S$ dir. O halde S kapalıdır.

$\Leftarrow$: S kapalı ve sınırlı ise, her $z \in S$ için onun sınırını B ile gösterelim. O halde $|z| \leq B$ olur. Eğer $z = x + iy$ yazılırsa, $|x| \leq B$ ve $|y| \leq B$ olur. $(z_n)$, S de bir dizi olsun. $z = x + iy$ yazarız. Bu durumda $(z_n)$ dizisi $(x_{n_1}) \to a$ olacak şekilde bir $(z_{n_1})$ ve $(y_{n_2}) \to b$ olacak şekilde bir $(z_{n_2})$ yakınsak alt dizisine sahiptir $(a, b \in \mathbb{R})$. O halde,

$$\{z_{n_2} = x_{n_2} + i\, y_{n_2}\} \to a + ib$$

olur. Yani, S kompaktır.

**2.1. Teorem:** S bir kompakt küme ve $S_1, S_2, S_3, \ldots$ boş olmayan kapalı alt kümelerin dizisi $(S_n) \supset (S_{n+1})$ ise, $n = 1, 2, \ldots$. için $S_n$ lerin arakesiti boş değildir.

İspat: $z_n \in S_n$ olsun, $(z_n)$ dizisi hipotezden dolayı, S'de bir yığılma noktasına sahiptir. Bu yığılma noktasına v diyelim, v aynı zamanda ($k \geq n$ için) her bir $(z_{n_k})$ alt dizsininde bir limitidir (yığılma noktasıdır). O halde v, $S_n$ nin kapanışında bulunur. Diğer taraftan $S_n$ leri kapalı kabul etmiştik, $v \in S_n$ dir.

**2.3. Teorem:** S kompleks sayılar kümesinin kompakt bir alt kümesi ve f 'de S üzerinde sürekli bir fonksiyon olsun. Bu takdirde f(S) görüntüsü de kompaktır.

İspat: $(w_n)$, $w_n = f(z_n)$ olacak şekilde f(S) de bir dizi olsun. Biliyoruz ki $(z_n)$ dizisinin v limiti S'de olacak şekilde bir $(z_{n_k})$ alt dizisine sahiptir, f fonksiyonu sürekli olduğundan,

$$\lim_{k\to\infty} w_{n_k} = \lim_{k\to\infty} f(z_{n_k}) = f(v)$$

yazılır. Böylece verilen $(w_n)$ dizisi f(S) de yakınsak bir alt diziye sahip olmuş olur ki bu da f(S) nin kompakt olduğunu gösterir.

**2.4. Teorem:** S kompleks sayılar kümesinin kompakt bir alt kümesi ve $f : S \to \mathbb{R}$ ye sürekli bir fonksiyon olmak üzere f fonksiyonu maksimum değerini S'de alır. Yani, bir $v \in S_n$ mevcuttur, öyleki, her $z \in S$ için $f(z) \leq f(v)$ dir.

İspat: f(S) nin 2.3. teorem gereğince kapalı ve sınırlı olduğunu biliyoruz. f(S) nin en küçük üst sının b olsun ($\text{Sup}\, f(S) = b$). O halde $b \in \overline{f(S)}$ dir. Yani, b, f(S) nin kapanışında bulunur. f(S) kapalı olduğundan $\overline{f(S)} = f(S)$ dir. Buna göre, $b \in f(S)$ olur. Demek ki $f(v) = b$ olacak şekilde bir ve S vardır.

**2.5. Teorem:** Eğer S kompakt bir küme ve f, S üzerinde sürekli bir fonksiyonsa f düzgün süreklidir. ($\varepsilon > 0$ olmak üzere $z, w \in S$ ve $|z - w| < \delta$ için $|f(z) - f(w)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta(\varepsilon) > 0$ sayısı mevcuttur).

İspat: Kabul edelim ki teoremin iddiası yanlıştır. O zaman $\varepsilon > 0$ ve her bir n için

$$|z_n - w_n| < \frac{1}{n}$$

olacak şekilde $z_n, w_n$ vardır. Bu durumda, $|f(z) - f(w)| > \varepsilon$ olur. Pozitif tamsayılar kümesinin bir sonsuz $J_1$ alt kümesi ve $w \in S$ vardır, öyleki $n \to \infty$ ve ne $J_1$ için $z_n \to v$ dir. Yine $J_1$ in öyle bir $J_2$ alt kümesi ve $u \in S$ vardır ki ne $J_2$ ve $n \to \infty$ için $w_n \to u$ olmak üzere,

$$\lim_{n\to\infty}(v-u)=0$$

dır, aym zamanda $u = v$ dir. Çünkü

$$|v - u| < |v - z_n| + |z_n - w_n| + |w_n - u| \to 0$$

olur. Buradan da,

$$|f(z_n) - f(w_n)| = |f(z_n) - f(v)| + |f(v) - f(u_n)| + |f(u) - f(w_n)| \to 0$$

yani, ne $n \in J_2$ ve $n \to \infty$ ise, $|f(z_n) - f(w_n)| > \varepsilon$ kabulümüze ters düşer. //

A ve B iki kompleks sayı kümesi olmak üzere bu kümeler arasındaki uzaklık $d(A, B)$ ile gösterilir. Bunun anlamı $d(A, B) = g \cdot l \cdot b \cdot |z - w|$ dir (g.l.b rgreatest lowerbound). Bu en büyük alt sınır $z \in A$ ve $w \in B$ elemanları üzerinden alınmıştır. Eğer bu kümelerden biri bir elemandan ibaret ise, mesela B kümesi bir noktadan oluşuyorsa, $d(A, w)$ yazılır. Bu açıklamalardan sonra aşağıdaki teoremler yazılabilir.

**2.6. Teorem:** S kapalı bir kompleks sayı kümesi ve v'de bir kompleks sayı ise, S'de öyle bir $w \in S$ noktası vardır ki bunun için,

$$d(S, v) = w - v$$

olur.

İspat için yol gösterme: E uygun yançaplı ve v merkezli bir kapalı disk olmak üzere $z \in S \cap E$ için $z \to |z - v|$ fonksiyonunu gözönüne alınız.

**2.7. Teorem:** K, kompakt bir kompleks sayı kümesi ve S kapalı bir küme olmak üzere,

$$d(K, S) = |z_0 - w_0|$$

olacak şekilde $z_0 \in K$ ve $w_0 \in S$ vardır.

İspat için yol gösterme: $z \in K$ için $z \to d(S, z)$ fonksiyonunu gözönllne alalım.

**2.8. Teorem:** S kompakt bir küme ve r bir reel sayı olmak üzere r yarıçaplı sonlu sayıda öyle açık diskler vardır ki onların birleşimi S'yi içerir.

İspat: Teoremin iddiasının yanlış olduğunu kabul edelim. $z_1 \in S$ için $z_1$ merkezli r yançaplı bir $D_1$ diskini alalım. Kabulümüze göre $D_1$, S'yi içermez yine $z_2 \in S$ için $z_1 \neq z_2$ ve $z_2$ merkezli r yançaplı $D_2$ açık diski de S'yi içermez. Böylece devam edilirse $z_1, z_2, \ldots, z_n$ mekezli, r yançaplı $D_1, D_2, \ldots, D_n$ disklerinin olduğunu kabul edelim. Öyleki $z_{k+1}, D_1, D_2, \ldots, D_k$ de olmasın. O halde $D_1, D_2, \ldots, D_n$ nin içinde bulunmayacak şekilde $z_{n+1}$ bulabiliriz.

Şimdi $z_{n+1}$ merkezli r yançaph $D_{n+1}$ diskini gözönüne alalım. Ayrıca v, $(z_n)$ dizisinin bir yığılma noktası olsun. Yığılma noktası tanımına göne,

$$|z_n - v| < \frac{r}{2} \text{ ve } |z_m - v| < \frac{r}{2}$$

eşitsizlikleri sağlanacak şekilde k,m tam sayılan vardır. Buradan da,

$$|z_k - z_m| \leq |z_k - v| + |v - z_m| < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r$$

yazılır ki bu bir çelişkidir. Çünkü bu durumda $z_k$, $D_m$ de kalır. O halde, başlangıçtaki kabulümüz yanlıştır. //

S bir kompleks sayılar kümesi ve I da bir indis kümesi olsun. Her bir $i \in I$ için $U_i$ açık kümelerinin verildiğini kabul edelim. Bu ifadeyi, $(U_i)_{i \in I}$ şeklinde göstereceğiz ve buna açık kümeler ailesi diyeceğiz. Bu açık kümelerin ailesi bütün $z \in U_i$ elemanlarının bir $U_i$ açık kümesidir.

**2.14.Tanım:** Eğer S, $U_i$ kümelerinin birleşimi tarafından ieriyorsa, bu aile S'yi örter denir. Yani her $z \in S$ bir $U_i$ tarafından içerilir. Bu $(U_i)_{i \in I}$ birleşimine S'nin açık örtüsü denir. Yani S kümesinin bir açık örtüsü açık kümelerin öyle birleşimleridir ki, S'nin her elemanı bu açık kümelerden birisi tarafından içerir.

**2.15. Tanım:** Eğer J, I'nın bir alt kümesi ise, $(U_j)_{j \in J}$ kümesine bir alt aile denir ve oda S'yi örtüyorsa, S'nin alt örtüsü adını alır.

Eğer $U_{i_1}, U_{i_2}, \ldots, U_{i_n}$ açık kümelerinin sonlu kısmı ise ve S,

$$U_{i_1} \cup U_{i_2} \cup \ldots \cup U_{i_n}$$

tarafından içeriyora, bu örtüye sonlu alt örtü adı verilir.

**2.9. Teorem:** S kompakt bir küme ve $(U_i)_{i\in I}$, S için bir açık örtü olmak üzere sonlu sayıda alt örtüler mevcuttur, yani sonlu sayıda birleşimleri S'yi örtecek şekilde $U_{i_1}, U_{i_2}, \dots, U_{i_n}$ vardır.

İspat: 2.15. teoreme göre her bir n için 1/n yançaplı ve sonlu sayıda öy-le diskler vaıdır ki bunların birleşimi S'yi örter. Farzedelim ki, S'nin $U_{i_n}$ lerle belirtilen sonlu sayıda alt örtüsü olmasın. O zaman her n için yukarıda belirti-len sonlu sayıda disklerden biri, mesela $D_n$ vardır öyleki, $D_n \cap S$ kesişimi sonlu sayıdaki $U_i$ ler tarafından örtülemez. $z_n \in D_n \cap S$ ve w'de $(z_n)$ dizisinin bir yı-ğılma noktası olsun. Bir $i_0$ noktası için $w \in U_{i_0}$ yazabiliriz. Tanımdan dolayı r yançaplı ve w merkezli bir açık D diskini içerir. $\frac{2}{r} < r$ olacak büyüklükte N'yi alalım. O zaman bir $n > N$ sayısı vardır öyleki,

$$|z_n - w| < \frac{1}{n} < \frac{1}{N}$$

yazılır. $D_n$ nin herhangi bir noktasının w'den uzaklığı $< \frac{2}{n} \leq \frac{2}{N}$ ve böylece $D_n$, D tarafından içerir, dolayısıyla tarafından içerir. Bu $D_n$ üzerinde kurulan hipote-ze aykırıdır. O halde, teorem ispatlanmıştır.

**YOL VE BÖLGELER**

[a, b] kapalı bir aralık olmak üzere $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ sürekli fonksiyonuna eğri adı verilir.

Burada fonksiyon $C^1$ sınıfındandır (reel ve sanal kısımların birinci mer-tebeden türevleri var) Bunu t parametresine göre,

$$\gamma(t) = \gamma_1(t) + i\gamma_2(t)$$

biçiminde yazabiliriz, $\gamma_1(t)$ reel vc $\gamma_2(t)$ sanal kısımdır.

$$\gamma(t) = \cos\theta + i\sin\theta,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

şeklinde alırsak, eğri birim dairenin çevresi olur.

Eğer bir eğri çifte noktasız ise, yani t parametresinin farklı değerlerine farklı noktalar karşılık geliyorsa, bu eğriye yol ya da Jordan eğrisi adı verilir. Eğrinin uç noktalan çakışık ise, kapalı Jordan eğrisi diye adlandırılır. (Burada başlangıç noktası y(a), bitim noktası y(b) dir). Eğrinin üzerindeki noktalanda $w = y(t)$ $(t \in [a,b])$ denklemi ile karakterize ederiz. Yolu genel olarak eğrile-rin bir dizisi olarak düşünürüz öyleki, her bir eğri $C^1$ sınıfındandır, bir eğrinin başlangıç noktası diğer eğrinin bitim noktasıdır. Yani,

$$\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$$
$$\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \cdots, , \gamma_n),\ \ (\gamma_j \in C^1,\ j = 1, 2, \dots, n)$$

ve $\gamma_j$ nin bitim noktası $\gamma_{j+1}$ in başlangıç noktasıdır. $\gamma_1\ (a_1)$, $\gamma$'nın başlangıç noktası ise $\gamma_n\ (b_n)$ de $\gamma$'nin bitim noktası olarak adlandırılır.

Eğer $\gamma_j(t)$ fonksiyonu $[a_j, b_j]$ kapalı aralığında tanımlanmışsa,

$$\gamma_j(b_j) = \gamma_{j+1}\ (a_j)$$

olur. Şimdi [a,b] kapalı aralığını,

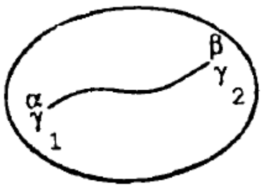
$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$$

şeklinde parçalara bölelim. $\gamma(t_k)$ noktalarım birleştirirsek,

$$L(n) = \sum_{k=1}^{n} [(x_k - x_{k-1})^2 + (y_k - y_{k-1})^2]^{1/2}$$

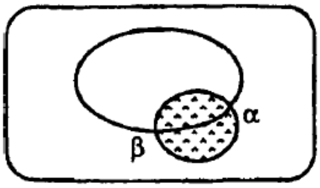
poligon parçalarının uzunluğu ifade edilmiş olur. Eğer $L(n)$ kümesi sınırlı ise, bu eğrinin parçasına ölçülebilir denir. Bu kümenin üst sınırına da eğri parçasının uzunluğu denir.

**2.26. Tanım (Yol Bağlantılı Küme):** $S \subset \mathbb{C}$ deki iki x, y noktalarını birleştiren Jordan eğrisi (yol eğrisi) yine S içerisinde kalıyorsa, S kümesi yol bağlantılıdır (irtibatlır) denir. Yani,

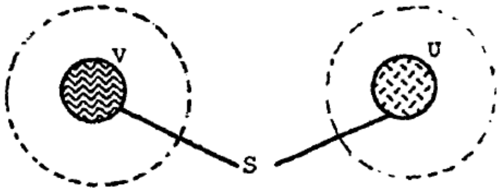



$\alpha, \beta \in S$ iki nokta için $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \cdots, \gamma_n)$ yolu $\alpha, \gamma_1$ in başlangıç noktası $\beta$'da $\gamma_n$ in bitim noktası olmak üzere S içinde kalıyorsa S yol- bağlantılıdır.

**2.27. Tanım (Basit Bağlantılı Küme):** Eğer bir küme içindeki iki noktayı birleştiren bütün yollar yine o kümeye ait oluyorsa, küme basit bağlantılıdır (irtibatlıdır). Buna göre basit bağlantılı her küme, yol irtibatlıdır.




**2.28. Tanım:** Eğer $S \subset U \cup V$, $S \cap V \neq \emptyset$, $S \cap U \neq \emptyset S$ ve $S \cap (U \cup V) = \emptyset$ olacak şekilde U ve V gibi boş olmayan iki açık küme bulunamazsa, $S \subset \mathbb{C}$ kümesi bağlantılıdır (irtibatlıdır) denir. O halde S kümesi U ve V ayrık iki kümeye ayrılmışsa, bağlantılıdır değildir.




**2.10. Teorem:** Bir S kümesi yol bağlantılı ise basit bağlantılıdır. Fakat bu teoremin karşıtı doğru değildir. Yani yol bağlantılı olmayıp basit bağlantılı kümeler vardır.

Bu ifade bir kümenin bağlantılı olduğunu anlamak için en kolay yoldur.

Eğer bir küme bağlantılı değil dolayısıyla yol bağlantılı değilse, onu parçalara veya bileşenlere ayırabiliriz. Daha açık olarak, bir S kümesinin bir bileşeni bağlantılı bir $S_0$, S'nin alt kümesidir. $S_0$ ı içeren S içinde $S_0$ ın kendisinden başka bağlantılı küme yoktur. O halde birleşen bir maksimal bağlantılı alt kümedir.

**2.29. Tanım:** Açık ve bağlantılı kümelere bölge adı verilir. S'nin sınır noktalan bölgeye ait ise kapalı bölge olur. $|z| < R$, $|z| \leq R$ kümeleri sırasıyla açık ve kapalı bölgelere birer örnektir.

$2 \leq |z| < 3$ kümesi $|z| = 2$ yığılma noktalannı ihtiva ettiği halde $|z| = 3$ noktalarını içermez, ne açık nede kapalı olan bir kümedir.

**2.30. Tanım:** Bir bölgenin içindeki her kapalı Jordan eğrisi yalnız bölgenin noktalarım içeriyorsa bu bölgeye basit bağlantılı bölge denir.

**2.31. Tanım:** Kapalı, sınırlı ve bağlantılı bir bölgeye kontinü adı verilir. Bilindiği gibi kapalı bir yol düzlemi iki bölgeye ayırır. Eğrinin pozitif yönünde ilerlerken solda kalan bölgeye iç bölge, sağ da kalan bölgeye dış bölge denir. Saat yönünün tersi pozitif olarak kabul edilir.

**KAYNAKÇA**

1. Prof. Dr. Rahim OCAK, Kompleks Analiz, 2005, ERZURUM.